POLSKA AKADEMIA NAUK, INSTYTUT MATEMATYCZNY

S.7133
[130]

DISSERTATIONES MATHEMATICAE

(ROZPRAWY MATEMATYCZNE)

KOMITET REDAKCYJNY
KAROL BORSUK redaktor
ANDRZEJ BIAŁYNICKI-BIRULA, BOGDAN BOJARSKI,
ZBIGNIEW CIESIELSKI, JERZY ŁOŚ, $\boxed{\text{ANDRZEJ MOSTOWSKI}}$
ZBIGNIEW SEMADENI, WANDA SZMIELEW

CXXX

M. F. FILIPCZAK

Sur la structure de l'ensemble des points où une fonction continue n'admet pas de dérivée symétrique

WARSZAWA 1976
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

S.7133

BIBLIOTEKA UNIWERSYTECKA W WARSZAWIE

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

BUW-EO-76/929 / 37

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Depuis que C. Weierstrass (v. [3]) a donné un exemple de fonction continue n'admettant nulle part de dérivée, on a consacré dans la littérature mathématique de nombreux travaux au problème de la non dérivabilité des fonctions réelles. Ces recherches ont été orientées dans diverses directions. On a construit d'autres exemples (souvent plus simples) de fonctions continues n'admettant nulle part de dérivée ou de dérivée généralisée, p. ex. symétrique, approximative (v. [13], [2], [11], [5]). On a démontré que la non dérivabilité en tout point est un phénomène fréquent parmi les fonctions continues (dans ce sens que dans l'espace des fonctions continues les fonctions dépourvues de dérivée partout forment un ensemble de seconde catégorie — v. [1], [9], [10]). On a aussi étudié du point de vue de la classe de Borel, de la mesure ou de la catégorie la structure de l'ensemble des points où une fonction continue est non dérivable. Ces recherches ont été généralisées à des fonctions quelconques. Dans cet ordre d'idées, qui se rattache directement au sujet de ce travail, il y a lieu de citer les notes de Z. Zahorski [15], [16] et de A. Brudno [4].

Dans ce travail, j'établis les conditions qui caractérisent l'ensemble des points où une fonction continue est dépourvue de dérivée symétrique ou de dérivée symétrique finie. J'établis aussi les conditions qui caractérisent l'ensemble des points où une fonction continue est dépourvue de dérivée symétrique ou de dérivée unilatère finie. Comme cas particuliers des théorèmes ainsi démontrés on peut obtenir quelques théorèmes connus de A. S. Besicovitch [2], Z. Zahorski [16], L. Filipczak [6].

Le théorème 23 se rattache au problème suivant, posé par Z. Zahorski [16]: Pour tout ensemble linéaire $E \in G_{\delta\sigma}$ existe-t-il une fonction f telle que E soit l'ensemble des points où la fonction f n'admet pas de dérivée unilatère finie?

0. Notations. Dans ce travail, nous considérons des fonctions réelles, finies, d'une variable réelle. Nous utiliserons les notations suivantes:

$\underline{f}(x), \bar{f}(x), \underline{f}^-(x), \underline{f}^+(x), \bar{f}^-(x), \bar{f}^+(x)$ — dérivée inférieure, supérieure, inférieure à gauche, inférieure à droite, supérieure à gauche, supérieure à droite de la fonction f au point x;

$Df(x)$ — dérivée symétrique de la fonction f au point x;

$\underline{D}f(x)$, $\bar{D}f(x)$ — dérivée symétrique inférieure, supérieure de la fonction f au point x;

$f \in \mathrm{Lip}(a)$ dans l'intervalle I — la fonction f vérifie la condition de Lipschitz avec la constante a dans l'intervalle I;
$\Rightarrow$ — désigne l'implication;
Q, R — ensemble des nombres rationnels, réels;
$\mathrm{Int}\, A$ — intérieur de l'ensemble A;
$|A|$ — mesure extérieure (de Lebesgue) de l'ensemble A;
C_f, D_f — ensemble des points de continuité, de discontinuité de la fonction f;
$\varrho(x, A)$ — distance du point x à l'ensemble A, c.-à-d. $\inf\{|x-y|: y \in A\}$.

Soit I un intervalle ouvert et $A \subset I$ un ensemble relativement fermé dans I (c.-à-d. tel que l'ensemble $I \setminus A$ soit ouvert). Alors toute composante de l'ensemble $I \setminus A$ sera appelée *intervalle adjacent* à l'ensemble A.

CONDITIONS NÉCESSAIRES

1. Théorème. *Si la fonction f est définie et mesurable dans l'intervalle I, on a $\underline{D}f = \underline{f}$ et $\overline{D}f = \overline{f}$ presque partout dans I.*

Démonstration. Il suffit d'établir la première égalité, car on obtient la seconde en y remplaçant la fonction f par la fonction $-f$.

Supposons que $\underline{D}f \neq \underline{f}$ dans un ensemble de mesure extérieure positive. L'inégalité $\underline{D}f \geqslant \underline{f}$ étant vraie dans l'intervalle I, on a

$$|\{x\colon \underline{D}f(x) > \underline{f}(x)\}| > 0.$$

Comme

$$\{x\colon \underline{D}f(x) > \underline{f}(x)\} = \bigcup_{q \in Q} \{x\colon \underline{D}f(x) > q > \underline{f}(x)\},$$

où Q est l'ensemble de tous les nombres rationnels, il existe un nombre q tel que

$$|\{x\colon \underline{D}f(x) > q > \underline{f}(x)\}| > 0.$$

Posons $g(x) = f(x) - qx$. Alors pour l'ensemble $E = \{x\colon \underline{D}g(x) > 0 > \underline{g}(x)\}$ on a $|E| > 0$ et $E \subset \bigcup\limits_{1}^{\infty} E_n$, où

$$E_n = \{x\colon 0 < h < 1/n \Rightarrow g(x-h) < g(x+h)\} \cap \{x\colon \underline{g}(x) < 0\}.$$

Évidemment il existe un n tel que $|E_n| > 0$.

Soit $x_0 \in E_n$ un point de densité extérieure de l'ensemble E_n et soit

$$F = E_n \cap (x_0, x_0 + 1/n).$$

Considérons l'ensemble

$$G = \{x \in (x_0, x_0 + 2/n)\colon g(x) > g(x_0)\}.$$

C'est un ensemble mesurable, puisque la fonction $g(x)$ est mesurable. Si $x \in F$, on a $0 < x - x_0 < 1/n$ et $g(2x - x_0) = g[x + (x - x_0)] > g[x - (x - x_0)] = g(x_0)$, d'où il vient $2x - x_0 \in G$ et

$$G \supset \{2x - x_0 \colon x \in F\} \overset{\mathrm{df}}{=} F_0.$$

Comme les ensembles F et F_0 sont homothétiques par rapport au point x_0, ce point est un point de densité extérieure à droite de l'ensemble F_0, donc aussi de densité à droite de l'ensemble G. Il en résulte qu'il existe un nombre δ, $0 < \delta < 1/n$, tel que la condition

$$(1) \qquad x_0 < x_1 < x_0 + \delta \;\Rightarrow\; |F \cap (x_0, x_1)| > \tfrac{2}{3}(x_1 - x_0) \quad \text{et} \quad |G \cap (x_0, x_1)| > \tfrac{2}{3}(x_1 - x_0).$$

Nous allons prouver que pour $x_0 < x_1 < x_0 + \delta$ on a $g(x_0) < g(x_1)$. Pour cela fixons un point x_1 satisfaisant à l'inégalité $x_0 < x_1 < x_0 + \delta$ et posons

$$H = \{(x + x_1)/2 \colon x \in G \cap (x_0, x_1)\}.$$

L'ensemble H est évidemment mesurable et il satisfait aux relations suivantes: $H \subset (x_0, x_1)$, $|H| > (x_1 - x_0)/3$. Il résulte de là et de (1) que $F \cap H \neq \emptyset$. Désignons par x_2 un point appartenant à l'ensemble $F \cap H$. La condition $x_2 \in H$ signifie que $2x_2 - x_1 \in G$ et $0 < x_1 - x_2 < x_1 - x_0$. On en tire $g(2x_2 - x_1) > g(x_0)$, tandis que la relation $x_2 \in F$ et l'inégalité $0 < x_1 - x_2 < \delta < 1/n$ donnent

$$g(x_1) = g[x_2 + (x_1 - x_2)] > g[x_2 - (x_1 - x_2)] > g(x_0).$$

On démontre de même que $g(x_1) < g(x_0)$ pour $x_1 \in (x_0 - \eta, x_0)$, où η est un nombre positif. De ces inégalités il résulte que $\underline{g}(x_0) \geqslant 0$, en contradiction avec la relation $x_0 \in E_n$, c.q.f.d.

2. Comme simples conséquences on obtient maintenant les théorèmes suivants:

2.1. (Théorème de A. Khintchine [7]). *La dérivée finie $f'(x)$ d'une fonction mesurable f existe presque partout dans l'ensemble des x pour lesquels $\overline{D}f(x) < \infty$.*

2.2. (Théorème de A. Khintchine). *La dérivée finie $f'(x)$, où f est une fonction mesurable, existe presque partout où existe une dérivée symétrique finie $Df(x)$.*

2.3. *La dérivée $f'(x)$, où f est une fonction mesurable, existe presque partout où existe $Df(x)$.*

2.4. *Si f est une fonction mesurable, les fonctions $\underline{D}f$ et $\overline{D}f$ sont mesurables.*

3.1. Théorème de Denjoy–Young–Saks (voir [12], p. 422.) *Si la fonction f est définie dans l'intervalle I, en presque tout point de l'intervalle I se trouve vérifiée l'une des conditions suivantes:*

$$f'(x) \textit{ existe et est finie};$$
$$\underline{f}^-(x) = \underline{f}^+(x) = -\infty, \quad \bar{f}^-(x) = \bar{f}^+(x) = \infty;$$
$$\underline{f}^-(x) = -\infty, \quad \bar{f}^+(x) = \infty, \quad \underline{f}^+(x) = \bar{f}^-(x) \neq \pm\infty;$$
$$\underline{f}^+(x) = -\infty, \quad \bar{f}^-(x) = \infty, \quad \underline{f}^-(x) = \bar{f}^+(x) \neq \pm\infty.$$

Le théorème de Denjoy–Young–Saks et le théorème 1 entraînent le suivant:

3.2. Corollaire. *Si la fonction f est définie et mesurable dans l'intervalle I, presque partout dans I ou bien $f'(x)$ (finie) existe, ou bien $\underline{D}f(x) = -\infty$ et $\bar{D}f(x) = \infty$.*

4. Lemme. *Pour toute fonction f définie et continue dans l'intervalle I et pour tout nombre a, $-\infty \leqslant a \leqslant \infty$, les ensembles $\{x\colon \underline{D}f(x) \leqslant a\}$ et $\{x\colon \bar{D}f(x) \geqslant a\}$ sont du type G_δ.*

Démonstration. Il suffit évidemment de considérer le cas de l'ensemble $\{x\colon \bar{D}f(x) \geqslant a\}$. Supposons d'abord que $-\infty < a < \infty$ et posons

$$E = \{x\colon \bar{D}f(x) \geqslant a\}.$$

Nous allons prouver que $E = \bigcap_1^\infty E_n$, où

$$E_n = \left\{x\colon \sup_{0<h<1/n} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} > a - \frac{1}{n}\right\}.$$

Soit $x \in \bigcap_1^\infty E_n$. Pour tout n on a

$$\sup_{0<h<1/n} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} > a - \frac{1}{n}.$$

Il en résulte que pour tout n il existe un nombre $h_n \in (0, 1/n)$ tel que

$$\frac{f(x+h_n)-f(x-h_n)}{2h_n} > a - \frac{1}{n},$$

ce qui donne $\bar{D}f(x) \geqslant a$. Inversement, si $\bar{D}f(x) \geqslant a$, il existe une suite de points $h_m \searrow 0$ pour laquelle

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f(x+h_m)-f(x-h_m)}{2h_m} \geqslant a.$$

Donc

$$\frac{f(x+h_m)-f(x-h_m)}{2h_m} > a-\frac{1}{n}$$

pour tout n, et m suffisamment grand. De là on tire

$$\sup_{0<h<1/n} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} > a-\frac{1}{n} \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Nous allons maintenant prouver que l'ensemble E_n est ouvert. En effet, soit $x_0 \in E_n$. Alors

$$\sup_{0<h<1/n} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} > a-\frac{1}{n}, \qquad \frac{f(x_0+h_0)-f(x_0-h_0)}{2h_0} > a-\frac{1}{n}$$

pour un $h_0 \in (0, 1/n)$. La fonction $g(x) = \big(f(x+h_0)-f(x-h_0)\big)/2h_0$ est continue et $g(x_0) > a-1/n$, donc $g(x) > a-1/n$ pour $|x-x_0| < \delta$. Cela veut dire que l'intervalle $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset E_n$. L'ensemble E_n est donc ouvert et l'ensemble E est de classe G_δ.

Il reste encore à considérer les cas: $a = -\infty$, $a = \infty$. Pour $a = -\infty$ le lemme est évident, tandis que pour $a = \infty$ l'ensemble

$$\{x\colon \bar{D}f(x) = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x\colon \bar{D}f(x) \geqslant n\} \in G_\delta, \qquad \text{c.q.f.d.}$$

5. Théorème. *Si la fonction f est définie et continue dans l'intervalle I, l'ensemble E de tous les points où il n'existe pas de dérivée symétrique $Df(x)$ finie ou infinie, est la somme de deux ensembles A et B, dont le premier $A \in G_\delta$ et le second $B \in G_{\delta\sigma}$ et est de mesure nulle. De même, l'ensemble E_0 de tous les points où il n'existe pas de dérivée symétrique $Df(x)$ finie, est la somme de deux ensembles A_0 et B_0, dont le premier est G_δ, tandis que le second $B_0 \in G_{\delta\sigma}$ et est de mesure nulle.*

Démonstration. Soit Q l'ensemble de tous les nombres rationnels. On a

$$E = \bigcup_{q_1<q_2} [\{x\colon \underline{D}f(x) \leqslant q_1\} \cap \{x\colon \bar{D}f(x) \geqslant q_2\}] \qquad (q_1, q_2 \in Q).$$

Comme les ensembles sous le signe somme sont de classe G_δ (v. lemme 4), l'ensemble E est du type $G_{\delta\sigma}$.

De l'égalité

$$E_0 = E \cup \{x\colon \underline{D}f(x) = -\infty\} \cup \{x\colon \bar{D}f(x) = \infty\}$$

il résulte maintenant que l'ensemble E_0 est de classe $G_{\delta\sigma}$.

Posons

$$A = A_0 = \{x\colon \underline{D}f(x) = -\infty\} \cap \{x\colon \bar{D}f(x) = \infty\},$$
$$B = E \setminus A, \qquad B_0 = E_0 \setminus A_0.$$

En vertu du lemme 4 les ensembles A et A_0 sont de classe G_δ, tandis que tandis que d'après le corollaire 3.2 chacun des ensembles B et B_0 est de mesure nulle. Évidemment les ensembles B et B_0 sont de classe $G_{\delta\sigma}$ et on a $E = A\cup B$ et $E_0 = A_0\cup B_0$, c.q.f.d.

6. Dans la suite nous aurons à profiter du lemme suivant.

LEMME (Z. Zahorski [17]). *Pour toute fonction f définie dans l'intervalle I et tout nombre a, où $-\infty \leqslant a \leqslant \infty$, les ensembles*

$$\{x\colon \underline{f}^-(x) \leqslant a\}\cap C_f, \quad \{x\colon \underline{f}^+(x) \leqslant a\}\cap C_f,$$
$$\{x\colon \bar{f}^-(x) \geqslant a\}\cap C_f, \quad \{x\colon \bar{f}^+(x) \geqslant a\}\cap C_f$$

sont de classe G_δ.

Nous allons donner une simple démonstration de ce lemme. Il suffit de montrer p. ex. que l'ensemble $\{x\colon \bar{f}^+(x) \geqslant a\}\cap C_f$ est de classe G_δ.

Soit pour $-\infty < a < \infty$

$$E = \{x\colon \bar{f}^+(x) \geqslant a\}, \quad E_n = \left\{x\colon \sup_{x<y<x+1/n} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} > a - \frac{1}{n}\right\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Alors $E = \bigcap\limits_1^\infty E_n$. De plus

$$E_n\cap C_f = (\operatorname{Int} E_n)\cap C_f. \tag{2}$$

En effet, si $x_0 \in E_n\cap C_f$, il existe un y_0 tel que

$$\frac{f(y_0)-f(x_0)}{y_0-x_0} > a - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad x_0 < y_0 < x_0 + \frac{1}{n}.$$

La fonction

$$g(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{f(y_0)-f(x)}{y_0-x}$$

est continue au point x_0 et $g(x_0) > a-1/n$, il existe donc un $\delta \in (0, y_0-x_0)$ tel que $g(x) > a-1/n$ pour $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ Posons $\eta = \min\{\delta, 1/n+x_0-$ $-y_0\}$. Alors $\eta > 0$ et on a, pour $x\in(x_0-\eta, x_0+\eta)$, $x < y_0 < x+1/n$ et $\big(f(y_0)-f(x)\big)/(y_0-x) > a-1/n$. De là $(x_0-\eta, x_0+\eta) \subset E_n$ et $x_0 \in (\operatorname{Int} E_n)\cap C_f$.

De l'égalité (2) il résulte maintenant que

$$E\cap C_f = \bigcap_1^\infty E_n\cap C_f = \bigcap_1^\infty [(\operatorname{Int} E_n)\cap C_f].$$

Les ensembles $(\operatorname{Int} E_n)\cap C_f$ étant de classe G_δ, on a $E\cap C_f \in G_\delta$.

Dans le cas où $a = -\infty$ on a $E\cap C_f = C_f \in G_\delta$, tandis que si $a = \infty$ l'ensemble $E\cap C_f = \bigcap\limits_{n=1}^\infty [\{x\colon \bar{f}^+(x) \geqslant n\}\cap C_f] \in G_\delta$, c.q.f.d.

7. THÉORÈME. *Si la fonction f est définie dans l'intervalle I, l'ensemble E de tous les points où il n'existe ni de dérivée à gauche finie, ni de dérivée à droite finie de la fonction f, est la somme de deux ensembles A et B tels que $A \epsilon G_\delta$. $B \epsilon G_{\delta\sigma}$ et $|B| = 0$.*

Démonstration. Désignons par E^+ (E^-) l'ensemble de tous les points x où la fonction f n'admet pas de dérivée finie à droite (à gauche). Nous allons prouver que les ensembles E^+ et E^- sont de classe $G_{\delta\sigma}$. Il suffira de le faire pour l'ensemble E^+. Dans le cas de l'ensemble E^- les raisonnements sont analogues. On a

$$E^+ = (E^+ \cap C_f) \cup (E^+ \cap D_f),$$

$$E^+ \cap C_f = \bigcup_{q_1 < q_2} [\{x\colon \underline{f}^+(x) \leqslant q_1\} \cap \{x\colon \bar{f}^+(x) \geqslant q_2\} \cap C_f] \cup$$
$$\cup [\{x\colon \underline{f}^+(x) \leqslant -\infty\} \cap C_f] \cup [\{x\colon \bar{f}^+(x) \geqslant \infty\} \cap C_f],$$

où la sommation s'étend sur tous les couples (q_1, q_2) de nombres rationnels. Comme les ensembles qui figurent au second membre de la dernière égalité sont de classe G_δ, on a $E^+ \cap C_f \epsilon\, G_{\delta\sigma}$.

