POLSKA AKADEMIA NAUK · INSTYTUT MATEMATYCZNY

ROZPRAWY MATEMATYCZNE

KOMITET REDAKCYJNY
KAROL BORSUK redaktor
ANDRZEJ MOSTOWSKI MARCELI STARK
STANISŁAW TURSKI

XIX

Z. SEMADENI

Sur les ensembles clairsemés

WARSZAWA 1959
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

S. 7133

COPYRIGHT 1959

by

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA (Poland), ul. Miodowa 10

All Rights Reserved

No part of this book may be translated or reproduced in any form, by mimeograph or any other means, without permission in writing from the publishers.

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

INTRODUCTION

Le problème central du travail présent est celui de la *fermeture clairsemée* des ensembles clairsemés. On sait que la fermeture d'un ensemble clairsemé n'est pas nécessairement clairsemée (voir [15] (⁰), p. 46).

J'en fais usage dans le chapitre 1 pour donner quelques caractérisations des ensembles clairsemés.

Certaines propriétés des fermetures d'ensembles clairsemés, en partie connues, sont réunies dans le chapitre 2.

Le chapitre 3 est consacré à des exemples établissant la limite d'atténuation possible des hypothèses admises dans les théorèmes démontrés.

Le chapitre 4 contient des résultats concernant le prolongement des ensembles clairsemés aux ensembles clairsemés compacts. J'y donne une analyse et quelques généralisations du théorème de Knaster et Urbanik d'après lequel chaque espace métrique, clairsemé et séparable est homéomorphe à un sous-ensemble d'un espace métrique, clairsemé et compact.

Le théorème faisant l'objet du chapitre 5 établit une propriété générale des ensembles clairsemés compacts. La modification de l'une de ses hypothèses conduirait à la solution négative du problème général de la compactification clairsemée d'ensembles non-métrisables. Enfin, j'y introduis la notion d'espace *parfaitement disconnexe* et j'envisage les relations entre les notions d'espaces clairsemés, extrêmement disconnexes et parfaitement disconnexes.

Je dois au Professeur Bronisław Knaster plusieurs remarques et conseils dont j'ai profité au cours de ce travail.

Notations

Les termes et notations que j'emploie dans la suite sont presque conformes à la monographie de Kuratowski [15]. En particulier, $\mathcal{I}$ désignera le segment $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\mathcal{C}$ l'ensemble de Cantor, $\mathcal{N}$ l'ensemble des nombres naturels, $\mathcal{R}$ l'ensemble des nombres rationnels, pour lequel je pose en outre $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}\cdot\mathcal{I}$, $|x-y|$ ou $\varrho(x, y)$ la distance entre x et y, $K(x, r)$ la sphère $\underset{y}{E}\{|x-y| < r\}$, et $\varrho(A, B)$ l'écart entre ensembles A et B.

(⁰) Les nombres en crochets correspondent à ceux des travaux cités, p. 37.

Tous les espaces considérés seront des $\boldsymbol{T}_1$ au sens de la classification d'Alexandroff et Hopf (voir [1], p. 59). En outre, je désigne par $\boldsymbol{FG}$ la classe des ensembles qui sont à la fois fermés et ouverts, et j'introduis la terminologie suivante pour les espaces topologiques $\mathcal{X}$:

totalement disconnexe, c'est-à-dire ne contenant aucun ensemble connexe infini,

extrêmement disconnexe lorsque la fermeture de tout ensemble ouvert y est ouverte,

de dimension 0 ou 0-*dimensionnel* lorsque une famille d'ensembles $\boldsymbol{FG}$ y constitue une base d'entourages,

compact lorsque tout revêtement ouvert de $\mathcal{X}$ en contient un revêtement fini,

$\aleph_0$-*compact* lorsque tout revêtement ouvert et dénombrable de $\mathcal{X}$ en contient un revêtement fini (ou bien lorsque tout ensemble infini possède le dérivé non-vide).

J'emploie l'expression usuelle que $\mathcal{X}$ satisfait au *premier axiome de dénombrabilité* pour dire que chaque point x de $\mathcal{X}$ possède une base dénombrable d'entourages. $\mathrm{Noy}(A)$ désignera la somme de tous les sous-ensembles de A denses en soi (le *noyau* de A). Les ensembles clairsemés sont donc déterminés par l'égalité $\mathrm{Noy}(C) = 0$.

Soit ξ un nombre ordinal. $A^{(\xi)}$ désignera le *dérivé d'ordre* ξ de A (voir [15], p. 150); de plus, $A^{(0)} = A$ et $A' = A^{(1)}$.

A_ξ désignera la *cohérence d'ordre* ξ, définie comme suit:

$$A_1 = A\cdot A', \qquad A_{\xi+1} = A_\xi\cdot A'_\xi, \qquad A_\lambda = \prod_{\xi<\lambda} A_\xi \quad \text{pour } \lambda \text{ limites.}$$

On a évidemment $A_\xi \subset A\cdot A^{(\xi)}$, mais l'inclusion inverse n'est pas vraie(1).

$\Gamma_0(\xi)$ désignera l'ensemble des nombres ordinaux inférieurs à ξ, muni de la topologie ordinaire; $\Gamma(\xi) = \Gamma_0(\xi+1)$ est donc l'ensemble des nombres ordinaux ne dépassant pas ξ.

$\omega = \omega_0$, $\Omega = \omega_1$ et ω_2 désigneront les plus petits nombres ordinaux de puissance $\aleph_0$, $\aleph_1$ et $\aleph_2$ respectivement.

$\beta(E)$ désignera la compactification maximum de E au sens de Stone et Čech (voir [4], p. 831 et [24], p. 463).

Enfin, x et y étant des points de $\mathcal{X}$, nous ne ferons pas de distinction entre eux et les ensembles (x) et (y) dont ils sont les seuls éléments. On aura donc par exemple $A+x = A+(x)$ et $A-y = A-(y)$.

---

(1) Pour les règles de calcul des opérations superposées de dérivation d'ensembles, de cohérence, complément, noyau etc., voir les travaux de Zarycki [28] et [29], Sanders [21] et Halfar [6].

CHAPITRE I

CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES POUR QU'UN ESPACE MÉTRIQUE SOIT CLAIRSEMÉ

1.1. Considérons les ensembles clairsemés situés dans les espaces métrisables. Il n'est pas nécessaire que ces ensembles soient séparables.

On connaît plusieurs caractérisations élémentaires des ensembles clairsemés à l'aide des invariants topologiques intrinsèques, en particulier celles des travaux de Cantor, de Young, de Denjoy, de Mazurkiewicz et Sierpiński, de Fréchet, de Lusin, enfin, de Knaster et Urbanik(²). Elles peuvent être présentées sous la forme des conditions 1°-9° dont chacune est à la fois nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble C satisfasse à la condition 0°, c'est-à-dire soit clairsemé:

0° *C ne contient aucun sous-ensemble dense en soi et non-vide (définition de Cantor)*;

1° *C est épuisable par points isolés, c'est-à-dire que tous ses points peuvent être rangés en une suite (dénombrable ou non) bien ordonnée*

$$x_1, x_2, \ldots, x_\xi, \ldots \qquad (\xi < \gamma)$$

et telle qu'aucun x_η ne soit un point d'accumulation de l'ensemble des points qui lui succèdent

$$x_{\eta+1}, x_{\eta+2}, \ldots, x_\xi, \ldots \qquad (\eta < \xi < \gamma);$$

2° *il existe un nombre ordinal δ tel que*

$$C = \sum_{0 \leqslant \xi < \delta} C \cdot (C^{(\xi)} - C^{(\xi+1)});$$

3° *C est non-dense dans tout ensemble parfait*;

4° *$C_\gamma = 0$ pour un certain nombre ordinal γ*;

(²) Voir [15], p. 46, [27], p. 65, [18], p. 21, [5], p. 330, 337 et 336-341, [16], p. 59, [13], p. 194 et 198.

5° *C satisfait à la condition de Denjoy relativement à un certain sur-espace métrique complet, c'est-à-dire qu'il est possible d'assigner de façon biunivoque à chaque point $x \in C$ un entourage V_x de ce point de manière qu'aucun point de l'espace ne soit intérieur à une infinité d'ensembles V_x;*

6° *C est un G_δ satisfaisant à la condition de Denjoy;*

7° *C est homéomorphe à un espace métrique complet et dénombrable;*

8° *C est homéomorphe à un ensemble dénombrable de nombres ordinaux (cette homéomorphie diffère en général de l'ordination 1°);*

9° *C est topologiquement contenu dans un sous-ensemble fermé et dénombrable de $\mathcal{C}$.*

Les conditions 1°-4° sont vraies déja dans les espaces topologiques T_1; les autres le sont dans les espaces métrisables et séparables(³).

1.2. On sait que l'ensemble $\mathcal{C}$ est le dérivé d'un ensemble isolé, par exemple de celui des milieux d'intervalles ouverts qui complètent $\mathcal{C}$. De même, $I_1, I_2, \ldots$ désignant la suite de ces intervalles, on peut choisir dans tout I_n deux suites, l'une décroissante et l'autre croissante, qui convergent vers les bouts de I_n, gauche et droit respectivement; alors, l'union de toutes ces suites constitue l'ensemble isolé dont le dérivé est $\mathcal{C}$.

Ce procédé peut être généralisé comme suit:

THÉORÈME 1. *La famille de tous les ensembles fermés et non-denses dans un espace métrique coïncide avec celle des dérivés de tous les ensembles isolés, à savoir:*

(i) *pour chaque ensemble non-dense A, il existe un ensemble isolé C tel que $A \cdot C = 0$ et $\bar{A} = C'$*(⁴),

(ii) *le dérivé de tout ensemble clairsemé est non-dense; en général: l'intérieur* $\mathrm{Int}(E')$ *du dérivé d'un ensemble quelconque E est dense en soi.*

(³) On peut citer d'autres caractérisations des ensembles clairsemés parmi les ensembles de telle ou telle classe spéciale. Par exemple, Katětov [11] à démontré que *pour qu'un espace régulier et dénombrable soit clairsemé, il faut et il suffit qu'il en existe une image biunivoque et continue qui soit un espace compact.*

On peut formuler aussi des caractérisations des espaces clairsemés parmi les espaces T_2 compacts; en particulier, *pour qu'un espace T_2 compact soit clairsemé, il faut et il suffit que l'intervalle fermé ne soit pas une image continue de cet espace.* Les ensembles Ω compacts et clairsemés peuvent être également caractérisés par des propriétés des mesures boreliennes dans Ω et par la dimension linéaire de l'espace de Banach $C(\Omega)$ formé des fonctions réelles continues, définies dans Ω (voir [20]).

(⁴) Si l'on n'admet pas que l'espace satisfait au premier axiome de dénombrabilité, (i) n'est pas vrai. Par exemple, dans l'espace $\beta(\mathcal{N}) - \mathcal{N}$ le dérivé de tout ensemble est indénombrable ou vide (voir [19], p. 109). La condition (ii) et les corollaires 1 et 2 qui en résultent sont vrais dans les espaces T_1.

Démonstration de (i). Posons (pour $n = 1, 2, \ldots$)

$$B_n = \underset{x}{E}\left\{\frac{1}{n+1} \leqslant \varrho(x, A) < \frac{1}{n}\right\}$$

et désignons par $\mathfrak{G}_n$ la famille de tous les ensembles H contenus dans B_n et tels que $|x-y| \geqslant 1/n$ pour $x \in H$ et $y \in H$ où $x \neq y$. La famille $\mathfrak{G}_n$ est semi-ordonnée par la relation d'inclusion, et l'élément maximum de chaque famille monotone d'ensembles de $\mathfrak{G}_n$ appartient à $\mathfrak{G}_n$. D'après le théorème de Kuratowski [14], il existe donc dans $\mathfrak{G}_n$ un ensemble saturé C_n. Évidemment, $\varrho(x, C_n) < 1/n$ pour chaque $x \in B_n$. L'ensemble $C_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n$ étant isolé, reste à démontrer que $C_0' = \bar{A}$.

Soit $x \in \bar{A}$. En vertu de $\mathrm{Int}(\bar{A}) = 0$, on a $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ pour une suite $x_n \in B_{k_n}$ où $k_n \to \infty$. Les inégalités

$$\varrho(x, C_0) \leqslant \varrho(x, C_{k_n}) \leqslant \varrho(x, B_{k_n}) + \frac{1}{k_n} \leqslant |x - x_{k_n}| + \frac{1}{k_n}$$

(pour $n = 1, 2, \ldots$) entraînent $\varrho(x, C_0) = 0$, d'où $\bar{A} \subset C_0'$. L'inclusion inverse est évidente.

