NUMERICAL ANALYSIS AND MATHEMATICAL MODELLING
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 24
PWN POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1990

О ВЕСОВЫХ ОЦЕНКАХ ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА СЕТОК РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

В. А. РУКАВИШНИКОВ

Вычислительный Центр Дальневосточного Отделения АН СССР, Хабаровск, СССР

При исследовании разностной схемы, построенной для нахождения классического решения краевой задачи, обычно предполагается, что решение исходной дифференциальной задачи существует и является достаточно гладким. Для областей с угловыми точками это существенно сужает класс исследуемых задач, так как в этом случае регулярность решения краевой задачи зависит от выполнения в углах условий согласования (см. [1]–[6]), а для некоторых задач возникают условия интегрального типа [7], [6].

Для нахождения методом сеток обобщенного решения краевой задачи со вторым порядком точности в нормах сеточных аналогов пространства W_2^1 и W_2^2 требуется, по определению согласованных оценок (см. [8]), чтобы решение исходной дифференциальной задачи соответственно принадлежало $W_2^3(\Omega)$ и $W_2^4(\Omega)$. Но для этого, в случае, когда область Ω содержит угловые точки, необходимо потребовать, чтобы выполнялись соотношения типа условий согласования (см. [9], п. 5.4).

В настоящей работе предлагается другой подход. Здесь строится и исследуется разностная схема при условий, что решение исходной краевой задачи принадлежит весовому пространству С. Л. Соболева $H_{2,\mu}^4$. При этом не требуется выполнение каких-либо дополнительных условий для правых частей задачи. В работе построена разностная схема для нахождения R — обобщенного решения задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в прямоугольнике, установлены весовые оценки скорости сходимости порядка $O(|h|^2)$ в нормах разностных аналогов весовых пространств $H_{2,\mu}^1$ и $H_{2,\mu}^2$.

Следует отметить, что весовые оценки погрешности разностных решений задачи Дирихле для уравнения Пуассона на двумерной области с гладкой границей в весовых классах Гельдера изучались в работах Е. А. Волкова [10]–[12]. В этих работах предполагалось, что как производные, так и сама правая часть уравнения могут расти вдоль всей границы области.

В работе [13] были получены оценки скорости сходимости решения разностной задачи к R-обобщенному решению задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в норме разностного весового пространства $W^1_{2,\mu/2}$.

§ 1. Постановка дифференциальной задачи, обозначения

1. Пусть $\Omega = \{x : x = (x_1, x_2),\ x_k \in (0, l_k),\ k = 1, 2\}$ — прямоугольник с границей $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^{4} \partial\Omega^{(i)}$, где $\partial\Omega^{(k)}$ (или $\partial\Omega^{(k+2)}$) сторона прямоугольника, определяемая уравнением $x_k = 0$ (или $x_k = l_k$). Через $\partial\Omega^0$ обозначим множество угловых точек прямоугольника.

Рассмотрим задачу

$$Av \equiv -\Delta v + a(x)v(x) = f(x), \qquad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

$$v(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega. \tag{1.2}$$

Определим $W^k_{2,\mu}(\Omega)$ и $H^k_{2,\mu}(\Omega)$ как пространства функций с нормами

$$\|v\|^2_{W^k_{2,\mu}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_\Omega \varrho^{2\mu}(x)|D^\alpha v|^2\,dx,$$

$$\|v\|^2_{H^k_{2,\mu}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_\Omega \varrho^{2\mu+2|\alpha|-2k}|D^\alpha v|^2\,dx,$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}},$$

где $dx = dx_1 \cdot dx_2$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, k — некоторое целое неотрицательное число, μ — вещественное, неотрицательное. Кроме того, предполагается, что $\varrho(x)$ — функция, бесконечно дифференцируемая и положительная всюду, кроме $\partial\Omega^0$, и совпадающая в некоторой окрестности каждой угловой точки прямоугольника с расстоянием до этой точки.

Помимо введенных норм для функций из пространств $H^k_{2,\mu}(\Omega)$ и $W^k_{2,\mu}(\Omega)$ нам понадобятся следующие полунормы и нормы:

$$|v|^2_{H^s_{2,\mu}(\Omega)} = \int_\Omega \varrho^{2\mu+2s-2k}(x)|D^s v|^2\,dx,$$

$$|v|^2_{W^s_{2,\mu}(\Omega)} = \int_\Omega \varrho^{2\mu}(x)|D^s v|^2\,dx, \qquad s \leqslant k,$$

$$\|v\|_{W^k_{2,0}(\Omega)} = \|v\|_{W^k_2(\Omega)}, \qquad \|v\|_{W^0_{2,\mu}(\Omega)} = \|v\|_{\mathscr{L}_{2,\mu}(\Omega)}.$$

Относительно краевой задачи (1.1), (1.2) предположим, что выполнены следующие условия:

$$f(x) \in H^2_{2,\mu}(\Omega), \qquad 0 \leqslant \mu < 5, \tag{1.3}$$

$$2^{2|2\mu-1|+1}\mu^2\varrho^{-2}(x)\delta^{-1} \leqslant a(x) \leqslant \bar{\delta}\varrho^{-2}(x), \tag{1.4}$$

здесь $0 < \delta < 2$, $\bar{\delta}$ — некоторая постоянная.

При этих предположениях, как следует из работ [14] или [15], решение задачи (1.1), (1.2) принадлежит $H^4_{2,\mu}(\Omega)$.