Si au point $x \epsilon D_f$ il existe une dérivée à droite finie, on a

$$\lim_{t \to x+} f(t) = f(x).$$

Comme le point x est un point de discontinuité de la fonction f, il est un point de discontinuité à gauche de la fonction f. Cela prouve qu'il existe une suite croissante $x_n \to x$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Nous avons ainsi démontré que x est un point d'asymétrie de la fonction f. En vertu d'un théorème de W.H. Young [14], l'ensemble de tous les points d'asymétrie d'une fonction quelconque est au plus dénombrable. Il en résulte que l'ensemble $D_f \setminus E^+$ est au plus dénombrable, donc de classe F_σ. Comme $D_f \epsilon F_\sigma$ et $E^+ \cap D_f = D_f \setminus (D_f \setminus E^+)$, on a $E^+ \cap D_f \epsilon G_{\delta\sigma}$, d'où $E^+ \epsilon\, G_{\delta\sigma}$. Par conséquent $E \epsilon\, G_{\delta\sigma}$.

Posons pour $n = 1, 2, \ldots$

$$f_n(x) = \sup\left\{\frac{|f(x+k) - f(x+h)|}{k-h}\colon\ 0 < h < \frac{1}{n}, \frac{2}{n} < k < \frac{3}{n}\right\}.$$

Pour m quelconque l'ensemble $\{x\colon f_n(x) > m\}$ est ouvert. En effet, si $f_n(x_0) > m$, il existe des nombres h_0 et k_0 tels que $0 < h_0 < 1/n$, $2/n < k_0 < 3/n$,

$$\frac{|f(x_0 + k_0) - f(x_0 + h_0)|}{k_0 - h_0} > m.$$

Pour les x qui satisfont à l'inégalité $|x_0 - x| < \delta$, où $\delta = \min\{h_0, 1/n - h_0, k_0 - 2/n, 3/n - k_0\}$, on a

$$\frac{|f(x+k) - f(x+h)|}{k-h} = \frac{|f(x_0 + h_0) - f(x_0 + k_0)|}{k_0 - h_0} > m,$$

h et k étant choisis tels que $x+h = x_0+h_0$, $x+k = x_0+k_0$. Comme $0 < h = x_0 - x + h_0 < \delta + h_0 \leqslant 1/n$ et $2/n \leqslant -\delta + k_0 < k = x_0 - x + k_0 < \delta + k_0 \leqslant 3/n$, on a

$$f_n(x) \geqslant \frac{|f(x+k)-f(x+h)|}{k-h} > m,$$

donc

$$(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset \{x: f_n(x) > m\}.$$

L'ensemble

$$A^+ \overset{\mathrm{df}}{=} \bigcap_{m=2}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \{x: f_n(x) > m\}$$

est du type G_δ et l'ensemble $B^+ \overset{\mathrm{df}}{=} E^+ \setminus A^+ \in G_{\delta\sigma}$.

Nous allons montrer que $A^+ \subset E^+$ et $|B^+| = 0$. Soit $x_0 \in A^+$. Alors pour tout m il existe des nombres $n \geqslant m$, h_m et k_m tels que

$$\frac{|f(x_0+k_m)-f(x_0+h_m)|}{k_m-h_m} > m, \quad 0 < h_m < \frac{1}{n}, \quad \frac{2}{n} < k_m < \frac{3}{n}.$$

Si $|f(x_0+h_m)-f(x_0)| \geqslant |f(x_0+k_m)-f(x_0)|$, on a

$$\begin{aligned}\frac{|f(x_0+h_m)-f(x_0)|}{h_m} &\geqslant \frac{|f(x_0+k_m)-f(x_0)|+|f(x_0)-f(x_0+h_m)|}{2h_m} \\ &\geqslant \frac{|f(x_0+k_m)-f(x_0+h_m)|}{2(k_m-h_m)} > \frac{m}{2}.\end{aligned}$$

D'autre part, si $|f(x_0+h_m)-f(x_0)| \leqslant |f(x_0+k_m)-f(x_0)|$, on a

$$\begin{aligned}\frac{|f(x_0+k_m)-f(x_0)|}{k_m} &\geqslant \frac{|f(x_0+k_m)-f(x_0+h_m)|}{2k_m} \\ &\geqslant \frac{|f(x_0+k_m)-f(x_0+h_m)|}{4(k_m-h_m)} > \frac{m}{4}.\end{aligned}$$

Il existe donc toujours un l_m tel que

$$\left|\frac{f(k_0+l_m)-f(x_0)}{l_m}\right| > \frac{m}{4} \quad \text{et} \quad 0 < l_m < \frac{3}{n} \leqslant \frac{3}{m}.$$

D'où $\underline{f}^+(x_0) = -\infty$ ou $\bar{f}^+(x_0) = \infty$, et par suite $x_0 \in E^+$. L'inclusion $A^+ \subset E^+$ est ainsi établie.

Posons

$$C^+ = \{x: \underline{f}^+(x) = -\infty < \bar{f}^+(x)\} \cup \{x: \bar{f}^+(x) = \infty > \underline{f}^+(x)\}.$$

Nous allons prouver que $C^+ \subset A^+$. Supposons que le point $x_0 \in C^+$. Alors, on a p.ex. $\bar{f}^+(x_0) = \infty > \underline{f}^+(x_0)$. Il en résulte qu'il existe une suite x_1,

$x_2, \ldots$ telle que

$$x_j \searrow x_0, \qquad \lim_{j\to\infty} \frac{f(x_{2j})-f(x_0)}{x_{2j}-x_0} = \bar{f}^+(x_0) = \infty,$$
$$\lim_{j\to\infty} \frac{f(x_{2j-1})-f(x_0)}{x_{2j-1}-x_0} = \underline{f}^+(x_0) < \infty.$$

Soit $m \geqslant 2$ un nombre entier quelconque. Désignons par a un nombre quelconque satisfaisant à l'inégalité $\underline{f}^+(x_0) < a < \infty$ et choisissons j en sorte que

$$x_{2j}-x_0 < \frac{2}{m} \quad \text{et} \quad \frac{f(x_{2j})-f(x_0)}{x_{2j}-x_0} > m+|a|.$$

Comme $\bigcup_{n=3}^{\infty}(2/n, 3/n) = (0,1)$, il existe un n tel que $2/n < k = x_{2j}-x_0 < 3/n$. Évidemment on a $n \geqslant m$ et $f(x_0+k)-f(x_0) > k(m+|a|)$.

De l'égalité

$$\lim_{i\to\infty} \frac{f(x_{2i-1})-f(x_0)}{x_{2i-1}-x_0} = f^+(x_0) < a$$

il résulte qu'il existe un indice i tel que

$$0 < h = x_{2i-1}-x_0 < \frac{1}{n}, \qquad \frac{f(x_{2i-1})-f(x_0)}{x_{2i-1}-x_0} < a,$$

c'est-à-dire $f(x_0+h)-f(x_0) < ah \leqslant |a|(k-h)$. De là on tire $0 < h < 1/n$, $2/n < k < 3/n$,

$$\frac{f(x_0+k)-f(x_0-h)}{k-h} = \frac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k-h} - \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{k-h}$$
$$> \frac{k(m+|a|)}{k-h} - \frac{|a|(k-h)}{k-h} > m.$$

Nous avons démontré que pour tout $m \geqslant 2$ il existe un $n \geqslant m$ tel que $x_0 \in \{x: f_n(x) > m\}$, donc que $x_0 \in A^+$.

Du théorème 3 il résulte que $|E^+ \setminus C^+| = 0$, et, comme $B^+ \subset E^+ \setminus C^+$, on a $|B^+| = 0$.

On définit d'une façon analogue les ensembles $A^- \subset E^-$ et $B^- = E^- \setminus A^-$, qui satisfont aux conditions: $A^- \in G_\delta$, $B^- \in G_{\delta\sigma}$, $|B^-| = 0$. L'ensemble

$$A \overset{\text{df}}{=} A^- \cap A^+ \in G_\delta; \quad B \overset{\text{df}}{=} E \setminus A \in G_{\delta\sigma}.$$

Enfin

$$A \subset E^- \cap E^+ = E, \quad |B| = E \setminus (A^- \cap A^+)| \leqslant |B^-| + |B^+|, \quad |B| = 0,$$

c.q.f.d.

8. En démontrant le théorème 7 nous avons aussi établi le théorème suivant:

Si la fonction f est définie dans l'intervalle I, l'ensemble E^+ de tous les points x, où la fonction f n'admet pas de dérivée à droite finie, est la somme de deux ensembles A^+ et B^+ tels que $A^+\epsilon G_\delta$, $B^+\epsilon G_{\delta\sigma}$ et $|B^+| = 0$.

Un théorème analogue est vrai pour l'ensemble E^- de tous les points où la fonction f n'admet pas de dérivée à gauche finie.

Du théorème 7 résulte une réponse négative à la question posée par Z. Zahorski et citée dans l'introduction de ce travail. Nous verrons (v. théorème 23) que les conditions du théorème 7 sont suffisantes pour que l'ensemble E soit l'ensemble de tous les points où la fonction f n'admet pas de dérivée à droite et à gauche finie.

9. Corollaire. *Si la fonction f est continue dans l'intervalle I, l'ensemble E de tous les points où elle n'admet ni de dérivée symétrique $Df(x)$* (resp. *de dérivée symétrique finie*), *ni de dérivée à gauche $f^-(x)$ et à droite $f^+(x)$ finie, est la somme d'un ensemble $A\epsilon G_\delta$ et d'un ensemble B de classe $G_{\delta\sigma}$ et de mesure nulle.*

Ce corollaire résulte directement du théorème 7 et du théorème 5.

CONDITIONS SUFFISANTES

10. Lemme. *Soit J un intervalle fini, A un ensemble relativement fermé dans J, C un ensemble mesurable, q un nombre de l'intervalle $\langle 0, 1)$ et soit $A \subset C \subset J$. Si tout point de l'ensemble A est un point de densité de l'ensemble C, il existe un ensemble B relativement parfait dans J tel que tout point de B est un point de densité de l'ensemble C, tout point de l'ensemble A est un point de densité de l'ensemble B, $A \subset B \subset C$ et $|B| \geqslant q\cdot|C|$.*

Dans ce lemme, nous considérons l'extrémité à gauche α de l'intervalle J comme un point de densité de l'ensemble E, si α est un point de densité à gauche de l'ensemble E. Une remarque analogue se rapporte à l'extrémité à droite β de l'intervalle J.

Ce lemme est une modification du théorème de N. Lusin – D. Menchoff (v. [18], p. 82).

Démonstration. Désignons par G l'ensemble composé de tous les points de l'ensemble C qui sont points de densité de l'ensemble C. On sait que $|G| = |C|$. Par conséquent tout point de l'ensemble A, étant un point de densité de l'ensemble C, appartient à l'ensemble G et est un point de densité de l'ensemble G.

Soit (a, b) une composante de l'ensemble ouvert $(\alpha, \beta)\setminus A$. Évidemment il existe une suite $\ldots, a_{-1}, a_0, a_1 \ldots$ satisfaisant aux conditions:

$$0 < a_{i+1} - a_i < \tfrac{1}{2}\min\{1, a_i - a, b - a_{i+1}\}, \qquad \lim_{i\to-\infty} a_i = a, \qquad \lim_{i\to\infty} a_i = b.$$

Il existe aussi des ensembles fermés $F_{a_i} \subset \langle a_i, a_{i+1}\rangle \cap G$ tels que

$$|(\langle a_i, a_{i+1}\rangle \cap G) \setminus F_{a_i}| < (a_{i+1} - a_i)^2.$$

Posons

$$F_a = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} F_{a_i}, \qquad F = A \cup \bigcup_a F_a,$$

où la sommation est étendue aux extrémités a de toutes les composantes (a, b) de l'ensemble $(\alpha, \beta) \setminus A$. L'ensemble F est — on le voit aisément — un sous-ensemble relativement fermé dans J de l'ensemble G. Nous allons prouver que pour tout intervalle $\langle c, d\rangle$ on a

(3) $$|\langle c, d\rangle \cap G \setminus F| \leqslant (d-c)^2 \quad \text{si} \quad \langle c, d\rangle \cap A \neq \emptyset.$$

Supposons d'abord que $c = a$ et $d < b$, où (a, b) est une composante de l'ensemble $(\alpha, \beta) \setminus A$. Alors on a $a_k \leqslant d \leqslant a_{k+1}$ pour un k, d'où l'on obtient

$$\begin{aligned} |\langle c, d\rangle \cap G \setminus F| &\leqslant \sum_{i=-\infty}^{k} |\langle a_i, a_{i+1}\rangle \cap G \setminus F_{a_i}| \\ &\leqslant \tfrac{1}{2}(d-c) \sum_{i=-\infty}^{k} (a_{i+1} - a_i) \leqslant (d-c)^2. \end{aligned}$$

Évidemment ce raisonnement s'étend aussi au cas où $c = a$, $d = b$, si l'on remplace $\sum_{i=-\infty}^{k}$ par $\sum_{i=-\infty}^{\infty}$. Des limitations semblables s'obtiennent pour $c \geqslant a$ et $d = b$. Dans le cas général on désigne par D l'ensemble des extrémités gauches de toutes les composantes (a, b) de l'ensemble $(\alpha, \beta) \setminus A$ qui sont sous-ensembles de l'intervalle (c, d) et par (a_c, b_c) et (a_d, b_d) les composantes de l'ensemble $(\alpha, \beta) \setminus A$ auxquelles appartiennent respectivement les points c et d. Si de telles composantes n'existent pas, on admet: $a_c = b_c = c$, $a_d = b_d = d$. En s'appuyant maintenant sur la partie démontrée de la condition (3) on obtient

$$\begin{aligned} |\langle c, d\rangle \cap G \setminus F| &= |\langle c, b_c\rangle \cap G \setminus F| + \sum_{a \in D} |(a, b) \cap G \setminus F| + |\langle a_d, d\rangle \cap G \setminus F| \\ &\leqslant (b_c - c)^2 + \sum_{a \in D} (b-a)^2 + (d - a_d)^2 \leqslant (d-c)^2. \end{aligned}$$

Tout point de l'ensemble A est un point de densité de l'ensemble F. En effet, si $x \in A$ et $x \in \langle c, d\rangle$, on a $\langle c, d\rangle \cap A \neq \emptyset$ et, d'après (3),

$$|\langle c, d\rangle \cap G \setminus F| \leqslant (d-c)^2,$$

d'où

$$0 \leqslant \frac{|\langle c, d\rangle \cap G \setminus F|}{d-c} \leqslant d-c, \qquad \lim_{c,d \to x} \frac{|\langle c, d\rangle \cap G \setminus F|}{d-c} = 0.$$

Cela prouve que x est un point de raréfaction de l'ensemble $G \setminus F$. Comme x est un point de densité de l'ensemble G, il est aussi un point de densité de l'ensemble F.

Soit E un sous-ensemble fermé de l'ensemble G tel que $|E| \geqslant q|C|$. Posons $H = E \cup F$ et désignons par $\bar{B}$ l'ensemble de tous les points de condensation de l'ensemble H. Évidemment $B = \bar{B} \cap J$ est un ensemble relativement parfait dans J, $B \subset F \subset G \subset C$, tout point de l'ensemble B est un point de densité de l'ensemble G, donc aussi de l'ensemble C. Remarquons encore que tout point de l'ensemble A, étant un point de densité de l'ensemble F, appartient à l'ensemble B et est un point de densité de l'ensemble B. De plus $|B| = |H| \geqslant |E| \geqslant q \cdot |C|$, c.q.f.d.

11. Soit A un ensemble fermé et non vide, B un ensemble mesurable et supposons que tout point de l'ensemble A soit un point de densité de l'ensemble B. Si $A \subset B$ et $A \neq R$, on a $|B \setminus A| > 0$. En particulier, $|A| < |B|$ si $|A| < \infty$.

Nous profiterons souvent de cette remarque.

LEMME. *Soit A un sous-ensemble fermé de l'ensemble mesurable $B \subset I_0 = \langle a, b \rangle$ et supposons que tout point de l'ensemble A soit un point de densité de l'ensemble B. Il existe une fonction f définie et dérivable sur I_0, satisfaisant aux conditions suivantes:*

(4)
$$f(a) = 0, \quad 0 \leqslant f' \leqslant 1, \quad f'(x) = 0 \textit{ pour } x \in A, \quad f'(x) = 1 \textit{ pour } x \in I_0 \setminus B$$

Démonstration[1]. Si l'ensemble A est vide, on définit la fonction f par la formule $f(x) = x - a$, et si $B = I_0$ on le fait comme il suit: $f(x) = 0$. La fonction f ainsi définie satisfait aux conditions du lemme. En tenant compte de ce que nous venons de dire, on peut désormais supposer que $A \neq \emptyset$ et $B \neq I_0$. De ces hypothèses on conclut que $|A| < |B|$.

Désignons par C un sous-ensemble quelconque F_σ de l'ensemble B, de même mesure que B, composé uniquement de points de densité de l'ensemble B. (Évidemment tout point de l'ensemble C est un point de densité de celui-ci). L'ensemble

$$D \overset{\mathrm{df}}{=} A \cup C \subset B. \tag{5}$$

Il ne contient que des points de densité de l'ensemble B, donc aussi les siens, puisque $|B| = |D|$. L'ensemble D est dons de classe M_5 de Zahorski (voir [17], p. 3). Le complémentaire de l'ensemble A est aussi de classe M_5. Soit $E_1 = A$, $E_2 = R \setminus D$ et $H = D \setminus A$. En vertu d'un lemme de Z. Zahorski ([17], lemme 12), il existe une fonction g approximativement continue telle que

(1) Cette démonstration est due à M. J. Lipiński.

$$g(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in A, \tag{6}$$

$$0 < g(x) < 1 \quad \text{pour} \quad x \in D \setminus A, \tag{7}$$

$$g(x) = 1 \quad \text{pour} \quad x \in R \setminus D. \tag{8}$$

La fonction g étant bornée $(0 \leqslant g(x) \leqslant 1)$ et approximativement continue, elle est sommable. Posons

$$f(x) = \int_a^x g(t)\,dt \quad \text{pour} \quad x \in I_0. \tag{9}$$

La fonction f est dérivable dans l'intervalle I_0 et $f' = g$, puisque g est borné et approximativement continue dans I_0.

Les conditions (4) sont remplies. En effet, $f(a) = 0$, $0 \leqslant f'(x) = g(x) \leqslant 1$, $f'(x) = 0$ pour $x \in A$ et $f'(x) = 1$ pour $x \in I_0 \setminus D$, donc aussi pour $x \in I_0 \setminus B$, c.q.f.d.

