ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
VIII (1965)

J. WOJTOWICZ (Warszawa)

O FUNKCJI ANAMORFOZUJĄCEJ, SEPARUJĄCEJ ZMIENNE W RÓWNANIU Z CZTEREMA ZMIENNYMI

Jeśli chcemy wykonać nomogram dla równania z czterema zmiennymi $F(x, y, z, w) = 0$, pierwszym zadaniem jest rozdzielenie zmiennych parami, tak by równanie można było przedstawić w postaci $f(x, y) = g(z, w)$. W takim przypadku można wykonać łączony nomogram siatkowy.

Treścią niniejszej pracy są warunki, jakie musi spełniać funkcja czterech zmiennych, by można było w niej rozdzielić zmienne.

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli*

1° *funkcja $F(x, y, z, w)$ jest określona i ciągła w kostce K określonej nierównościami*

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \quad y_0 \leqslant y \leqslant y_1, \quad z_0 \leqslant z \leqslant z_1, \quad w_0 \leqslant w \leqslant w_1;$$

2° *funkcja F ma w kostce K pochodne cząstkowe aż do rzędu drugiego włącznie,*
to na to, by funkcja F miała postać

$$F \equiv F(x, y, z, w) \equiv H(x, y) + M(z, w), \tag{1}$$

potrzeba i wystarcza, aby w kostce K spełnione były tożsamości

$$\text{(2a) } F_{xz} \equiv 0, \quad \text{(2b) } F_{xw} \equiv 0, \quad \text{(2c) } F_{yz} \equiv 0, \quad \text{(2d) } F_{yw} \equiv 0.$$

Dowód konieczności. Z twierdzenia o różniczkowalności uogólnionych wielomianów nomograficznych ([1]) wynika, że funkcje $H(x, y)$ i $M(z, w)$ mają pochodne cząstkowe. Stąd łatwo już sprawdzić, że funkcja F spełnia tożsamości (2).

Dowód dostateczności. Z (2a) i (2b) wynika

$$F_x \equiv A(x, y). \tag{3}$$

Stąd

$$F \equiv \int A(x, y)dx + B(y, z, w). \tag{4}$$

Wstawiając (4) do tożsamości (2c) i (2d) otrzymujemy

$$B_y \equiv C(y), \tag{5}$$

a stąd

$$B \equiv \int C(y)\,dy + D(z, w). \tag{6}$$

Wstawiając (6) do tożsamości (4) i przyjmując

$$H(x, y) \equiv \int A(x, y)\,dx + \int C(y)\,dy, \qquad M(z, w) \equiv D(z, w)$$

otrzymujemy funkcję postaci (1).

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli*

1° *funkcja* $F(x, y, z, w)$ *jest określona i ciągła w kostce* K, *określonej jak w twierdzeniu* 1;

2° *funkcja* F *ma w kostce* K *ciągłe pochodne cząstkowe aż do rzędu trzeciego włącznie*;

3° *w kostce* K *spełnione są warunki* $F_x \neq 0$, $F_y \neq 0$, $F_z \neq 0$, $F_w \neq 0$, *to na to, aby istniała dwukrotnie różniczkowalna funkcja anamorfozująca* $\Phi(u)$, *sprowadzająca równanie* $F(x, y, z, w) = 0$ *do postaci* (1) *i taka, że* $\Phi'(u) \neq 0$, *potrzeba i wystarcza, by w kostce* K *spełnione były tożsamości*

$$\text{(7a)}\quad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{F_z}{F_w}\right] \equiv 0, \qquad \text{(7b)}\quad \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{F_x}{F_y}\right] \equiv 0,$$

$$\text{(7c)}\quad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{F_z}{F_w}\right] \equiv 0, \qquad \text{(7d)}\quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\ln\left|\frac{F_x}{F_z}\right| \equiv 0.$$

Dowód konieczności. Załóżmy, że istnieje funkcja anamorfozująca $\Phi(u)$ taka, że

$$\Phi[F] \equiv H(x, y) + M(z, w).$$

Ponieważ $\Phi'(u) \neq 0$, istnieje funkcja $u = \varphi(\Phi)$ odwrotna do $\Phi(u)$. Stąd $F \equiv \varphi[H(x, y) + M(z, w)]$. Łatwo teraz można sprawdzić, że tożsamości (7) są spełnione.