Определение. Функцию $v \in H^4_{2,\mu}(\Omega)$ будем называть *R-обобщенным решением задачи* (1.1), (1.2), если для всех $g \in \mathring{W}^1_2(\Omega)$ справедливо тождество

$$(1.5)\quad \int_\Omega \left[\sum_{l=1}^{2} \varrho^\mu(x) \frac{\partial v}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_l} + \frac{\partial \varrho^\mu}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_l} g(x) + a(x) \varrho^\mu(x) v(x) \cdot g(x) \right] dx = \int_\Omega \varrho^\mu(x) f(x) g(x)\, dx.$$

Не ограничивая общности, здесь и дальше, будем считать, что функция $\varrho(x)$ — бесконечно дифференцируемая и положительная всюду, кроме $\partial\Omega^0$, и совпадающая в окружностях с радиусами l_0 $(l_0 < \frac{1}{2}\min(l_1, l_2))$ и с центрами в каждой из угловых точек прямоугольника, с расстоянием до этой точки и не превосходящая в $\bar{\Omega}$ величины $\frac{1}{2}\sqrt{l_1^2 + l_2^2}$.

Пусть P_k — множество всех полиномов степени k от переменных x_1 и x_2, т.е.

$$P_k = \{p(x) : p(x) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-i} a_{ij} x_1^i x_2^j\}.$$

Сформулируем лемму, которая будет полезна нам в дальнейшем.

Лемма (Брембла–Гильберта (см., напр., [16], [17]). *Пусть Q — открытое подмножество $\boldsymbol{R}^2$ с непрерывной по Липшицу границей. Пусть, кроме того, для некоторого целого числа $k \geqslant 0$ линейный функционал $F(v)$, ограниченный по норме пространства $W_2^{k+1}(Q)$, обладает тем свойством, что*

$$\forall p \subset P_k(Q) \qquad F(p) = 0.$$

Тогда существует такая постоянная $C(Q)$, что

$$\forall v \in W_2^{k+1}(Q) \qquad |F(v)| \leqslant C(Q) |v|_{W_2^{k+1}(Q)}.$$

2. Разностную сетку в $\bar{\Omega}$ построим по аналогии с [18]. Кратко объясним это построение:

$$\bar{\Omega}_h = \{x_h : x_h = (i_1 h_1, i_2 h_2),\ h_k = l_k/N_k,\ 0 \leqslant i_k \leqslant N_k,\ k = 1, 2\},$$

$$\Omega_h = \{x_h : x_h = (i_1 h_1, i_2 h_2),\ h_k = l_k/N_k,\ 0 < i_k < N_k,\ k = 1, 2\},$$

$$\partial\Omega_h = \bar{\Omega}_h \setminus \Omega_h,$$

$$\partial\bar{\Omega}_h^{(1)} = \{x_h : x_h = (0, i_2 h_2),\ 0 \leqslant i_2 \leqslant N_2\},$$

$$\partial\bar{\Omega}_h^{(1+2)} = \{x_h : x_h = (l_1, i_2 h_2),\ 0 \leqslant i_2 \leqslant N_2\}.$$

Пусть u, w — сеточные функции, заданные на сетке Ω_h. Используя для разностных отношений обозначения из [19], введем на множестве $\bar{\Omega}_h$ скалярные произведения

$$(u, w)_{\mathscr{L}_{2,\mu}(\bar{\Omega}_h)} = \sum_{x_h \in \bar{\Omega}_h} \varrho_h^{2\mu} \cdot v \cdot w \cdot \bar{h},$$

$$(\partial_l^+ u, \partial_l^+ w)_{\mathscr{L}_{2,\mu}(\bar{\Omega}_h)} = \sum_{x_h \in \bar{\Omega}_h(l^+)} \varrho_h^{2\mu} \cdot \partial_l^+ u \cdot \partial_l^+ w \cdot \bar{h},$$

$$(\partial_l^+ \partial_s^- u, \partial_l^+ \partial_s^- w)_{\mathscr{L}_{2,\mu}(\bar{\Omega}_h)} = \sum_{x_h \in \bar{\Omega}_h(l^+) \cap \bar{\Omega}_h(\bar{s})} \varrho_h^{2\mu} \partial_l^+ \partial_s^- u \cdot \partial_l^+ \partial_s^- w \cdot \bar{h}.$$

Здесь $\bar{\Omega}_h(l^+)$ — множество узлов сетки, в которых определены разностные отношения ∂_l^+, $\bar{h} = \bar{h}_1 \cdot \bar{h}_2$, а

$$\bar{h}_k = \begin{cases} h_k & \text{для} \quad x_h \in \bar{\Omega}_h \setminus (\partial\bar{\Omega}_h^{(k)} \cup \partial\bar{\Omega}_h^{(k+2)}), \\ h_{k/2} & \text{для} \quad x_h \in \partial\bar{\Omega}_h^{(k)} \cup \partial\bar{\Omega}_h^{(k+2)}. \end{cases}$$