12. LEMME. *Soit B un sous-ensemble mesurable de l'intervalle $I_0 = \langle a, b \rangle$, où $b - a < \infty$ et soit $0 \leqslant q < |B|$. Il existe alors une fonction g, non décroissante dans l'intervalle I_0 et satisfaisant aux conditions:*

$$g(a) = 0, \qquad q \leqslant g(b) \leqslant b - a; \tag{10}$$

$$0 \leqslant g'(x) \leqslant 1 \ \textit{pour} \ x \in I_0, \qquad g'(x) = 0 \ \textit{pour} \ x \in I_0 \setminus [B \cap (a, b)]. \tag{11}$$

Démonstration. Soit A un sous-ensemble fermé de l'ensemble $B \cap (a, b)$, ne contenant que des points de densité de l'ensemble B et soit $|A| \geqslant q$. En vertu du lemme 11 il existe une fonction f telle que $f(a) = 0$, $0 \leqslant f'(x) \leqslant 1$ pour $x \in I_0$, $f'(x) = 0$ pour $x \in A$ et $f'(x) = 1$ pour $x \in I_0 \setminus [B \cap \cap (a, b)]$.

La fonction

$$g(x) = x - a - f(x)$$

a les propriétés suivantes:

$$g(a) = 0, \qquad 0 \leqslant g'(x) \leqslant 1 \ \text{pour} \ x \in I_0,$$

$$g'(x) = 1 \ \text{pour} \ x \in A, \qquad g'(x) = 0 \ \text{pour} \ x \in I_0 \setminus [B \cap (a, b)],$$

$$q \leqslant \int_A dx \leqslant \int_a^b g'(x)\,dx = g(b) \leqslant b - a, \qquad \text{c.q.f.d.}$$

13. LEMME. *Soit $g_1, g_2, \ldots$ une suite de fonctions définies dans un intervalle fini I, telles que:*

(12) $g_n \in \operatorname{Lip}(a_n)$, *c.-à-d. que pour $x_1, x_2 \in I$ quelconques on ait* $|g_n(x_1) - g_n(x_2)| \leqslant a_n |x_1 - x_2|$, $n = 1, 2, \ldots;$

(13) $$\sum_1^\infty a_n < \infty;$$

(14) *il existe un* $x_0 \epsilon I$ *tel que* $\sum_1^\infty g_n(x_0) < \infty$.

Dans ces conditions:

(15) *la série* $\sum_1^\infty g_n(x)$ *est uniformément convergente dans l'intervalle* I *vers une fonction* $f \epsilon \mathrm{Lip}(\sum_1^\infty a_n)$;

(16) $(\sum_1^\infty g_n(x))' = \sum_1^\infty g_n'(x)$, *si* $g_n'(x)$ *existent au point* x *pour* $n = 1, 2, \ldots$;

(17) $D\sum_1^\infty g_n(x) = \sum_1^\infty Dg_n(x)$, *si* $Dg_n(x)$ *existent au point* x *pour* $n = 1, 2, \ldots$

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\sum_{n=k}^m g_n(x) \leqslant \sum_{n=k}^m |g_n(x) - g_n(x_0)| + \left|\sum_{n=k}^m g_n(x_0)\right| \leqslant \sum_{n=k}^m a_n |I| + \tfrac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$$

pour $x \epsilon I$, pourvu que k et m soient suffisamment grands ($m > k$). Il s'ensuit que la série $\sum_1^\infty g_n(x)$ converge uniformément vers une fonction $f(x)$. Puisque $\sum_1^m g_n(x) \epsilon \mathrm{Lip}(\sum_1^\infty a_n)$ et $f(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_1^m g_n(x)$, on a $f \epsilon \mathrm{Lip}(\sum_1^\infty a_n)$.

Nous établirons maintenant (16) (la condition (17) se démontre d'une façon analogue). De (13) et (12) il résulte que $|g_n'(x)| \leqslant a_n$, $\sum_1^\infty |g_n'(x)| < \infty$. Soit ε un nombre positif quelconque. Alors

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \sum_1^\infty g_n'(x)\right|$$
$$\leqslant \sum_1^m \left|\frac{g_n(x+h)-g_n(x)}{h} - g_n'(x)\right| + \sum_{m+1}^\infty a_n + \sum_{m+1}^\infty |g_n'(x)|$$
$$< \sum_1^m \left|\frac{g_n(x+h)-g_n(x)}{h} - g_n'(x)\right| + \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

si m est choisi en sorte que $\sum_{m+1}^\infty a_n < \frac{1}{4}\varepsilon$. Si l'on choisit maintenant $\delta > 0$ tel que

$$\left|\frac{g_n(x+h)-g_n(x)}{h} - g_n'(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2m} \quad \text{pour} \quad 0 < |h| < \delta \text{ et } n = 1, 2, \ldots, m,$$

on obtient

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \sum_{1}^{\infty} g_n'(x)\right| < \varepsilon, \qquad \text{c.q.f.d.}$$

14. Lemme. *Pour tout ensemble $G \subset I = (\alpha, \beta)$, de classe G_δ et de mesure nulle, il existe une fonction f définie dans l'intervalle I et satisfaisant aux conditions:*

(18) $$|f(x)| \leqslant 1 \quad \textit{pour} \quad x \in I,$$

(19) $$|f'(x)| \leqslant 1 \quad \textit{pour} \quad x \in I \setminus G,$$

(20) $$\underline{f}^-(x) = \underline{f}^+(x) = -1, \quad \bar{f}^-(x) = \bar{f}^+(x) = 1 \quad \textit{pour} \quad x \in G,$$

(21) $$\underline{D}f(x) = -1, \quad \bar{D}f(x) = 1 \quad \textit{pour} \quad x \in G.$$

Démonstration. Sans nuire à la généralité des raisonnements on peut supposer que $\beta - \alpha < \infty$. Désignons par q un nombre quelconque de l'intervalle ouvert $(0, 1)$. Nous allons montrer que l'ensemble $G = \bigcap_{0}^{\infty} G_n$, où G_n sont des ensembles ouverts satisfaisant aux conditions:

(22) $$|G_0| < 1, \quad G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots;$$

(23) *pour toute composante (a, a') de l'ensemble G_{n-1} il existe dans l'ensemble $I \setminus G$ une suite croissante de points $\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots$ telle que*

(23_1) $$\lim_{i \to -\infty} a_i = a, \quad \lim_{i \to \infty} a_i = a', \quad a_{i+1} - a_i \leqslant \tfrac{1}{2} \min\{a_i - a, a' - a_{i+1}\},$$

(23_2) $$|G_n \cap \langle a_i, a_{i+1} \rangle| < q^n (a_{i+1} - a_i)^2 \quad \textit{pour} \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

L'ensemble $G = \bigcap_{0}^{\infty} H_n$, où $H_0, H_1, H_2, \ldots$ est une suite descendante d'ensembles ouverts. On peut admettre que $|H_0| < 1$. Posons $G_0 = H_0$ et supposons que pour $m < n$ on ait défini les ensembles G_m satisfaisant aux conditions (22) et (23). Nous définirons maintenant l'ensemble G_n. Soit (a, a') une composante quelconque de l'ensemble G_{n-1}. Comme $|G| = 0$, il existe évidemment dans l'ensemble $I \setminus G$ une suite croissante $\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots$ satisfaisant aux conditions (23_1). Pour l'ensemble $G \cap (a_i, a_{i+1})$ de mesure nulle il existe un sur-ensemble ouvert $G_{n,a_i} \subset (a_i, a_{i+1})$ dont la mesure $|G_{n,a_i}| < q^n (a_{i+1} - a_i)^2$.

Posons

$$G_{n,a} = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} G_{n,a_i}, \qquad G_n = H_n \cap \bigcup_{a} G_{n,a},$$

où la sommation est étendue aux extrémités a de toutes les composantes (a, a') de l'ensemble G_{n-1}.

Les conditions (22)-(23) sont remplies. Nous établirons encore les relations suivantes:

(24) *Si l'intervalle fermé* $\langle b, c\rangle \not\subset G_{n-1}$, *on a*

$$|\langle b, c\rangle \cap G_m| \leqslant q^m(c-b)^2 \quad \textit{pour} \quad m \geqslant n,$$

(25) *Tout point de l'ensemble* $I \setminus G_{n-1}$ *est un point de densité de l'ensemble* $I \setminus G_n$,

(26) $$|G_n| \leqslant q^n.$$

Nous prouverons d'abord la condition (24) pour $m = n$, $b = a$ et $c < a'$, où (a, a') est une composante de l'ensemble G_{n-1}. Alors $a_k \leqslant c \leqslant a_{k+1}$ pour un certain k. De là et de (23) on tire

$$|\langle b, c\rangle \cap G_n| \leqslant \sum_{i=-\infty}^{k} \langle a_i, a_{i+1}\rangle \cap G_n| \leqslant \tfrac{1}{2}q^n(c-b) \sum_{i=-\infty}^{k} (a_{i+1}-a_i) \leqslant q^n(c-b)^2.$$

On voit aisément que le raisonnement précédent s'étend aux cas $b = a$, $c = a'$; $b > a$, $c = a'$. Démontrons maintenant (24) dans le cas général. Remarquons que $\langle b, c\rangle \not\subset G_{m-1}$ et que

$$\begin{aligned} |\langle b, c\rangle \cap G_m| &= \langle b, a_b'\rangle \cap G_m| + \sum |\langle a, a'\rangle \cap G_m| + |\langle a_c, c\rangle \cap G_m| \\ &\leqslant q^m[(a_b'-b)^2 + \sum (a'-a)^2 + (c-a_c)^2] \leqslant q^m(c-b)^2, \end{aligned}$$

où la sommation est étendue à toutes les composantes (a, a') de l'ensemble G_{m-1} qui sont contenues dans l'intervalle $\langle b, c\rangle$ et où (a_b, a_b') et (a_c, a_c') désignent les composantes, dans le cas où elles existent, auxquelles appartiennent respectivement les points b et c. (Si p. ex. il n'existe pas de composante de l'ensemble G_{m-1} contenant le point b, on admet $a_b = a_b' = b$).

Nous établirons maintenant (25). Si $x \in I \setminus G_{n-1}$ et $x \in \langle b, c\rangle$, on a $\langle b, c\rangle \not\subset G_{n-1}$ et, d'après (24),

$$|\langle b, c\rangle \cap G_n| \leqslant q^n(c-b)^2,$$

d'où

$$0 \leqslant \frac{|\langle b, c\rangle \cap G_n|}{c-b} \leqslant q^n(c-b), \qquad \lim_{b,c\to x} \frac{|\langle b, c\rangle \cap G_n|}{c-b} = 0.$$

Cela prouve que x est un point de raréfaction de l'ensemble G_n, donc un point de densité de l'ensemble $I \setminus G_n$.

Comme la densité moyenne de l'ensemble G_n sur les composantes (a, a') de l'ensemble G_{n-1} ne surpasse pas $q^n(a'-a) \leqslant q^n|G_{n-1}| \leqslant q^n$, on a $|G_n| \leqslant q^n|G_{n-1}| \leqslant q^n$.

En vertu de (25) et du lemme 11, pour tout nombre $n = 0, 1, 2, \ldots$ il existe une fonction f_n définie dans l'intervalle $I_0 = \langle \alpha, \beta\rangle$ et satisfaisant aux conditions:

(27) $$f_n(\alpha) = 0,$$

(28) $$0 \leqslant f'_n(x) \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad x \in I_0,$$

(29) $f'_n(x) = 1$ pour $x \in G_{2n+1}$ et $f'_n(x) = 0$ pour $x \in I_0 \setminus G_{2n}$.

De ces relations on tire

(30) $$0 \leqslant f_n(x_2) - f_n(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'_n(x)\,dx = \int_{\langle x_1, x_2\rangle \cap G_{2n}} f'_n(x)\,dx$$
$$\leqslant |\langle x_1, x_2\rangle \cap G_{2n}| \quad \text{pour} \quad \alpha \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \beta.$$

En particulier, on a

(31) $$0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(\beta) - f_n(\alpha) \leqslant |G_{2n}| \leqslant q^{2n} < 1.$$

Les conditions (28), (29) et (22) entraînent successivement les inégalités:

(32) $$0 \leqslant f'_{n+1}(x) \leqslant f'_n(x) \leqslant 1,$$

(33) $$0 \leqslant f_{n+1}(x) = \int_a^x f'_{n+1}(t)\,dt \leqslant \int_a^x f'_n(t)\,dt = f_n(x) < 1.$$

Posons

$$f(x) = f_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f_n(x), \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f_n(x).$$

Les séries qui figurent dans ces formules sont, en vertu de (31), absolument et uniformément convergentes. Les fonctions f et g sont donc continues dans I_0. Nous allons montrer que la fonction f satisfait aux conditions (18)–(21). On a $f(x) = 2g(x) - f_0(x)$ et $0 \leqslant g(x) \leqslant f_0(x)$, en vertu de (33), d'où

$$|f(x)| \leqslant f_0(x) \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad x \in I.$$

L'inégalité (18) est ainsi démontrée.

Pour démontrer (19) supposons que $x \in I \setminus G$. Alors il existe un indice n tel que $x \in I \setminus G_{2n-1}$. Soit $y \neq x$. Le rapport des différences

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{f_0(y)-f_0(x)}{y-x} + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \frac{f_m(y)-f_m(x)}{y-x}.$$

En profitant de (30) et (24) on obtient la limitation

$$\left|\sum_{m=n}^{\infty}(-1)^m \frac{f_m(y)-f_m(x)}{y-x}\right| \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} \frac{|\langle x, y\rangle \cap G_{2m}|}{|y-x|} \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} q^{2m}|y-x| \leqslant \frac{|y-x|}{1-q^2},$$

d'où résulte l'inégalité

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-\frac{f_0(y)-f_0(x)}{y-x}-2\sum_{m=1}^{n-1}(-1)^m\frac{f_m(y)-f_m(x)}{y-x}\right|\leqslant\frac{2\,|y-x|}{1-q^2}.$$

De là

$$f'(x)=f_0'(x)+2\sum_{m=1}^{n-1}(-1)^m f_m'(x)$$

et, en tenant compte de (32), on obtient enfin (19).

Nous établirons maintenant la propriété (20). Soit $x\epsilon G$. Alors $x\epsilon G_n$ pour $n=0,1,2,\ldots$ Désignons par (a_n, a_n') la composante de l'ensemble G_n à laquelle appartient x. On a donc

$$(34)\qquad a_n<x<a_n',\qquad \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_n'=x,$$

$$\frac{f(x)-f(a_{2n-1})}{x-a_{2n-1}}=\frac{f_0(x)-f_0(a_{2n-1})}{x-a_{2n-1}}+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{f_m(x)-f_m(a_{2n-1})}{x-a_{2n-1}}.$$

Pour $m<n$ et $t\epsilon(a_{2n-1},x)\subset G_{2n-1}\subset G_{2m+1}$ on a donc, d'après (29), $f_m'(t)=1$, d'où

$$\frac{f_m(x)-f_m(a_{2n-1})}{x-a_{2n-1}}=1\qquad\text{pour}\qquad m<n,$$

$$\left|\frac{f(x)-f(a_{2n-1})}{x-a_{2n-1}}+(-1)^n\right|\leqslant 2\sum_{m=n}^{\infty}\left|\frac{f_m(x)-f_m(a_{2n-1})}{x-a_{2n-1}}\right|$$

$$\leqslant 2\sum_{m=n}^{\infty}\frac{|\langle a_{2n-1},x\rangle\cap G_{2m}|}{x-a_{2n-1}}$$

Comme $\langle a_{2n-1},x\rangle\not\subset G_{2n-1}$, on a, en vertu de (24),

$$\left|\frac{f(x)-f(a_{2n-1})}{x-a_{2n-1}}+(-1)^n\right|\leqslant 2(x-a_{2n-1})\sum_{m=n}^{\infty}q^{2m}\leqslant\frac{2(x-a_{2n-1})}{1-q^2},$$

$$(35)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{f(x)-f(a_{4n-1})}{x-a_{4n-1}}=-1,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{f(x)-f(a_{4n+1})}{x-a_{4n+1}}=1.$$

On démontre de même les égalités

$$(36)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{f(a_{4n-1}')-f(x)}{a_{4n-1}'-x}=-1,\qquad \lim\frac{f(a_{4n+1}')-f(x)}{a_{4n+1}'-x}=1.$$

Les fonctions $g_n(x) = f_0(x)+2\sum_{m=1}^{n}(-1)^m f_m(x)$ admettent, en vertu de (32), des dérivées $g'_n(x)\in\langle -1, 1\rangle$ pour $x\in I$, elles satisfont donc à la condition de Lipschitz avec la constante 1. La fonction $f(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ satisfait évidemment à cette condition. En profitant maintenant de (34), (35) et (36), on obtient enfin (20).

La condition (21) se démontre de même. En effet, en conservant les hypothèses et les notations introduites dans la démonstration de (20) et en posant encore $h_n = \min\{x-a_n, a'_n - x\}$ on a $h_n > 0$,

$$(x-h_n, x+h_n)\subset (a_n, a'_n), \qquad \langle x-h_n, x+h_n\rangle \not\subset G_n,$$

$$\frac{f_m(x+h_{2n-1})-f_m(x-h_{2n-1})}{2h_{2n-1}} = 1 \quad \text{pour} \quad m<n,$$

$$|\langle x-h_{2n-1}, x+h_{2n-1}\rangle \cap G_{2m}| \leqslant q^{2m}(2h_{2n-1})^2 \quad \text{pour} \quad m\geqslant n,$$

$$\left|\frac{f(x+h_{2n-1})-f(x-h_{2n-1})}{2h_{2n-1}}+(-1)^n\right| \leqslant \frac{4h_{2n-1}}{1-q^2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+h_{4n-1})-f(x-h_{4n-1})}{2h_{4n-1}} = -1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+h_{4n+1})-f(x-h_{4n+1})}{2h_{4n+1}} = 1,$$

$$\underline{D}f(x) = -1, \quad \overline{D}f(x) = 1 \quad \text{pour} \quad x\in G, \quad \text{c.q.f.d.}$$

15. Lemme [2]. *Pour tout ensemble $G\subset I$, de classe $G_{\delta\sigma}$ et de mesure nulle, il existe une fonction f définie dans l'intervalle I et satisfaisant aux conditions suivantes:*

$f\in \mathrm{Lip}(1)$ *dans l'intervalle I;*

il existe une dérivée finie $f'(x)$ pour $x\in I\setminus G$;

(37) *il n'existe pas de dérivée finie (ou infinie) à gauche $f^-(x)$ et à droite $f^+(x)$ pour $x\in G$;*

(38) *il n'existe pas de dérivée symétrique finie* (ou infinie) *$Df(x)$ pour $x\in G$.*

Démonstration. L'ensemble $G = \bigcup_{1}^{\infty} G_n$, où $G_n\in G_\delta$ et $G_m\cap G_n = \emptyset$ si $m\neq n$ (v. [8], p. 254). En vertu du lemme 14 il existe pour tout n une fonction f_n admettant les propriétés suivantes:

$$|f_n(x)|\leqslant 1 \quad \text{pour} \quad x\in I,$$

$$|f'_n(x)|\leqslant 1 \quad \text{pour} \quad x\in I\setminus G_n,$$

---

(2) Ce lemme résulte aussi du théorème de Z. Zahorski [18].