Démonstration de (ii). L'ensemble $G = \mathrm{Int}(E')$ est dense en soi pour chaque E, puisque $G = G \cdot E' \subset (G \cdot E)' \subset G'$, de plus, $E \cdot G$ qui est dense dans G est dense en soi (voir [15], p. 35, 44 et 46). En particulier, si C est clairsemé, il vient

$$\mathrm{Int}(C') \subset \overline{\bar{C} \cdot \mathrm{Int}(C')} \subset \overline{C \cdot \mathrm{Int}(C')} \subset \overline{\mathrm{Noy}(C)} = 0.$$

Corollaires. 1. *Tout ensemble clairsemé C satisfait à l'inclusion $C \subset \overline{C - C'}$. Aucun ensemble isolé $A \subset C$ tel que $A \neq C - C'$ n'y satisfait.*

En effet, en vertu de (ii), $C \cdot C'$ est non-dense dans C, donc $C - C' = C - C \cdot C'$ est dense dans C. La deuxième conclusion est évidente.

2. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace topologique C soit clairsemé est que le dérivé $C^{(\xi)}$ soit non-dense dans $C^{(\eta)}$ pour tout $\xi > \eta$* (5).

3. *La famille des fermetures d'ensembles clairsemés coïncide avec celle des fermetures d'ensembles isolés; la famille des dérivés d'ensembles clairsemés coïncide avec celle des dérivés d'ensembles isolés.*

---

(5) R. Duda a remarqué qu'également la condition *la cohérence C_ξ est non-dense dans C_η pour tout $\xi > \eta$* est nécessaire et suffisante pour que C soit clairsemé. En effet, si C est clairsemé, C_η l'est aussi, donc (d'après le corollaire 1) $C_{\eta+1}$ est non-dense dans C_η. Réciproquement, si tout $C_{\eta+1}$ est non-dense dans C_η, il existe un η_0 tel que $C_{\eta_0} = 0$.

4. *Si A est un sous-ensemble non-dense d'un espace métrique $\mathcal{X}$ dense en soi, il existe un ensemble non-dense $B \subset \mathcal{X}$ tel que $A \subset B'$ et $A \cdot B = 0$.*

En effet, si $\mathcal{X}$ est dense en soi, l'ensemble C_0 considéré dans la démonstration du théorème 1 est non-dense (voir [15], p. 47).

5. *Pour que chaque sous-ensemble non-dense A d'un espace métrique $\mathcal{X}$ soit contenu dans le dérivé d'un ensemble $B \subset \mathcal{X}$ disjoint de A et non-dense, il faut et il suffit que le dérivé de $\mathcal{X}$ soit un domaine fermé, c'est-à-dire que l'on ait $\mathcal{X}' = \overline{\mathrm{Int}(\mathcal{X}')}$.*

En effet, si $\mathcal{X}'$ est non-dense dans un ensemble ouvert $G \neq 0$, aucun sous-ensemble de $G - \mathcal{X}'$ n'est non-dense dans G, donc $G \cdot \mathcal{X}'$ n'est contenu dans le dérivé d'aucun ensemble non-dense et disjoint de $G \cdot \mathcal{X}'$.

6. *Pour que chaque sous-ensemble non-dense A d'un espace métrique $\mathcal{X}$ soit contenu dans le dérivé d'un ensemble non-dense B, il faut et il suffit que le dérivé de $\mathcal{X}$ soit dense en soi, c'est-à-dire que l'on ait $\mathcal{X}' = \mathrm{Noy}(\mathcal{X})$.*

1.3. On sait que le dérivé d'un ensemble clairsemé n'est pas nécessairement clairsemé (cf. [15], p. 46). Je vais montrer que, dans tout espace métrique non-clairsemé, il existe un ensemble clairsemé ayant la fermeture qui ne l'est pas.

THÉORÈME 2. *Chacune des 9 conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour qu'un espace métrique*(6) *$\mathcal{X}$ soit clairsemé:*

(1) *L'inclusion $C \subset \overline{C - C'}$ n'est valable que pour les sous-ensembles clairsemés de $\mathcal{X}$.*

(2) *La fermeture d'un ensemble isolé quelconque est un ensemble clairsemé.*

(3) *Pour tout ensemble clairsemé $C \subset \mathcal{X}$, il existe un nombre ordinal α tel que le dérivé $C^{(\alpha)}$ est vide.*

(4) *Pour tout ensemble clairsemé $C \subset \mathcal{X}$, il existe un nombre ordinal γ tel que $C \cdot C^{(\gamma)} = 0$, c'est-à-dire que C soit disjoint de ses dérivés d'ordre suffisamment élevé.*

(5) *L'interieur de tout ensemble parfait non-vide est non-vide.*

(6) *Tout ensemble non-dense $A \subset \mathcal{X}$ est clairsemé.*

(7) *Aucun ensemble $A \subset \mathcal{X}$ n'est homéomorphe à l'ensemble $\mathcal{R}$.*

---

(6) Dans des espaces non-métrisables, le théorème 2 ne subsiste que partiellement. Par exemple, l'espace $\mathcal{X} = \beta(\mathcal{N}) - \mathcal{N}$ satisfait à la condition (7), puisque $\beta(\mathcal{N}) - \mathcal{N}$ ne contient aucun ensemble compact de puissance $\aleph_0$, et cependant cet espace est dense en soi, car s'il y avait un point isolé, il existerait une suite croissante $n_1 < n_2 < \ldots$ de nombres naturels telle que la limite $\lim\limits_{n\to\infty} t_{n_k}$ existerait pour chaque suite $\{t_n\}$ bornée.

(8) *Tout ensemble dénombrable* $A \subset \mathcal{X}$ *est clairsemé,*

(9) *La frontière de tout ensemble* $A \subset \mathcal{X}$ *est non-dense dans* $\bar{A}$.

Démonstration. La nécessité de la condition (1) est triviale.

(1) entraîne (2). En effet, si C est isolé, les inclusions $\bar{C} \subset \overline{C-C'} \subset \overline{\bar{C}-C'} = \overline{\bar{C}-\bar{C}'}$ entraînent l'égalité $\mathrm{Noy}(\bar{C}) = 0$ en vertu de (1).

Non-(3) entraîne non-(2). En effet, supposons qu'il existe un ensemble C clairsemé et tel que $C^{(\alpha)} \neq 0$ pour tout α ordinal. La suite transfinie $\{C^{(\alpha)}\}$ étant descendante, il vient $C^{(\gamma)} = C^{(\gamma+1)}$ pour un certain nombre γ. L'ensemble $C^{(\gamma)}$ est parfait, non-vide et contenu dans $\overline{C-C'}$ d'après le corollaire 1 du théorème 1. La fermeture de l'ensemble isolé $C-C'$ ne serait donc pas un ensemble clairsemé.

(3) entraîne (4) trivialement.

Non-(5) entraîne non-(4). Soient $P = P' \neq 0$ et $\mathrm{Int}(P) = 0$. D'après le théorème 1, il existe alors un ensemble isolé C tel que $P = C'$. Etant donné un élément x quelconque de P, l'ensemble $B = C+x$ est clairsemé et on a $B^{(\alpha)} = C^{(\alpha)} = P$, donc $x \in B \cdot B^{(\alpha)}$ pour tout α.

(5) entraîne (6). En effet, $\overline{\mathrm{Noy}(A)}$ étant parfait, si A est non-dense, ce noyau est parfait et non-dense, donc vide en vertu de (5).

Non-(7) entraîne non-(6). En effet, soient $R \subset \mathcal{X}$ et $R \underset{\mathrm{top}}{=} \mathcal{R}$. L'ensemble $\mathcal{C} \cdot \mathcal{R}$ est dense en soi et non-dense dans $\mathcal{R}$. Considérons une fonction bicontinue f transformant R en $\mathcal{R}$. Alors l'ensemble $A = f^{-1}(\mathcal{C} \cdot \mathcal{R})$ est dense en soi et non-dense dans R, donc non-dense dans $\mathcal{X}$, contrairement à (6).

Non-(8) entraîne non-(7). Si un ensemble dénombrable B n'est pas clairsemé, on a $\mathrm{Noy}(B) \underset{\mathrm{top}}{=} \mathcal{R}$, car tous les ensembles dénombrables et denses en soi sont homéomorphes (cf. [15], p. 175).

La condition (8) est suffisante. En supposant que $A = \mathrm{Noy}(\mathcal{X})$ soit non-vide, nous allons en déduire par l'induction l'existence d'une suite dense en soi $r_1, r_2, \ldots$ d'élements de A. Soient $r_1 \in A$ arbitraire, $r_2 \in A$ tel que $0 < |r_1 - r_2| < 1$, $r_3 \in A$ tel que $0 < |r_1 - r_3| < \frac{1}{2}$ et $r_4 \in A$ tel que $0 < |r_2 - r_4| < \frac{1}{2}$. Ces éléments de A existent, A étant supposé dense en soi, comme le noyau de $\mathcal{X}$. Les éléments $r_1, r_2, \ldots, r_{2^n}$ étant supposés définis, soient $r_{2^n+1}, \ldots, r_{2^{n+1}}$ des éléments de A tels que $0 < |r_k - r_{2^n+k}| < 1/2^n$ pour $k = 1, 2, \ldots, 2^n$. On voit aussitôt que la suite $\{r_n\}$ est un sous-espace séparable et dense en soi de $\mathcal{X}$.

Enfin, la nécessité de la condition (9) a été établie par Kuratowski ([15], p. 47) et la suffisance en résulte immédiatement de (7).

COROLLAIRES(7). 1. *Tout ensemble parfait non-vide contient un sous-ensemble parfait, non-dense et non-vide* (en vertu de la condition (5)).

2. *En désignant par*

$\mathfrak{A}_0$ *la classe des sous-ensembles clairsemés de* $\mathcal{X}$,

$\mathfrak{A}_1$ *celle des sous-ensembles de* $\mathcal{X}$ *tels que* $C \cdot C^{(\alpha)} = 0$ *pour un certain* α,

$\mathfrak{A}_2$ *celle des sous-ensembles de* $\mathcal{X}$ *tels que* $C^{(\alpha)} = 0$ *pour un certain* α,

$\mathfrak{A}_3$ *celle des sous-ensembles de* $\mathcal{X}$ *ayant la fermeture clairsemée, on a*

$$\mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_3$$

et chacune des conditions

$$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_1 \quad \textit{et} \quad \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$$

est nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{X}$ *soit clairsemé.*

3. *Il suffit de postuler dans la définition de la notion d'espace clairsemé que* $\mathcal{X}$ *ne contienne pas d'ensemble non-dense et dense en soi (ou bien d'ensemble dense en soi et fermé, ou bien dense en soi et dénombrable).*

1.4. D'après le corollaire 2 du théorème 1, tout ensemble clairsemé contient une suite descendante d'ensembles différents dont chacun est non-dense dans tous ceux qui le précèdent. Il n'en est plus de même lorsqu'on veut construire une suite analogue ascendante; en effet, aucun espace clairsemé ne contient de telle suite infinie. Plus précisément:

THÉORÈME 3. *Etant donné un nombre ordinal infini dénombrable quelconque* γ, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace métrique* $\mathcal{X}$ *ne soit pas clairsemé est qu'il y existe une suite transfinie* $\{A_\xi\}_{\xi<\gamma}$ *ascendante d'ensembles non-vides et tels que tout* A_ξ *soit non-dense dans* $A_{\xi+1}$.

Démonstration de la nécessité. D'après le théorème 2, il suffit de montrer que la condition est satisfaite pour l'ensemble $\mathcal{R}_0$. Rangeons tous les nombres $\xi < \gamma$ en une suite $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots (n < \omega)$ et soit n_ξ l'indice de ξ_n. La suite $\{A_\xi\}_{\xi<\gamma}$ sera définie par l'induction transfinie. A_0 ne contient que le seul nombre 0. Admettons que l'ensemble A_ξ, non-dense dans le segment $\mathcal{I}$, est défini. $\mathcal{I} - \bar{A}_\xi$ se compose donc d'intervalles ouverts $I_1^{(\xi)} = (a_1^{(\xi)}, b_1^{(\xi)})$, $I_2^{(\xi)} = (a_2^{(\xi)}, b_2^{(\xi)}), \ldots$ Posons alors

$$A_{\xi+1} = \mathcal{R}_0 \cdot \overline{A_\xi + B_\xi},$$

où B_ξ est l'ensemble des nombres $a_k + \dfrac{b_k^{(\xi)} - a_k^{(\xi)}}{m \cdot 2^{n_\xi}}$ pour $k = 1, 2, \ldots$ et $m = 1, 2, \ldots$, et $A_\lambda = \mathcal{R}_0 \cdot \overline{\sum_{\eta<\lambda} A_\eta}$ pour λ limites.