Dowód dostateczności. Z (7) wynikają tożsamości:

$$\frac{F_{xz}}{F_x F_z} \equiv \frac{F_{xw}}{F_x F_w} \equiv \frac{F_{yz}}{F_y F_z} \equiv \frac{F_{yw}}{F_y F_w}, \tag{8}$$

$$\frac{A_x}{F_x} \equiv \frac{A_y}{F_y} \equiv \frac{A_z}{F_z} \equiv \frac{A_w}{F_w}, \tag{9}$$

gdzie $A \equiv \dfrac{F_{xz}}{F_x F_z}$.

Z uwagi na twierdzenie o zależności funkcyjnej oraz na warunki (9) istnieje funkcja $\Psi(u)$ taka, że $\dfrac{F_{xz}}{F_x F_z} \equiv \Psi(u)$.

Ponieważ funkcje F, F_x i F_{xz} są ciągłe oraz $F_x \neq 0$ i $F_z \neq 0$, funkcja $\Psi(u)$ jest ciągła. Stąd wynika, że istnieje funkcja $\Phi(u)$ spełniająca tożsamość

$$\frac{\Phi''(u)}{\Phi'(u)} \equiv -\frac{F_{xz}}{F_x F_z}. \tag{10}$$

Biorąc pod uwagę tożsamości (8) otrzymujemy jeszcze trzy analogiczne tożsamości. Tożsamości te oraz tożsamość (10) można napisać w postaci

$$\text{(11a)} \quad \frac{\partial^2 \Phi[F]}{\partial x \partial z} \equiv 0, \qquad \text{(11b)} \quad \frac{\partial^2 \Phi[F]}{\partial x \partial w} \equiv 0,$$

$$\text{(11c)} \quad \frac{\partial^2 \Phi[F]}{\partial y \partial z} \equiv 0, \qquad \text{(11d)} \quad \frac{\partial^2 \Phi[F]}{\partial y \partial w} \equiv 0.$$

Z twierdzenia 1 wynika, że $\Phi[F] \equiv H(x, y) + M(z, w)$.

TWIERDZENIE 3. *Jeżeli funkcja $F(x, y, z, w)$ spełnia założenia twierdzenia 2 oraz jeżeli istnieją dwie funkcje anamorfozujące, sprowadzające równanie $F(x, y, z, w) = 0$ do postaci* (1), *to różnią się one co najwyżej stałym czynnikiem.*

Z tożsamości (10) mamy

$$\Phi(u) \equiv C_1 \int \left[\exp \int \Psi(u) du\right] du + C_2.$$

Oznaczając $P(u) \equiv \int[\exp \Psi u du] du$ i wstawiając $\Phi(0) = 0$ mamy

$$\Phi(u) \equiv C_1 [P(u) - P(0)].$$

Podamy teraz metodę obliczenia funkcji $H(x, y)$ i $M(z, w)$. W przypadku, gdy znana jest postać $\Phi(u)$, którą można obliczyć z tożsamości (10), zagadnienie jest stosunkowo łatwe. Jednak rozwiązanie tożsamości (10) nastręcza poważne trudności rachunkowe. Po pierwsze trzeba obliczyć drugą pochodną, co oczywiście nie jest trudne, lecz praktycznie często długie i bardzo żmudne. Po drugie trzeba prawą stronę przedstawić jako funkcję F, co nastręcza najwięcej trudności rachunkowych. Tutaj rachunki są długie, a często nie można tego praktycznie wykonać, gdyż F może być nieelementarną funkcją. Podamy teraz metodę obliczenia w kwadraturach funkcji $H(x, y)$ oraz $M(z, w)$.

Z tożsamości

$$\Phi[F] \equiv H(x, y) + M(z, w). \tag{12}$$

wynikają równości

(13a) $H_x(x, y) \equiv \Phi'[F]F_x,$ (13b) $H_y(x, y) \equiv \Phi'[F]F_y,$

(13c) $M_z(z, w) \equiv \Phi'[F]F_z,$ (13d) $M_w(z, w) \equiv \Phi'[F]F_w.$

Z założeń twierdzenia 2 wynika, że prawe strony tych tożsamości są różne od zera. Zatem, w rozpatrywanej kostce K, także lewe strony są różne od zera.

Niech punkt $P(\xi, \eta, \zeta, \omega)$ będzie dowolnym punktem należącym do kostki K, spełniającym równanie $F(\xi, \eta, \zeta, \omega) = 0$.