(39) $\underline{f}_n^-(x) = \underline{f}_n^+(x) = -1$ et $\bar{f}_n^-(x) = \bar{f}_n^+(x) = 1$ pour $x \in G_n$,

(40) $\underline{D}f_n(x) = -1$ et $\bar{D}f_n(x) = 1$ pour $x \in G_n$.

Posons

$$f(x) = \sum_1^\infty 2^{-n} f_n(x).$$

La fonction f satisfait aux conditions du lemme. En effet, en posant $g_n = 2^{-n}f_n$ on voit que $g_n \in \mathrm{Lip}(2^{-n})$ dans l'intervalle I et que les hypothèses du lemme 13 sont vérifiées. En vertu de la conclusion du lemme 13, la fonction $f = \sum_1^\infty g_n \in \mathrm{Lip}(1)$ dans l'intervalle I et, de plus, pour tout $x \in I \setminus G$ existe $f'(x) = \sum_1^\infty 2^{-n} f_n'(x)$, puisque pour un tel x $f_1'(x)$, $f_2'(x), \ldots$ existent. Si $x \in G$, on a $x \in G_m$ pour un m et $x \notin G_n$ pour $n \neq m$. En vertu du lemme 13 il en résulte que la fonction $g = \sum_{n \neq m} 2^{-n} f_n$ est dérivable au point x. Comme $f = g + 2^{-m} f_m$, les conditions (39) et (40) entraînent les conditions (37) et (38), c.q.f.d.

16. LEMME. *Pour tout ensemble dénombrable $P = \{x_1, x_2, \ldots\} \subset I$ et tout nombre $p > 0$ il existe une fonction h satisfaisant aux conditions suivantes:*

h satisfait dans l'intervalle I à la condition de Lipschitz avec la constante p,

$Dh(x)$ existe pour $x \in I$,

$h'(x)$ existe pour $x \in I \setminus P$,

$h^-(x)$ et $h^+(x)$ n'existent pas pour $x \in P$,.

Démonstration. Posons $q = p \setminus (p+2)$,

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x = 0, \\ x \sin \ln |x| & \text{pour } x \neq 0, \end{cases} \qquad g_n(x) = q^n \cdot g(x - x_n),$$

$$h(x) = \sum_1^\infty g_n(x).$$

La fonction g est paire et elle vérifie dans l'ensemble R des nombres réels la condition de Lipschitz avec la constante 2. La dérivée symétrique $Dg(x)$ existe partout. D'autre part, la dérivée ordinaire $g'(x)$ n'existe pas au point $x = 0$ seul, où $\underline{g}^-(0) = \underline{g}^+(0) = -1$ et $\bar{g}^-(0) = \bar{g}^+(0) = 1$.

La fonction $g_n \in \mathrm{Lip}(2q^n)$, $Dg_n(x)$ existe partout, $g_n'(x)$ existe pour $x \neq x_n$, $\underline{g}_n^-(x_n) = \underline{g}_n^+(x_n) = -q^n$, $\bar{g}_n^-(x_n) = \bar{g}_n^+(x_n) = q^n$.

Le lemme 13 entraîne maintenant les relations: $h \in \mathrm{Lip}(p)$, $Dh(x)$ existe partout, $h'(x)$ existe pour $x \in I \setminus P$. Nous allons enfin démontrer que $h^-(x)$ et $h^+(x)$ n'existent pas pour $x \in P$. Pour cela supposons que

$x \in P$, c'est-à-dire que $x = x_m$ pour un m. En vertu du lemme 13 la fonction $f = \sum_{n \neq m} g_n$ admet au point x_m une dérivée finie. Par conséquent la fonction $h = f + g_m$ n'admet pas au point x_m de dérivées à gauche et à droite, c.q.f.d.

17. Soit n un nombre naturel, q un nombre réel positif et inférieur à 1. Alors pour tout intervalle $(a, b) \subset (c, d)$ il existe évidemment une suite de nombres $\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots$ satisfaisant aux conditions:

$$a_i < a_{i+1}, \quad \lim_{i \to -\infty} a_i = a, \quad \lim_{i \to \infty} a_i = b; \tag{41}$$

$$q < \frac{a_{i+1} - a_i}{a_i - a_{i-1}} < \frac{1}{q}, \quad a_{i+1} - a_i \leqslant a_1 - a_0; \tag{42}$$

$$a_{i+1} - a_i \leqslant 2^{-n} \min^2\{a_i - a, b - a_{i+1}\}; \tag{43}$$

$$a_1 - a_0 \leqslant 2^{-n}(a-c)^2 \text{ si } c < a, \quad \text{et} \quad a_1 - a_0 \leqslant 2^{-n}(d-b)^2 \text{ si } b < d. \tag{44}$$

LEMME. *Soit n un nombre naturel, q un nombre réel de l'intervalle $\langle 15/16, 1)$, A un sous-ensemble non dense et relativement parfait de l'intervalle fini (c, d) et supposons donnée dans tout intervalle (a, b) adjacent à l'ensemble A (c'est-à-dire toute composante de l'ensemble ouvert $(c, d) \setminus A$) une suite $\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots$ satisfaisant aux conditions* (41)–(44). *Alors pour tout ensemble mesurable $B \subset (c, d)$ tel que*

$$|\langle a_{i,j-1}, a_{i,j} \rangle \cap B| \geqslant q(a_{i,j} - a_{i,j-1}) \quad \textit{pour} \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$
$$j = 1, 2, \ldots, 64 \quad \textit{où} \quad a_{i,j} = a_i + j(a_{i+1} - a_i)/64, \tag{45}$$

il existe une fonction f continue dans l'ensemble R des nombres réels, admettant les propriétés suivantes:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 2^{-n} \min^2\{x - c, d - x\} \quad \textit{pour} \quad x \in (c, d); \tag{46}$$

$$f(x) = 0 \quad \textit{pour} \quad x \in A \cup (-\infty, c\rangle \cup \langle d, +\infty); \tag{47}$$

$$\textit{il existe une dérivée finie } f'(x) \textit{ pour } x \notin A; \tag{48}$$

$$f'(x) = 0 \quad \textit{pour} \quad x \notin A \cup B; \tag{49}$$

(50) *pour tout point $x \in (a, b)$ (où (a, b) est un intervalle quelconque adjacent à l'ensemble A), il existe des points $y, z \in B$ et des nombres h, $k \neq 0$ tels que*

$$a < y < x < z < b, \quad \left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| > \frac{1}{4}, \quad \left|\frac{f(z) - f(x)}{z - x}\right| > \frac{1}{4}, \tag{50_1}$$

$$a < x \pm h < b, \quad a < x \pm k < b, \quad x \pm h \in B, \quad x \pm k \in B, \quad f(x \pm h) = 0, \tag{50_2}$$
$$\left|\frac{f(x+k) - f(x-k)}{2k}\right| > 1;$$

(51₁) $\underline{f}^-(x) \leqslant -1, \bar{f}^-(x) = \underline{f}^+(x) = 0, \bar{f}^+(x) \geqslant 1$ *si x est un point d'accumulation bilatère de l'ensemble A,*

(51₂) $\underline{f}^-(a) \leqslant -1, \quad \bar{f}^-(a) = f^+(a) = 0$ *si* $a \neq c, \quad f^-(b) = \underline{f}^+(b) = 0,$ $\bar{f}^+(b) \geqslant 1$ *si* $b \neq d$;

$$\bar{D}f(x) - \underline{D}f(x) \geqslant 1/4 \quad \textit{pour} \quad x \in A. \tag{52}$$

La démonstration du lemme sera composée de deux parties 17.1 et 17.2. Dans la première, nous ferons correspondre à l'intervalle (a, b) une fonction g définie par la formule (59) et satisfaisant aux conditions (53)–(58), tandis que dans la seconde nous définirons la fonction f comme $\sum_{m=0}^{\infty} d_m g_m$, où g_m désignera une fonction que nous ferons correspondre à l'intervalle $(a^{(m)}, b^{(m)})$ exactement de la même façon que nous avons fait correspondre la fonction g à l'intervalle (a, b).

17.1. Fixons l'intervalle (a, b) adjacent à l'ensemble A et faisons lui correspondre la fonction g définie dans R et satisfaisant aux conditions suivantes:

$$g(x) = 0 \tag{53}$$

$$\text{pour} \quad x \in (-\infty, a\rangle \cup \langle b, \infty) \cup \bigcup_{-\infty}^{\infty} (\langle a_{i,12}, a_{i,28}\rangle \cup \langle a_{i,32}, a_{i+1}\rangle);$$

$$g(x) = a_{i+1} - a_i \quad \text{pour} \quad x \in \langle a_{i,1}, a_{i,11}\rangle \cup \langle a_{i,29}, a_{i,31}\rangle, \tag{54}$$
$$i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

$$\max_{\langle a_i, a_{i+1}\rangle} g(x) = a_{i+1} - a_i, \quad \max_{\langle a,b\rangle} g(x) = a_1 - a_0; \tag{55}$$

$$0 \leqslant g(x) \leqslant 2^{-n} \min{}^2\{x - a, b - x\} \quad \text{pour} \quad x \in (a, b); \tag{56}$$

$$|g'(x)| < 100; \quad g'(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \notin B \cap (a, b); \tag{57}$$

(58) pour tout point $x \in (a, b)$ il existe des points $y, z \in B$ et des nombres $h, k \neq 0$ tels que

$$a < y < x < z < b, \quad \left|\frac{g(x) - g(y)}{x - y}\right| > \frac{1}{4}, \quad \left|\frac{g(z) - g(x)}{z - x|}\right| > \frac{1}{4}, \tag{58$_1$}$$

$$a < x \pm h < b, \quad a < x \pm k < b, \quad x \pm h \in B, \quad x \pm k \in B, \tag{58$_2$}$$
$$g(x \pm h) = 0, \quad \left|\frac{g(x+k) - g(x-k)}{2k}\right| > 1.$$

Dans ce but appliquons le lemme 12 à l'ensemble

$$B \cap (a_{i,j-1}, a_{i,j}) \subset \langle a_{i,j-1}, a_{i,j}\rangle \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, j = 1, 2, \ldots, 64)$$

et au nombre $q^2(a_{i,j}-a_{i,j-1}) < |B\cap(a_{i,j-1}, a_{i,j})|$. De ce lemme il résulte qu'il existe une fonction $g_{i,j}$ non décroissante dans l'intervalle $\langle a_{i,j-1}, a_{i,j}\rangle$ telle que $g_{i,j}(a_{i,j-1}) = 0$; $q^2(a_{i,j}-a_{i,j-1}) \leqslant g_{i,j}(a_{i,j}) \leqslant a_{i,j}-a_{i,j-1}$; $g'_{i,j}(x) \leqslant 1$ pour $x\in\langle a_{i,j-1}, a_{i,j}\rangle$; $g'_{i,j}(x) = 0$ pour $x\in\langle a_{i,j-1}, a_{i,j}\rangle\setminus[B\cap(a_{i,j-1}, a_{i,j})]$.

Posons

$$(59)\quad g(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{pour} \quad x\in(-\infty, a\rangle\cup\langle b, \infty)\cup \\ \qquad\qquad \cup \bigcup\limits_{i=-\infty}^{\infty} (\langle a_{i,12}, a_{i,28}\rangle\cup\langle a_{i,32}, a_{i+1}\rangle). \\ \dfrac{a_{i+1}-a_i}{g_{i,1}(a_{i,1})}\, g_{i,1}(x) \quad \text{pour} \quad x\in\langle a_i, a_{i,1}\rangle, \\ a_{i+1}-a_i \quad \text{pour} \quad x\in\langle a_{i,1}, a_{i,11}\rangle\cup\langle a_{i,29}, a_{i,31}\rangle, \\ \dfrac{a_{i+1}-a_i}{g_{i,12}(a_{i,12})}\,[g_{i,12}(a_{i,12})-g_{i,12}(x)] \quad \text{pour} \quad x\in\langle a_{i,11}, a_{i,12}\rangle, \\ \dfrac{a_{i+1}-a_i}{g_{i,29}(a_{i,29})}\, g_{i,29}(x) \quad \text{pour} \quad x\in\langle a_{i,28}, a_{i,29}\rangle, \\ \dfrac{a_{i+1}-a_i}{g_{i,32}(a_{i,32})}\,[g_{i,32}(a_{i,32})-g_{i,32}(x)] \quad \text{pour} \quad x\in\langle a_{i,31}, a_{i,32}\rangle, \end{cases}$$

où $i = 0, \pm 1, \ldots$

On voit aisément que les différents membres de la formule (59) ne sont pas en contradiction et que les conditions (53)–(55) sont vérifiées. La condition (56) résulte alors de (55), (43) et du calcul suivant:

$$0 \leqslant g(x) \leqslant a_{i+1}-a_i \leqslant 2^{-n}\min{}^2\{a_i-a, b-a_{i+1}\} \leqslant 2^{-n}\min{}^2\{x-a, b-x\}$$
$$\text{pour} \quad x\in\langle a_i, a_{i+1}\rangle.$$

La fonction g est dérivable dans l'intervalle (a, b), puisque les fonctions $g_{i,j}$ le sont dans les intervalles $\langle a_{i,j-1}, a_{i,j}\rangle$ et $g'_{i,j}(a_{i,j-1}) = 0 = g'_{i,j}(a_{i,j})$. De plus, $g'(x) = 0$ ou bien $|g'(x)|$ ne surpasse pas l'un des nombres:

$$\frac{a_{i+1}-a_i}{g_{i,1}(a_{i,1})}, \quad \frac{a_{i+1}-a_i}{g_{i,12}(a_{i,12})}, \quad \frac{a_{i+1}-a_i}{g_{i,29}(a_{i,29})}, \quad \frac{a_{i+1}-a_i}{g_{i,32}(a_{i,32})}.$$

Chacun de ces nombres est inférieur à 100. En effet, p.ex.

$$\frac{a_{i+1}-a_i}{g_{i,1}(a_{i,1})} \leqslant \frac{a_{i+1}-a_i}{q^2(a_{i,1}-a_i)} = \frac{64}{q^2} < 100.$$

Pour achever la démonstration de la première des conditions (57) il suffit encore de prouver que $g^+(a) = 0$ et $g^-(b) = 0$. Nous établirons la première de ces égalités, la seconde se démontrant de la même façon. Soit x un point de l'intervalle $\langle a_i, a_{i+1}\rangle$. Alors, en vertu de (55) et (43), on a

$$0 \leqslant \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \leqslant \frac{g(x)}{x-a} \leqslant \frac{a_{i+1}-a_i}{a_i-a} \leqslant 2^{-n}\frac{(a_i-a)^2}{a_i-a} = 2^{-n}(a_i-a)\to 0$$

lorsque $i\to-\infty$.

Si $x\to a^+$, l'indice i défini par l'inégalité $a_i\leqslant x\leqslant a_{i+1}$ tend vers $-\infty$, donc

$$g^+(a) = \lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = 0.$$

La seconde des conditions (57) est remplie, car

$$\begin{aligned}&\{x\colon g'(x) = 0\}\\ &\quad\supset (-\infty, a\rangle\cup\langle b, \infty)\cup\bigcup_{i=-\infty}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{64}\{\langle a_{i,j-1}, a_{i,j}\rangle\setminus[B\cap(a_{i,j-1}, a_{i,j})]\}\\ &\quad\supset(-\infty, a\rangle\cup\langle b, \infty)\cup[(a, b)\setminus B] = R\setminus[(a, b)\cap B].\end{aligned}$$

Nous établirons maintenant la condition (58). Pour $x\in(a, b)$ il existe un entier i tel que $a_i\leqslant x\leqslant a_{i+1}$. Désignons par y_2, y_1, z_1, z_2 des points quelconques choisis respectivement dans les ensembles: $B\cap\langle a_{i-1,29}, a_{i-1,31}\rangle$, $B\cap\langle a_{i-1,32}, a_i\rangle$, $B\cap\langle a_{i+1,1}, a_{i+1,11}\rangle$, $B\cap\langle a_{i+1,12}, a_{i+1,28}\rangle$. Alors

$$\begin{aligned}&\left|\frac{g(x)-g(y_1)}{x-y_1}\right| + \left|\frac{g(x)-g(y_2)}{x-y_2}\right| = \frac{g(x)}{x-y_1} + \frac{|g(x)-g(y_2)|}{x-y_2}\\ &\geqslant \frac{g(x)+|g(x)-g(y_2)|}{x-y_2} \geqslant \frac{g(y_2)}{x-y_2} \geqslant \frac{a_i-a_{i-1}}{a_{i+1}-a_{i-1,29}} = \left(\frac{a_{i+1}-a_i}{a_i-a_{i-1}}+\frac{35}{64}\right)^{-1} > \frac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\left|\frac{g(z_1)-g(x)}{z_1-x}\right| + \left|\frac{g(z_2)-g(x)}{z_2-x}\right| = \frac{|g(z_1)-g(x)|}{z_1-x} + \frac{g(x)}{z_2-x} \geqslant \frac{g(z_1)}{z_2-x} > \frac{1}{2}.$$

Des dernières inégalités il résulte que

$$\left|\frac{g(x)-g(y_1)}{x-y_1}\right| > \frac{1}{4} \quad\text{ou}\quad \left|\frac{g(x)-g(y_2)}{x-y_2}\right| > \frac{1}{4} \tag{60}$$

et

$$\left|\frac{g(z_1)-g(x)}{z_1-x}\right| > \frac{1}{4} \quad\text{ou}\quad \left|\frac{g(z_2)-g(x)}{z_2-x}\right| > \frac{1}{4}. \tag{61}$$

Désignons maintenant par y celui des points y_1, y_2 qui satisfait à l'inégalité correspondante (60). (Si les deux inégalités (60) sont remplies, on prend pour y l'un quelconque des points y_1 et y_2). De même, désignons par z

celui des points z_1, z_2 qui satisfait à l'inégalité correspondante (61). Évidemment $y, z \in B$ et les inégalités (58_1) sont vérifiées.

Avant de déterminer les nombres h et k nous démontrerons l'assertion suivante:

(62) *Pour tout $x \in \langle a_i, a_{i+1} \rangle$ et tout intervalle (t_1, t_2) satisfaisant aux conditions: $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant q(a_{i+1} - a_i)$, $t_2 - t_1 \geqslant pq$, où $p = (a_{i+1} - a_i)/64$, il existe un $t \in (t_1, t_2)$ tel que $x \pm t \in B$.*

Il suffit de prouver cette assertion en supposant $t_2 - t_1 = pq$, car pour $t_2 - t_1 > pq$ on peut toujours remplacer l'intervalle (t_1, t_2) par un sous-intervalle de longueur pq.

