SINGULARITIES
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 20
PWN-POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1988

DISTANCE AUX FIBRES D'UN SOUS-ANALYTIQUE

GILLES RABY

Département de Mathématique, Université de Poitiers,
Poitiers, France

L'objet de cet article est de démontrer une propriété des fibres d'un ensemble sous-analytique. Contrairement à [5] cette propriété sera montrée sans utiliser le théorème de désingularisation d'Hironaka, nous n'utiliserons que les propriétés des sous-analytiques démontrées de façon élémentaire dans [1].

Le résultat donné a pour conséquence immédiate la *séparation régulière avec paramètre* pour les sous-analytiques ([4]).

1. Notations et résultats

Pour $y \in \boldsymbol{R}^p$ et $Y \subset \boldsymbol{R}^p$, $d(y, Y)$ désigne la distance euclidienne de y à Y. Si Y est vide, on pose $d(y, Y) = 1$.

Soit $\pi\colon \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^p \to \boldsymbol{R}^n$ la projection canonique, pour $M \subset \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^p$ et $x \in \boldsymbol{R}^n$ on pose $M_x = \{y \in \boldsymbol{R}^p \mid (x, y) \in M\}$.

1.1. THÉORÈME. *Etant donné $M \subset \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^p$ un sous-analytique compact, et K un compact de $\boldsymbol{R}^p$, il existe des ensembles sous-analytiques compacts $\emptyset = X_s \subset X_{s-1} \subset \ldots \subset X_0 = \pi(M)$ et des constantes $C > 0$, et $N \in \boldsymbol{N}$, tels que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant s$, pour tout $x \in X_{i-1}$ et tout $y \in K$:*

$$d(x, X_i)^N \cdot d(y, M_x)^N \leqslant C d\big((x, y), M\big).$$

Remarque. On montrera de plus que si $\pi | M\colon M \to \pi(M)$ est une application ouverte alors on peut prendre $s = 1$, c'est-à-dire que

$$d(y, M_x)^N \leqslant C d\big((x, y), M\big), \quad \text{pour tout } (x, y) \in \pi(M) \times K.$$

1.2. COROLLAIRE. *Sous les hypothèses et notations du théorème précédent, il existe une constante $N \in \boldsymbol{N}$ telle que, pour tout $y \in K$*

$$d(y, M_x)^N \leqslant C(x) \cdot d\big((x, y), M\big), \quad \textit{pour tout } x \in \boldsymbol{R}^n,$$

où $C(x) > 0$ *ne dépend que de* x.

En effet d'après le théorème il suffit de poser

$$C(x) = C/d(x, X_i)^N \quad \text{lorsque } x \in X_{i-1} \setminus X_i,$$

et

$$C(x) = 1/d(x, \pi(M)) \quad \text{si } x \notin \pi(M).$$

1.3. Nous savons que les ensembles sous-analytiques vérifient la propriété de séparation régulière (cf. par exemple [3], p. 136–137, pour une démonstration élémentaire). Nous pouvons donc en déduire:

Separation régulière avec parametre. *Etant donné deux sous-analytiques compacts* $A, B \subset \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^p$, *et* K *un compact de* $\boldsymbol{R}^p$, *il existe une constante* $N \in \boldsymbol{N}$ *telle que, pour tout* $y \in K$

$$d(y, A_x \cap B_x)^N \leqslant C(x)\big(d(y, A_x) + d(y, B_x)\big), \quad \textit{pour tout } x \in \pi(A \cap B),$$

où $C(x) > 0$ *ne dépend que de* x.

Remarque. En général $C(x)$ dépend de x, cependant elle ne dépend que de $A_x \cap B_x$ et varie de façon sous analytique avec x, de plus lorsque π: $A \cap B \to \pi(A \cap B)$ est ouverte alors on peut choisir $C(x)$ indépendamment de x.

L'inégalité précédente provient successivement de:
$\exists\, k \in \boldsymbol{N}$ tel que $d(y, A_x \cap B_x)^k \leqslant C(x) d\big((x, y), A \cap B\big)$ (cf. 1.2);
A et B sont régulièrement séparés;
$d\big((x, y), A\big) \leqslant d(y, A_x)$ lorsque $A_x \neq \emptyset$.

2. Démonstration du théorème 1.1

Pour $E \subset \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^p$, $d_{E,\pi}$ désigne l'application $(x, y) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^p \to d(y, E_x)$.

2.1. Lemme. *Si* E *est sous-analytique borné alors*

(a) $d_{E,\pi}$ *est une application sous-analytique*;

(b) *il existe* Y *sous-analytique, fermé dans* $\pi(E)$, *tel que* $\dim Y < \dim \pi(E)$ *et tel que* π: $E \setminus \pi^{-1}(Y) \to \pi(E) \setminus Y$ *soit une application ouverte*;

(c) *si* $\pi | E$: $E \to \pi(E)$ *est propre* (resp. *ouverte*) *alors* $d_{E,\pi}$ *est semi-continue inférieurement* (resp. *supérieurement*) *sur* $\pi(E) \times \boldsymbol{R}^p$.

Démonstration. Montrons d'abord que le graphe de $d_{E,\pi}$ est sous-analytique. On a

$$\{(z, t) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R} \mid d_{E,\pi}(z) = t\}$$
$$= \{(z, 1) \mid z \notin \pi^{-1}\pi(E)\} \cup \{(z, t) \mid z \in \pi^{-1}\pi(E), d_{E,\pi}(z) = t\}$$

or

$$\{(z, t) \in \pi^{-1}\pi(E) \times \boldsymbol{R} \mid d_{E,\pi}(z) < t\}$$
$$= \{(z, t) \in \pi^{-1}\pi(E) \mid \exists u \in E;\ \pi(z) = \pi(u),\ d(z, u) < t\}$$

ce dernier ensemble est sous-analytique puisque E est borné. De plus on a

$$\{(z, t) \in \pi^{-1}\pi(E) \times \boldsymbol{R} \mid d_{E,\pi}(z) > t\}$$
$$= \{(z, t) \in \pi^{-1}\pi(E) \times \boldsymbol{R} \mid \exists \varepsilon \in]0, 1];\ d(z, u) \geqslant t + \varepsilon$$
$$\forall u \in E \text{ tel que } \pi(z) = \pi(u)\},$$

pour montrer la sous-analyticité de cet ensemble, il suffit de vérifier que $\{(z, t, \varepsilon) \mid d(z, u) \geqslant t + \varepsilon\ \ \forall u \in E$ tel que $\pi(z) = \pi(u)\}$ est sous-analytique, ce qui est évident car son complémentaire $\{(z, t, \varepsilon) \mid \exists u \in E$ tel que $\pi(z) = \pi(u),\ d(z, u) < t + \varepsilon\}$ est sous-analytique.

(b) On sait qu'il existe S sous-analytique, fermé dans $\pi(E)$, tel que $\dim S < \dim \pi(E)$, $\pi(E) \backslash S$ étant lisse de dimension pure k (cf. par exemple [2] pour une démonstration élémentaire).

Donc en changeant E en $E \backslash \pi^{-1}(S)$, on peut supposer que $\pi(E)$ est lisse de dimension pure k. Soit alors A semi-analytique borné de $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^q$ tel que $E = \sigma(A)$ où σ: $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^q \to \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^p$ est la projection canonique. Il existe (cf. [1]) une famille finie de feuilles semi-analytiques $\{\Gamma_j\}$, c'est-à-dire des ensembles Γ_j semi-analytiques et lisses, telle que $A = \bigcup \Gamma_j$ et le rang de $\pi \circ \sigma \mid \Gamma_j$ est constant sur Γ_j. Quitte à faire des translations on peut supposer, sans changer $E = \sigma(A)$, que $\bar{\Gamma}_j \cap \bar{\Gamma}_i = \emptyset$ pour $i \neq j$.

Considérons l'ensemble B, réunion des feuilles Γ_j vérifiant

$$\operatorname{rang}(\pi \circ \sigma \mid \Gamma_j) < \dim \pi(E),$$

B est une feuille semi-analytique, donc $Y = \overline{\pi \circ \sigma(B)} \cap \pi(E)$ est sous-analytique et $\dim Y < \dim \pi(E)$, de plus

$$\pi \circ \sigma \colon A \backslash (\pi \circ \sigma)^{-1}(Y) \to \pi(E) \backslash Y$$

est une submersion donc c'est une application ouverte. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \backslash (\pi \circ \sigma)^{-1}(Y) \arrow[rr, "\pi \circ \sigma"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & \pi(E) \backslash Y \\ & E \backslash \pi^{-1}(Y) \arrow[ur, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

permet alors d'affirmer que π: $E \backslash \pi^{-1}(Y) \to \pi(E) \backslash Y$ est ouverte.

(c) Supposons maintenant que π: $E \to \pi(E)$ soit propre. Alors $E \cap \pi^{-1}\pi(z)$ est compact non vide pour $z \in \pi^{-1}\pi(E)$, donc pour tout $t \in \boldsymbol{R}$

$$\{z \in \pi^{-1}\pi(E) \mid d_{E,\pi}(z) \leqslant t\} = \{z \in \pi^{-1}\pi(E) \mid \exists u \in E \text{ tel que } \pi(z) = \pi(u),$$
$$d(z, u) \leqslant t\} = \theta(X)$$

où $X = \{(z, u) \in \pi^{-1}\pi(E) \times E \mid \pi(z) = \pi(u),\ d(z, u) \leqslant t\}$ et $\theta(z, u) = z$, ainsi $\theta(X)$ est fermé dans $\pi^{-1}\pi(E)$ car θ: $X \to \pi^{-1}\pi(E)$ est propre (en effet si K est un compact de $\pi^{-1}\pi(E)$ alors $E \cap \pi^{-1}\pi(K)$ est un compact de E et $X \cap \theta^{-1}(K)$ est fermé dans $K \times (E \cap \pi^{-1}\pi(K))$). Par suite $d_{E,\pi}$ est semi-continue inférieurement sur $\pi^{-1}\pi(E)$. □

Il nous reste à montrer que $\{z \in \pi^{-1}\pi(E) \mid d_{E,\pi}(z) < t\} = U$ est ouvert dans $\pi^{-1}\pi(E)$ dès que π: $E \to \pi(E)$ est ouverte.