Нормы и полунормы в конечно-разностных пространствах $\mathscr{L}_{2,\mu}(\bar{\Omega}_h)$, $H^1_{2,\mu}(\bar{\Omega}_h)$, $H^2_{2,\mu}(\bar{\Omega}_h)$ зададим равенствами

$$\|u\|^2_{\mathscr{L}_{2,\mu}(\bar{\Omega}_h)} = (u, u)^2_{\mathscr{L}_{2,\mu}(\bar{\Omega}_h)}, \qquad |u|^2_{H^1_{2,\mu}(\bar{\Omega}_h)} = \sum_{l=1}^{2} (\partial_l^+ u, \partial_l^+ u)_{\mathscr{L}_{2,\mu}(\bar{\Omega}_h)},$$

$$|u|^2_{H^2_{2,\mu}(\bar{\Omega}_h)} = \sum_{l,s=1}^{2} (\partial_l^+ \partial_s^- u, \partial_l^+ \partial_s^- u)_{\mathscr{L}^2_{2,\mu}(\bar{\Omega}_h)},$$

$$\|u\|^2_{H^1_{2,\mu}(\bar{\Omega}_h)} = |u|^2_{H^1_{2,\mu}(\bar{\Omega}_h)} + \|u\|^2_{\mathscr{L}_{2,\mu-1}(\bar{\Omega}_h)},$$

$$\|u\|^2_{H^2_{2,\mu}(\bar{\Omega}_h)} = |u|^2_{H^2_{2,\mu}(\bar{\Omega}_h)} + \|u\|^2_{H_{2,\mu-1}(\bar{\Omega}_h)}$$

$$= |u|^2_{H^2_{2,\mu}(\bar{\Omega}_h)} + |u|^2_{H^1_{2,\mu-1}(\bar{\Omega}_h)} + \|u\|^2_{\mathscr{L}^1_{2,\mu-2}(\bar{\Omega}_h)}$$

§ 2. Постановка и исследование разностной задачи

3. Для нахождения R-обобщенного решения задачи (1.1), (1.2) используем разностную схему

(2.1) $$A_{h\varrho} u = F_{h\varrho}, \qquad x_h \in \Omega_h,$$

(2.2) $$\varrho_h^{\mu}(x_h)\, u(x_h) = 0, \qquad x_h \in \partial\Omega_h,$$

где

$$A_{h\varrho} u \equiv -\sum_{l=1}^{2} \varrho_h^{\mu} \partial_l^- \partial_l^+ u + \varrho_h^{\mu}(x_h) \cdot a(x_h) \cdot u(x_h), \qquad F_{l\varrho} = \varrho_h^{\mu}(x_h) f_h(x_h)$$

Здесь $\varrho_h(x_h)$ — функция, совпадающая в узлах Ω_h с функцией $\varrho(x)$.

4. Используя результаты, излагаемые в последующих пунктах, установим две теоремы, которые являются основными в настоящей работе.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (1.3), (1.4) *и* $h_l/h_s = 0(1)$ $(l, s = 1, 2)$. *Тогда решение* $u(x_h)$ *разностной задачи* (2.1), (2.2) *сходится по норме пространства* $H^1_{2,\mu}(\bar{\Omega}_h)$ *к* R-*обобщенному решению исходной задачи* (1.1), (1.2), *при этом имеет место следующая оценка скорости сходимости*:

$$\|u-[v]_h\|_{H^1_{2,\mu}(\bar{\Omega}_h)} \leqslant \delta_0 |h|^2 \|v\|_{H^4_{2,\mu}(\Omega)},$$

где δ_0 — *положительная постоянная, не зависящая от* $u(x_h)$ *и вектора* h.

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из лемм 1 и 4.

Теорема 2. *Пусть правая часть уравнения* (1.1) *из класса* $H^2_{2,\mu}(\Omega)$ $(0 \leqslant \mu < 5)$, $h_l/h_s = 0(1)$, $(l, s = 1, 2)$ *и выполняется одно из условий*:

(а) *параметр* $\mu \geqslant 1$ *и коэффициент* $a(x)$ *удовлетворяет условию* (1.4);

(б) *параметр* $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ *и* $a(x) \geqslant 2^{|2\mu-3|+1}(\mu-2)^2\delta^{-1}\varrho^{-2}(x)$, δ — *число из условия* (1.4).

Тогда решение $u(x_h)$ *разностной задачи* (2.1), (2.2) *сходится в норме пространства* $H^2_{2,\mu}(\bar{\Omega}_h)$ *к* R-*обобщенному решению исходной задачи* (1.1), (1.2), *при этом имеет место следующая оценка скорости сходимости*:

$$\|u-[v]_h\|_{H^2_{2,\mu}(\bar{\Omega}_h)} \leqslant \delta_1 |h|^2 \cdot \|v\|_{H^4_{2,\mu}(\Omega)},$$

где δ_1 — *положительная постоянная, не зависящая от* $u(x_h)$ *и вектора* h.

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из лемм 1 и 8.

5. В этом пункте исследуем погрешность аппроксимации разностной схемы (2.1), (2.2) на R-обобщенном решении задачи (1.1), (1.2).

Для функции $z = v-u$ поставим задачу

$$A_{h\varrho} z = \psi, \quad x_h \in \Omega_h,$$
$$\varrho_h^\mu(x_h) z = 0, \quad x_h \in \partial\Omega_h,$$

где $\psi(x_h) = A_{h\varrho}[v]_h - \varrho_h^\mu(x_h)\cdot f(x_h)$ — погрешность аппроксимации разностной схемы на R-обобщенном решении дифференциальной задачи.