Les fonctions $x - t$, $x + t$ (de la variable t) représentent l'intervalle (t_1, t_2) respectivement sur les intervalles $(x - t_2, x - t_1)$ et $(x + t_1, x + t_2)$. Comme chacun de ces intervalles est de longueur pq, celle-ci étant, en vertu de la condition (42), inférieure ou égale à chacun des nombres $(a_i - a_{i-1})/64$, $(a_{i+1} - a_i)/64$, $(a_{i+2} - a_{i+1})/64$, et comme $(x - t_2, x - t_1) \subset \langle a_{i-1}, a_{i+1} \rangle$, $(x + t_1, x + t_2) \subset (a_i, a_{i+2})$, l'intervalle $(x - t_2, x - t_1)$ est contenu dans la somme de deux intervalles consécutifs d'entre les intervalles $\langle a_{i-1,j-1}, a_{i-1,j} \rangle$, $\langle a_{i,j-1}, a_{i,j} \rangle$ $(j = 1, 2, \ldots, 64)$, et l'intervalle $(x + t_1, x + t_2)$ est contenu dans la somme de deux intervalles consécutifs d'entre les intervalles $\langle a_{i,j-1}, a_{i,j} \rangle$, $\langle a_{i+1,j-1}, a_{i+1,j} \rangle$. De l'inégalité

$$|\langle a_{l,j-1}, a_{l,j} \rangle \setminus B| \leqslant (1 - q)(a_{l,j} - a_{l,j-1}) \leqslant \frac{1}{16} \cdot \frac{a_{i+1} - a_i}{64q} \leqslant \frac{1}{15} p,$$

qui est vraie pour $l = i-1, i, i+1$, résultent maintenant les relations

$$|(x - t_2, x - t_1) \setminus B| \leqslant \tfrac{2}{15} p, \qquad |(x + t_1, x + t_2) \setminus B| \leqslant \tfrac{2}{15} p,$$
$$|(x - t_2, x - t_1) \cap B| > \tfrac{4}{5} p, \qquad |(x + t_1, x + t_2) \cap B| > \tfrac{4}{5} p.$$

Si pour tout $t \in (t_1, t_2)$ un des points $x - t$, $x + t$ au plus appartenait à l'ensemble B, l'ensemble symétrique de l'ensemble $(x - t_2, x - t_1) \cap B$ par rapport au point x serait contenu dans l'ensemble $(x + t_1, x + t_2) \setminus B$. Cela est pourtant impossible, puisque

$$|(x - t_2, x - t_1) \cap B| > \tfrac{4}{5} p > \tfrac{2}{15} p \geqslant |(x + t_1, x + t_2) \setminus B|.$$

Nous avons donc prouvé que pour un $t \in (t_1, t_2)$ les points $x - t, x + t \in B$.

Passons maintenant à la détermination du nombre h. Nous distinguerons les trois cas suivants:

(63) $$x \in \langle a_i, a_{i,13} \rangle \cup \langle a_{i,27}, a_{i,33} \rangle,$$

(64) $$x \in \langle a_{i,13}, a_{i,27} \rangle \cup \langle a_{i,33}, a_{i,63} \rangle,$$

(65) $$x \in \langle a_{i,63}, a_{i+1} \rangle.$$

Dans le cas (63) on admet $(t_1, t_2) = (13p, 14p)$. De l'assertion (62) il résulte qu'il existe un $h \in (13p, 14p)$ tel que $x \pm h \in B$. De plus, on a $x - h$

$\epsilon\langle a_{i-1,32}, a_i\rangle \cup \langle a_{i,13}, a_{i,20}\rangle$, $x+h\epsilon\langle a_{i,13}, a_{i,27}\rangle \cup \langle a_{i,40}, a_{i,47}\rangle$, d'où l'on tire $g(x\pm h) = 0$. Dans le cas (64) on considère l'intervalle $(t_1, t_2) = (0, p)$. Alors il existe, en vertu de (62), un $h\epsilon(0, p)$ tel que $x\pm h\epsilon B$, $x\pm h\epsilon\langle a_{i,12}, a_{i,28}\rangle \cup \langle a_{i,32}, a_{i+1}\rangle$, $g(x\pm h) = 0$. Dans le cas (65) on pose $(t_1, t_2) = (15p, 16p)$ et on trouve un $h\epsilon(15p, 16p)$ tel que $x\pm h\epsilon B$, $x-h\epsilon\langle a_{i,47}, a_{i,49}\rangle$, $x+h\epsilon\langle a_{i+1,12}, a_{i+1,18}\rangle$, $g(x\pm h) = 0$.

Nous déterminerons enfin le nombre k. Nous distinguerons les cas suivants:

(66) $x\epsilon\langle a_i, a_{i,14}\rangle$, $(t_1, t_2) = (a_{i,29}-x, a_{i,30}-x)$;

(67) $x\epsilon\langle a_{i,14}, a_{i,18}\rangle \cup \langle a_{i,26}, a_{i,36}\rangle$, $(t_1, t_2) = (x-a_{i,11}, x-a_{i,10})$;

(68) $x\epsilon\langle a_{i,18}, a_{i,26}\rangle$, $(t_1, t_2) = (15p, 16p)$;

(69) $x\epsilon\langle a_{i,36}, a_{i,46}\rangle$, $(t_1, t_2) = (x-a_{i,31}, x-a_{i,30})$;

(70) $x\epsilon\langle a_{i,46}, a_{i,50}\rangle$, $(t_1, t_2) = (22p, 23p)$;

(71) $x\epsilon\langle a_{i,50}, a_{i+1}\rangle$, $(t_1, t_2) = (a_{i+1,1}-x, a_{i+1,2}-x)$.

Comme dans chacun de ces cas $t_2-t_1 \geqslant pq$, il existe, en vertu de (62), un nombre $k\epsilon(t_1, t_2)$ tel que $x\pm k\epsilon B$. Nous allons maintenant trouver une limitation du quotient

$$w = \left|\frac{g(x+k)-g(x-k)}{2k}\right|.$$

Suivant les cas (66)–(71) on a:

— (66),

$$x+k\epsilon\langle a_{i,29}, a_{i,30}\rangle, \quad k\epsilon\langle 15p, 30p\rangle, \quad x-k\epsilon\langle a_{i-1,32}, a_i\rangle$$

(car $x-(a_{i,30}-x) \geqslant 2a_i - a_{i,30} = a_i - \frac{30}{64}(a_{i+1}-a_i) \geqslant a_i - \frac{30}{64}\frac{16}{15}(a_i - a_{i-1})$ $= a_{i-1,32})$,

$$w = \frac{g(x+k)}{2k} \geqslant \frac{a_{i+1}-a_i}{60p} > 1.$$

— (67),

$$x-k\epsilon\langle a_{i,10}, a_{i,11}\rangle, \quad k\epsilon\langle 3p, 8p\rangle \quad \text{et} \quad x+k\epsilon\langle a_{i,17} a_{i,26}\rangle$$

ou $k\epsilon\langle 15p, 26p\rangle$ et $x+k\epsilon\langle a_{i,41}, a_{i,62}\rangle$;

$$w = \frac{g(x-k)}{2k} \geqslant \frac{a_{i+1}-a_i}{52p} > 1.$$

— (68),

$$x-k\epsilon\langle a_{i,2}, a_{i,11}\rangle, \quad x+k\epsilon\langle a_{i,33}, a_{i,42}\rangle,$$

$$w = \frac{g(x-k)}{2k} \geqslant \frac{a_{i+1}-a_i}{32p} > 1.$$

— (69),

$$x-k\in\langle a_{i,30}, a_{i,31}\rangle,\qquad k\in\langle 5p, 16p\rangle,\qquad x+k\in\langle a_{i,41}, a_{i,62}\rangle,$$

$$w = \frac{g(x-k)}{2k} \geqslant \frac{a_{i+1}-a_i}{32p} > 1.$$

— (70),

$$x-k\in\langle a_{i,23}, a_{i,28}\rangle,\qquad x+k\in\langle a_{i+1}+4p, a_{i+1}+9p\rangle \subset \langle a_{i+1,1}, a_{i+1,11}\rangle,$$

$$w = \frac{g(x+k)}{2k} \geqslant \frac{a_{i+2}-a_{i+1}}{46p} = \frac{64}{46}\,\frac{a_{i+2}-a_{i+1}}{a_{i+1}-a_i} > 1.$$

— (71),

$$x+k\in\langle a_{i+1,1}, a_{i+1,2}\rangle,\qquad k\in(0, 17p),\qquad x-k\in\langle a_{i,33}, a_{i+1}\rangle,$$

$$w = \frac{g(x+k)}{2k} \geqslant \frac{a_{i+2}-a_{i+1}}{34p} > 1.$$

Pour compléter la démonstration de l'assertion (62) remarquons encore que les nombres $y, z, x\pm h, x\pm k$, trouvés pour un x donné, appartiennent à l'intervalle (a, b).

17.2. Nous définirons maintenant la fonction f. Si $A=\emptyset$, on pose $f=g$, car alors $(c, d)=(a, b)$. On voit aisément que la fonction f ainsi définie est continue et satisfait aux conditions (46)–(52). Dans le cas où $A\neq\emptyset$ on représente l'ensemble ouvert $(c, d)\setminus A$ sous la forme

$$(c, d)\setminus A = \bigcup_{m=0}^{\infty}(a^{(m)}, b^{(m)}),$$

où $(a^{(m)}, b^{(m)})$ sont des intervalles ouverts disjoints deux à deux, $a^{(0)}=c$, $b^{(0)}=\inf A$, $a^{(1)}=\sup A$, $b^{(1)}=d$, $b^{(m)}-a^{(m)}\geqslant b^{(m+1)}-a^{(m+1)}$ pour $m=2, 3, 4, \ldots$ Les intervalles $(a^{(0)}, b^{(0)})$ et $(a^{(1)}, b^{(1)})$ peuvent être vides, $(a^{(m)}, b^{(m)})\neq\emptyset$ pour $m\geqslant 2$. Il résulte de l'hypothèse que dans tout intervalle non vide $(a^{(m)}, b^{(m)})$ pour $m=0,1,2,\ldots$ il existe une suite de points $\ldots a_{-1}^{(m)}$, $a_0^{(m)}, a_1^{(m)}, \ldots$ satisfaisant aux conditions (41)–(44) pour $a=a^{(m)}$, $b=b^{(m)}$, $a_i=a_i^{(m)}$. Dans la partie démontrée du lemme nous avons fait correspondre à l'intervalle (a, b) la fonction g. De la même façon on fait correspondre à l'intervalle $(a^{(m)}, b^{(m)})$ $(m=0,1,2,\ldots)$ une fonction g_m. (Si $a^{(m)}=b^{(m)}$, on prend $g_m=0$). La fonction g_m est continue dans l'ensemble R et satisfait à des conditions analogues aux conditions (53)–(58). Posons ensuite

$$\begin{aligned}
b_m &= a_1^{(m)}-a_0^{(m)} \quad \text{pour} \quad m=0,1,2,\ldots,;\ d_0=d_1=1;\\
c_m^- &= \min\{b^{(m)}-b^{(l)}\colon\ b^{(l)}<b^{(m)},\ l=0,1,\ldots,m-1\},\\
c_m^+ &= \min\{a^{(l)}-a^{(m)},\ a^{(l)}>a^{(m)},\ l=0,1,\ldots,m-1\},\\
c_m &= \max\{c_m^-, c_m^+\},
\end{aligned}$$

$$d_m = b_m^{-1}\min\{c_m, 2^{-n}(a^{(m)}-c)^2, 2^{-n}(d-b^{(m)})^2\} \quad \text{pour} \quad m = 2, 3, \ldots;$$

(72)

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m g_m(x) = \begin{cases} d_m g_m(x) & \text{pour} \quad x \in \langle a^{(m)}, b^{(m)}\rangle,\ m = 0, 1, \ldots, \\ 0 & \text{pour} \quad x \in A \cup (-\infty, c\rangle \cup \langle d, \infty). \end{cases}$$

Nous établirons maintenant l'égalité

$$\lim_{m\to\infty} c_m = 0,$$

dont nous profiterons pour démontrer la continuité de la fonction f. Supposons pour cela que ε soit un nombre positif quelconque. Partageons l'intervalle $\langle c, d\rangle$ en un nombre fini d'intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_r$, tels que $|I_j| < \frac{1}{3}\varepsilon$ pour $j = 1, 2, \ldots, r$. Comme l'ensemble A est non dense, il existe pour tout I_j des intervalles $(a^{(m)}, b^{(m)})$ ayant avec lui des points communs. Posons

$$m_j = \min\{m\colon (a^{(m)}, b^{(m)}) \cap I_j \neq \emptyset\} \quad \text{et} \quad m' = \max\{m_0, m_1, \ldots, m_r\},$$

où $m_0 \geqslant 2$ désigne un nombre naturel tel que $b^{(m_0)} - a^{(m_0)} < \frac{1}{3}\varepsilon$. Si $m > m'$, chacun des intervalles $(b^{(m)} - \varepsilon, a^{(m)})$ et $(b^{(m)}, a^{(m)} + \varepsilon)$, ayant une longueur surpassant $\frac{2}{3}\varepsilon$, contient un intervalle I_j, qui à son tour a des points communs avec l'intervalle $(a^{(m_j)}, b^{(m_j)})$, où $m_j \leqslant m' < m$. De là, en tenant compte de la définition des nombres c_m^- et c_m^+ on obtient $c_m^- < \varepsilon$, $c_m^+ < \varepsilon$, ce qui donne $c_m < \varepsilon$.

La fonction f est évidemment continue dans les intervalles $(-\infty, c\rangle$, $\langle d, \infty)$ et $\langle a^{(m)}, b^{(m)}\rangle$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$. Pour prouver que la fonction f est continue dans l'ensemble R, il reste à démontrer qu'en tout point x d'accumulation à gauche (à droite) de l'ensemble A on a $\lim\limits_{t\to x-} f(t) = f(x)$ $(\lim\limits_{t\to x+} f(t) = f(x))$. Les points d'accumulation de l'ensemble A ne peuvent être que des points de l'ensemble A et peut-être les points c et d. Pour ces points on a $f(t) = 0$. Pour un nombre $\varepsilon > 0$ donné arbitrairement on choisit un nombre naturel m_0 tel que $c_m < \varepsilon$ pour $m \geqslant m_0$, puis un nombre positif δ tel que l'intervalle $(x-\delta, x)$ $((x, x+\delta))$ n'ait pas de points communs avec les intervalles $(a^{(m)}, b^{(m)})$ pour $m < m_0$. Si maintenant $t \in (x-\delta, x)$ $(t \in (x, x+\delta))$, on aura $t \in A \cup (-\infty, c\rangle \cup \langle d, \infty)$ ou bien $t \in (a^{(m)}, b^{(m)})$ pour un $m \geqslant m_0$, donc $f(t) = 0$ ou bien $0 \leqslant f(t) \leqslant d_m(a_1^{(m)} - a_0^{(m)}) = d_m b_m \leqslant c_m < \varepsilon$. On a donc toujours $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$.

La condition (47) résulte directement de la définition (72) de la fonction f, la condition (46) pour $x \in (a^{(0)}, b^{(0)}) \cup (a^{(1)}, b^{(1)})$ résulte de la formule (56). En effet, p.ex. pour $x \in (a^{(0)}, b^{(0)})$ on a

$$0 \leqslant f(x) = g_0(x) \leqslant 2^{-n}\min{}^2\{x - a^{(0)}, b^{(0)} - x\} = 2^{-n}\min{}^2\{x - c, d - x\}.$$

Il reste à vérifier la condition (46) pour $x \in \langle b^{(0)}, a^{(1)}\rangle$. Alors $f(x) = 0$ si $x \in A$, ou bien

$$0 \leqslant f(x) \leqslant b_m d_m \leqslant \min\{2^{-n}(a^{(m)}-c)^2,\ 2^{-n}(d-b^{(m)})^2\}$$
$$\leqslant 2^{-n}\min^2\{x-c,\ d-x\} \quad \text{si} \quad x \in (a^{(m)}, b^{(m)}).$$

La fonction f admet évidemment une dérivée finie dans les intervalles $(-\infty, c)$, (d, ∞), $(a^{(m)}, b^{(m)})$, où $m = 0, 1, 2, \ldots$ L'existence de la dérivée au point x résulte de (46) et (47). En effet, pour $h \neq 0$ on a

$$\left|\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\right| = \left|\frac{f(c+h)}{h}\right| \leqslant \frac{2^{-n}h^2}{|h|} = 2^{-n}|h|,$$

d'où l'on tire $f'(c) = 0$. On démontre de même que $f'(d) = 0$.

Le point $x \notin A \cup B$ lorsque $x \in (-\infty, c\rangle \cup \langle d, \infty)$ ou $x \in (a^{(m)}, b^{(m)}) \setminus B$. Si $x \in (-\infty, c\rangle \cup \langle d, \infty)$, on a $f'(x) = 0$ en vertu de la formule (72) et de l'égalité $f'(c) = f'(d) = 0$, déjà établie. D'autre part, si $x \in (a^{(m)}, b^{(m)}) \setminus B$, on a $f'(x) = d_m g'_m(x) = 0$ en vertu de l'égalité (57). Les conditions (48) et (49) sont ainsi démontrées.

La condition (50) résulte des relations (58), (59) et des limitations suivantes: $b_m < b^{(m)} - a^{(m)} < c_m$, $b_m \leqslant 2^{-n}\min^2\{a^{(m)}-c,\ d-b^{(m)}\}$ pour $m = 2, 3, \ldots$ (voir (44)); $d_m \geqslant 1$ pour $m = 0, 1, 2, \ldots$

Vérifions les conditions (51_1) et (51_2). Soient $x \in (c, d)$ un point d'accumulation à gauche (à droite) de l'ensemble A et h un nombre positif quelconque. Désignons par m le plus petit des indices l pour lesquels $(a^{(l)}, b^{(l)}) \subset (x-h, x)$ $\big((a^{(l)}, b^{(l)}) \subset (x, x+h)\big)$. Pour les intervalles $(a^{(l)}, b^{(l)})$ contenus dans l'intervalle $(b^{(m)}, x)$ $\big((x, a^{(m)})\big)$ on a $l > m$, donc $x - a_{0,1}^{(m)} < x - a^{(m)} < c_m^+ \leqslant c_m$ $(a_{0,1}^{(m)} - x < b^{(m)} - x < c_m^- \leqslant c_m)$. De là on tire

$$\frac{f(x)-f(a_{0,1}^{(m)})}{x-a_{0,1}^{(m)}} = -\frac{f(a_{0,1}^{(m)})}{x-a_{0,1}^{(m)}}$$
$$< -\frac{d_m b_m}{c_m} = -\min\left\{1, \frac{2^{-n}}{c_m}(a^{(m)}-c)^2, \frac{2^{-n}}{c_m}(d-b^{(m)})^2\right\}$$
$$\left(\frac{f(x)-f(a_{0,1}^{(m)})}{x-a_{0,1}^{(m)}} = +\frac{f(a_{0,1}^{(m)})}{a_{0,1}^{(m)}-x}\right.$$
$$\left. > \frac{d_m b_m}{c_m} = \min\left\{1, \frac{2^{-n}}{c_m}(a^{(m)}-c)^2, \frac{2^{-n}}{c_m}(d-b^{(m)})^2\right\}\right).$$

Si $h \to 0+$, on a $a_{0,1}^{(m)} \to x$, $a^{(m)} \to x$, $b^{(m)} \to x$, tandis que $c_m \to 0$, car $m \to \infty$. On conclut de là que pour m suffisamment grands

$$\min\left\{1, \frac{2^{-n}}{c_m}(a^{(m)}-c)^2, \frac{2^{-n}}{c_m}(d-b^{(m)})^2\right\} = 1,$$

d'où l'on obtient

$$\underline{f}^-(x) = \liminf_{h\to 0+} \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \leqslant -1 \qquad (\bar{f}^+(x) \geqslant 1).$$

D'autre part, l'hypothèse que x est un point d'accumulation à gauche (à droite) de l'ensemble A mène à la conclusion que les points $x_l \in A$, $x_l \to x$, $x_l < x$ ($x_l > x$) existent. On a donc $f(x_l) = 0 = f(x)$ et $\bar{f}^-(x) = 0$, puisque $f(t) \geqslant 0$ ($\underline{f}^+(x) = 0$). Si x est l'extrémité gauche (droite) de l'un des intervalles $(a^{(m)}, b^{(m)})$, on a $f^+(x) = d_m g_m'(a^{(m)}) = 0$ ($f^-(x) = d_m g_m'(b^{(m)}) = 0$).