Z tożsamości (13) mamy

$$H_x \equiv \frac{F_x(x, y, \zeta, \omega)}{F_z(x, y, \zeta, \omega)} M_z(\zeta, \omega), \tag{14a}$$

$$H_y \equiv \frac{F_y(x, y, \zeta, \omega)}{F_z(x, y, \zeta, \omega)} M_z(\zeta, \omega), \tag{14b}$$

$$M_z \equiv \frac{F_z(\xi, \eta, z, w)}{F_x(\xi, \eta, z, w)} H_x(\xi, \eta), \tag{14c}$$

$$M_w \equiv \frac{F_w(\xi, \eta, z, w)}{F_x(\xi, \eta, z, w)} H_x(\xi, \eta). \tag{14d}$$

Z tożsamości (14) otrzymujemy

$$H \equiv M_z(\zeta, \omega)R(x, y)+C_1, \tag{15a}$$

$$M \equiv H_x(\xi, \eta)\theta(z, w)+C_2. \tag{15b}$$

Stąd mamy

$$\Phi[F] \equiv M_z(\zeta, \omega)R(x, y)+H_x(\zeta, \eta)\theta(z, w)+C_1+C_2.$$

Przyjmując $\Phi[F] = 0$ i wstawiając zamiast x, y, z, w dowolną czwórkę zmiennych spełniającą równanie $F = 0$, np. ξ, η, ζ, ω, mamy

$$C_1+C_2 = -M_z(\zeta, \omega)R(\xi, \eta)-H_x(\xi, \eta)\theta(\zeta, \omega).$$

Zatem $\Phi[F]$ ma postać

$$\Phi[F] \equiv M_z(\zeta, \omega)[R(x, y)-R(\xi, \eta)]+H_x(\xi, \eta)[\theta(z, w)-\theta(\zeta, \omega)].$$

Z tożsamości (15) wynikają równości

$$H_x(\xi, \eta) \equiv M_z(\zeta, \omega)R_x(\xi, \eta), \qquad M_z(\zeta, \omega) \equiv H_x(\xi, \eta)\theta_z(\zeta, \omega).$$

A więc $\Phi[F]$ przyjmuje ostatecznie postać

$$\Phi(F) \equiv H_x(\xi, \eta)[\theta_z(\zeta, \omega)R(x, y)-\theta_z(\zeta, \omega)R(\xi, \eta)+\theta(z, w)-\theta(\zeta, \omega)].$$

Ponieważ założyliśmy, że $\Phi[F] = 0$ otrzymujemy szukane równanie.

PRZYKŁAD. Sprowadzić do postaci (1) równanie

$$xyzw - xy\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-w^2} + \sqrt{1-x^2y^2}\sqrt{1-z^2}\,w + z\sqrt{1-x^2y^2}\sqrt{1-w^2} = 0. \tag{16}$$

Obliczamy pierwsze pochodne cząstkowe

$$F_x \equiv \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}\left[zw\sqrt{1-x^2y^2} - \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-w^2}\sqrt{1-x^2y^2} - xyw\sqrt{1-z^2} - xyz\sqrt{1-w^2}\right],$$

$$F_y \equiv \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}\left[zw\sqrt{1-x^2y^2} - \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-w^2}\sqrt{1-x^2y^2} - xyw\sqrt{1-z^2} - xyz\sqrt{1-w^2}\right],$$

$$F_z \equiv \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}\left[zw\sqrt{1-x^2y^2} - \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-w^2}\sqrt{1-x^2y^2} - xyw\sqrt{1-z^2} - xyz\sqrt{1-w^2}\right],$$

$$F_w \equiv \frac{-1}{\sqrt{1-w^2}}\left[zw\sqrt{1-x^2y^2} - \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-w^2}\sqrt{1-x^2y^2} - xyw\sqrt{1-z^2} - xyz\sqrt{1-w^2}\right].$$

Następnie obliczamy:

$$\frac{F_z}{F_w} \equiv \frac{\sqrt{1-w^2}}{\sqrt{1-z^2}}, \qquad \frac{F_x}{F_y} \equiv \frac{y}{x}, \qquad \frac{F_x}{F_z} \equiv \frac{-y\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-x^2y^2}}.$$

Widzimy, że tożsamości (7) są spełnione, istnieje zatem funkcja $\Phi(F)$ taka, że $\Phi[F] \equiv H(x,y)+M(z,w)$.