(7) Ces corollaires ne sont valables que pour les espaces métrisables.

On voit que les ensembles A_ξ satisfont aux conditions du théorème (relativement à $\mathcal{R}_0$). En particulier, l'égalité $\sum_{\xi<\gamma}(1/2^{n_\xi}) = 1$ garantit que chaque A_ξ est non-dense dans $\mathcal{I}$ et que les familles $\{I_n^{(\xi)}\}_{n=1,2,\ldots}$ sont non-vides.

Remarque. On voit aussitôt que les A_ξ sont fermés dans $\mathcal{R}_0$, que les $A_{\xi+1}-A_\xi$ sont isolés et que, pour λ limites, les A_λ sont denses en soi. De plus, $\mathrm{Noy}\,(A_{\lambda+n}) = A_\lambda$ pour $n < \omega$.

Démonstration de la suffisance. Soit $A_\xi \subset A_{\xi+1} \subset \overline{A_{\xi+2}-A_{\xi+1}}$ pour $\xi < \gamma$ et $p \in \sum_{\xi<\omega} A_\xi \subset A_\omega$. Alors, $p \in A_{n_0} \subset A'_{n_0+1} \subset \big(\sum_{\xi<\omega} A_\xi\big)'$, ce qui entraîne $\mathrm{Noy}\big(\sum_{\xi<\omega} A_\xi\big) \neq 0$. Donc l'espace n'est pas clairsemé.

1.5. Les ensembles dénombrables $\mathcal{X}$ ont la propriété suivante:

(iii) *pour tout $A \subset \mathcal{X}$, la puissance de A est égale à celle de $\bar{A}$.*

Il en résulte que tout ensemble clairsemé et séparable satisfait à (iii). Nous allons montrer qu'il en est de même pour tous les ensembles clairsemés et métrisables.

LEMME 1. *Soit $\mathcal{X}$ un espace métrisable. Le plus petit nombre cardinal $\mathfrak{m}$ pour lequel il existe un ensemble de puissance $\mathfrak{m}$ dense dans $\mathcal{X}$ est égal au plus petit nombre cardinal $\mathfrak{n}$ pour lequel il existe dans $\mathcal{X}$ une base de puissance $\mathfrak{n}$ d'entourages ouverts.*

Désignons ce nombre par $\iota(\mathcal{X})$ et la puissance de E par $\pi(E)$.

LEMME 2. *La puissance d'un ensemble clairsemé $C \subset \mathcal{X}$ quelconque est égale au plus à $\iota(\mathcal{X})$.*

Les démonstrations des lemmes 1 et 2 ne sont que des généralisations des démonstrations bien connues dans le cas $\iota(\mathcal{X}) = \aleph_0$ (c'est-à-dire dans celui des $\mathcal{X}$ séparables).

THÉORÈME 4. *Pour qu'un espace métrisable $\mathcal{X}$ soit clairsemé, il faut et il suffit qu'il soit un G_δ absolu ayant la propriété* (iii).

Démonstration de la nécessité. Chaque espace clairsemé étant un G_δ absolu (cf. [15], p. 147 et 269), il s'agit d'établir (iii). Considérons $\bar{A}$ comme un sous-espace de $\mathcal{X}$. On conclut du lemme 2 que $\pi(\bar{A}) \leqslant \iota(\bar{A})$. D'autre part, $\iota(\bar{A}) = \iota(A) \leqslant \pi(A) \leqslant \pi(\bar{A})$, d'où $\pi(A) = \pi(\bar{A})$.

Démonstration de la suffisance. La propriété (iii) étant un invariant topologique, on peut admettre que $\mathcal{X}$ est un espace complet. S'il n'était pas clairsemé, il contiendrait un sous-ensemble R homéomorphe à $\mathcal{R}$ (voir le théorème 2). L'ensemble $\bar{R}$ est parfait, donc de puissance du continu (cf. [15], p. 351), et on aurait $\pi(R) < \pi(\bar{R})$.

La question s'impose si l'hypothèse que $\mathcal{X}$ est métrisable peut être remplacée, dans la démonstration de la nécessité, par celle que $\mathcal{X}$ soit un $\boldsymbol{T}_2$ compact. La réponse négative est donnée par un exemple (voir plus loin 3.18) d'un espace $\boldsymbol{T}_2$ compact, de puissance $2^{\aleph_0}$, non-métrisable, clairsemé et dont l'ensemble des points isolés est dénombrable.

CHAPITRE 2

FERMETURES DES ENSEMBLES CLAIRSEMÉS

LEMME 3. *Pour qu'un ensemble E soit somme d'un ensemble dense en soi et d'un ensemble non-dense, il faut et il suffit que, pour tout ensemble clairsemé C, la partie commune $E\cdot C$ soit non-dense.*

Démonstration. Soient A dense en soi, B non-dense et C clairsemé. Posons $E = A+B$, $G = \mathrm{Int}(\overline{A\cdot C})$ et $F = \bar{A}-G$. En vertu des relations

$$C\cdot G \subset \bar{C}\cdot G = G = \bar{A}-F = \bar{A}'-F \subset \bar{A}'-F' \subset (\bar{A}-F)' = G'$$
$$= (\bar{C}\cdot G)' \subset (\overline{C\cdot G})' = (C\cdot G)',$$

l'ensemble $C\cdot G$ est dense en soi; on a donc $G = \bar{C}\cdot G \subset \overline{C\cdot G} \subset \overline{\mathrm{Noy}(C)} = 0$. Les ensembles $A\cdot C$ et $B\cdot C$ sont non-denses, donc $(A+B)\cdot C$ l'est aussi.

Inversement, quel que soit l'ensemble E, on a

$$E = \mathrm{Noy}(E)+[E-\mathrm{Noy}(E)].$$

Si le produit $E\cdot[E-\mathrm{Noy}(E)] = E-\mathrm{Noy}(E)$ est non-dense, l'ensemble E peut être mis sous la forme de la somme requise.

THÉORÈME 5. *A étant un espace topologique régulier et satisfaisant au premier axiome de dénombrabilité*(8), *les propriétés suivantes sont équivalentes*:

(1) *Il existe un ensemble $C \subset A$ isolé et dense dans A (c'est qui équivaut à $A \subset \overline{A-A'}$).*

(2) *Le noyau de A est non-dense.*

(3) *La frontière d'un ensemble quelconque $B \subset A$ est non-dense.*

(4) *Tout ensemble $B \subset A$ est somme d'un ensemble ouvert et d'un ensemble non-dense.*

(5) *Tout sous-ensemble frontière de A est non-dense.*

(6) *Tout ensemble $B \subset A$ tel que $C\cdot B$ est non-dense pour tout C clairsemé est lui-même non-dense.*

---

(8) Tout espace T_1 contenant un sous-ensemble dense et frontière est dense en soi (voir [15], p. 46). Hewitt [7] a démontré qu'il existe un espace T_3 dense en soi qui ne contient pas de sous-ensemble dense et frontière.

Démonstration. L'équivalence des propriétés (3), (4) et (5) est bien connue (cf. Kuratowski [15], p. 38 et 47), de même que l'implication (2) $\rightarrow$ (3). Inversement, si $E = \mathrm{Noy}(A)$ n'est pas non-dense, il existe en vertu d'un théorème de Hewitt ([7], p. 331) un ensemble B dense et frontière dans $G = \mathrm{Int}(E)$, d'où $0 \neq G \subset \mathrm{Fr}(B)$. On a donc aussi l'implication (3) $\rightarrow$ (2).

(2) entraîne (1), puisque si $E = \mathrm{Noy}(A)$ est non-dense et $A - E$ est clairsemé, l'ensemble isolé $(A-E)-(A-E)'$ est dense dans $A-E$ (d'après le corollaire 1 du théorème 1); il est donc dense dans A. Réciproquement, (1) entraîne (2), car E n'étant pas non-dense, l'ensemble $G = \mathrm{Int}(E)$ est dense en soi et non-vide. Si l'ensemble isolé C est dense dans A, $C \cdot G$ est dense dans G, donc dense en soi et non-vide (cf. [15], p. 46).

Enfin, l'équivalence entre (4) et (6) est évidente en vertu du lemme 3.

Si l'on admet en outre que l'ensemble A ayant l'une quelconque des propriétés (1)-(6) se trouve situé dans un espace fixé $\mathcal{X}$, on obtient les conditions qui y caractérisent la famille des fermetures des ensembles clairsemés.

CHAPITRE 3

EXEMPLES SINGULIERS

Plusieurs de ces exemples sont connus; ils sont rappelés ici à côté des exemples nouveaux pour en avoir un aperçu complet.

3.1. *Il existe un espace métrique, séparable, clairsemé et qui n'est pas localement compact.*

Exemple: l'ensemble composé du point $(0, 0)$ et de tous les points $(1/n, 1/m)$, où $n, m = 1, 2, \ldots$, du plan des (x, y) euclidien.

3.2. *Pour tout nombre ordinal γ (dénombrable ou non), il existe un espace métrique $\mathcal{X}_\gamma$ tel que le dérivé $\mathcal{X}_\gamma^{(\gamma)}$ se compose d'un seul point.*

En effet, procédons par l'induction transfinie. Pour $\gamma = 1$, le théorème est trivial. Admettons qu'il est vrai pour un $\gamma > 1$, c'est-à-dire qu'il existe un espace $\mathcal{X}_\gamma$ pourvu de la métrique $\varrho_\gamma(x, y)$ et tel que $\mathcal{X}_\gamma^{(\gamma)}$ se compose d'un seul point x_γ. Alors, pour définir l'espace $\mathcal{X}_{\gamma+1}$, posons $A_\gamma = \mathcal{X}_\gamma - \mathcal{X}_\gamma'$ et $\mathcal{X}_{\gamma+1} = \mathcal{X}_\gamma + \sum_{x \in A_\gamma} Y(x)$, où $Y(x)$ est l'ensemble des couples (x, n) avec $n = 1, 2, \ldots$ Ensuite, introduisons les abréviations

$$x_0 = x \quad \text{et} \quad x_n = (x, n) \quad \text{pour tout} \quad x \in A_\gamma \text{ et } n = 1, 2, \ldots$$

et posons

$$\varrho_{\gamma+1}(z_1, z_2) = \varrho_\gamma(z_1, z_2) \quad \text{pour} \quad z_1, z_2 \in \mathcal{X}_\gamma',$$

$$\varrho_{\gamma+1}(z, x_n) = \varrho_\gamma(z, x) \quad \text{pour} \quad z \in \mathcal{X}_\gamma',\ x \in A_\gamma,\ z \neq x,\ n = 1, 2, \ldots,$$

$$\varrho_{\gamma+1}(x_n, y_m) = \varrho_\gamma(x, y) \quad \text{pour} \quad x, y \in A_\gamma,\ x \neq y,\ n, m = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\varrho_{\gamma+1}(x_0, x_n) = \frac{1}{2^n}\, \varrho_\gamma(x, \mathcal{X}_\gamma') \quad \text{pour} \quad x \in A_\gamma,\ n = 1, 2, \ldots,$$

$$\varrho_{\gamma+1}(x_n, x_m) = \left| \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m} \right| \varrho_\gamma(x, \mathcal{X}_\gamma') \quad \text{pour} \quad x \in A_\gamma,\ n, m = 1, 2, \ldots$$

Évidemment, $\varrho_{\gamma+1}$ est une métrique dans $\mathcal{X}_{\gamma+1}$ et $\mathcal{X}_\gamma$ est le dérivé de l'espace $\mathcal{X}_{\gamma+1}$, qui satisfait par conséquent à la thèse.

Admettons maintenant que les espaces $\mathcal{X}_\xi$ lui satisfont pour tous les $\xi < \lambda$ où λ est un nombre limite et, en outre, qu'ils sont disjoints deux à deux. Alors, pour définir l'espace $\mathcal{X}_\lambda$, désignons par a_ξ l'élément qui constitue le dérivé $\mathcal{X}_\xi^{(\xi)}$ et posons

$$\mathcal{X}_\lambda = \sum_{\xi<\lambda} \mathcal{X}_\xi,$$

$$\varrho_\lambda(x, y) = \begin{cases} \varrho_\xi(x, y) & \text{pour} \quad x, y \in \mathcal{X}_\xi, \\ \varrho_\xi(x, a_\xi) + \varrho_\eta(y, a_\eta) & \text{pour} \quad x \in \mathcal{X}_\xi,\ y \in \mathcal{X}_\eta,\ \xi \neq \eta. \end{cases}$$

On a donc $\varrho_\lambda(a_\xi, a_\eta) = 0$ pour tous les ξ et η; autrement dit, tous les points a_ξ où $\xi < \lambda$ se trouvent remplacés par un seul point a_λ. On constate facilement que $\mathcal{X}_\lambda$ ainsi défini est un espace métrique tel que $\mathcal{X}_\lambda^{(\lambda)}$ se réduit au seul point a_λ.