Il reste à prouver la condition (52). Tout point $x \in A$ est ou bien un point d'accumulation bilatère de l'ensemble A, ou bien un point d'accumulation unilatère, différent de c et d, de l'ensemble A. Si $x \neq c, d$ est un point d'accumulation unilatère, p.ex. à gauche, de l'ensemble A, on obtient, en profitant de (51_2)

$$\bar{D}f(x) \geqslant \tfrac{1}{2}[\bar{f}^-(x) + \underline{f}^+(x)] = 0, \qquad \underline{D}f(x) \leqslant \tfrac{1}{2}[\underline{f}^-(x) + \bar{f}^+(x)] \leqslant -\tfrac{1}{2},$$
$$\bar{D}f(x) - \underline{D}f(x) \geqslant \tfrac{1}{2}.$$

Supposons maintenant que x soit un point d'accumulation bilatère de l'ensemble A et choisissons les suites de points $(u_l), (v_l) \subset A$ telles que $u_l \nearrow x$, $v_l \searrow x$. Comme $f(t) \geqslant 0$ et $f(u_l) = f(v_l) = 0$, on a

$$\underline{D}f(x) \leqslant \liminf_{l\to\infty} \frac{f(v_l) - f(2x - v_l)}{2(v_l - x)} \leqslant 0,$$

$$\bar{D}f(x) \geqslant \limsup_{l\to\infty} \frac{f(u_l) - f(2x - u_l)}{2(u_l - x)} \geqslant 0.$$

Pour démontrer (52) il suffit donc de prouver que

$$\limsup_{h\to 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \right| \geqslant \tfrac{1}{4}.$$

Pour cela considérons un nombre quelconque $h > 0$. Soit $m = m(h)$ le nombre naturel défini dans la démonstration des conditions (51_1) et (51_2) par les relations figurant entre parenthèses. On peut évidemment supposer h assez petit pour que

$$\min\left\{1, \frac{2^{-n}}{c_m}(a^{(m)} - c)^2, \frac{2^{-n}}{c_m}(d - b^{(m)})^2\right\} = 1,$$

c'est-à-dire $c_m = b_m d_m$. Considérons maintenant les deux seuls cas possibles:

— Il existe un $y \in \langle a_{0,1}^{(m)}, a_{0,11}^{(m)} \rangle$ tel que $f(2x - y) \leqslant \frac{1}{2} f(a_{0,11}^{(m)}) = \frac{1}{2} b_m d_m$.

Alors

$$\left|\frac{f(y)-f(2x-y)}{2(y-x)}\right| \geqslant \frac{b_m d_m}{4(b^{(m)}-x)} \geqslant \frac{b_m d_m}{4c_m} = \frac{1}{4}.$$

– Pour tout $y \in \langle a_{0,1}^{(m)}, a_{0,11}^{(m)}\rangle$ on a $f(2x-y) > b_m d_m/2$. Dans ce cas il existe un intervalle $(a^{(j)}, b^{(j)})$ adjacent à l'ensemble A et un nombre entier i tel que

$$(73)\qquad a_i^{(j)} < 2x - a_{0,11}^{(m)} < 2x - a_{0,1}^{(m)} < a_{i,12}^{(j)}$$

ou

$$(74)\qquad a_{i,28}^{(j)} < 2x - a_{0,11}^{(m)} < 2x - a_{0,1}^{(m)} < a_{i,32}^{(j)}.$$

Supposons d'abord que l'on ait (73). Alors si $2x - a_0^{(m)} \leqslant a_{i,11}^{(j)}$, on a $a_i^{(j)} < 2x - a_{0,1}^{(m)} < 2x - a_0^{(m)} \leqslant a_{i,11}^{(j)}$. Et comme la fonction f est non décroissante dans l'intervalle $\langle a_i^{(j)}, a_{i,11}^{(j)}\rangle$, on a $f(2x-a_0^{(m)}) \geqslant f(2x-a_{0,1}^{(m)}) > b_m d_m/2$. De même, si $2x - a_{0,12}^{(m)} \geqslant a_{i,1}^{(j)}$, on a $a_{i,1}^{(j)} \leqslant 2x - a_{0,12}^{(m)} < 2x - a_{0,1}^{(m)} < a_{i,12}^{(j)}$, $f(2x-a_{0,12}^{(m)}) \geqslant f(2x-a_{0,1}^{(m)}) > b_m d_m/2$ (puisque la fonction f est non croissante dans l'intervalle $\langle a_{i,1}^{(j)}, a_{i,12}^{(j)}\rangle$). Désignant par y le point $a_0^{(m)}$ resp. $a_{0,12}^{(m)}$, on obtient

$$\left|\frac{f(y)-f(2x-y)}{2(y-x)}\right| = \frac{f(2x-y)}{2(y-x)} \geqslant \frac{1}{4}\,\frac{b_m d_m}{c_m} = \frac{1}{4}.$$

Si aucun des deux cas possibles n'a lieu, on a

$$2x - a_{0,12}^{(m)} < a_{i,1}^{(j)} < a_{i,11}^{(j)} < 2x - a_0^{(m)},$$

d'où, en tenant compte de (73), on obtient l'inégalité

$$\frac{5}{6} < \frac{a_{i+1}^{(j)} - a_i^{(j)}}{a_1^{(m)} - a_0^{(m)}} < \frac{6}{5}.$$

Il suffit maintenant d'admettre $y = a_{0,31}^{(m)}$. Alors

$$\begin{aligned} a_{i-1,32}^{(j)} &\leqslant a_i^{(j)} - \tfrac{1}{2}\tfrac{15}{16}(a_{i+1}^{(j)} - a_i^{(j)}) \leqslant 2x - a_{0,11}^{(m)} - \tfrac{15}{32}\tfrac{5}{6}(a_1^{(m)} - a_0^{(m)}) = 2x - a_{0,36}^{(m)} \\ &\leqslant 2x - y = 2x - a_{0,1}^{(m)} - \tfrac{30}{64}(a_1^{(m)} - a_0^{(m)}) \leqslant a_{i,12}^{(j)} - \tfrac{30}{64}\tfrac{5}{6}(a_{i+1}^{(j)} - a_i^{(j)}) \leqslant a_i^{(j)}, \end{aligned}$$

$$f(y) = f(a_{0,31}^{(m)}) = b_m d_m, \quad f(2x-y) = 0,$$

$$\left|\frac{f(y)-f(2x-y)}{2(y-x)}\right| = \frac{b_m d_m}{2(y-x)} \geqslant \tfrac{1}{2}\,\frac{b_m d_m}{b^{(m)}-x} \geqslant \tfrac{1}{2}\,\frac{b_m d_m}{c_m} = \tfrac{1}{2}.$$

Nous ferons un raisonnement semblable pour le cas (74). Si $2x - a_0^{(m)} \leqslant a_{i,31}^{(j)}$ ou $2x - a_{0,12}^{(m)} \geqslant a_{i,29}^{(j)}$, en profitant de (74) et du fait que dans l'intervalle $\langle a_{i,28}^{(j)}, a_{i,31}^{(j)}\rangle$ la fonction f est non décroissante, dans l'intervalle $\langle a_{i,29}^{(j)}, a_{i,32}^{(j)}\rangle$ – non croissante, on obtient $f(2x-a_0^{(m)}) > b_m d_m/2$ ou $f(2x-a_{0,12}^{(m)}) > b_m d_m/2$. De là on tire, pour $y = a_0^{(m)}$ ou $y = a_{0,12}^{(m)}$,

$$\left|\frac{f(y)-f(2x-y)}{2(y-x)}\right| \geqslant \tfrac{1}{4}.$$

Si $2x-a^{(m)}_{0,12} < a^{(j)}_{i,29} < a^{(j)}_{i,31} < 2x-a^{(m)}_{0}$, on a

$$\tfrac{5}{2} < \frac{a^{(j)}_{i+1}-a^{(j)}_{i}}{a^{(m)}_{1}-a^{(m)}_{0}} < 6.$$

En posant $y = a_{0,31}$ on obtient

$$\begin{aligned} a^{(j)}_{i,12} &= a^{(j)}_{i,28}-\tfrac{1}{4}(a^{(j)}_{i+1}-a^{(j)}_{i}) \leqslant 2x-a^{(m)}_{0,11}-\tfrac{40}{64}(a^{(m)}_{1}-a^{(m)}_{0}) \\ &< 2x-y = 2x-a^{(m)}_{0,1}-\tfrac{30}{64}(a^{(m)}_{1}-a^{(m)}_{0}) \leqslant a^{(j)}_{i,32}-\tfrac{30}{64}\tfrac{1}{6}(a^{(j)}_{i+1}-a^{(j)}_{i}) = a^{(j)}_{i,27}, \end{aligned}$$

$$f(y) = d_m b_m, \qquad f(2x-y) = 0,$$

$$\left|\frac{f(y)-f(2x-y)}{2(y-x)}\right| = \frac{b_m d_m}{2(y-x)} \geqslant \tfrac{1}{2}.$$

Nous avons démontré que si x est un point d'accumulation bilatère de l'ensemble A, il existe, pour tout $h>0$ suffisamment petit, un point y satisfaisant aux conditions

$$x < y < x+h, \qquad \left|\frac{f(y)-f(2x-y)}{2(y-x)}\right| \geqslant \tfrac{1}{2}.$$

De ces inégalités il résulte que

$$\limsup_{h\to 0}\left|\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\right| \geqslant \tfrac{1}{2},$$

ce qui achève la démonstration de la formule (52), par conséquent aussi celle du lemme.

18. LEMME. *Soit E un sous-ensemble de classe F_σ de l'intervalle fini $I = (\alpha, \beta)$ et $F \subset G = I \setminus E$ un ensemble de classe F_σ, relativement ensemble ro ntière dans G, ne contenant que des points de densité de l'ensemble G, de même mesure que l'ensemble G. Alors il existe des suites d'ensembles $E_1, E_2, \dots$ $\dots, F_1, F_2, \dots$ satisfaisant aux conditions:*

(75) *$E_{n-1} \subset E_n \subset E$; $E_n \cup F_{n-1}$ est un ensemble relativement fermé dans l'intervalle I ($n = 1, 2, \dots, E_0 = F_0 = \emptyset$).*

(76) *$F_{n-1} \subset F_n \subset F$; $E_n \cup F_n$ est un ensemble relativement fermé dans l'intervalle I ($n = 1, 2, \dots$).*

(77) *Pour tout intervalle (a, b) adjacent à l'ensemble $E_{n-1} \cup F_{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$) l'ensemble $E_n \cap (a, b)$ est relativement fermé dans l'intervalle (a, b).*

(78) *Pour tout intervalle (c, d) adjacent à l'ensemble $E_n \cup F_{n-1}$($n = 1, 2, \dots$) l'ensemble $F_n \cap (c, d)$ est relativement parfait dans l'intervalle (c, d). De plus, il est non vide si $F \cap (c, d) \neq \emptyset$.*

(79) *Dans tout intervalle* (a, b) *adjacent à l'ensemble* $E_{n-1} \cup F_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ *il existe une suite de points* $\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots$ *satisfaisant aux conditions* (44)–(45), *dans lesquelles* $B = (E_n \cup F_n) \cap (c, d)$, (c, d) *désignant un intervalle adjacent à l'ensemble* $E_{n-1} \cup F_{n-2}$ *contenant* (a, b) *et* q *étant un nombre* (*arbitrairement choisi*) *de l'intervalle* $\langle 15/16, 1)$.

(80) $$E = \bigcup_1^\infty E_n, \quad F = \bigcup_1^\infty F_n.$$

Démonstration. Soit $E = \bigcup_1^\infty A_n$, $F = \bigcup_1^\infty B_n$, où (A_n) et (B_n) sont des suites ascendantes d'ensembles fermés. Nous définirons les ensembles E_n et F_n en sorte que soient remplies les conditions (75)–(80).

Admettons $E_1 = A_1$. Cet ensemble satisfait aux conditions (75) et (77). Désignons par (c, d) un intervalle quelconque adjacent à l'ensemble E_1. Comme les points $c, d \notin B_1$, l'ensemble $B_1 \cap (c, d)$ est fermé. En vertu du lemme 10 il existe donc un ensemble parfait $F_{1,c}$ tel que $B_1 \cap (c, d) \subset F_{1,c} \subset F \cap (c, d)$. De plus $|F_{1,c}| > 0$ si $F \cap (c, d) \neq \emptyset$. Nous définissons l'ensemble F_1 comme il suit:

$$F_1 = \bigcup_c F_{1,c},$$

où la sommation est étendue aux extrémités c de tous les intervalles (c, d) adjacents à l'ensemble E_1. L'ensemble F_1 satisfait à la condition (78). La condition (76) est aussi remplie, puisque $B_1 = \bigcup_c [B_1 \cap (c, d)] \subset \bigcup_c F_{1,c} = F_1$ et que l'ensemble $I \setminus (E_1 \cup F_1) = (I \setminus E_1) \setminus F_1 = \bigcup_c [(c, d) \setminus F_{1,c}]$ est ouvert.

Supposons maintenant que pour $m < n$ $(n > 1)$ on ait défini les ensembles $E_m \supset A_m$ et $F_m \supset B_m$ satisfaisant aux conditions (75)–(79). Nous allons définir les ensembles E_n et F_n. Considérons un intervalle quelconque (a, b) adjacent à l'ensemble $E_{n-1} \cup F_{n-1}$. Désignons par $(\bar{c}, \bar{d})$ celui des intervalles adjacents à l'ensemble $E_{n-1} \cup F_{n-2}$ qui contient (a, b). Choisissons dans l'intervalle (a, b) une suite quelconque de points $\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots$ satisfaisant aux conditions (41)–(44). Désignons par E_{naij} $(i = 0, \pm 1, \ldots, j = 1, 2, \ldots, 64)$ un ensemble fermé (qui peut être vide) tel que

$$\langle a_{i,j-1}, a_{i,j} \rangle \cap A_n \subset E_{naij} \subset \langle a_{i,j-1}, a_{i,j} \rangle \cap E$$

et

$$|E_{naij}| \geqslant q |\langle a_{i,j-1}, a_{i,j} \rangle \cap E|, \qquad \text{où} \qquad a_{i,j} = a_i + j(a_{i+1} - a_i)/64.$$

Posons

$$E_{n,a} = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{64} E_{naij}, \qquad E_n = E_{n-1} \cup \bigcup_a E_{n,a},$$

où la sommation comprend les extrémités a de tous les intervalles (a, b) adjacents à l'ensemble $E_{n-1} \cup F_{n-1}$. L'ensemble $E_n \supset A_n$ et satisfait à la première condition (75). L'assertion (77) est aussi vraie, puisque les seuls points d'accumulation de l'ensemble $E_n \cap (a, b) = E_{n,a}$ qui n'appartiennent pas à $E_{n,a}$ ne peuvent être que les points a et b. Pour démontrer la dernière des conditions (75) il suffit de remarquer que l'ensemble $I \setminus (E_n \cup \cup F_{n-1}) = \bigcup_a [(a, b) \setminus E_{n,a}]$ est ouvert.

Nous définirons maintenant l'ensemble F_n. Fixons pour cela un intervalle quelconque (c, d) adjacent à l'ensemble $E_n \cup F_{n-1}$. Soit (a, b) un intervalle adjacent à l'ensemble $E_{n-1} \cup F_{n-1}$ contenant l'intervalle (c, d). Désignons par F_{ncij} $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, j = 1, 2, \ldots, 64)$ un ensemble parfait (qui peut être vide) tel que

$$\langle a_{i,j-1}, a_{i,j} \rangle \cap (c, d) \cap B_n \subset F_{ncij} \subset \langle a_{i,j-1}, a_{i,j} \rangle \cap \langle c, d \rangle \cap F,$$

$$|F_{ncij}| \geqslant q |\langle a_{i,j-1}, a_{i,j} \rangle \cap (c, d) \cap F|.$$

Posons

$$F_{n,c} = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{64} [(c, d) \cap F_{ncij}], \qquad F_n = F_{n-1} \cup \bigcup_c F_{n,c},$$

où la sommation s'étend sur les extrémités c de tous les intervalles (c, d) adjacents à l'ensemble $E_n \cup F_{n-1}$. L'ensemble $F_{n,c} = F_n \cap (c, d)$ est parfait par rapport à l'intervalle (c, d). En effet, $F_{n,c}$ étant la somme d'ensembles $F_{ncij} \cap (c, d)$ relativement parfaits dans (c, d), est dense en soi, il est aussi relativement fermé dans (c, d), puisque tous ses points d'accumulation $\neq c, d$ lui appartiennent. De plus, si l'ensemble $F \cap (c, d) \neq \emptyset$, on a $|F \cap (c, d)| > 0$, car tout point de l'ensemble F est un point de densité de celui-ci. De la dernière inégalité résulte l'existence des nombres i, j tels que $|F \cap (c, d) \cap \langle a_{i,j-1}, a_{i,j} \rangle| > 0$. De là on tire $|F_{ncij}| > 0$ et $|F_n \cap (c, d)| > 0$. La condition (78) est donc remplie. Des conditions (76), la première est évidente, la seconde résulte de l'égalité

$$I \setminus (E_n \cup F_n) = \bigcup_c [(c, d) \setminus F_{n,c}]$$

et du fait que les ensembles $(c, d) \setminus F_{n,c}$ sont ouverts.

L'ensemble $F_n \supset B_n$, car

$$B_n \subset F_{n-1} \cup \bigcup_c [(c, d) \cap B_n] = F_{n-1} \cup \bigcup_c \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{64} [\langle a_{i,j-1}, a_{i,j} \rangle \cap (c, d) \cap B_n]$$
$$\subset F_{n-1} \cup \bigcup_c F_{n,c} = F_n.$$

Des relations $E = \bigcup_1^{\infty} A_n$, $F = \bigcup_1^{\infty} B_n$, $A_n \subset E_n \subset E$ et $B_n \subset F_n \subset F$ on obtient maintenant les égalités (80).