Soit $z_0 \in U$, alors il existe $u \in E$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\pi(z_0) = \pi(u)$ et $d(z_0, u) < t - \varepsilon$, or $\pi\{z \in E \mid d(z, u) < \varepsilon/2\}$ est un voisinage ouvert de $\pi(u) = \pi(z_0)$ dans $\pi(E)$, donc $\{x \in \pi^{-1}\pi(E) \mid d(z_0, x) < \varepsilon/2\} \cap \pi^{-1}\pi\{z \in E \mid d(z, u) < \varepsilon/2\}$ est un voisinage ouvert de z_0 dans $\pi^{-1}\pi(E)$ et ce voisinage est contenu dans U.

2.2. *Remarque.* Si $E \subset \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^p$ est sous-analytique compact, et si $\pi | E$: $E \to \pi(E)$ est ouverte, alors d'après 2.1, l'application $d_{E,\pi}$ est sous-analytique, continue sur $\pi^{-1}\pi(E)$ et nulle sur E. Donc (cf. [3] page 136) pour tout compact K de $\boldsymbol{R}^p$, il existe $N \in \boldsymbol{N}$ et $C > 0$ telles que $(d_{E,\pi})^N \leqslant C \cdot d_E$ sur $\pi(E) \times K$, où $d_E((x, y)) = d((x, y), E)$. Ceci démontre la remarque qui suit le théorème 1.1.

2.3. Lemme. *Etant donné $M \subset \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^p$ un sous-analytique compact, et K un compact de $\boldsymbol{R}^p$, il existe un sous-analytique compact $D(M) \subset \pi(M)$ et des constantes $C > 0$ et $N \in \boldsymbol{N}$ tels que* $\dim D(M) < \dim \pi(M)$ *et pour tout* $(x, y) \in \pi(M) \times K$

$$d(x, D(M))^N \cdot d(y, M_x)^N \leqslant C d((x, y), M).$$

Démonstration. D'après 2.1(b) il existe $D(M)$ compact tel que $D(M) \subset \pi(M)$, $\dim D(M) < \dim \pi(M)$, π: $M \backslash \pi^{-1} D(M) \to \pi(M) \backslash D(M)$ étant ouverte. π: $E \to \pi(E)$ est donc propre et ouverte pour $E = M \backslash \pi^{-1} D(M)$, par suite (2.1), l'application $d_{E,\pi}$ est sous-analytique bornée et continue sur $\pi(E) \times \boldsymbol{R}^p$. Ainsi $d_{\pi^{-1}D(M)} \cdot d_{E,\pi}$ est sous-analytique, continue sur $\pi(M) \times \boldsymbol{R}^p$ et nulle sur M. On termine alors comme dans 2.2. □

2.4. Suite et fin. Pour obtenir la démonstration du théorème 1.1, il suffit maintenant de poser, avec les notations de 2.3:

$$M_0 = M, \quad M_1 = M \cap \pi^{-1} D(M), \ \ldots, \ M_{k+1} = M_k \cap \pi^{-1} D(M_k) = M \cap \pi^{-1} D(M_k)$$

et $X_i = \pi(M_i)$.

La famille $\{X_i\}$ est finie car $X_i = D(M_{i-1})$ pour $i \geqslant 1$, d'où

$$\dim X_{i+1} = \dim D(M_i) < \dim \pi(M_i) = \dim X_i.$$

Donc d'après 2.3, il existe des constantes $\alpha > 0$ et $\beta \in N$ telles que

$$d(x, X_i)^\beta \cdot d(y, M_{i-1_x})^\beta \leqslant \alpha \cdot d((x, y) M_{i-1}) \quad \forall (x, y) \in X_{i-1} \times K.$$

On remarque alors que $d(y, M_x) \leqslant d(y, M_{i-1_x})$ et que $M_{i-1} = M \cap (X_{i-1} \times \boldsymbol{R}^p)$, pour conclure il suffit donc d'utiliser la séparation régulière entre M et $X_{i-1} \times \boldsymbol{R}^p$.

Références

[1] Z. Denkowska, S. Łojasiewicz et J. Stasica, *Certaines propriétés élémentaires des ensembles sous-analytiques*, Bull. Acad. Sci. Pol. 27 (1979), 529–535.

[2] Z. Denkowska et J. Stasica, *Sur la stratification sous-analytique*, Bull. Acad. Sci. Pol. 30 (1982), 337–340.

[3] S. Łojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques*, Institute des Hautes Études Scientifiques, Bûres-sur-Yvette 1965.

[4] S. Łojasiewicz et K. Wachta, *Séparation régulière avec paramètre pour les sous-analytiques*, Bull. Acad. Sci. Pol. 30 (1982).

[5] G. Raby, *Théorème des zéros sous-analytique et inégalités de Łojasiewicz*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 294 (1982) et Lecture Notes in Math. 1028 (lemmes 4.3.2 et 4.3.3).

Presented to the semester
Singularities
15 February–15 June, 1985