Obliczamy teraz funkcje $H(x,y)$ i $M(z,w)$. Z tożsamości (14a) i (14b) mamy

$$H_x(x,y) \equiv \frac{-y}{\sqrt{1-x^2y^2}}\sqrt{1-\zeta^2}\,M_z(\zeta,\omega), \tag{17a}$$

$$H_y(x,y) \equiv \frac{-x}{\sqrt{1-x^2y^2}}\sqrt{1-\zeta^2}\,M_z(\zeta,\omega). \tag{17b}$$

Z (17a) otrzymujemy

$$H(x,y) \equiv -\sqrt{1-\zeta^2}\,M_z(\zeta,\omega)\arcsin xy + \alpha(y).$$

Różniczkując względem y i porównując z (17b) mamy $\alpha(y) = C_1$, a stąd otrzymujemy funkcję $H(x,y)$

$$H(x,y) \equiv -\sqrt{1-\zeta^2}\,M_z(\zeta,\omega)\arcsin xy + C_1.$$

Z tożsamości (14c) i (14d) obliczamy

$$M_z(z, w) \equiv -\frac{\sqrt{1-\xi^2\eta^2}}{\eta}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}H_x(\xi, \eta),$$

$$M_w(z, w) \equiv -\frac{\sqrt{1-\xi^2\eta^2}}{\eta}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}H_x(\xi, \eta).$$

Stąd otrzymujemy

$$M(z, w) \equiv -\frac{\sqrt{1-\xi^2\eta^2}}{\eta}H_x(\xi, \eta)\arcsin z+\arcsin w+C_2.$$

Następnie obliczamy

$$M_z(\zeta, \omega) \equiv -\frac{\sqrt{1-\xi^2\eta^2}}{\eta}H_x(\xi, \eta)\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

Stąd

$$H(x, y)+M(z, w) \equiv$$

$$\equiv \frac{\sqrt{1-\xi^2\eta^2}}{\eta}H_x(\xi, \eta)\arcsin xy -$$

$$-\frac{\sqrt{1-\xi^2\eta^2}}{\eta}H_x(\xi, \eta)[\arcsin z+\arcsin w]+C_1+C_2.$$

Ponieważ, z definicji funkcji anamorfozującej, dwa równania $F = 0$ i $\Phi[F] = 0$ są równoważne, $H(x, y)+M(z, w) = 0$. Stałe C_1+C_2 obliczamy z równania $H(x, y)+M(z, w) = 0$, wstawiając dowolną czwórkę liczb należącą do kostki K i spełniającą równanie $F = 0$. Taką czwórką jest np. czwórka $\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Stąd

$$-C_1-C_2 = \frac{\sqrt{1-\xi^2\eta^2}}{\eta}H_x(\xi, \eta)\left[\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right],$$

a zatem $C_1+C_2 = 0$.

Równanie $H(x, y)+M(z, w) = 0$ ma postać

$$\frac{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}}{\eta}H_x(\xi, \eta)[\arcsin xy-\arcsin z-\arcsin w] = 0.$$

Ponieważ $H_x(x, y) \neq 0$ w kostce K, równanie przyjmuje ostatecznie postać

$$\arcsin xy-\arcsin z-\arcsin w = 0.$$

Prace cytowane

[1] J. Wojtowicz, *Über die korrekte Definition des Ranges eines nomographischen Polynoms und über die Stetigkeit und Differenzierbarkeit der verallgemeinerten nomographischen Polynome*, Ann. Polon. Math. 8 (1960), str. 177-183.

[2] — *Metody sprowadzania równań czwartego i piątego rzędu nomograficznego do postaci kanonicznej*, Zastosow. Mat. 5 (1960), str. 1-20.

Praca wpłynęła 27. 1. 1964

Я. ВОЙТОВИЧ (Варшава)

ОБ АНАМОРФОЗУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ, ОТДЕЛЯЮЩЕЙ ПЕРЕМЕННЫЕ В УРАВНЕНИИ С ЧЕТЫРЬМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе доказаны необходимые и достаточные условия того ((7)), чтобы уравнение

$$F(x, y, z, w) = 0$$

было равносильно уравнению

$$f(x, y) = g(z, w).$$

Кроме того показано, что функции $f(x, y)$ и $g(z, w)$ можно найти в квадратурах.

J. WOJTOWICZ (Warszawa)

ON THE ANAMORPHIZING FUNCTION SEPARATING THE VARIABLES IN AN EQUATION WITH FOUR VARIABLES

SUMMARY

The author proves the necessary and sufficient conditions for the equation

$$F(x, y, z, w) = 0$$

to be equivalent to the equation see (conditions (7))

$$f(x, y) = g(z, w).$$

In addition, it is shown that the functions $f(x, y)$ and $g(z, w)$ can be calculated in quadratures.