Il reste encore à prouver la condition (79), c'est-à-dire (45). Des égalités

$$\langle a_{i,j-1}, a_{i,j}\rangle \cap F_n = [\langle a_{i,j-1}, a_{i,j}\rangle \cap F_{n-1}] \cup \bigcup_c [F_{ncij} \cap (c, d)],$$

$$\langle a_{i,j-1}, a_{i,j}\rangle \cap F = [\langle a_{i,j-1}, a_{i,j}\rangle \cap F_{n-1}] \cup \bigcup_c [\langle a_{i,j-1}, a_{i,j}\rangle \cap (c, d) \cap F]$$

on conclut que

$$\begin{aligned} |\langle a_{i,j-1}, a_{i,j}\rangle \cap F_n| &= |\langle a_{i,j-1}, a_{i,j}\rangle \cap F_{n-1}| + \sum_c |F_{ncij}| \\ &\geqslant q\,|\langle a_{i,j-1}, a_{i,j}\rangle \cap F_{n-1}| + q \sum_c |\langle a_{i,j-1}, a_{i,j}\rangle \cap (c, d) \cap F| \\ &= q\,|[\langle a_{i,j-1}, a_{i,j}\rangle \cup F_{n-1}] \cup \bigcup_c [\langle a_{i,j-1}, a_{i,j}\rangle \cap (c, d) \cap F]| \\ &= q\,|\langle a_{i,j-1}, a_{i,j}\rangle \cap F|. \end{aligned}$$

De là on tire

$$\begin{aligned} |\langle a_{i,j-1}, a_{i,j}\rangle \cap (E_n \cup F_n)| &= |\langle a_{i,j-1}, a_{i,j}\rangle \cap E_n| + |\langle a_{i,j-1}, a_{i,j}\rangle \cap F_n| \\ &\geqslant q\,|\langle a_{i,j-1}, a_{i,j}\rangle \cap E| + q\,|\langle a_{i,j-1}, a_{i,j}\rangle \cap F| \\ &= q\,|\langle a_{i,j-1}, a_{i,j}\rangle \cap (E \cup F)| = q(a_{i,j} - a_{i,j-1}). \end{aligned}$$

19. LEMME. *Soit G un ensemble de classe G_δ et $G \subset I = (\alpha, \beta)$ où $\beta - \alpha < \infty$. Alors il existe une fonction f, continue et bornée dans l'intervalle I, qui admet en tout point x de l'ensemble $I \setminus G$ une dérivée finie $f'(x)$, n'admet en aucun point x de l'ensemble G de dérivées unilatères finies ou infinies $f^-(x)$ et $f^+(x)$ et n'admet en aucun point x de l'ensemble G de dérivée symétrique $Df(x)$ finie ou infinie.*

Démonstration. Soit $E = I \setminus G$ et soit $F \subset G$ un ensemble de classe F_σ, relativement ensemble frontière dans G, ne contenant que des points de densité de l'ensemble G, de même mesure que l'ensemble G. En vertu du lemme 18 il existe des ensembles $E_1, E_2, \ldots, F_1, F_2, \ldots$ satisfaisant aux conditions (75)–(80).

19.1. Nous définirons maintenant la fonction g_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Soit (c, d) un intervalle adjacent à l'ensemble $E_n \cup F_{n-1}$ et désignons par f_c la fonction du lemme 17, avec $A = F_n \cap (c, d)$ et $B = (E_{n+1} \cup F_{n+1}) \cap \cap (c, d)$. Posons

$$g_n(x) = \sum_c f_c(x) = \begin{cases} f_c(x) & \text{pour} \quad x \in (c, d), \\ 0 & \text{pour} \quad x \in (E_n \cup F_{n-1}), \end{cases} \tag{81}$$

où (c, d) est un intervalle quelconque adjacent à l'ensemble $E_n \cup F_{n-1}$. Nous allons démontrer que la fonction g_n satisfait aux conditions suivantes, dans lesquelles (a, b) désignera toujours un intervalle quelconque adjacent à l'ensemble $E_n \cup F_n$:

(82) $\qquad g_n$ *est continue dans l'intervalle I.*

(83) $$0 \leqslant g_n(x) \leqslant 2^{-n} \cdot \varrho^2(x, E_n \cup F_{n-1}) \quad \textit{pour} \quad x \in I.$$

(84) $$g_n(x) = 0 \quad \textit{pour} \quad x \in E_n \cup F_n.$$

(85) *Il existe une dérivée finie $g'(x)$ pour $x \in I \setminus (F_n \setminus F_{n-1})$.*

(86) $$g_n'(x) = 0 \quad \textit{pour} \quad x \in E_n \cup F_{n-1} \cup [I \setminus (E_{n+1} \cup F_{n+1})].$$

(87) *Pour tout point $x \in (a, b)$, donc pour tout x de l'ensemble $I \setminus (E_n \cup F_n)$ il existe des points $y_n = y_n(x)$ et $z_n = z_n(x)$, appartenant à l'ensemble $E_{n+1} \cup F_{n+1}$ et des nombres $h_n = h_n(x) \neq 0$ et $k_n = k_n(x) \neq 0$ tels que*

(87_1) $$a < y_n < x < z_n < b, \qquad \left|\frac{g_n(x) - g_n(y_n)}{x - y_n}\right| > \frac{1}{4}, \qquad \left|\frac{g_n(z_n) - g_n(x)}{z_n - x}\right| > \frac{1}{4};$$

(87_2) $$a < x \pm h_n < b, \quad a < x_n \pm k_n < b, \quad x \pm h_n \in E_{n+1} \cup F_{n+1},$$

$$x \pm k_n \in E_{n+1} \cup F_{n+1}, \quad g_n(x \pm h_n) = 0, \quad \left|\frac{g_n(x+k_n) - g_n(x-k_n)}{2k_n}\right| > 1.$$

(88_1) *Si $x \in F_n \setminus F_{n-1}$ et $x \neq a, b$, on a*

$$\underline{g}_n^-(x) \leqslant -1, \quad \bar{g}_n^-(x) = \underline{g}_n^+(x) = 0 \quad \bar{g}_n^+(x) \geqslant 1.$$

(88_2) *Si $a \in F_n \setminus F_{n-1}$ (rappelons que (a, b) désigne un intervalle quelconque adjacent à l'ensemble $E_n \cup F_n$),*

$$\underline{g}_n^-(a) \leqslant -1 \quad \textit{et} \quad \bar{g}_n^-(a) = g_n^+(a) = 0;$$

si $b \in F_n \setminus F_{n-1}$, on a

$$g_n^-(b) = \underline{g}_n^+(b) = 0 \quad \textit{et} \quad \bar{g}_n^+(b) \geqslant 1.$$

(89) $$\bar{D}g_n(x) - \underline{D}g_n(x) \geqslant \frac{1}{4} \quad \textit{pour} \quad x \in F_n \setminus F_{n-1}.$$

(90) *Les fonctions g_m $(m < n)$ sont constantes dans l'intervalle $\langle a, b \rangle$.*

(91) $$0 \leqslant g_n(x) \leqslant 2^{-n} \min{}^2(x - a, \beta - x) < 2^{-n}(\beta - a)^2.$$

Nous allons d'abord prouver que l'inégalité (83) est remplie. Pour $x \in E_n \cup F_{n-1}$ on l'obtient de la définition (81), pour $x \in I \setminus (E_n \cup F_{n-1}) = \bigcup_c (c, d)$ elle résulte de l'inégalité (46), car dans ce cas $\min(x - c, d - x) = \varrho(x, E_n \cup F_{n-1})$. De même, l'égalité (84) pour $x \in E_n \cup F_{n-1}$ résulte de (81), tandis que pour $x \in F_n \setminus F_{n-1} = \bigcup_c (c, d) \cap F_n$ elle résulte de (81) et (47).

De l'inégalité (83) on conclut que $g_n'(x) = 0$ pour $x \in E_n \cup F_{n-1}$. En effet, si $h \neq 0$ et $x + h \in I$, on a $\varrho(x + h, E_n \cup F_{n-1}) \leqslant \varrho(x + h, x) = |h|$ et

$$\left|\frac{g_n(x+h) - g_n(x)}{h}\right| = \frac{g_n(x+h)}{|h|} \leqslant \frac{2^{-n} \varrho^2(x+h, E_n \cup F_{n-1})}{|h|} < |h|.$$

De là et de (48) on conclut que la fonction g_n admet une dérivée finie pour

$$x \in E_n \cup F_{n-1} \cup \bigcup_c [(c, d) \setminus F_n] = E_n \cup F_{n-1} \cup \bigcup_c (c, d) \setminus (F_n \setminus F_{n-1}).$$
$$= I \setminus (F_n \setminus F_{n-1}).$$

De plus, en vertu de la condition (49), on obtient $g_n'(x) = 0$ pour x appartenant à l'ensemble $E_n \cup F_{n-1} \cup \bigcup_c [(c, d) \setminus (E_{n+1} \cup F_{n+1})] = E_n \cup F_{n-1} \cup$ $\cup [I \setminus (E_{n+1} \cup F_{n+1})]$. Les relations (85) et (86) sont ainsi démontrées.

La continuité de la fonction g_n aux points de l'ensemble $E_n \cup F_{n-1}$ résulte de (85), sa continuité dans les intervalles (c, d) résulte de celle de la fonction f_c. Par conséquent l'assertion (82) a été démontrée. Les conditions (87)–(89) sont des conséquences directes de la définition (81) et des relations (50)–(52) (il suffit d'admettre $y_n = y$, $z_n = z$).

La propriété (90) résulte de (82), (86) et de l'inclusion

$$(a, b) \subset I \setminus (E_{m+1} \cup F_{m+1}^*) \qquad (m < n).$$

L'inégalité (91) est évidente quand $g_n(x) = 0$. Si $g_n(x) \neq 0$, x est un point d'un intervalle (c, d) adjacent à l'ensemble $E_n \cup F_{n-1}$, donc

$$g_n(x) \leqslant 2^{-n} \min^2(x - c, d - x) \leqslant 2^{-n} \min^2(x - a, \beta - x).$$

19.2. Nous définirons maintenant la fonction auxiliaire g.

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} g_n(x). \tag{92}$$

La série qui figure dans cette formule est, en vertu de l'inégalité (91), absolument et uniformément convergente. La fonction g est donc bornée et continue dans l'intervalle I. Nous allons montrer que:

(93) *$g'(x)$ existe et est finie pour $x \in E$.*

(94) *En aucun point de l'ensemble $F \setminus P$ la fonction g n'admet de dérivée unilatère.* (Les ensembles P, P^+, P^- seront définis plus loin).

(95) *En tout point $a \in P^-$ on a*

$$\underline{g}^-(a) + 1 \leqslant \bar{g}^-(a) = g^+(a) \neq \pm\infty \text{ ou } \bar{g}^-(a) - 1 \geqslant \underline{g}^-(a) = g^+(a) \neq \pm\infty.$$

(96) *En tout point $b \in P^+$ on a*

$$\bar{g}^+(b) - 1 \geqslant \underline{g}^+(b) = g^-(b) \neq \pm\infty \text{ ou } \underline{g}^+(b) + 1 \leqslant \bar{g}^+(b) = g^-(b) \neq \pm\infty.$$

(97) *En aucun point x de l'ensemble F la fonction g n'admet de dérivée symétrique $Dg(x)$.*

(98) *En aucun point x de l'ensemble $G \setminus F$ la fonction g n'admet de dérivée unilatère.*

(99) *En aucun point x de l'ensemble $G \setminus F$ la fonction g n'admet de dérivée symétrique $Dg(x)$.*

Soit $x_0 \epsilon E$. Il existe un nombre naturel n tel que $x_0 \epsilon E_n \setminus E_{n-1}$. De la dernière relation on obtient successivement: $x_0 \epsilon E_m$ pour $m \geqslant n$, $g_m(x_0) = 0$ pour $m \geqslant n$. Puisque pour $h \neq 0$ et $x_0 + h \epsilon I$

$$\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{g_m(x_0+h)-g_m(x_0)}{h},$$

on a

$$(100) \quad \left| \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} - \sum_{m=1}^{n-1} (-1)^{m-1} \frac{g_m(x_0+h)-g_m(x_0)}{h} \right|$$

$$\leqslant \sum_{m=n}^{\infty} \left| \frac{g_m(x_0+h)-g_m(x_0)}{h} \right| \leqslant \frac{1}{|h|} \sum_{m=n}^{\infty} g_m(x_0+h)$$

$$\leqslant \frac{1}{|h|} \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} 2^{-m} \cdot \varrho^2(x_0+h, E_m \cup F_{m-1}) \leqslant \frac{1}{|h|} \sum_{m=n}^{\infty} 2^{-m} h^2 \leqslant |h|,$$

car pour $m \geqslant n$ le point $x_0 \epsilon E_m \cup F_{m-1}$ et $\varrho(x_0+h, E_m \cup F_{m-1}) \leqslant \varrho(x_0+h, x_0) = |h|$. D'après (85) la fonction g_m ($m = 1, 2, \ldots$) admet une dérivée finie aux points de l'ensemble E. De là et de (100) on tire

$$g'(x_0) = \sum_{m=1}^{n-1} (-1)^{m-1} g_m'(x_0).$$

Remarquons encore que pour $m < n-1$ l'ensemble $E_n \setminus E_{n-1} \subset I \setminus (E_{m+1} \cup F_{m+1})$, donc, en vertu de la condition (86), $g_m'(x_0) = 0$ et $g'(x_0) = (-1)^n g_{n-1}'(x_0)$. L'assertion (93) est ainsi démontrée.

Désignons par P_n^- (P_n^+) l'ensemble de tous les points $a \epsilon F_n \setminus F_{n-1}$ ($b \epsilon F_n \setminus F_{n-1}$) qui sont points d'accumulation à gauche (à droite) de l'ensemble $F_n \setminus F_{n-1}$. Les points $a \epsilon P_n^-$ et $b \epsilon P_n^+$ sont extrémités d'intervalles (a, b) adjacents à l'ensemble $E_n \cup F_n$. Posons encore

$$P^- = \bigcup_1^{\infty} P_n^-, \quad P^+ = \bigcup_1^{\infty} P_n^+, \quad P = P^- \cup P^+.$$

L'ensemble P est évidemment dénombrable.

Soit x_0 un point quelconque, mais fixé, de l'ensemble F. Il existe un n tel que $x_0 \epsilon F_n \setminus F_{n-1}$. Le point $x_0 \epsilon F_{m-1}$ pour $m \geqslant n+1$, donc, en vertu de (83) et (84), on a $g_m(x_0) = 0$ et $\varrho(x_0+h, E_m \cup F_{m-1}) \leqslant \varrho(x_0+h, x_0) = |h|$. De là on obtient

$$|g_m(x_0+h) - g_m(x_0)| = |g_m(x_0+h)| \leqslant 2^{-m} h^2 \quad \text{pour} \quad m \geqslant n+1$$

(puisque $|g_m(x_0+h)| \leqslant 2^{-m} \varrho^2(x_0+h, E_m \cup F_{m-1})$);

$$(101)\qquad \left|\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} - \sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}\frac{g_m(x_0+h)-g_m(x_0)}{h}\right| \leqslant \sum_{n+1}^{\infty}\left|\frac{g_m(x_0+h)-g_m(x_0)}{h}\right| \leqslant |h|.$$

Comme l'ensemble $F_n\setminus F_{n-1}$ est une partie de l'ensemble $I\setminus(F_m\setminus F_{m-1})$ pour $m\leqslant n-1$ et, en même temps, partie de l'ensemble $I\setminus(E_{m+1}\cup F_{m+1})$ pour $m\leqslant n-2$, il résulte des conditions (85) et (86) que les fonctions g_m $(m\leqslant n-1)$ ont des dérivées finies au point x_0, et que $g'_m(x_0)=0$ pour $m\leqslant n-2$. De là on obtient l'égalité

$$(102)\qquad \lim_{h\to 0}\sum_{1}^{n-1}(-1)^{m-1}\frac{g_m(x_0+h)-g_m(x_0)}{h} = \sum_{1}^{n-1}(-1)^{m-1}g'_m(x_0) = (-1)^n g'_{n-1}(x_0).$$

Le point x_0 appartient à l'un des ensembles $(F_n\setminus F_{n-1})\setminus P$, P_n^- et P_n^+. Si $x_0\in(F_n\setminus F_{n-1})\setminus P$, c'est-à-dire si x_0 n'est l'extrémité d'aucun intervalle (a,b) adjacent à l'ensemble $E_n\cup F_n$, (88_1), (101) et (102) entraînent les relations suivantes:

$$\underline{g}^-(x_0)=\bar{g}^+(x_0)=g'_{n-1}(x_0),\quad \bar{g}^-(x_0)\geqslant g'_{n-1}(x_0)+1,\quad \underline{g}^+(x_0)\leqslant g'_{n-1}(x_0)-1$$

si n est un nombre pair;

$$\underline{g}^-(x_0)\leqslant -g'_{n-1}(x_0)-1,\quad \bar{g}^-(x_0)=\underline{g}^+(x_0)=-g'_{n-1}(x_0),\quad \bar{g}^+(x_0)\geqslant -g'_{n-1}(x_0)+1$$

si n est un nombre impair. Il s'ensuit donc toujours que les dérivées unilatères $g^-(x_0)$ et $g^+(x_0)$ n'existent pas. Si $x_0\in P_n^-$ ou $x_0\in P_n^+$, c'est-à-dire si $x_0=a$ ou $x_0=b$, où (a,b) est un intervalle adjacent à l'ensemble $E_n\cup F_n$, on obtient de la même façon $\underline{g}^-(a)=\underline{g}^+(a)=g'_{n-1}(a)$ et $\bar{g}^-(a)\geqslant g'_{n-1}(a)+1$ ou $g^-(b)=\bar{g}^+(b)=g'_{n-1}(b)$ et $\underline{g}^+(b)\leqslant g'_{n-1}(b)-1$ si n est un nombre pair, ou $\underline{g}^-(a)\leqslant -g'_{n-1}(a)-1$ et $\bar{g}^-(a)=g^+(a)=-g'_{n-1}(a)$ ou $g^-(b)=\underline{g}^+(b)$ $=-g'_{n-1}(b)$ et $\bar{g}^+(b)\geqslant -g'_{n-1}(b)+1$ si n est un nombre impair.

Les relations que nous venons d'établir impliquent les assertions (94)–(96). Pour démontrer (97) il suffit de remarquer que pour le point considéré $x_0\in F_n\setminus F_{n-1}$, en vertu des relations (101), (102) et (89) la dérivée symétrique de la fonction g n'existe pas.