3.3. *Il existe un espace métrique, clairsemé et qui n'est pas localement séparable.*

Exemple: l'espace $\mathcal{X}_\gamma$ qui vient d'être construit, avec $\gamma = \Omega$.

3.4. *Il existe un espace métrique non localement séparable et dont le deuxième dérivé est vide.*

Exemple: $A_1, A_2, \ldots$ étant une suite infinie d'ensembles indénombrables et disjoints deux à deux, soit a_0 un élément qui n'appartient à aucun A_n. Alors, il suffit de poser

$$\mathcal{X} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n + a_0,$$

$$|a_0 - a| = \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad |a - b| = \frac{1}{2^n} \quad \text{pour} \quad a, b \in A_n,$$

$$|a - b| = \left| \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m} \right| \quad \text{pour} \quad a \in A_n,\ b \in A_m \text{ et } n \neq m.$$

3.5. *Il existe un espace métrique, séparable, clairsemé, possédant le deuxième dérivé vide et non contenu isométriquement dans aucun espace métrique localement compact.*

Exemple: en posant $t_k^{(0)} = 0$ pour $k = 1, 2, \ldots$ et

$$t_k^{(n,m)} = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad k \neq n, \\ \dfrac{1}{m} & \text{pour} \quad k = n \end{cases}$$

$(n, m, k = 1, 2, \ldots)$, soit $\mathfrak{X}$ l'espace de toutes les suites

$$x_{nm} = \{t_k^{(n,m)}\}_{k=1,2,\ldots} \quad \text{et} \quad x = \{t_k^{(0)}\}_{k=1,2,\ldots}$$

métrisé par la formule

$$|x' - x''| = \sup_{k=1,2,\ldots} |t_k' - t_k''|.$$

Ainsi défini, $\mathfrak{X}$ a toutes les propriétés requises (aucun entourage de x_0 n'étant totalement borné).

3.6. *Il existe un espace métrique, clairsemé et qui n'est contenu topologiquement dans aucun espace $\Gamma(\xi)$.*

Exemple: voir 3.3.

3.7. *Il existe un espace $\boldsymbol{T}_2$, clairsemé, localement compact et localement séparable (donc localement métrisable), mais non-métrisable.*

Exemple: l'espace $\Gamma_0(\Omega)$.

3.8. *Il existe un espace $\mathfrak{X}$ normal, clairsemé, non-compact et tel que $\beta(\mathfrak{X})$ est clairsemé.*

Exemple: l'espace $\Gamma_0(\Omega)$.

3.9. *Il existe un espace $\boldsymbol{T}_2$, clairsemé, $\aleph_0$-compact, localement compact et non-normal*(9).

En effet, ξ et η étant des ordinaux limites quelconques, soit $\Gamma_0(\xi, \eta)$ l'espace obtenu du produit cartésien $\Gamma(\xi) \times \Gamma(\eta)$ par l'exclusion du point (ξ, η). Évidemment, $\Gamma_0(\xi, \eta)$ est clairsemé et localement compact pour tous les ξ et η. De plus, si ξ et η ne sont pas confinaux avec ω, l'espace $\Gamma_0(\xi, \eta)$ est $\aleph_0$-compact et si ξ n'est pas confinal avec η, cet espace n'est pas normal.

En particulier, $\Gamma_0(\omega_1, \omega_2)$ satisfait donc aux conditions énoncées.

3.10. *Il existe un espace $\boldsymbol{T}_2$, compact, clairsemé et qui ne satisfait pas à la conditon suivante:*

(v) à chaque $x \in \mathfrak{X}$ vient correspondre une suite transfinie descendante $\{U_\xi\}_{\xi<\gamma}$ d'entourages de x, tels que la partie commune de tous les U_ξ se réduit au seul point x et que chaque entourage W de x contient au moins l'un des entourages U_ξ.

Exemple: l'espace $\Gamma(\omega) \times \Gamma(\Omega)$.

3.11. *Il existe un espace $\boldsymbol{T}_2$, compact, clairsemé et qui n'est homéomorphe à aucun espace $\Gamma(\xi)$.*

---

(9) Cet exemple est dû à Tychonoff ([25], p. 553).

BU

Exemple: voir 3.10.

3.12. *Il existe un espace $\boldsymbol{T}_2$, localement compact, satisfaisant à la condition* (v) *et qui n'est contenu topologiquement dans aucun espace $\Gamma(\xi)$.*

Exemple: l'espace $\Gamma_0(\omega, \Omega)$ (voir 3.9). Supposons en effet qu'il existe une homéomorphie φ entre $\mathcal{X} = \Gamma_0(\omega, \Omega)$ et un sous-ensemble d'un espace $\Gamma(\lambda)$. Désignons par A l'ensemble des couples (ω, ξ) où $\xi < \Omega$, et par B celui des couples (η, Ω) où $\eta < \omega$. Évidemment, $\varphi(A)$ et $\varphi(B)$ ne sont pas confinaux. Considérons un élément $u = (\eta_0, \Omega)$. Par suite de la bicontinuité de φ, chaque entourage

$$U_\zeta = \underset{\xi \in \Gamma(\lambda)}{E} \{\zeta < \xi \leqslant \varphi(u)\}$$

de $\varphi(u)$ contiendrait presque tous les éléments (η_0, ν) où $\nu < \Omega$. Donc, l'ensemble des points $\varphi(x)$ qui succèdent à tous les éléments de $\varphi(B)$ serait au plus dénombrable, ce qui est cependant impossible, A étant non-dense dans $\mathcal{X}$ et $\varphi(A)$ l'étant dans $\varphi(\mathcal{X})$.

3.13. *Il existe un espace C qui est un $\boldsymbol{T}_2$, clairsemé et compact et qui contient un sous-ensemble A dont un point d'accumulation x n'est point limite d'aucune suite bien ordonnée $\{x_\xi\}_{\xi<\gamma}$ d'éléments de A.*

Exemple: $C = \Gamma(\omega) \times \Gamma(\Omega)$, $\quad A = \Gamma_0(\omega) \times \Gamma_0(\Omega)$, $\quad x = (\omega, \Omega)$.

3.14. *Il existe un espace $\mathcal{X}$ qui est un $\boldsymbol{T}_2$ clairsemé, compact non-métrisable (donc ne satisfaisant pas au premier axiome de dénombrabilité), tel que $\mathcal{X}^{(2)} = 0$ et que la condition $x \in A'$ où $A \subset \mathcal{X}$ entraîne l'existence d'une suite $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$ d'éléments de A convergente vers x.*

Exemple: l'espace composé d'un ensemble indénombrable isolé, augmenté d'un point à l'infini.

3.15. *Il existe un espace Φ ayant les 10 propriétés suivantes:*

1° *Φ est dénombrable,*

2° *Φ est clairsemé et $\Phi^{(2)} = 0$,*

3° *Φ est parfaitement normal,*

4° *Φ est de dimension* 0,

5° *tout revêtement ouvert de Φ contient un revêtement dénombrable de Φ,*

6° *tout point de Φ est un $\boldsymbol{G}_\delta$,*

7° *Φ ne satisfait pas au premier axiome de dénombrabilité,*

8° *aucun sous-ensemble infini de Φ n'est compact;*

9° *Φ n'est pas localement compact,*

10° *toute compactification de Φ est indénombrable* (puisque tout espace $\boldsymbol{T}_2$, compact et dénombrable est métrisable).

Soit en effet, Φ l'ensemble des points a_{ij}, où $i, j = 0, 1, 2, \ldots$, muni de la topologie suivante: $\bar{A} = A$ lorsqu'il existe un système fini $j_1, \ldots, j_n$ d'indices tel que dans toute colonne $\{a_{ij}\}_{i=0,1,2,\ldots}$, où $j \neq j_1, \ldots$ $\ldots, j \neq j_n$, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de A, et $\bar{A} = A + a_{00}$ dans le cas contraire.

Φ a alors toutes les propriétés 1°-10°. En particulier, si $A = \bar{A} \subset \Phi$, $B = \bar{B} \subset \Phi$ et $A \cdot B = 0$, l'un des ensembles $\Phi - A$ et $\Phi - B$ est nécessairement fermé, et chaque ensemble ouvert est un F_σ. On a donc la propriété 3°. On a aussi la propriété 8°, car il n'existe aucune suite $x_n = a_{i_n k_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ convergente vers a_{00} $(x_n \neq a_{00})$.

Cet exemple est dû à Arens [2].

3.16. *Il existe un ensemble Ψ ayant les propriétés* 1°-10° *de Φ* (voir 3.15) *et, en outre, les deux propriétés suivantes:*

11° *si $\Psi' = (A+B)'$ et $A \cdot B = 0$, l'un des sous-ensembles A et B de Ψ est nécessairement fermé,*

12° *Ψ est extrêmement disconnexe.*

Soient, en effet, ξ_0 un point de $\beta(\mathcal{N}) - \mathcal{N}$ quelconque et $\Psi = \mathcal{N} + \xi_0$ supposé muni de la topologie de $\beta(\mathcal{N})$. L'exemple Ψ ainsi défini est donc plus singulier encore que Φ. Il peut être considéré comme l'ensemble des fonctionnelles linéaires de la forme $\xi_n(x) = t_n$ pour $x = \{t_1, t_2, \ldots\}$ augmenté de la fonctionnelle $\xi_0(x) = \operatorname{Lim} t_n$ où Lim désigne une limite généralisée multiplicative au sens de Mazur(10), toutes ces fonctionnelles étant définies dans l'espace $\boldsymbol{m}$ des suites numériques bornées $x = \{t_n\}$ (11) et Ψ éfant muni de la topologie faible de l'espace conjugué de $\boldsymbol{m}$. Plus précisément: la base des entourages de ξ_0 se compose de tous les ensembles

$$U(x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) = \prod_{i=1}^{n} \underset{\xi \in \Psi}{E} \{|\xi(x_i) - \xi_0(x_i)| < \varepsilon\},$$

où $x_1, \ldots, x_n \in \boldsymbol{m}$ et $\varepsilon > 0$. On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que ξ_0 soit un point d'accumulation d'une suite $n_1, n_2, \ldots$ est que, pour chaque suite $x = \{t_i\}$ telle que $t_i = 0$ ou 1, la condition $\operatorname*{Lim}_{i\to\infty} t_i = 1$ entraîne $\overline{\lim_{i\to\infty}}\, \xi_{n_i}(x) = \overline{\lim_{i\to\infty}}\, t_{n_i} = 1$.

Pour établir les propriétés 11° et 12° de Ψ, considérons deux sous-ensembles A et B de $\Psi - \xi_0$, tels que $\xi_0 \in (A+B)'$ et $A \cdot B = 0$. Posons

$$t_i = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad i \in A, \\ 1 & \text{pour} \quad i \in \Psi - (A + \xi_0). \end{cases}$$

(10) Voir [17] et aussi [9], p. 1000, 1006, 1017.

(11) $\boldsymbol{m}$ est un espace de Banach avec la norme $\|x\| = \sup_n |t_n|$.

Évidemment, $\operatorname{Lim}_{i\to\infty} t_i$ est égal à 0 ou à 1; admettons par exemple que $\operatorname{Lim}_{i\to\infty} t_i = 1$. Alors ξ_0 n'est pas un point d'accumulation de A (puisque $\overline{\lim}_{i\to\infty} \xi_{n_i}(t_{n_i}) = 0$ pour la suite $n_1, n_2, \ldots$ d'éléments de A). De même, si $\operatorname{Lim}_{i\to\infty} t_i = 0$, il vient $\xi_0 \notin B'$.

On en déduit que, un ensemble infini A étant ouvert et non-fermé, on a $\xi_0 \in A'$ et $\xi_0 \notin (\Psi - A)'$. Donc, $\Psi - (A + \xi_0)$ est fermé, ce qui prouve que $\bar{A} = A + \xi_0$ est ouvert. Tout ensemble ouvert et fini étant un ***FG***, l'espace Ψ est extrêmement disconnexe.

3.17. *Il existe un $\mathcal{X}$ qui est un espace $\boldsymbol{T}_1$, mais non $\boldsymbol{T}_2$, qui est dense en soi et tel que $A \cdot B = 0$ entraîne $A' \cdot B' = 0$* (c'est-à-dire qu'aucun point de $\mathcal{X}$ n'est un point d'accumulation de deux ensembles disjoints). *En particulier, aucun sous-ensemble de $\mathcal{X}$ n'est à la fois dense et frontière.*

Fixons en effet un point ξ_0 de $\beta(\mathcal{N}) - \mathcal{N}$ et soit $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ un ensemble dénombrable muni de la topologie suivante: $\bar{A} = \mathcal{X}$ lorsque ξ_0 est un point d'accumulation de la suite $i_1, i_2, \ldots$ des indices des éléments $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots$ de A et que $\bar{A} = A$ dans le cas contraire.

Puisque ξ_0 n'est pas un point d'accumulation de deux ensembles disjoints (voir 3.16), $\mathcal{X}$ satisfait aux conditions postulées.

3.18. *Il existe un $\mathcal{X}$ qui est un espace $\boldsymbol{T}_2$ clairsemé, compact, non-métrisable, de puissance $2^{\aleph_0}$ et dont l'ensemble des points isolés est dénombrable.*

La construction de cet exemple, que je dois à S. Mrówka, est la suivante:

Soit C l'ensemble des couples $\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right)$ où $n = 0, 1, 2, \ldots$ et $k = 1, 2, \ldots, 2^n$. Soit en outre I l'ensemble des couples $(t, 0)$ où $0 \leqslant t \leqslant 1$. Les points de C situés sur le plan constituent le diagramme du jeu à pile ou face. Soit $\{a_n\}$ une suite de nombres 0 et 1 (c'est-à-dire de piles et faces). À chaque suite partielle finie $\{a_1, \ldots, a_n\}$ vient correspondre un point

$$p_n = \left(\frac{2a_1 + 4a_2 + \ldots + 2^n a_n + 1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right)$$

qui la représente dans ce diagramme. Évidemment, la suite p_n converge vers un point $x \in I$, et la correspondance $\{a_n\} \leftrightarrow \{p_n\} \leftrightarrow x$ est biunivoque, à l'exception des *points dyadiques* (en entendant par là ceux dont le développement dyadique est fini). Désignons par $U_n(x)$ l'ensemble $\{x, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$ pour x non-dyadiques et l'ensemble $\{x, p_n, p'_n, p_{n+1}, p'_{n+1}, \ldots\}$

pour les autres x, où p_n (de même que p'_n) désigne la suite $\{p_n\}$ qui correspond à la suite $\{a_n\}$, convergente vers x.

Introduisons dans $C+I$ la topologie suivante: considérons les points de C comme isolés et, pour tout $x \in I$, les ensembles $U_n(x)$ comme formant une base d'entourages de x. On voit aisément que $C+I$ est localement compact et localement métrisable et que l'espace $\mathcal{X}$ obtenu par la compactification de $C+I$ en lui ajoutant un point à l'infini satisfait à la thèse énoncée.

Il est à noter que l'espace $\mathcal{X}$ de cet exemple est homéomorphe à un espace construit par Alexandroff et Urysohn (voir [26], p. 936) dans un but différent.

CHAPITRE 4

COMPACTIFICATION CLAIRSEMÉE DES ENSEMBLES CLAIRSEMÉS

4.0. Le problème de la compactification clairsemée est le suivant: *étant donné un espace complètement régulier et clairsemé C, construire un espace C_1 qui soit un T_2 clairsemé, compact et tel que* $C \underset{\text{top}}{\subset} C_1$.

On sait que la réponse est positive dans deux cas particulier suivants:

A([12]). *C clairsemé, métrisable et séparable est homéomorphe à un sous-ensemble d'un ensemble clairsemé, compact et bien ordonné (suivant la grandeur) situé dans C.*

B. *C clairsemé et localement compact reste clairsemé si on lui ajoute par le procédé bien connu un point à l'infini.*

Cependant le problème de l'existence d'une compactification clairsemée, formulé en toute généralité, reste ouvert.

4.1. Knaster et Urbanik [13] on démontré que tout espace métrique, séparable et clairsemé est topologiquement contenu dans l'ensemble $\mathcal{B}$ des bouts (gauches ou droits) des intervalles contigus à l'ensemble $\mathcal{C}$. Mais, $\mathcal{B}$ n'étant pas clairsemé, on ne peut pas dire que $\mathcal{B}$ est un espace *universel* pour les ensembles clairsemés et séparables.

Or il n'existe pas d'espace métrique, séparable et clairsemé, contenant tous les espaces de ce genre. Notamment:

1° *Si C est clairsemé, métrisable et séparable, il existe un espace métrique, clairsemé et compact, qui n'est pas topologiquement contenu dans C.*

2° *Tout espace métrique et non-clairsemé contient topologiquement tous les ensembles clairsemés séparables.*

On peut formuler 1° et 2° de la manière suivante:

THÉORÈME 6. *Pour qu'un espace métrique séparable C soit clairsemé, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble compact, dénombrable et qui n'est pas contenu topologiquement dans C.*

([12]) Voir Knaster et Urbanik [13], p. 194, IV.

Démonstration. Pour établir 1°, soit C un espace métrique, séparable et clairsemé. Il existe un $\beta < \Omega$ tel que $C^{(\beta)} = 0$. Alors, l'ensemble $A = \Gamma(\omega^{\beta+1})$ n'est pas topologiquement contenu dans C (car $A^{(\beta)} \neq 0$). Quant à 2°, c'est une conséquence immediate du théorème 2 et de celui de Knaster et Urbanik (puisque $\mathcal{R}$ et $\mathcal{B}$ sont homéomorphes).

4.2. *Il existe un espace clairsemé, compact et contenant topologiquement tous les espaces clairsemés, métriques et séparables.*

Exemple: l'espace $\Gamma(\Omega)$.

Il existe un espace métrique, clairsemé, localement compact (non-séparable) et contenant tous les ensembles clairsemés, métrisables et séparables.

En effet, A_α, où $\alpha < \Omega$, désignant un espace métrique homéomorphe à $\Gamma(\alpha)$, il suffit de poser

$$A = \sum_{\alpha<\Omega} A_\alpha,$$

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad x \in A_\alpha, y \in A_\beta \text{ et } \alpha \neq \beta, \\ \varrho_\alpha(x, y) & \text{pour} \quad x, y \in A_\alpha. \end{cases}$$

4.3. Envisageons à présent le problème de la compactification clairsemée d'ensembles clairsemés non-séparables. D'abord, nous allons démontrer que la compactification β n'est pas une compactification de ce genre.

THÉORÈME 7. *Si E est un espace normal et $\beta(E)$ est clairsemé, E est $\aleph_0$-compact.*

Démonstration. Soit $C^*(E)$ l'espace de Banach des fonctions réelles définies dans E, bornées et continues. Supposons qu'il existe une suite $t_1, t_2, \ldots$ d'élements de E sans points d'accumulation. L'ensemble H de toutes les fonctionnelles linéaires $\xi(x)$ définies dans $C^*(E)$ et représentables sous la forme

$$\xi(x) = \operatorname*{Lim}_n x(t_n)$$

(où Lim parcourt l'ensemble K de toutes les limites généralisées multiplicatives au sens de Mazur [17]) est évidemment compact dans la topologie faible de l'espace conjugué à $C^*(E)$ (cf. [9], p. 1000). De plus, la correspondance

$$\xi \to \text{Lim}$$

est biunivoque (puisqu'il existe, pour chaque suite bornée $\{a_n\}$ de nombres réels, une fonction $x \in C^*(E)$ telle que

$$x(t_n) = a_n \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots)$$

et évidemment bicontinue, K étant muni de la topologie faible de l'espace conjugué à l'espace $\boldsymbol{m}$ des suites bornées.

On a d'une part

$$\beta(\mathcal{N})-\mathcal{N} \underset{\text{top}}{=} H$$

par suite de l'homéomorphie entre K et $\beta(\mathcal{N})-\mathcal{N}$ et d'autre part, l'ensemble $\beta(E)$ étant homéomorphe à l'espace $\boldsymbol{\Omega}$ des fonctionnelles $\xi(x)$ linéaires et multiplicatives (non-nulles) définies dans $C^*(E)$ et muni de la topologie faible (cf. [9], p. 1006), il vient

$$\beta(\mathcal{N})-\mathcal{N} \underset{\text{top}}{\subset} \beta(E),$$

puisque $H \subset \boldsymbol{\Omega}$.

L'ensemble $\beta(\mathcal{N})-\mathcal{N}$ étant dense en soi, $\beta(E)$ n'est pas clairsemé.

COROLLAIRES. 1. *Si E est un espace métrisable et $\beta(E)$ est clairsemé, E est compact.*

2. *Si E est un espace normal du type Q* (au sens de Hewitt [8]) *et si $\beta(E)$ est clairsemé, E est compact.*

En effet, chaque espace du type Q qui est $\aleph_0$-compact est nécessairement compact (voir [8], p. 88).

4.4. Le théorème précité de Knaster et Urbanik [13] peut être généralisé comme suit:

THÉORÈME 8. *Tout espace métrique C satisfaisant aux conditions suivantes*(13):

(vi) *il existe un $\gamma < \Omega$ tel que $C^{(\gamma)} = 0$,*

(vii) *pour tout couple A, B de sous-ensembles de C, fermés et disjoints, il existe un ensemble D étant un* ***FG*** *et tel que $A \subset D$ et $B \subset C-D$, est topologiquement contenu dans un espace $\Gamma(\xi)$.*

Démonstration. Soit γ_0 le plus petit nombre ordinal satisfaisant à (vi). En généralisant l'idée de Mazurkiewicz et Sierpiński [18], procédons par l'induction transfinie d'après γ_0. Distinguons deux cas:

1° Il existe le nombre $\alpha = \gamma_0 - 1$. Alors $C^{(\alpha)}$ est isolé. C étant de dimension 0, l'ensemble

$$\underset{y \in C}{E}\{|x-y| < \tfrac{1}{3}\varrho(x, C^{(\alpha)}-x)\}$$

contient pour tout $x \in C^{(\alpha)}$ un entourage de x étant un ***FG***; désignons-le par U_x. Rangeons les points de $C^{(\alpha)}$ en une suite transfinie $\{x_\xi\}_{\xi \leqslant \mu}$ et posons $U_\xi = U_{x_\xi}$.

(13) On sait que tout espace métrique, séparable et clairsemé satisfait à ces conditions (cf. [15], pp. 141, 150 et 168).

Admettons d'abord que le théorème est vrai pour $\mu = 1$; nous allons montrer qu'il est alors vrai pour chaque μ (avec le même γ_0). L'ensemble fermé $C^{(a)}$ étant contenu dans l'ensemble ouvert $\sum_{\xi \leqslant \mu} U_\xi$, il existe d'après (vii) un ensemble F étant un $\boldsymbol{FG}$ et tel que $C^{(a)} \subset F \subset \sum_{\xi \leqslant \mu} U_\xi$. Posons $F_0 = C - F$ et $F_\xi = F \cdot U_\xi$ pour $0 < \xi \leqslant \mu$. On a évidemment $F_0^{(a)} = 0$ et tout $F_\xi^{(a)}$, où $0 < \xi \leqslant \mu$, se réduit au seul point x_ξ. D'après l'hypothèse, chacun des ensembles $F_0 + F_1, F_2, \ldots, F_\xi, \ldots$ est topologiquement contenu dans un certain espace $\Gamma(\eta_\xi)$. Les ensembles F_ξ étant des $\boldsymbol{FG}$, on déduit de l'égalité

$$C = (F_0 + F_1) + F_2 + \ldots + F_\xi + \ldots + F_\eta,$$

que C est topologiquement contenu dans l'espace $\Gamma\big(\sum_{\xi \leqslant \mu} \eta_\xi + 1\big)$.

Admettons ensuite que le théorème est vrai pour tous les nombres ordinaux $\gamma < \gamma_0$ (quel que soit μ); nous allons montrer qu'il est alors vrai pour $\gamma = \gamma_0$ et $\mu = 1$. Soient x_0 le seul point de $C^{(a)}$ et $\{V_n\}_{n=1,2,\ldots}$ une suite descendante d'entourages $\boldsymbol{FG}$ de x_0 telle que $V_n \neq V_{n+1}$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et $\lim_{n \to \infty} \delta(V_n) = 0$. L'espace $C = V_0$ peut être représenté sous la forme de la somme

$$C = x_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (V_n - V_{n+1})$$

de différences $\boldsymbol{FG}$ disjointes où $(V_n - V_{n+1})^{(a)} = 0$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ D'après l'hypothèse, chacun des ensembles $W_n = V_n - V_{n+1}$ est topologiquement contenu dans un $\Gamma(\xi_n)$. Posons $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n + 1)$. Suivant la définition de la somme des nombres ordinaux, un ensemble A du type $\Gamma_0(\xi)$, ordonné par une relation $<$, est somme d'ensembles A_n du type $\Gamma_0(\xi_n + 1)$, disjoints et tels que $a \in A_n$, $b \in A_m$ et $n < m$ entraînent $a < b$. Soit φ_n une homéomorphie telle que $\varphi_n(W_n)$ est contenu dans A_n privé du dernier élément. Évidemment, la transformation

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_n(x) & \text{pour} \quad x \in W_n, \\ \xi & \text{pour} \quad x = x_0 \end{cases}$$

est bicontinue; donc $C \underset{\text{top}}{\subset} \Gamma(\xi)$.

2° γ_0 est un nombre limite. Alors γ_0 est confinal avec ω, c'est-à-dire que $\gamma_0 = \lim_{n \to \infty} \gamma_n$. D'après (vii), il existe des ensembles D_n étant des $\boldsymbol{FG}$ et tels que

$$\overline{S}_{n+1} \subset D_n \subset S_n \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

où $S_0 = D_0 = C$ et S_n est la sphère ouverte généralisée de centre $C^{(\gamma_n)}$ et de rayon $1/n$, c'est-à-dire

$$S_n = \underset{x \in C}{E} \left\{ \varrho(x, C^{(\gamma_n)}) < \frac{1}{n} \right\}.$$

On a donc $D_{n+1} \subset D_n$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ et $\prod_{n=1}^{\infty} D_n = \prod_{n=1}^{\infty} C^{(\gamma_n)} = C^{(\gamma_0)} = 0$. Ainsi $C = \sum_{n=0}^{\infty} (D_n - D_{n+1})$ est une décomposition de C en ensembles $\boldsymbol{FG}$ disjoints. D'après l'hypothèse d'induction, chaque $D_n - D_{n+1}$ est contenu topologiquement dans un $\Gamma(\xi_n)$; par conséquent $C \underset{\text{top}}{\subset} \Gamma\left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n + 1\right)$.

4.5. Le théorème précité de Mazurkiewicz et Sierpiński [18] sur les espaces clairsemés, métriques et compacts peut être généralisé comme suit:

THÉORÈME 9. *Tout espace $\boldsymbol{T}_2$ clairsemé, compact et satisfaisant au premier axiome de dénombrabilité est métrisable, donc homéomorphe à un espace $\Gamma(\tau)$ où $\tau < \Omega$.*

Démonstration. Admettons que C est un espace $\boldsymbol{T}_2$ satisfaisant à l'hypothèse du théorème. Désignons par γ le plus petit nombre ordinal tel que $C^{(\gamma)} = 0$. C étant compact, le nombre $\alpha = \gamma - 1$ existe et l'ensemble $C^{(\alpha)}$ est fini. Soient $x_1, \ldots, x_m$ les éléments de $C^{(\alpha)}$. Selon Mazurkiewicz et Sierpiński [18], le couple (α, m) est donc le *système caractéristique* de C. Nous allons démontrer que C est homéomorphe à l'espace $\Gamma(\omega^\alpha \cdot m)$.

Procédons par l'induction. Admettons d'abord que le théorème est vrai pour le couple $(\alpha, 1)$ est montrons qu'il l'est alors pour tous les couples (α, m) avec le même α et $m = 2, 3, \ldots$

Évidemment, C est totalement disconnexe, donc de dimension 0, et satisfait à la condition (vii) (cf. [3], p. 174). Soient $F_1, \ldots, F_m$ des ensembles $\boldsymbol{FG}$ tels que $x_i \in F_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, $F_i \cdot F_j = 0$ pour $i \neq j$ et $C = \sum_{i=1}^{m} F_i$. Conformément à l'hypothèse, tout F_i est homéomorphe à l'espace $\Gamma(\omega^\alpha)$; l'espace C tout entier est donc homéomorphe à $\Gamma(\underbrace{\omega^\alpha + \ldots + \omega^\alpha}_{m \text{ fois}}) = \Gamma(\omega^\alpha \cdot m)$.

Admettons ensuite que le théorème est vrai pour tous les couples (α', m) où $\alpha' < \alpha$ (quel que soit m) et montrons qu'il l'est alors pour $(\alpha, 1)$. Soient x_0 le point unique de $C^{(\alpha)}$ et $G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots$ une base d'entourages $\boldsymbol{FG}$ de x_0, telle que $G_0 = C$ et $G_n \neq G_{n+1}$ pour $n = 0, 1, \ldots$ Conformément à l'hypothèse, tout $G_n - G_{n+1}$ est homéomorphe à un espace $\Gamma(\omega^{\alpha_n} \cdot m_n)$ où $\alpha_n < \alpha$. Ainsi, la décomposition

$$C = x_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (G_n - G_{n+1})$$

correspond à la décomposition

$$\Gamma(\omega^a) = \Gamma(\omega^{a_0}\cdot m_0 + \ldots + \omega^{a_n}\cdot m_n + \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n + \omega^a,$$

où

$$\Gamma_0 = \Gamma(\omega^{a_0}\cdot m),$$
$$\Gamma_1 = \underset{\xi}{E}\{\omega^{a_0}\cdot m_0 < \xi \leqslant \omega^{a_0}\cdot m_0 + \omega^{a_1}\cdot m_1\},$$
$$\Gamma_2 = \underset{\xi}{E}\{\omega^{a_0}\cdot m_0 + \omega^{a_1}\cdot m_1 < \xi \leqslant \omega^{a_0}\cdot m_0 + \omega^{a_1}\cdot m_1 + \omega^{a_2}\cdot m_2\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soit ψ_n une homéomorphie entre $G_n - G_{n+1}$ et Γ_n. La transformation

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_n(x) & \text{pour} \quad x \in G_n - G_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \\ \omega^a & \text{pour} \quad x = x_0 \end{cases}$$

est bicontinue; on a donc $C \underset{\text{top}}{=} \Gamma(\omega^a)$.

Le nombre ordinal a est nécessairement dénombrable, car si Ω appartenait à $\Gamma(\omega^a)$, l'élément $\psi^{-1}(\Omega)$ ne possèderait pas de base dénombrable. L'espace C est donc homéomorphe à un certain espace $\Gamma(\tau)$ où $\tau < \Omega$, ce qui prouve que C est métrisable.

4.6. Nous allons démontrer que tout espace C métrique, clairsemé et localement séparable est homéomorphe à un sous-ensemble dense d'un espace métrique, clairsemé et localement compact. Ce n'est qu'une généralisation du théorème de Knaster et Urbanik [13] aux propriétés locales, mais elle n'est point triviale.

On sait que, pour tout $x \in C$, il existe une homéomorphie $\varphi_x(u)$ entre un entourage E_x de x et un sous-ensemble de $\mathcal{C}$ à fermeture dénombrable; il s'agit de montrer qu'il existe une telle homéomorphie φ pour tous les x simultanément.

Nous aurons recours aux cinq lemmes suivants:

LEMME 4. *C étant un espace métrique, clairsemé et localement séparable, il existe pour tout $x \in C$ un nombre $r > 0$ aussi petit que l'on veut et tel que la sphère $K(x, r)$ est à la fois fermée, ouverte et dénombrable.*

LEMME 5. *Le dérivé d'ordre Ω de tout espace métrique, clairsemé et localement séparable est vide.*

En effet, si $x \in C$, il existe un entourage séparable G de x; donc, $x \notin G^{(a)}$ pour un certain $a < \Omega$, d'où $x \notin C^{(\Omega)}$.

La réciproque n'est pas vraie (voir l'exemple 3.4).

LEMME 6. *$\mathcal{X}$ étant un espace topologique et $A \in \mathcal{X}$, soit A^* l'ensemble des points dans lesquels A n'est pas clairsemé* (voir [15], p. 34). *Alors,*

$$A^* = \overline{\mathrm{Noy}(A)} \quad \textit{et} \quad \mathrm{Noy}(A) = A^* \cdot A.$$

Démonstration. Si $x \in A^*$, l'ensemble $E \cdot A$ n'est clairsemé pour aucun entourage E de x. On a donc $E \cdot \mathrm{Noy}(A) \neq 0$, ce qui prouve que $x \in \overline{\mathrm{Noy}(A)}$.

Si E est un entourage (ouvert) d'un point $y \in \mathrm{Noy}(A)$, l'ensemble $E \cdot \mathrm{Noy}(A)$ est dense en soi (voir [15], p. 46) et non-vide, donc $y \in A^*$. On a donc

$$A^* \subset \overline{\mathrm{Noy}(A)} \subset \overline{A^*} = A^* \quad \text{et} \quad \mathrm{Noy}(A) \subset A^* \cdot A \subset \overline{\mathrm{Noy}(A)} \cdot A = \mathrm{Noy}(A).$$

LEMME 7. *Tout espace topologique localement clairsemé est clairsemé.*

C'est une conséquence immédiate du lemme 6.

LEMME 8. *Soient $\mathcal{X}$ un espace métrique avec la distance $\varrho(x, y)$ et Λ une famille de sphères $K_a = K(u_a, r_a)$, où $a \in \mathfrak{A}$, étant des* **FG**, *disjointes deux à deux et telles que*

$$0 < r_a < \tfrac{1}{3} \inf_{\beta \neq a} \varrho(u_a, u_\beta) \quad \textit{pour} \quad a \in \mathfrak{A}.$$

Admettons en outre que K_a est homéomorphe à un espace métrique L_a avec la distance $\varrho_a(x, y)$ et tel que $\varrho_a(x, y) < r_a$ pour $x, y \in L_a$ où $a \in \mathfrak{A}$.

En désignant par ψ_a l'homéomorphie entre K_a et L_a, posons

$$\varrho^*(x, y) = \varrho^*(y, x) = \begin{cases} \varrho(x, y) & \text{lorsque } x, y \notin \sum_{a \in \mathfrak{A}} K_a, \\ \varrho(u_\beta, y) & \text{lorsque } x \in K_\beta \text{ et } y \notin \sum_{a \in \mathfrak{A}} K_a, \\ \varrho(u_a, u_\beta) & \text{lorsque } x \in K_a \text{ et } y \in K_\beta \text{ où } a \neq \beta, \\ r_a \varrho_a(\psi_a(x), \psi_a(y)) & \text{lorsque } x, y \in K_a. \end{cases}$$

Alors, $\varrho^*(x, y)$ est une métrique de l'espace $\mathcal{X}$ équivalente à $\varrho(x, y)$ (c'est-à-dire que $\lim_{n \to \infty} \varrho(x_n, x) = 0$ équivaut à $\lim_{n \to \infty} \varrho^*(x_n, x) = 0$). De plus, tout K_a métrisé par ϱ^* est isométrique à L_a et

$$\varrho(x, y) = \varrho^*(x, y) \quad \text{pour tous} \quad x, y \in \mathcal{X} - \sum_{a \in \mathfrak{A}} K_a,$$

$$|\varrho(x, y) - \varrho^*(x, y)| \leqslant 3 \sup_a r_a \quad \text{pour tous les} \quad x, y.$$

La démonstration consiste à vérifier l'inégalité du triangle $\varrho^*(x, z) + \varrho^*(z, y) \geqslant \varrho^*(x, y)$ en considérant tous les cas possibles (x, y et z appartenant successivement à $\mathcal{X} - \sum_{a \in \mathfrak{A}} K_a$, K_a, K_β et K_γ où $\gamma \neq \beta$, $\gamma = \beta$ etc.).

L'équivalence entre ϱ et ϱ^* est triviale.

THÉORÈME 10. *Tout espace C métrique, clairsemé et localement séparable est homéomorphe à un sous-ensemble dense d'un espace métrique, clairsemé et localement compact.*

Démonstration. Soit $\varrho(x, y)$ la métrique donnée dans C. Nous allons introduire dans C une nouvelle métrique $\varrho_\omega(x, y)$, équivalente à $\varrho(x, y)$ et définie par la formule

$$\text{(viii)} \qquad \varrho_\omega(x, y) = \lim_{m\to\infty} \varrho_m(x, y) \quad \text{pour} \quad x, y \in C,$$

les métriques $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ étant définies par l'induction comme suit. Posons

$$R_\xi^0 = C^{(\xi)} \cdot \underset{x}{E}\{\varrho(x, C^{(\xi+1)}) > 1\} \qquad \text{pour} \quad \xi < \Omega,$$

$$R_\xi^m = C^{(\xi)} \cdot \underset{x}{E}\{2^{-(m-1)} \geqslant \varrho(x, C^{(\xi+1)}) > 2^{-m}\} \qquad \text{pour} \quad m = 1, 2, \ldots,$$

$$R_k = \sum_{0\leqslant\xi<\Omega} R_\xi^k \qquad \text{pour} \quad k = 0, 1, \ldots$$

Les ensembles R_ξ^k sont donc disjoints deux à deux, d'où $R_k \cdot R_m = 0$ pour $k \neq m$; on a de plus suivant le lemme 5

$$C = \sum_{0\leqslant\xi<\Omega} (C^{(\xi)} - C^{(\xi+1)}) = \sum_\xi \sum_{k=0}^{\infty} R_\xi^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_\xi R_\xi^k = \sum_{k=0}^{\infty} R_k.$$

Choisissons pour chaque $x \in R_\xi^0$ un nombre positif

$$\sigma_0(x) < \frac{1}{3\cdot 4} \min[\varrho(x, R_\xi^0 - x), 1]$$

tel que la sphère $K(x, \sigma_0(x))$ soit un ***FG*** dénombrable et posons $K_0(z) = K(z, \sigma_0(z))$ pour $z \in R_0$. Si x et y appartiennent à R_ξ^0, il vient $\varrho(y, x) > 4\max[\sigma_0(x), \sigma_0(y)]$, donc $K_0(x)\cdot K_0(y) = 0$. Si, par contre, $x \in R_\xi^0$ et $y \in R_\eta^0$ où $\xi < \eta$, il vient $\varrho(x, y) > 1$, donc encore $K_0(x)\cdot K_0(y) = 0$.

D'après le théorème précité de Knaster et Urbanik [13], chaque $K_0(z)$ admet une compactification clairsemée. Soit donc $\psi_z(u)$ une homéomorphie entre $K_0(z)$ et un sous-ensemble $L_0(z)$ de $\mathcal{C}$ ayant la fermeture dénombrable et dont le diamètre est inférieur à $\sigma_0(z)$. En vertu du lemme 9, il existe une nouvelle métrique $\varrho_1(x, y)$, équivalente à $\varrho(x, y)$ et satisfaisant aux conditions

$$\varrho_1(x, y) = \begin{cases} \varrho(x, y) & \text{pour} \quad x, y \in C - \sum_{z\in R_0} K_0(z), \\ \varrho(x, w) & \text{pour} \quad x \in C - \sum_{z\in R_0} K_0(z) \text{ et } y \in K_0(w), \end{cases}$$

$$|\varrho_1(x, y) - \varrho(x, y)| \leqslant 3\cdot \sup_{z\in R_0} \sigma_0(z) \leqslant \tfrac{1}{4} \quad \text{pour} \quad x, y \in C;$$

en outre, elle peut être choisie telle que chaque sphère $K_0(z)$ où $z \in R_0$ contienne les mêmes éléments que $K_1(z, \sigma_0(z)) = \underset{x}{E}\{\varrho_1(x, z) < \sigma_0(z)\}$, qui est isométrique à $L_0(z)$. En particulier, on a

$$\varrho_1(x, y) = \varrho(x, y) \quad \text{pour} \quad x, y \in \sum_{n=2}^{\infty} R_n \subset C - \sum_{z \in R_0} K_0(z).$$

Choisissons pour tout $x \in R_\xi^1$ un nombre positif

$$\sigma_1(x) < \frac{1}{3 \cdot 16} \min[\varrho_1(x, R_\xi^1 - x), 1]$$

tel que la sphère $K_1(x, \sigma_1(x))$ soit un ***FG*** dénombrable. Tout comme dans le cas $m = 0$, introduisons une métrique $\varrho_2(x, y)$ équivalente à $\varrho_1(x, y)$, assujettie aux conditions

$$\varrho_2(x, y) = \begin{cases} \varrho_1(x, y) & \text{pour} \quad x, y \in C - \sum\limits_{z \in R_1} K_1(z, \sigma_1(z)), \\ \varrho_1(x, w) & \text{pour} \quad x \in C - \sum\limits_{z \in R_1} K_1(z, \sigma_1(z)),\ y \in K_1(w_1, \sigma_1(w)), \end{cases}$$

$$|\varrho_2(x, y) - \varrho_1(x, y)| \leqslant 3 \sup_{z \in R_1} \sigma_1(z) \leqslant \frac{1}{16} \quad \text{pour tout couple } x, y$$

et telle que chaque sphère $K_2(z, \sigma_1(z))$ où $z \in R_1$ contienne les mêmes éléments que la sphère $K_1(z_1, \sigma_1(z))$, isométrique à un sous-ensemble $L_1(z)$ de $\mathcal{C}$ ayant la fermeture dénombrable et dont le diamètre est inférieur à $\sigma_1(z)$.

Les métriques $\varrho_1, \ldots, \varrho_m$ assujetties à toutes ces conditions étant définies, on peut introduire par la même méthode une métrique $\varrho_{m+1}(x, y)$ équivalente à $\varrho_m(x, y)$, satisfaisant aux conditions

$$\varrho_{m+1}(x, y) = \varrho_m(x, y) \quad \text{pour} \quad x, y \in \sum_{k=0}^{m-1} R_k + \sum_{k=m+2}^{\infty} R_k,$$

$$|\varrho_{m+1}(x, y) - \varrho_m(x, y)| \leqslant 3 \sup_{z \in R_m} \sigma(z) \leqslant 4^{-(m+1)} \quad \text{pour} \quad x, y \in C$$

et telle que chaque sphère $K_{m+1}(z, \sigma_m(z))$ où $z \in R_m$ contienne les mêmes éléments que la sphère $K_m(z, \sigma_m(z))$ et soit un ***FG*** dénombrable isométrique à un sous-ensemble $L_m(z)$ de $\mathcal{C}$ ayant la fermeture dénombrable et dont diamètre est inférieur à $\sigma_m(z)$.

La suite infinie des métriques $\{\varrho_m\}_{m=0,1,2,\ldots}$ se trouve ainsi définie par induction et il résulte des conditions qui leur ont été imposées que la limite (viii) existe pour tous les x et y de C, et que les métriques ϱ_ω et ϱ sont équivalentes. De plus, à chaque $x \in C$ correspond une sphère

$$W(x) = K_\omega(x, \sigma_\omega(x)) = \underset{y \in C}{E}\{\varrho_\omega(x, y) < \sigma_\omega(x)\}$$

(où $0 < \sigma_\omega(x) < \sigma_m(x)$ pour $x \in R_m$) étant un $\boldsymbol{FG}$ dénombrable, isométrique à un sous-ensemble $L(x)$ de $\mathcal{G}$ et ayant la fermeture dénombrable.

Ceci établi, soit $\mathfrak{N}_x$ la classe de toutes les suites $u = \{u_n\}_{n=1,2,\ldots}$ d'éléments de $W(x)$ satisfaisant à la condition de Cauchy et posons $\mathfrak{N} = \sum_{x \in C} \mathfrak{N}_x$. Introduisons dans $\mathfrak{N}$ la pseudométrique $\varrho'(u, v)$ en posant $\varrho'(u, v) = \lim_{n \to \infty} \varrho_\omega(u_n, v_n)$ et considérons comme identiques les suites u et v telles que $\varrho'(u, v) = 0$. Soit C_1 la classe-quotient ainsi obtenue. Évidemment, C_1 est un sous-ensemble du complétement cantorien de C. De plus, C_1 est localement compact et localement clairsemé, donc clairsemé d'après le lemme 7.

Finalement, la correspondance $x \leftrightarrow (x, x, \ldots)$ est une transformation bicontinue de C en un sous-ensemble dense de C_1.

4.7. Voici une autre généralisation du théorème précité de Knaster et Urbanik [13]:

THÉORÈME 11. *Tout espace métrique, clairsemé et localement séparable admet une compactification clairsemée.*

C'est une conséquence immédiate du théorème 10, vu que la compactification d'un espace clairsemé et localement compact par l'adjonction du point à l'infini est clairsemée([14]).

4.8. Si l'on admet, en outre, les compactifications $\boldsymbol{T}_1$, le problème de la compactification clairsemée devient trivial:

Tout espace $\boldsymbol{T}_1$ clairsemé est homéomorphe à un sous-ensemble d'un espace $\boldsymbol{T}_1$ clairsemé et compact.

En effet, dans le domaine des espaces $\boldsymbol{T}_1$, l'adjonction du point à l'infini est toujours possible.

([14]) W. Sierpiński [22] a démontré que chaque espace métrique localement séparable est somme d'une famille d'ensembles $\boldsymbol{FG}$ disjoints et séparables. Notons que la démonstration du théorème 10 devient plus simple lorsqu'on s'appuie sur ce théorème de Sierpiński, et que tout espace métrique, clairsemé et localement compact est homéomorphe à un sous-ensemble d'un espace $\Gamma(\alpha)$.

CHAPITRE 5

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES POINTS D'ACCUMULATION DES ENSEMBLES CLAIRSEMÉS, COMPACTS ET NON-MÉTRISABLES

5.1. On sait que dans le cas où un espace topologique $\mathcal{X}$ ne satisfait pas au premier axiome de dénombrabilité, l'ensemble des points d'accumulation de $\mathcal{X}$ ne coïncide pas nécessairement avec l'ensemble des limites de suites transfinies $\{x_\xi\}_{\xi<\gamma}$ de points différents (on peut obtenir cependant tous les points d'accumulation en considérant les suites partiellement ordonnées et convergentes au sens de Moore et Smith (voir [12], p. 207).

La situation n'est plus la même lorsqu'on suppose, de plus, que l'espace est clairsemé et compact.

THÉORÈME 12. *Si x est un point d'accumulation d'un sous-ensemble compact A d'un espace $\boldsymbol{T}_2$ et si $x \in \mathrm{Noy}(A)$, il existe une suite transfinie $\{x_\xi\}_{\xi<\gamma}$ d'éléments de A convergente vers x (c'est-à-dire telle que, pour chaque entourage W de x, il existe un nombre ordinal $\nu < \gamma$ tel que $\nu < \xi < \gamma$ entraîne $x_\xi \in W$, γ étant supposé un nombre limite et $\xi < \gamma$ entraînant $x_\xi \neq x$).*

En outre, si x est un point d'accumulation d'un sous-ensemble $\aleph_0$-compact A d'un espace $\boldsymbol{T}_2$ et si $A^{(\Omega)} = 0$, il existe une suite $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$ d'éléments de A telle que

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Démonstration. Nous pouvons nous borner au cas où A est l'espace tout entier.

Soit $x \in A'$, donc $x \in A$. La suite $A^{(\xi)}$ est descendante et $A^{(\alpha)} = \mathrm{Noy}(A)$ pour un certain α. Soit δ_0 le plus petit nombre ordinal tel que $x \notin A^{(\delta_0)}$. De la définition du dérivé d'ordre λ pour λ étant des nombres limites, on conclut qu'il existe le nombre $\delta = \delta_0 - 1$, ce qui équivaut à $x \in A^{(\delta)} - A^{(\delta+1)}$. L'ensemble A étant de dimension 0 au point x, on a $U\cdot(A^{(\delta)} - x) = 0$ pour un entourage $\boldsymbol{FG}$ de x. Distinguons deux cas:

1° δ n'est pas un nombre limite. Alors x est le seul point d'accumulation de $D = A^{(\delta-1)}\cdot U$. Choisissons un sous-ensemble infini dénombrable E de D; il possède au moins un point d'accumulation (puisque D est

compact) et, en même temps, il a au plus un point d'accumulation, à savoir le point x. Rangeons E en une suite $x_1, x_2, \ldots$ On a évidemment $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ et $x_n \in A$.

2° δ est un nombre limite. Considérons la suite $\{H^{(\gamma)}\}_{\gamma<\delta}$ où $H = A\cdot U$. Choisissons un élément $a_\gamma \in H^{(\gamma)} - H^{(\gamma+1)}$ pour tout nombre $\gamma < \delta$. Nous allons montrer que $x = \lim_{\gamma<\delta} a_\gamma$. Désignons par B l'ensemble de tous les a_γ où $\gamma < \delta$. L'ensemble A étant compact, $B^{(\alpha)}$ est non-vide pour $\alpha < \delta$, d'où $\prod_{\alpha<\delta} B^{(\alpha)} \neq 0$. D'autre part, $\prod_{\alpha<\delta} B^{(\alpha)} = B^{(\delta)} \subset H^{(\delta)} = x$, ce qui prouve que x est un point d'accumulation de toute suite $\{a_\xi\}_{\eta<\xi<\delta}$ (quel que soit $\eta < \delta$). Enfin, pour tout entourage W de x, il existe un $\eta < \delta$ tel que $H^{(\zeta)} \subset W$ pour tous les $\zeta > \eta$. En effet, si l'on suppose par contre qu'un tel nombre n'existe pas pour un certain W, les ensembles fermés $H^{(\xi)} - W$, où $\xi < \delta$, seraient non-vides et l'ensemble $H^{(\delta)} - W = \prod_{\xi<\delta}(H^{(\xi)} - W)$ contiendrait donc au moins un point différent de x. La suite $\{a_\xi\}_{\xi<\delta}$ satisfait par conséquent à la thèse du théorème.

5.2. Envisageons, pour terminer, les ensembles clairsemés d'une structure plus particulière.

THÉORÈME 13. *Si $\mathcal{X}$ est un espace $\boldsymbol{T}_2$, compact*(15) *et extrêmement disconnexe, le dérivé de $\mathcal{X}$ est dense en soi (*c'est-à-dire que $\mathcal{X}' = \mathrm{Noy}(\mathcal{X})$*).*

En particulier, tout espace $\boldsymbol{T}_2$ compact, extrêmement disconnexe et clairsemé est fini(16).

Démonstration. Soient x un point isolé de $\mathcal{X}'$ et U un entourage de x tel que $\overline{U}\cdot(\mathcal{X}' - x) = 0$. Évidemment, U est $\boldsymbol{FG}$ et $U' = x$. Choisissons un sous-ensemble infini A de U tel que $U - A$ soit infini. $\mathcal{X}$ étant compact par hypothèse, A possède un point d'accumulation, à savoir le point x; on a donc $\overline{A} = A + x$. On en conclut que l'ensemble ouvert $G = U - (A + x)$ n'a pas de fermeture ouverte, car $\overline{G} = (U - A) + x$ et l'ensemble $U - \overline{G} = A - x$ n'est pas fermé.

5.3. Appelons *parfaitement disconnexe* tout espace topologique $\mathcal{X}$ tel que les conditions $A \subset \mathcal{X}$, $B \subset \mathcal{X}$ et $A\cdot B = 0$ entraînent l'égalité

---

(15) On peut vérifier facilement que le théorème 13 reste vrai lorsqu'on y remplace l'hypothèse que $\mathcal{X}$ est un $\boldsymbol{T}_2$ compact par celle que $\mathcal{X}$ est un $\boldsymbol{T}_3$ $\aleph_0$-compact.

(16) En appliquant la théorie de Stone concernant la représentation des algèbres de Boole par les algèbres des sous-ensembles $\boldsymbol{FG}$ des espaces 0-dimensionnels et compacts (cf. [24], [3] p. 218 et [9] p. 1013), le théorème 13 peut être exprimé en langue algébrique comme suit: *si $\mathfrak{A}$ est une algèbre de Boole complète et si $\mathfrak{R}$ est l'idéal des sommes finies d'éléments-atomes de $\mathfrak{A}$, l'algèbre $\mathfrak{A}/\mathfrak{R}$ ne possède pas d'atomes.*

$A' \cdot B' = 0$ (c'est-à-dire tel qu'aucun point de $\mathfrak{X}$ n'est simultanément un point d'accumulation de deux ensembles disjoints)([17]).

Évidemment, chaque espace parfaitement disconnexe est extrêmement disconnexe, mais pas réciproquement, puisque la disconnexité parfaite est une propriété héréditaire (c'est-à-dire affectant tous les sous-ensembles) et la disconnexité extrême ne l'est pas([18]). De plus, tout espace parfaitement disconnexe et satisfaisant au premier axiome de dénombrabilité est isolé.

Un exemple d'un $\boldsymbol{T}_4$ non-isolé et parfaitement disconnexe a été donné p. 19 (voir 3.16); un exemple d'un $\boldsymbol{T}_1$ dense en soi et parfaitement disconnexe a été donné p. 20 (voir 3.17).

Le problème s'impose donc, s'il existe parmi les espaces $\boldsymbol{T}_2$, $\boldsymbol{T}_3$ et $\boldsymbol{T}_4$ un $\mathfrak{X}$ parfaitement disconnexe, mais non-clairsemé (voir p. 36, 15°).

([17]) Notons que tout espace dense en soi et parfaitement disconnexe est non-résoluble au sens de Hewitt [7].

([18]) Je dois en effet au Professeur R. Sikorski la remarque suivante: un sous-ensemble fermé d'un espace $\boldsymbol{T}_2$ compact et extrêmement disconnexe n'est pas nécessairement extrêmement disconnexe. Par exemple, l'espace de Stone $\beta(\mathfrak{N})$ correspondant à l'algèbre de Boole complète $\mathfrak{A}$ (composée de tous les sous-ensembles de $\mathfrak{N}$) est extrêmement disconnexe. D'autre part, $\beta(\mathfrak{N}) - \mathfrak{N}$ est l'espace de Stone correspondant à l'algèbre $\mathfrak{A}/\mathfrak{R}$ ou $\mathfrak{R}$ est l'idéal des sous-ensembles finis de $\mathfrak{N}$. L'algèbre $\mathfrak{A}/\mathfrak{R}$ n'étant pas complète (c'est un théorème de Sierpiński, voir [23], p. 146), $\beta(\mathfrak{N}) - \mathfrak{N}$ n'est pas extrêmement disconnexe. Il en résulte que $\beta(\mathfrak{N})$ n'est pas parfaitement disconnexe.

CHAPITRE 6

PROBLÈMES

1° Un espace complètement régulier et clairsemé C, est-il nécessairement contenu dans un espace $\boldsymbol{T}_2$ clairsemé et compact?

En particulier:

2° Les ensembles Φ et Ψ (exemples 3.15 et 3.16), sont-ils contenus dans un $\boldsymbol{T}_2$ clairsemé et compact?

3° Quelles sont les relations mutuelles entre les trois propriétés suivantes d'un espace $\mathcal{X}$ métrisable et clairsemé:

A. *$\mathcal{X}$ admet une compactification clairsemée,*

B. *$\mathcal{X}$ est homéomorphe à un sous-ensemble d'un espace $\Gamma(\lambda)$,*

C. *Le dérivé d'ordre Ω de $\mathcal{X}$ est vide?*

Évidemment, la condition B entraîne les deux autres.

4° Est-ce que tout espace métrique et clairsemé satisfait à la condition (vii) de 4.4?

5° Un espace métrique $\mathcal{X}$ tel que $\mathcal{X}^{(\Omega)} = 0$, est-il toujours susceptible d'une décomposition $\mathcal{X} = \sum_{\xi<\Omega} \mathcal{X}_\xi$ en ensembles $\boldsymbol{FG}$ disjoints deux à deux et ayant un dérivé d'ordre dénombrable vide?

En vertu du théorème 8, la réponse affirmative aux problèmes 4° et 5° entraînerait l'équivalence des conditions B et C du problème 3° et l'implication C $\rightarrow$ A.

6° L'hypothèse du théorème 12 d'après laquelle A est fermé (cf. 3.13), est-elle remplaçable par la suivante: *A est dénombrable?*

La réponse affirmative au problème 6° entraînerait la solution des problèmes 1° et 2° par la négative.

7° Un espace $\boldsymbol{T}_2$ clairsemé, compact et satisfaisant à la condition (v) (cf. 3.10 et 4.5), est-il nécessairement homéomorphe à un espace $\Gamma(\lambda)$?

8° Un espace C complètement régulier, clairsemé, satisfaisant à la condition (v) et à l'une quelconque des conditions suivantes:

(a) *C est normal,*

(*b*) *C est $\aleph_0$-compact,*

(c) *C est un espace du type Q* (cf. 3.11, 3.12 et [8], p. 88),

est-il nécessairement contenu dans un espace $\Gamma(\lambda)$?

9° Est-ce que tout espace complètement régulier et clairsemé est de dimension 0?

10° Est-ce que tout espace T_1 clairsemé est complètement régulier?

11° L'hypothèse du théorème 5 d'après laquelle A est un T_3 satisfaisant au premier axiome de dénombrabilité, est-elle remplaçable par la suivante: *A est normal*?

12° Est-ce que tout sous-ensemble non-dense d'un espace normal est contenu dans le dérivé d'un sous-ensemble isolé?

En particulier:

13° Est-ce que tout sous-ensemble non-dense A d'un espace normal et dense en soi est contenu dans le dérivé d'un ensemble B non-dense et disjoint de A?

14° Un espace $\mathcal{X}$ qui est un T_2 compact et tel que tout ensemble fermé y est extrêmement disconnexe, est-il parfaitement disconnexe?

La réponse affirmative au problème 14° entraînerait la conclusion suivante: tout espace T_2 compact et infini contient un sous-ensemble fermé et non-extrêmement disconnexe.

15° Un espace T_2 (ou T_3, ou T_4) parfaitement disconnexe, est-il nécessairement clairsemé?

TRAVAUX CITÉS

[1] P. Alexandroff und H. Hopf, *Topologie I*, Berlin 1935.

[2] R. Arens, *Note on convergence in topology*, Math. Magaz. 23 (1950), p. 229-234.

[3] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, Second Ed., New York 1948.

[4] E. Čech, *On bicompact spaces*, Annals of Math. 38 (1937), p. 823-844.

[5] M. Fréchet, *Quelques propriétés des ensembles abstraits*, Fund. Math. 10 (1927), p. 328-355.

[6] E. Halfar, *The isolated points of a set*, Portugaliae Math. 13 (1954), p. 125-128.

[7] E. Hewitt, *A problem of set-theoretic topology*, Duke Math. Journal 10 (1943), p. 309-333.

[8] — *Rings of real-valued continuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), p. 45-99.

[9] S. Kakutani, *Concrete representation of abstract (M)-spaces*, Annals of Math. 42 (1941), p. 994-1024.

[10] M. Katětov, *On topological spaces containing no disjoint dense sets*, Matem. Sbornik 21 (1947), p. 3-12.

[11] — *On mappings of countable spaces*, Colloq. Math. 2 (1951), p. 30-33.

[12] J. L. Kelley, *General Topology*, New York 1955.

[13] B. Knaster et K. Urbanik, *Sur les espaces complets séparables de dimension 0*, Fund. Math. 40 (1953), p. 194-202.

[14] C. Kuratowski, *Une méthode d'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques*, Fund. Math. 3 (1922), p. 76-108.

[15] — *Topologie I*, 2me éd., Warszawa 1948.

[16] N. Lusin, *Analogies entre les ensembles mesurables B et les ensembles analytiques*, Fund. Math. 16 (1930), p. 48-76.

[17] S. Mazur, *On the generalized limit of bounded sequences*, Colloq. Math. 2 (1951), p. 173-175.

[18] S. Mazurkiewicz et W. Sierpiński, *Contribution à la topologie des ensembles dénombrables* , Fund. Math. 1 (1920), p. 17-27.

[19] J. Novák, *On the Cartesian product of two compact spaces*, Fund. Math. 40 (1953), p. 106-112.

[20] A. Pełczyński and Z. Semadeni, *Spaces of continuous functions (III) (The spaces $C(\Omega)$ for Ω without perfect subsets)*, Studia Math. 18 (1959), p. 229-240.

[21] S. T. Sanders, *Derived sets and their complements*, Bull. Amer. Math. Soc. 42 (1936), p. 577-584.

[22] W. Sierpiński, *Sur les espaces métriques localement séparables*, Fund. Math. 21 (1933), p. 107-113.

[23] — *Sur les ensembles presque contenus les uns dans les autres*, Fund. Math. 35 (1948), p. 141-150.

[24] M. H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), p. 375-481.

[25] A. Tychonoff, *Über die topologische Erweiterung von Räumen*, Math. Annalen 102 (1930), p. 545-561.

[26] P. S. Urysohn, *Travaux de topologie* (en russe, rédigés et commentés par P. S. Alexandroff), vol. II, Moscou 1951; voir aussi P. Alexandroff et P. Urysohn, *Mémoire sur les espaces topologiques compacts*, Verhandelingen Kon. Akad. van Wetenschappen 14, Amsterdam 1929, p. 1-96.

[27] W. H. Young, *The Theory of Sets of Points*, Cambridge 1906.

[28] M. Zarycki, *Allgemeine Eigenschaften der Cantorschen Kohärenzen*, Trans. Amer. Math. Soc. 30 (1928), p. 498-504.

[29] — *Über den Kern einer Menge*, Jahresbericht der deutschen Mathem. Vereinigung 39 (1930), p. 154-158.

BIBLIOTEKA UNIWERSYTECKA

TABLE DES MATIÈRES

	Page
INTRODUCTION	3
Notations	3
CHAPITRE 1. Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un espace métrique soit clairsemé	5
CHAPITRE 2. Fermetures des ensembles clairsemés	13
CHAPITRE 3. Exemples singuliers	15
CHAPITRE 4. Compactification clairsemée des ensembles clairsemés	22
CHAPITRE 5. Quelques propriétés des points d'accumulation des ensembles clairsemés, compacts et non-métrisables	32
CHAPITRE 6. Problèmes	35
Travaux cités	37