Для $\psi(x_h)$ справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $v(x) \in H^4_{2,\mu}(\Omega)$ $(0 \leqslant \mu < 5)$. *Тогда существует такая постоянная* C_1, *не зависящая от* h *и* $v(x)$, *что при* $h_l/h_s = O(1)$ $(l, s = 1, 2)$ *справедлива оценка*

$$|\psi(\bar{x}_h)| \leqslant C_1 |h|^2 (h_1 \cdot h_2)^{-1/2} \|v\|_{H^4_{2,\mu}(\omega_{i_1 i_2})}, \tag{2.3}$$

где $\bar{x}_h \in \omega_{i_1 i_2} \cap \Omega_h$, $\quad \omega_{i_1 i_2} = \{x : x = (x_1, x_2),$

$$(i_1 - 1) h_1 < x_1 < (i_1 + 1) h_1,\ (i_2 - 1) h_2 < x_2 < (i_2 + 1) h_2\}, \qquad |h| = \max_{i=1,2} h_i.$$

Доказательство. Отобразим прямоугольник $\bar{\omega}_{i_1 i_2}$ при помощи линейного преобразования $y_l = (x_l - i_l h_l)/h_l$, $l = 1, 2$ на квадрат $\Pi = \{y : y = (y_1, y_2),\ -1 \leqslant y_l \leqslant 1,\ l = 1, 2\}$. Если $\varphi(x)$ — функция, заданная на $\omega_{i_1 i_2}$, тогда через $\bar{\varphi}(y)$ обозначим функцию, определенную равенством

$$\bar{\varphi}(y) = \varphi(y_1 h_1 + i_1 h_1,\ y_2 h_2 + i_2 h_2).$$

Оценим $|\psi(\bar{x}_h)|$, $\bar{x}_h \in \omega_{i_1 i_2} \cap \Omega_h$ через норму $v(y)$ в пространстве $H^4_{2,\mu}(\Pi)$.

Имеем

$$(2.4) \qquad |\varrho^\mu_h(\bar{x}_h)\, \partial^+_l\, \partial^-_l\, [v]_h| \leqslant \frac{4}{h_l^2} \max_{x \in \bar{\omega}_{i_1 i_2}} |\varrho^\mu(x)\, v(x)|$$

$$\leqslant \frac{4}{h_l^2} \max_{y \in \bar{\Pi}} |\bar{\varrho}^\mu(y)\, \bar{v}(y)| \leqslant C_2 h_l^{-2}\, \|\bar{\varrho}^\mu \bar{v}\|_{W^2_2(\Pi)},$$

$$(2.5) \qquad |\varrho^\mu_h(\bar{x}_h)\, a(\bar{x}_h)\, [v]_h| \leqslant \frac{\bar{\delta}}{|h|^2} \max_{x \in \bar{\omega}_{i_1 i_2}} |\varrho^\mu(x)\, v(x)|$$

$$\leqslant \frac{\bar{\delta}}{|h|^2} \max_{y \in \bar{\Pi}} \|\bar{\varrho}^\mu(y)\, \bar{v}(y)| \leqslant C_3 |h|^{-2}\, \|\bar{\varrho}^\mu \bar{v}\|_{W^2_2(\Pi)}.$$

Заметим, что норма функции $\varrho^\mu v$ в пространстве $W^2_2(\Pi)$ определена, в силу того, что $v \in H^4_{2,\mu}(\Omega)$. Справедливость последних неравенств в (2.4) и (2.5) следует из теорем С. Л. Соболева об ограниченности вложимости пространств $W^l_m(\Omega)$ в $\mathscr{L}_p(\Omega)$ и $C(\Omega)$.

Наряду с неравенствами (2.4) и (2.5) имеет место

$$(2.6) \qquad |\varrho^\mu_h(\bar{x}_h)\, f(\bar{x}_h)| \leqslant \max_{x \in \bar{\omega}_{i_1 i_2 \varepsilon}} |\varrho^\mu(x)\, f(x)|$$

$$\leqslant \max_{y \in \bar{\Pi}_\varepsilon} |\bar{\varrho}^\mu(y)\, \bar{f}(y)| \leqslant C_4\, \|\bar{\varrho}^\mu \bar{f}\,\|_{W^2_2(\Pi_\varepsilon)}.$$

Здесь $\omega_{i_1 i_2 \varepsilon}$ — множество точек, принадлежащих кругу с центром в точке $x_{i_1 i_2}$ и радиусом равным $\underline{h} - \varepsilon$ ($\underline{h} = \min_{l=1,2} h_l$, ε — любое положительное число меньше $\underline{h}$), Π_ε — область, полученная из $\omega_{i_1 i_2 \varepsilon}$ преобразованием $y_l = (x_l - i_l h_l)/h_l$.

Далее, обозначим через $Q_{i_1 i_2 \varepsilon}$ множество, определенное равенством $Q_{i_1 i_2 \varepsilon} = \omega_{i_1 i_2} \setminus \omega_{i_1 i_2 \varepsilon/2}$, а через $\delta_\varepsilon(x)$ — срезающую бесконечно дифференцируемую функцию, которая при достаточно малом ε на $\omega_{i_1 i_2 \varepsilon}$ равна единице, на $Q_{i_1 i_2 \varepsilon}$ — нулю и на $\omega_{i_1 i_2}$ — удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant \delta_\varepsilon(x) \leqslant 1$. Теперь оценим полунормы функции $\varrho^\mu(x) f(x)$ в пространствах $\mathscr{L}_2(\Pi_\varepsilon)$, $W^1_2(\Pi_\varepsilon)$, $W^2_2(\Pi_\varepsilon)$ через $\|\varrho^\mu v\|_{W^4_2(\Pi)}$.

Для этого используем интегральное тождество (1.5). Выбирая в качестве $g(x)$ функцию $\delta(x) g_0(x)$, где $\delta(x)$ – продолженная нулем на Ω функция $\delta_\varepsilon(x)$, $g_0(x)$ – произвольная функция из пространства $\mathring{W}_2^1$, получим равенство

$$(2.7)\quad \int\limits_{\omega_{i_1 i_2}} \sum_{l=1}^{2} \left[\varrho^\mu(x) \frac{\partial v}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial(\delta(x) g_0(x))}{\partial x_l} + \frac{\partial \varrho^\mu}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_l} \cdot \delta(x) \cdot g_0(x) + \varrho^\mu(x) a(x) v(x) \delta(x) g_0(x) \right] dx = \int\limits_{\omega_{i_1 i_2}} \varrho^\mu(x) f(x) \delta(x) g_0(x)\, dx.$$

Полагая в равенстве (2.7) функцию $g_0(x)$ равной $\varrho^\mu f$ и применяя к левой части этого равенства неравенство Коши–Буняковского, предварительно проинтегрировав первое из слагаемых по частям, получим

$$(2.8)\quad C_5 \|\varrho^\mu v\|_{W_2^2(\omega_{i_1 i_2})} \geqslant \|\varrho^\mu f\|_{\mathscr{L}_2(\omega_{i_1 i_2 \varepsilon})}.$$

Далее, в качестве $g_0(x)$ выберем функцию $\sum\limits_{s=1}^{2} \Delta_s^- \Delta_s^+ (\delta(x) \varrho^\mu f)$, где

$$\Delta_1^- \varphi(x) = \frac{\varphi(x_1 - H, x_2) - \varphi(x)}{-H}, \qquad \Delta_1^+ \varphi(x) = \frac{\varphi(x_1 + H, x_2) - \varphi(x)}{H}$$

(аналогично определяются конечно-разностные отношения Δ_2^-, Δ_2^+). Очевидно, что для произвольного H, $0 < |H| < \varepsilon/2$, $g_0(x)$ принадлежит пространству $W_2^1(\omega_{i_1 i_2 \varepsilon/2})$. Подставляя функцию $g_0(x)$ в равенство (2.7), проинтегрируем первое слагаемое дважды по частям, а все остальные члены по одному разу. Применяя последовательно к левой части полученного равенства неравенство Коши–Буняковского, теорему о связи обобщенных производных с конечно-разностными отношениями (см., напр., [20], с. 119) и учитывая, что $\delta(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$, получим неравенство

$$C_6 \|\varrho^\mu v\|_{W_2^3(\omega_{i_1 i_2})} \geqslant \Big(\int\limits_{\omega_{i_1 i_2}} \sum_{s=1}^{2} \big(\Delta_s^+ (\varrho^\mu(x) \cdot \delta(x) f(x))\big)^2 dx \Big)^{1/2}.$$

Согласно теореме о связи обобщенных производных с конечно-разностными отношениями и того факта, что $\delta(x) = 1$ на $\omega_{i_1 i_2 \varepsilon}$, из последнего неравенства следует, что

$$(2.9)\quad C_7 \|\varrho^\mu v\|_{W_2^3(\omega_{i_1 i_2})} \geqslant |\varrho^\mu f|_{W_2^1(\omega_{i_1 i_2 \varepsilon})}.$$

Подставляя в тождество (2.7) в качестве $g_0(x)$ функцию

$$\sum_{s,l=1}^{2} \Delta_l^- \Delta_s^+ \Delta_l^+ \Delta_s^- (\varrho^\mu(x) f(x) \delta(x))$$

и проводя рассуждения по аналогии с вышеизложенными, приходим к неравенству

$$(2.10)\quad C_8 \|\varrho^\mu v\|_{W_2^4(\omega_{i_1 i_2})} \geqslant |\varrho^\mu f|_{W_2^2(\omega_{i_1 i_2 \varepsilon})}.$$

Из неравенств (2.8)–(2.10), в которых предварительно сделана замена переменных x на y, и (2.6) следует

$$|\varrho_h(\bar{x}_h)\cdot f(\bar{x}_h)| \leqslant C_9 |h|^{-2} \|\bar{\varrho}^\mu v\|_{W_2^4(\Pi)}.$$

Теперь заметим, что если R-обобщенное решение $v(x)$ из класса $P_3(\bar{\Omega})$, то оно является классическим решением задачи (1.1), (1.2), кроме того

$$\partial_l^+ \partial_l^- [v]_h = \frac{\partial^2 v}{\partial x_l^2}, \qquad x_h \in \Omega_h,$$

поэтому $\psi(x_h) = 0$ для x_h из Ω_h.

На основании сделанного замечания, полученных неравенств (2.4), (2.5), (2.10) и леммы Брэмбла–Гильберта будет справедлива оценка

$$\begin{aligned}|\psi(\bar{x}_h)| &\leqslant \frac{C_{10}}{|h|^2} |\varrho^\mu v|_{W_2^4(\Pi)} \leqslant C_{10} |h|^2 (h_1 \cdot h_2)^{-1/2} |\varrho^\mu v|_{W_2^4(\omega_{i_1 i_2})} \\ &\leqslant C_1 |h|^2 (h_1 \cdot h_2)^{-1/2} \|v\|_{H_{2,\mu}^4(\omega_{i_1 i_2})},\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

6. Перейдем к исследованию устойчивости решения разностной задачи (2.1), (2.2) в весовых пространствах $H_{2,\mu}^1(\bar{\Omega}_h)$ и $H_{2,\mu}^2(\bar{\Omega}_h)$.

Лемма 2. *Пусть $A_{h\varrho}$ — оператор, определенный в равенстве* (2.1), *коэффициент $a(x)$ удовлетворяет условию* (1.4) *и параметр $\mu \geqslant 0$. Тогда для глюбой функции $u(x_h)$, заданной на $\bar{\Omega}_h$, справедливо неравенство*

$$\|A_{h\varrho} u\|_{\mathscr{L}_{2,0}(\Omega_h)} \geqslant C_{11} \|u\|_{\mathscr{L}_{2,\mu-1}(\Omega_h)}, \tag{2.11}$$

где $C_{11} = \left(\dfrac{\sqrt{l_1^2+l_2^2}}{2}\right)^{-1} \left(\min\limits_{x_h\in\Omega_h} a(x_h)\varrho^2(x_h) - 2^{2|\mu-1|}\mu^2\right)$.

Доказательство. Суммируя скалярное произведение $(A_{h\varrho} u, \varrho_h^\mu u)_{\Omega_h}$ по частям и учитывая граничные условия, получаем

$$\begin{aligned}(A_{h\varrho} u, \varrho_h^\mu u)_{\Omega_h} = &\sum_{l=1}^{2} (\varrho_h^{2\mu} \partial_l^+ u, \partial_l^+ u)_{\Omega_h \cup \partial\Omega_h^{(l)}} \\ &+ (au, \varrho_h^{2\mu} u)_{\Omega_h} + \sum_{l=1}^{2} (\partial_l^+ u, \partial_l^+ \varrho_h^{2\mu} u)_{\Omega_h}.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Используя ε-неравенство, оценим по модулю последнее слагаемое в (2.12)

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{2} |(\partial_l^+ u, \partial_l^+ \varrho_h^{2\mu}\cdot u)_{\Omega_h(l^+)}| \leqslant &\frac{\varepsilon_1}{2} |u|^2_{W_{2,\mu}^1(\bar{\Omega}_h)} \\ &+ \frac{1}{2\varepsilon_1}\cdot \sum_{l=1}^{2} \left\| \frac{\partial_l^+ \varrho_h^{2\mu}}{\varrho_h^\mu} u \right\|^2_{\mathscr{L}_{2,0}(\Omega_h)}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Учитивая, что $\varrho(x) \in C^\infty(\bar{\Omega} \setminus \partial\Omega^0)$ и используя формулу Тейлора, нетрудно заметить, что

$$|\partial_l^+ \varrho_h^{2\mu}(x_h)| \leqslant 2\mu \cdot 2^{|2\mu-1|} \varrho_h^{2\mu-1}(x_h), \qquad x_h \in \Omega_h. \tag{2.14}$$

Выбирая ε_1 равным двум, из (2.12), (2.13) с учетом (2.14) получаем

$$(A_{h\varrho} u, \varrho_h^{\mu} u)_{\Omega_h} \geqslant (au, \varrho_h^{2\mu} u)_{\Omega_h} - \mu^2 2^{2|2\mu-1|} \|u\|^2_{\mathscr{L}_{2,\mu-1}(\Omega_h)}. \tag{2.15}$$

Применяя к левой части (2.15) неравенство Коши–Буняковского, при этом учитывая, что $\|u\|_{\mathscr{L}_{2,\mu}(\Omega_h)} \leqslant (\sqrt{l_1^2 + l_2^2}/2) \|u\|_{\mathscr{L}_{2,\mu-1}(\Omega_h)}$ и условие (1.4), устанавливаем справедливость неравенства (2.11). Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $A_{h\varrho}$ — оператор, определенный в равенстве* (2.1), *и выполняется одно из условий*:

(а) *параметр $\mu \geqslant 1$ и коэффициент $a(x)$ удовлетворяет условию* (1.4);

(б) *параметр $0 < \mu \leqslant 1$ и $a(x) \geqslant 2^{2|2\mu-3|+1}(\mu-2)^2 \varrho^{-2}(x) \cdot \delta^{-1}$, δ — число из условия* (1.4).

Тогда для любой функции $u(x_h)$, заданной на $\bar{\Omega}_h$ справедливо неравенство

$$\|A_{h\varrho} u\|_{\mathscr{L}_{2,0}(\Omega_h)} \geqslant C_{12} \|u\|_{\mathscr{L}_{2,\mu-2}(\Omega_h)}, \tag{2.16}$$

где C_{12} — постоянная, не зависящая от h и $u(x_h)$.

В отличие от доказательства леммы 2, здесь $A_{h\varrho}$ и домножим скалярно на $\varrho_h^{\mu-2} u$. Далее, проводя рассуждения по аналогии с приведенными в лемме 2, установим справедливость оценки (2.16).

Лемма 4. *Пусть выполняются условия леммы 2. Тогда для любой функции, заданной на Ω_h, справедливо неравенство*

$$\|A_{h\varrho} u\|_{\mathscr{L}_{2,0}(\Omega_h)} \geqslant C_{13} \|u\|_{H^1_{2,\mu}(\Omega_h)}, \tag{2.17}$$

где C_{13} — постоянная, не зависящая от $u(x_h)$ и h.

Доказательство. Сформулированное утверждение доказывается аналогично доказательству леммы 2. Выбирая в качестве ε_1 число больше δ, но меньше двух, из (2.12), (2.13) с учетом (2.14), будем иметь

$$(A_{h\varrho} u, \varrho_h^{\mu} u)_{\Omega_h} \geqslant C_{14} \|u\|^2_{H^1_{2,\mu}(\Omega_h)}. \tag{2.18}$$

Применяя к левой части (2.18) неравенство Коши–Буняковского, а затем используя оценку (2.11) и извлекая из обеих частей квадратный корень приходим к (2.16). Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть выполняются условия леммы 3. Тогда для любой функции $u(x_h)$, заданной на $\bar{\Omega}_h$, справедливо неравенство*

$$(A_{h\varrho} u, \varrho_h^{\mu-2} u)_{\Omega_h} \geqslant C_{15} \|u\|^2_{H^1_{2,\mu-1}(\bar{\Omega}_h)}, \tag{2.19}$$

где C_{15} — постоянная, не зависящая от h и $u(x_h)$.

Доказательство леммы 5 почти дословно повторяет доказательство леммы 4.

Лемма 6. *Пусть выполняются условия леммы 2. Тогда справедливо неравенство*

$$(2.20)\qquad (A_{h\varrho}u,\ A_{h\varrho}u)_{\Omega_h} \geqslant C_{16}\,\|u\|^2_{H^2_{2,\mu}(\bar\Omega_h)} - C_{17}\,\|u\|^2_{H^1_{2,\mu-1}(\bar\Omega_h)},$$

где C_{16}, C_{17} — положительные постоянные, не зависящие от h и $u(x_h)$.

Доказательство. Скалярное произведение $(A_{h\varrho}u,\ A_{h\varrho}u)_{\Omega_h}$ представим в виде

$$(2.21)\qquad (A_{h\varrho}u,\ A_{h\varrho}u)_{\Omega_h} = \sum_{l=1}^{2}(\varrho_h^{2\mu}\partial_l^+\partial_l^-u,\ \partial_l^+\partial_l^-u)_{\Omega_h}$$
$$+2(\varrho_h^{2\mu}\partial_1^+\partial_1^-u,\ \partial_2^+\partial_2^-u)_{\Omega_h} - 2\Big(\sum_{l=1}^{2}\varrho_h^{\mu}\partial_l^+\partial_l^-u,\ a\varrho_h^{\mu}u\Big)_{\Omega_h} + (a^2\varrho_h^{2\mu}u,\ u)_{\Omega_h}.$$

Суммируя с учетом граничных условий второе слагаемое (2.21) дважды по частям, а третье—один раз, получим

$$(2.22)\qquad 2(\varrho_h^{2\mu}\partial_1^+\partial_1^-u,\ \partial_2^+\partial_2^-u)_{\Omega_h} = \sum_{l,s=1}^{2}(\varrho_h^{2\mu}\partial_l^+\partial_s^-u,\ \partial_l^+\partial_s^-u)_{\bar\Omega_h}$$
$$+\sum_{\substack{l,s=1\\ l\neq s}}^{2}\big[(\partial_l^+\partial_l^-u,\ \partial_s^+\varrho_h^{2\mu}\partial_s^+u)_{\bar\Omega_h} + (\partial_l^-\partial_s^-u,\ \partial_l^-\varrho_h^{-2\mu}\partial_s^-u)_{\bar\Omega_h}\big],$$

$$(2.23)\qquad -2\Big(\sum_{l=1}^{2}\varrho_h^{\mu}\partial_l^+\partial_l^-u,\ a\varrho_h^{\mu}u\Big)_{\Omega_h}$$
$$= 2\sum_{l=1}^{2}(\partial_l^-u,\ a\varrho_h^{2\mu}\partial_l^-u)_{\bar\Omega_h} + (\partial_l^+u,\ \partial_l^+(a\varrho_h^{2\mu})u)_{\bar\Omega_h}.$$

Используя ε-неравенство, оценку (2.14) и учитывая условие (1.4), вторые слагаемые в правых частях (2.22) и (2.23) оценим следующим образом

$$(2.24)\qquad \Big|\sum_{\substack{l,s=1\\ l\neq s}}^{2}\big[(\partial_l^+\partial_l^-u,\ \partial_s^+\varrho_h^{2\mu}\partial_s^+u)_{\bar\Omega_h} + (\partial_l^-\partial_s^-u,\ \partial_l^-\varrho_h^{2\mu}\partial_s^-u)_{\bar\Omega_h}\big]\Big|$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{l,s=1}^{2}\|\partial_l^+\partial_s^-u\|^2_{\mathscr{L}_{2,\mu}(\bar\Omega_h)} + \frac{C_{18}}{2\varepsilon}\sum_{l=1}^{2}\|\partial_l^+u\|^2_{\mathscr{L}_{2,\mu-1}(\bar\Omega_h)},$$

$$(2.25)\qquad |(\partial_l^+u,\ \partial_l^+(a\varrho_h^{2\mu})u)_{\Omega_h}| \leqslant \frac{\varepsilon_1}{2}\sum_{l=1}^{2}\|\partial_l^+u\|^2_{\mathscr{L}_{2,\mu-1}(\bar\Omega_h)} + \frac{C_{19}}{2\varepsilon_1}\|u\|^2_{\mathscr{L}_{2,\mu-2}(\bar\Omega_h)}.$$

Далее, заменим в (2.21) второе и третье слагаемые на основании равенств (2.22) и (2.23). Используя неравенства (2.24) и (2.25) и выбирая в качестве ε число больше нуля, но меньше двух, а в качестве ε_1 любое положителное число, получаем оценку (2.20). Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть выполняются условия леммы* 3. *Тогда существует такое положительное число* m_0, *что при всех* $m \geqslant m_0$ *справедливо неравенство*

$$(A_{h\varrho} u,\ A_{h\varrho} u + m\varrho_h^{\mu-2} u)_{\Omega_h} \geqslant C_{20} \|u\|^2_{H^2_{2,\mu}(\bar{\Omega}_h)}, \tag{2.26}$$

где C_{20} — *постоянная, не зависящая от вектора* h.

Доказательство. Из неравенств (2.20) и (2.19) получаем

$$\begin{aligned}(A_{h\varrho} u,\ A_{h\varrho} u + m_0 \varrho_h^{\mu-2} u)_{\Omega_h} &= (A_{h\varrho} u,\ A_{h\varrho} u)_{\Omega_h} + (A_{h\varrho} u,\ m_0 \varrho_h^{\mu-2} u)_{\Omega_h} \\ &\geqslant C_{16} \|u\|^2_{H^2_{2,\mu}(\bar{\Omega}_h)} - C_{17} \|u\|^2_{H^1_{2,\mu-1}(\bar{\Omega}_h)} + m_0 C_{15} \|u\|^2_{H^1_{2,\mu-1}(\bar{\Omega}_h)}.\end{aligned}$$

Выбрав m_0 таким, чтобы выполнялось неравенство $m_0 C_{15} - C_{17} > 0$, получим утверждение леммы.

Лемма 8. *Пусть выполняется условие леммы* 3. *Тогда для любой функции* $u(x_h)$, *заданной на* $\bar{\Omega}_h$, *справедливо неравенство коэрцитивности*

$$\|A_{h\varrho} u\|_{\mathscr{L}_{2,0}(\Omega_h)} \geqslant C_{21} \|u\|_{H^2_{2,\mu}(\bar{\Omega}_h)}, \tag{2.27}$$

где C_{21} — *положительная постоянная, не зависящая от* h *и* $u(x_h)$.

Доказательство. Из (2.26) получаем неравенство

$$\|A_{h\varrho} u\|_{\mathscr{L}_2(\Omega_h)} \|A_{h\varrho} u + m\varrho_h^{\mu-2} u\|_{\mathscr{L}_2(\Omega_h)} \geqslant C_{20} \|u\|^2_{H^2_{2,\mu}(\Omega_h)},$$

с другой стороны, очевидно неравенство

$$\|A_{h\varrho} u + m\varrho_h^{\mu-2} u\|_{\mathscr{L}_2(\Omega_h)} \leqslant C_{22} \|u\|_{H^2_{2,\mu}(\Omega_h)}.$$

Из последних двух неравенств следует оценка (2.27). Лемма доказана.

Литература

[1] С. М. Никольский, *Граничные свойства функций, определенных на областях с угловыми точками*, Матем. Сб. 43 (1) 1957, 127–144.

[2] В. В. Фуфаев, *К задаче Дирихле для областей с углами*, Докл. АН СССР 131 (1) 1960, 37–39.

[3] —, *О комфорных преобразованиях областей с углами и о дифференциальных свойствах решений уравнения Пуассона в областях с углами*, Докл. АН СССР 152 (4) 1963, 838–840.

[4] Е. А. Волков, *О дифференциальных свойствах решений краевых задач для уравнения Лапласа и Пуассона на прямоугольнике*, Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова 77 1965, 89–112.

[5] Г. И. Марчук и В. В. Шайдуров, *Повышение точности решений разностных схем*, Наука, Москва 1979.

[6] В. А. Рукавишников, *О дифференциальных свойствах решения второй краевой задачи для эллиптических уравнений с постоянными коэффициентами*, Хабаровск, 1983. — Рукопись представлена Вычислительным центром ДВНЦ АН СССР. Деп. в ВИНИТИ 22 апр. 1983, № 2145–83.

[7] Е. А. Волков, *О дифференциальных свойствах решений краевых задач для уравнения Лапласа на многоугольниках*, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова 77 1965, 113-142.

[8] А. А. Самарский, Р. Д. Лазаров и В. Л. Макаров, *Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями*, Высшая школа, Москва 1987.

[9] В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками*, Труды ММО 16, 209–292.

[10] Е. А. Волков, *Апостериорные и весовые оценки погрешности решений уравнений Пуассона и их производных, вычисляемых методом сеток*, Докл. АН СССР 192 (4) 1970, 717–720.

[11] —, *Весовые оценки погрешности метода сеток решения уравнений Лапласа и Пуассона*, Труды МИАН СССР 117 1972, 100–112.

[12] —, *Приближенное решение уравнений Лапласа и Пуассона в весовых пространствах Гельдера*, Труды МИАН СССР 128 1972, 76 112.

[13] В. А. Рукавишников, *О весовой оценке скорости сходимости разностных схем*, Докл. АН СССР 288 (5) 1986, 1058–1062.

[14] В. А. Никишкин, *Особенности решения задачи Дирихле для уравнения второго порядка в окрестности ребра*, Вестн. МГУ, сер. матем., мех. 2 1979, 51–62.

[15] В. А. Кондратьев и О. А. Олейник, *Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях*, Успехи матем. наук 38, 2 (230) 1983, 3-76.

[16] J. H. Bramble and S. R. Hilbert, *Estimation of linear functionals on Sobolev spaces with application to Fourier transforms and spline interpolation*, SIAM J. Numer. Anal. 7 (1970), 112–124.

[17] Ф. Съярле, *Метод конечных элементов для эллиптических задач*, Мир, Москва 1980.

[18] В. А. Рукавишников, *Коэрцитивная оценка скорости сходимости приближенного решения второй краевой задачи*, Докл. АН СССР 271 (4) 1983, 798–801.

[19] Е. Г. Дьяконов, *Разностные методы решения краевых задач*, Москва изд-во МГУ 1971.

[20] В. П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Наука, Москва 1976.

Presented to the Semester
Numerical Analysis and Mathematical Modelling
February 25 — May 29, 1987