Nous prouverons maintenant la condition (98). Soit x_0 un point quelconque de l'ensemble $G\setminus F=I\setminus(E\cup F)$. Désignons par (a_n,b_n) $(n=1,2,\ldots)$ celui des intervalles (a,b) adjacents à l'ensemble $E_n\cup F_n$ qui contient le point x_0. Les points y_n, z_n appartiennent à l'intervalle

(a_n, b_n) (voir (87_1)) et, en même temps, n'appartiennent pas à l'intervalle $\langle a_{n+1}, b_{n+1}\rangle$. En effet, si $y_n \epsilon \langle a_{n+1}, b_{n+1}\rangle$ ou $z_n \epsilon \langle a_{n+1}, b_{n+1}\rangle$, on aboutirait, à cause de (90), à l'alternative $g_n(y_n) = g_n(x_0)$ ou $g_n(z_n) = g_n(x_0)$, qui est en contradiction avec (87_1).

Nous définirons maintenant les points u_n et v_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Posons

$$u_n = \begin{cases} y_n, & \text{si} \quad g_{n+1}(x_0) \leqslant \frac{1}{2}|g_n(x_0) - g_n(y_n)|, \\ a_{n+1}, & \text{si} \quad g_{n+1}(x_0) > \frac{1}{2}|g_n(x_0) - g_n(y_n)|, \end{cases}$$

$$v_n = \begin{cases} z_n, & \text{si} \quad g_{n+1}(x_0) \leqslant \frac{1}{2}|g_n(z_n) - g_n(x_0)|, \\ b_{n+1}, & \text{si} \quad g_{n+1}(x_0) > \frac{1}{2}|g_n(z_n) - g_n(x_0)|. \end{cases}$$

Les points u_n et v_n ainsi définis sont éléments de l'ensemble $E_{n+1} \cup F_{n+1}$ en vertu de (87) et ils satisfont aux conditions:

$$\text{(103)} \qquad a_n < y_n \leqslant u_n \leqslant a_{n+1} < x_0 < b_{n+1} \leqslant v_n \leqslant z_n < b_n;$$

$$a_n, b_n, u_n, v_n \to x_0 \quad \text{si} \quad n \to \infty;$$

$$\text{(104)} \qquad \begin{aligned} &\left| \frac{g_n(x_0) - g_n(u_n)}{x_0 - u_n} - \frac{g_{n+1}(x_0) - g_{n+1}(u_n)}{x_0 - u_n} \right| > \tfrac{1}{8}, \\ &\left| \frac{g_n(v_n) - g_n(x_0)}{v_n - x_0} - \frac{g_{n+1}(v_n) - g_{n+1}(x_0)}{v_n - x_0} \right| > \tfrac{1}{8}. \end{aligned}$$

Les inégalités (103) sont évidentes, tandis que l'assertion $a_n, b_n, u_n, v_n \to x_0$ si $n \to \infty$ résulte de l'égalité $|G \setminus F| = 0$. Les démonstrations des inégalités (104) étant semblables, nous établirons seulement la première d'elles. Désignons par w le premier membre de cette inégalité. Alors

$$w = \frac{|g_n(x_0) - g_n(u_n) - g_{n+1}(x_0)|}{x_0 - u_n},$$

puisque la condition $u_n \epsilon E_{n+1} \cup F_{n+1}$ entraîne $g_{n+1}(u_n) = 0$. Nous distinguerons maintenant deux cas: le premier où $g_{n+1}(x_0) \leqslant \frac{1}{2}[g_n(x_0) - g_n(y_n)]$, et le second où $g_{n+1}(x_0) > \frac{1}{2}[g_n(x_0) - g_n(y_n)]$. Dans le premier cas on a $u_n = y_n$, $g_{n+1}(x_0) \geqslant 0$ et

$$w \geqslant \frac{|g_n(x_0) - g_n(y_n)| - g_{n+1}(x_0)}{x_0 - y_n} \geqslant \tfrac{1}{2} \left| \frac{g_n(x_0) - g_n(y_n)}{x_0 - y_n} \right| > \tfrac{1}{8},$$

cette dernière inégalité résultant de l'inégalité (87_1). Dans le second cas on a $u_n = a_{n+1}$, $g_n(x_0) = g_n(u_n)$ (d'après (90)) et

$$w = \frac{g_{n+1}(x_0)}{x_0 - u_n} > \tfrac{1}{2} \left| \frac{g_n(x_0) - g_n(y_n)}{x_0 - y_n} \right| > \tfrac{1}{8}.$$

En nous appuyant sur la première inégalité (104) nous trouverons une limitation du quotient

$$\left|\frac{g(x_0)-g(u_n)}{x_0-u_n}\right|.$$

Remarquons d'abord que $g_m(x_0) = g_m(u_n)$ pour $m < n$ et que $\varrho(x_0, E_m \cup F_{m-1}) \leqslant \varrho(x_0, u_n) = x_0 - u_n$ pour $m \geqslant n+2$. (L'égalité résulte de (90), tandis que l'inégalité résulte de la relation $u_n \in E_m \cup F_{m-1}$, qui a lieu pour $m \geqslant n+2$). En tenant compte de cela et de (83), (84) et (104) on obtient

$$\begin{aligned}\left|\frac{g(x_0)-g(u_n)}{x_0-u_n}\right| &\geqslant w - \sum_{1}^{n-1}\left|\frac{g_m(x_0)-g_m(u_n)}{x_0-u_n}\right| - \sum_{n+2}^{\infty}\left|\frac{g_m(x_0)-g_m(u_n)}{x_0-u_n}\right| \\ &\geqslant w - \sum_{n+2}^{\infty}\frac{g_m(x_0)}{x_0-u_n} \geqslant w - \sum_{n+2}^{\infty}\frac{2^{-m}\varrho^2(x_0, E_m\cup F_{m-1})}{x_0-u_n} \\ &\geqslant w - \sum_{n+2}^{\infty}2^{-m}(x_0-u_n) > \tfrac{1}{8}-(x_0-u_n).\end{aligned}$$

D'une façon analogue on démontre l'inégalité

$$\frac{g(v_n)-g(x_0)}{v_n-x_0} > \tfrac{1}{8}-(v_n-x_0).$$

De ces inégalités et de (103) on déduit $\underline{g}^-(x_0) \leqslant -\frac{1}{8}$ ou $\bar{g}^-(x_0) \geqslant \frac{1}{8}$, et en même temps $\underline{g}^+(x_0) \leqslant -\frac{1}{8}$ ou $\bar{g}^+(x_0) \geqslant \frac{1}{8}$.

De la définition de la fonction g résulte la limitation

$$\begin{aligned}&\left|\frac{g(x_0)-g(a_n)}{x_0-a_n} - (-1)^{n-1}\frac{g_n(x_0)-g_n(a_n)}{x_0-a_n}\right| \\ &\qquad\leqslant \sum_{1}^{n-1}\left|\frac{g_m(x_0)-g_m(a_n)}{x_0-a_n}\right| + \sum_{n+1}^{\infty}\left|\frac{g_m(x_0)-g_m(a_n)}{x_0-a_n}\right|.\end{aligned}$$

La première somme du second membre de cette inégalité est égale à zéro, car en vertu de (90) $g_m(x_0) = g_m(a_n)$ pour $m < n$. Cherchant une limitation de la seconde somme, remarquons que 1° $\varrho(x_0, E_m \cup F_{m-1}) \leqslant x_0 - a_n$ pour $m > n$ (puisque $a_n \in E_m \cup F_{m-1}$) et 2° $g_m(a_n) = 0$ pour $m \geqslant n$ (puisque $a_n \in E_m \cup F_m$). Finalement

$$\begin{aligned}\left|\frac{g(x_0)-g(a_n)}{x_0-a_n} - (-1)^{n-1}\frac{g_n(x_0)}{x_0-a_n}\right| &\leqslant \sum_{n+1}^{\infty}\frac{g_m(x_0)}{x_0-a_n} \\ &\leqslant \sum_{n+1}^{\infty}2^{-m}\frac{\varrho^2(x_0, E_m\cup F_{m-1})}{x_0-a_n} \leqslant x_0-a_n.\end{aligned}$$

En mettant dans la dernière inégalité successivement $n = 2j$ et $n = 2j-1$ on obtient

$$\underline{g}^-(x_0) \leqslant \liminf_{j\to\infty} \frac{g(x_0)-g(a_{2j})}{x_0-a_{2j}} = \liminf_{j\to\infty} \frac{-g_{2j}(x_0)}{x_0-a_{2j}} \leqslant 0,$$

$$\bar{g}^-(x_0) \geqslant \limsup_{j\to\infty} \frac{g(x_0)-g(a_{2j-1})}{x_0-a_{2j-1}} = \limsup_{j\to\infty} \frac{g_{2j-1}(x_0)}{x_0-a_{2j-1}} \geqslant 0.$$

De ces inégalités et de l'alternative: $\underline{g}^-(x_0) \leqslant -\frac{1}{8}$ ou $\bar{g}^-(x_0) \geqslant \frac{1}{8}$ on conclut que la fonction g n'admet pas de dérivée à gauche au point x_0.

Par un raisonnement semblable au précédent on établit d'abord l'inégalité

$$\left|\frac{g(b_n)-g(x_0)}{b_n-x_0} - (-1)^n \frac{g_n(x_0)}{b_n-x_0}\right| \leqslant b_n - x_0,$$

puis les relations $\underline{g}^+(x_0) \leqslant 0$ et $\bar{g}^+(x_0) \geqslant 0$, qui, rapprochées de l'alternative: $\underline{g}^+(x_0) \leqslant \frac{1}{8}$ ou $\bar{g}^+(x_0) \geqslant \frac{1}{8}$, signifient que la fonction g n'admet pas de dérivée à droite au point x_0. L'assertion (98) est ainsi démontrée.

Nous démontrerons l'assertion (99). Conservant les hypothèses et les notations admises dans la démonstration de la condition (98), on peut écrire

$$(105)\qquad \frac{g(x_0+h_h)-g(x_0-h_n)}{2h_n} = \sum_1^\infty \frac{g_m(x_0+(-1)^{m-1})-g_m(x_0-h_n)}{2h_n} = 0,$$

car, en vertu de (87_2) et (90), on a $a_n < x_0 - h_n < x_0 + h_n < b_n$ et $g_m(x_0 + h_n) = g_m(x_0 - h_n)$ pour $m < n$, tandis qu'en vertu de (87_2) et (84) $g_n(x_0 \pm h_n) = 0$, $x_0 \pm h_n \epsilon E_m \cup F_m$ et $g_m(x_0 \pm h_n) = 0$ pour $m > n$. En faisant le même raisonnement on obtient l'inégalité

$$\left|\frac{g(x_0+k_n)-g(x_0-k_n)}{2k_n}\right| = \left|\frac{g_n(x_0+k_n)-g_n(x_0-k_n)}{2k_n}\right| > \frac{1}{4}$$

qui, avec l'égalité (105), indique que la fonction g n'admet pas de dérivée symétrique au point x_0.

19.3. Nous passons à la définition de la fonction f. En vertu du lemme 16 il existe une fonction h satisfaisant dans l'intervalle I à la condition de Lipschitz avec la constante $p < \frac{1}{2}$, dérivable en tout point $x \epsilon I \setminus P$, où P est l'ensemble défini dans 19.2, admettant une dérivée symétrique en tout point de l'ensemble P, mais n'admettant pas de dérivée unilatère $h^-(x)$ et $h^+(x)$ pour $x \epsilon P$.

Posons $f = g + h$. La fonction f est évidemment bornée et continue dans l'intervalle I. En tout point de l'ensemble $E = I \setminus G$ elle a une dérivée finie. En aucun point de l'ensemble G elle n'admet, avec la fonction g (voir

(97) et (99)), pas de dérivée symétrique. De même, en aucun point de l'ensemble $G\setminus P = (G\setminus F)\cup(F\setminus P)$ les fonctions f et g n'admettent de dérivée unilatère ((94), (98)). Il reste encore à montrer qu'en aucun point de l'ensemble P la fonction f n'admet de dérivée unilatère. Pour $a\in P^-$ la dérivée $f^+(a)$ n'existe pas, car $g^+(a)$ est finie et $h^+(a)$ n'existe pas. La dérivée à gauche $f^-(a)$ n'existe pas non plus, car d'après (95)

$$\underline{f}^-(a) \leqslant \underline{g}^-(a)+p < \bar{g}^-(a)-p \leqslant \bar{f}^-(a).$$

On démontre de même que pour $b\in P^+$ les dérivées $f^-(b)$ et $f^+(b)$ n'existent pas, c.q.f.d.

20. Théorème. *Soit E un sous-ensemble de l'intervalle I. Si $E = A\cup B$, où $A\in G_\delta$, $B\in G_{\delta\sigma}$ et $|B| = 0$, il existe une fonction f satisfaisant aux conditions:*

f est continue et bornée dans l'intervalle I;

$f'(x)$ existe et est finie pour $x\in I\setminus E$;

la dérivée symétrique $Df(x)$ n'existe pas (même infinie) pour $x\in E$;

les dérivées unilatères $f^-(x)$ et $f^+(x)$ n'existent pas (même infinies) pour $x\in E$.

Démonstration. Sans nuire à la généralité des raisonnements, on peut admettre que $|I| < \infty$ et $A\cap B = \emptyset$. Désignons par g et h les fonctions dont l'existence résulte respectivement du lemme 19 (pour $G = A$) et du lemme 15 (pour $G = B$).

La fonction $f = g+h$ satisfait aux conditions du théorème 20, c.q.f.d.

21. Théorème. *Pour que l'ensemble E soit l'ensemble de tous les points où une fonction f continue dans l'intervalle I n'admet pas de dérivée symétrique (ou de dérivée symétrique finie), il faut et il suffit que $E = A\cup B \subset I$, où $A\in G_\delta$, $B\in G_{\delta\sigma}$ et $|B| = 0$.*

Ce théorème résulte des théorèmes 5 et 20.

22. Théorème. *Pour que l'ensemble E soit l'ensemble de tous les points où une fonction f continue dans l'intervalle I n'admet ni de dérivée symétrique (ou de dérivée symétrique finie), ni de dérivée unilatère finie, il faut et il suffit que $E = A\cup B \subset I$, où $A\in G_\delta$, $B\in G_{\delta\sigma}$ et $|B| = 0$.*

Ce théorème résulte du corollaire 9 et du théorème 20.

23. Théorème. *Pour que l'ensemble E soit l'ensemble de tous les points où une fonction f définie dans l'intervalle I n'admet pas de dérivée unilatère finie, il faut et il suffit que $E = A\cup B\subset I$, où $A\in G_\delta$, $B\in G_{\delta\sigma}$ et $|B| = 0$.*

Ce théorème résulte des théorèmes 7 et 20.

24. Théorème. *Si la fonction f est continue dans l'intervalle I, l'ensemble de tous les points où la dérivée symétrique $Df(x)$ n'existe pas, mais les dérivées symétriques extrêmes $\underline{D}f(x)$ et $\bar{D}f(x)$ sont finies, est de classe $G_{\delta\sigma}$ et de mesure nulle. Inversement, si $E\subset I$, $E\in G_{\delta\sigma}$ et $|E| = 0$, il existe* *une fonction f continue dans l'intervalle I telle que*

$$E = \{x \epsilon I\colon\ -\infty < \underline{D}f(x) < \overline{D}f(x) < \infty\}.$$

25. THÉORÈME. *Si la fonction f est continue dans l'intervalle I, l'ensemble E de tous les points x où la fonction f n'admet ni de dérivée symétrique ni de dérivée unilatère, mais où les dérivées symétriques extrêmes $\underline{D}f(x)$ et $\overline{D}f(x)$ sont finies, est de classe $G_{\delta\sigma}$ et de mesure nulle. Inversement, si $E \subset I$, $E \epsilon G_{\delta\sigma}$ et $|E| = 0$, il existe une fonction f continue dans l'intervalle I telle que*

$$E = \{x \epsilon I\colon\ -\infty < \underline{D}f(x) < \overline{D}f(x) < \infty,\ \underline{f}^-(x) < \bar{f}^-(x) \text{ et } \underline{f}^+(x) < \bar{f}^+(x)\}.$$

Les théorèmes 24 et 25 résultent facilement de 3.2, 4, 6 et 15.

26. Pour terminer signalons encore deux théorèmes qui résultent facilement du lemme 4 et du corollaire 3.2 et qui correspondent aux théorèmes analogues pour les nombres dérivés ordinaires.

26.1. *Si la fonction f est continue dans l'intervalle I, l'ensemble $E = \{x \epsilon I\colon\ -\infty < \underline{D}f(x) \leqslant \overline{D}f(x) < \infty\}$ est du type F_σ.*

26.2. *Si la fonction f est continue dans l'intervalle I, l'ensemble $E = \{x\colon\ Df(x) = \infty\}$ est de classe $F_{\sigma\delta}$ et de mesure nulle.*

TRAVAUX CITÉS

[1] S. Banach, *Über Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen*, Studia Math. 3 (1931), p. 174–179.

[2] A. S. Besicovitch, *Diskussion der stetigen Funktionen in Zusammenhang mit der Frage über ihre Differenzierbarkeit*, Bull. Ac. Sc. de Russie (1925), p. 527.

[3] P. du Bois-Reymond, *Versuch einer Klassifikation der willkürlichen Funktionen reeller Argumente*, Journal für Math. 79 (1875), p. 21–37.

[4] A. Brudno, *Непрерывность и дифференцируемость*, Матем. сборник (Н. С.) 55, 13, (1943), p. 119–134.

[5] L. Filipczak, *Exemple d'une fonction continue privée de dérivée symétrique partout*, Colloq. Math. 20 (1969), p. 249–253.

[6] — *O funkcji ciągłej bez pochodnej symetrycznej i bez pochodnych jednostronnych*, Uniwersytet Łódzki, 1969 (dissertation doctorale).

[7] A. Khintchine, *Recherches sur la structure des fonctions mesurables*, Fund. Math. 9 (1927), p. 212–279.

[8] K. Kuratowski, *Topologie*, vol. 1, Monografie Matematyczne t. 20, Warszawa 1948.

[9] S. Mazurkiewicz, *Sur les fonctions non dérivables*, Studia Math. 3 (1931), p. 92–94.

[10] W. Orlicz, *Sur les fonctions continues non dérivables*, Fund. Math. 34 (1947), p. 45–60.

[11] E. D. Pepper, *On continuous functions without a derivative*, ibid. 12 (1928), p. 244–253.

[12] R. Sikorski, *Funkcje rzeczywiste*, t. 1, Monografie Matematyczne t. 35, Warszawa 1958.

[13] B. L. van der Waerden, *Ein einfaches Beispiel einer nicht differenzierbaren stetigen Funktion*, Math. Zeitschr. 32 (1930), p. 474–475.

[14] W. H. Young, *La symétrie de structure des fonctions de variables réelles*, Bull. Sci. Math. 2e série, 52 (1928), p. 265–280.

[15] Z. Zahorski, *О множестве точек недифференцируемости непрерывной функции*, Матем. Сборник (Н. С.) (941), т. 9. вып 3, p. 487–510.

[16] — *O zbiorze punktów nieróżniczkowalności funkcji dowolnej*, Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego, t. 21, p. 23–26.

[17] — *Sur la première dérivée*, Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950), p. 1–54.

[18] — *Sur les ensembles des points de divergence de certaines intégrales singulières*, Annales de la Soc. Pol. de Math. 19 (1946), p. 66–105.

UNIVERSITÉ DE ŁÓDŹ
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES