NUMERICAL ANALYSIS AND MATHEMATICAL MODELLING
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 24
PWN-POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1990

О РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ОБ ОДНОМЕРНОМ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОГО ГАЗА

А. А. АМОСОВ, А. А. ЗЛОТНИК

Московский энергетический институт и математический факультет, Московский государственный педагогический институт, Москва, СССР

Исследование и решение задач динамики вязкого газа представляет большой теоретический и практический интерес. К настоящему времени накоплен большой опыт численного решения этих задач и имеются достижения в теории численных методов [11, 18, 20, 24, 28]. Однако обоснование корректности методов и получение для них оценок погрешности при данных малой гладкости „в целом" по времени, причем в исходной нелинейной постановке, по-прежнему составляют сложную математическую проблему.

Установленные недавно новые существенные результаты [10, 14–17] в теории начально-краевых задач динамики вязкого газа с одной пространственной переменной стимулировали появление ряда работ [4–9, 19, 21, 22, 25–27], посвященных теоретическому анализу соответствующих разностных схем.

В данной работе излагаются полученные авторами результаты о корректности и оценках погрешности двух семейств разностных схем (РС) для систем уравнений движения вязкого теплопроводного и вязкого баротропного газа. Все результаты получены „в целом" по времени, сформулированы в терминах условий на данные и не требуют, как правило, малости шага по пространственной переменной.

1. Начально-краевая задача

Система уравнений, описывающая одномерное движение вязкого теплопроводного совершенного газа, имеет вид

(1.1) $$D_t\eta = Du,$$

(1.2) $$D_t u = D(\nu\varrho Du - p) + g, \quad p = k\varrho\theta, \ \varrho = 1/\eta,$$

(1.3) $$c_v D_t\theta = D(\lambda\varrho D\theta) + (\nu\varrho Du - p)Du + f.$$

Здесь η — удельный объем газа, u — его скорость, θ — абсолютная температура. Они являются искомыми функциями и зависят от лагранжевых массовых координат $(x, t) \in Q = \Omega \times [0, T]$, $\Omega = [0, X]$. Функции ϱ и p — это плотность и давление. Кроме того, $g = g(x, t)$, $f = f(x, t)$, а величины $\nu > 0$, $k \geqslant 0$, $c_v > 0$, $\lambda = 0$ — постоянные. Через D и D_t обозначены производные по x и t.

Дополним выписанную систему уравнений краевыми и начальными условиями

$$(1.4) \qquad u|_{x=0,X} = 0, \qquad D\theta|_{x=0,X}, \qquad (\eta, u, \theta)|_{t=0} = (\eta^0, u^0, \theta^0).$$

Возможны и другие постановки краевых условий, но они рассматриваться не будут.

Пусть $L_q(G)$ и $W_2^1(G)$ — пространства Лебега и С. Л. Соболева. Нам потребуются также анизотропное пространство Лебега $L_{q,\tau}(Q)$, „энергетическое" пространство $V_2(Q)$, пространство С. Л. Соболева $W_2^{2,1}(Q)$ и пространство $S_2^{1,1}W(Q)$ функций с доминирующей смешанной производной, с нормами

$$\|\cdot\|_{L_{q,\tau}(Q)} = \big\| \|\cdot\|_{L_q(\Omega)} \big\|_{L_\tau(0,T)}, \qquad \|\cdot\|_{V_2(Q)} = \|\cdot\|_{L_{2,\infty}(Q)} + \|D\cdot\|_{L_2(Q)},$$

$$\|\cdot\|_{S_2^{1,1}W(Q)} = \|\cdot\|_{W_2^1(Q)} + \|DD_t\cdot\|_{L_2(Q)}, \qquad \|\cdot\|_{W_2^{2,1}(Q)} = \|\cdot\|_{W_2^1(Q)} + \|D^2\cdot\|_{L_2(Q)}.$$

Отметим, что пространства $W_2^{2,1}(Q)$ и $S_2^{1,1}W(Q)$ вложены в $C(Q)$ — пространство непрерывных в Q функций. Под нормой вектор-функции будем понимать сумму норм её компонент.

Под регулярным обобщенным решением задачи (1.1)–(1.4) будем понимать такую тройку $z = (\eta, u, \theta) \in S_2^{1,1}W(Q) \times [W_2^{2,1}(Q)]^2$, для которой уравнения (1.1)–(1.3) выполнены в $L_2(Q)$, условия (1.4) выполнены в смысле следов и справедливы дополнительные условия $\eta > 0$, $\theta > 0$.

Указанные дополнительные условия имеют ясный физический смысл.

Введем тройку и пары функций $z^0 = (\eta^0, u^0, \theta^0)$, $w^0 = (u^0, \theta^0)$, $\varphi = (f, g)$. Пусть $N > 1$ — параметр.

Предложение 1.1. *Пусть данные удовлетворяют условиям*

$$\|z^0\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\varphi\|_{L_2(Q)} \leqslant N, \qquad N^{-1} \leqslant \eta^0, \qquad N^{-1} \leqslant \theta^0, \qquad u^0|_{x=0,X} = 0, \qquad f \geqslant 0.$$

Тогда начально-краевая задача (1.1)–(1.4) *имеет единственное регулярное обобщенное решение z и верны оценки*

$$K(N)^{-1} \leqslant \eta, \qquad K(N)^{-1} \leqslant \theta, \qquad \|\eta\|_{S_2^{1,1}W(Q)} + \|w\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leqslant K(N).$$

Указанный результат, по-существу, содержится в [10, 17].

Здесь и ниже через $K(N)$, $K_i(N)$ обозначаем положительные неубывающие функции (они могут зависеть от X, T и ν, k, c_v, λ как от параметров); через $\tau^0(N)$ обозначаем аналогичные невозрастающие функции.

2. Обозначения. Вспомогательные теоремы

Введем на Ω сетку $\bar{\omega}^h$ с узлами $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = X$ и шагами $h_i = x_i - x_{i-1}$. Положим $x_{-1} = -h_1$, $x_{n+1} = X + h_n$ и введем сетку $\bar{\omega}^h_{1/2}$ с узлами $x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2$, $-1 \leqslant i \leqslant n$ и шагами $h_{i+1/2} = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$. Введем также на $[0, T]$ сетку $\bar{\omega}^\tau$ с узлами $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T$ и шагами $\tau_j = t_j - t_{j-1}$. Положим $\omega^h = \bar{\omega}^h \backslash \{x_0, x_n\}$, $\omega^h_{1/2} = \bar{\omega}^h_{1/2} \backslash \{x_{-1/2}, x_{n+1/2}\}$, $\omega^\tau = \bar{\omega}^\tau \backslash \{t_0\}$ и $h_{\max} = \max\limits_i h_i$, $\tau_{\max} = \max\limits_j \tau_j$.

Введем сеточные операторы. Для функции $V_i = V(x_i)$, заданной на $\bar{\omega}^h$ или $\bar{\omega}^h_{1/2}$ (i — целый или полуцелый индекс), положим

$$\delta V_{i+1/2} = (V_{i+1} - V_i)/h_{i+1}, \qquad s V_{i+1/2} = (V_i + V_{i+1})/2, \qquad V_{\pm,i} = V_{i \pm 1/2}.$$

Для функции $V^j = V(t_j)$, заданной на $\bar{\omega}^\tau$, положим

$$\bar{\partial}_t V^j = (V^j - V^{j-1})/\tau_j, \qquad \check{V}^j = V^{j-1}, \qquad I_\tau V^j = \sum_{1 \leqslant l \leqslant j} V^l \tau_l.$$

Введем сеточные нормы. Введем для $q, r \in [1, \infty)$ нормы $\|\cdot\|_{L_q(\bar{\omega}^h)}$, $\|\cdot\|_{L_q(\bar{\omega}^h_{1/2})}$, $\|\cdot\|_{L_r(\omega^\tau)}$, получающиеся из норм в $L_q(\Omega)$, $L_q(x_{-1}, x_{n+1})$, $L_r(0, T)$ в результате замены входящих в их определение интегралов на квадратурные формулы трапеций, центральных прямоугольников, правых прямоугольников соответственно. Положим $\|V\|_{L_q(\omega)} = \|\mathring{V}\|_{L_q(\bar{\omega})}$ для $\omega = \omega^h$, $\omega^h_{1/2}$, где $\mathring{V}$ — продолжение V нулем с ω на $\bar{\omega}$. Пусть $\|V\|_{L_\infty(\omega)} = \max\limits_{\xi \in \omega} |V(\xi)|$ и пусть $(\cdot,\cdot)_{L_2(\omega)}$ — согласованное с $\|\cdot\|_{L_2(\omega)}$ скалярное произведение (для любой сетки ω), а $\langle \cdot \rangle = X^{-1}(\cdot, 1)_{L_2(\omega^h_{1/2})}$.

Введем сеточную $L_{q,r}$-норму $\|\cdot\|_{L_{q,r}(\omega \times \omega^\tau)} = \| \|\cdot\|_{L_q(\omega)} \|_{L_r(\omega^\tau)}$, где $q, r \in [1, \infty]$, а ω — одна из сеток по x.

Условимся ниже в обозначениях норм и скалярных произведений опускать индекс, указывающий на сетку, когда эта сетка служит областью определения функции.

Для функции V, заданных на одной из сеток $\bar{\omega}^h \times \bar{\omega}^\tau$ или $\bar{\omega}^h_{1/2} \times \bar{\omega}^\tau$, введем нормы (ср. п. 1)

$$\|V\|_{V_2} = \max_{0 \leqslant j \leqslant m} \|V^j\|_{L_2} + \|\delta V\|_{L_{2,2}}, \qquad \|V\|_C = \|V\|_{L_{\infty,\infty}},$$

$$\|V\|_{W_2^{2,1}} = \|V\|_{V_2} + \|\delta V\|_{V_2} + \|\bar{\partial}_t V\|_{L_{2,2}},$$

$$\|V\|_{S_2^{1,1}W} = \max_{0 \leqslant j \leqslant m} \|V^j\|_{W_2^1} + \|\bar{\partial}_t V\|_{L_{2,2}} + \|\delta \bar{\partial}_t V\|_{L_{2,2}}.$$

Будем предполагать, что сетка $\bar{\omega}^h$ квазиравномерна в том смысле, что $N^{-1} \leqslant h_{i+1}/h_i \leqslant N$ для $i = 1, \ldots, n-1$.

Существование решения РС в данной статье основано на следующих двух теоремах о разрешимости нелинейных задач с параметром.

Пусть L — конечномерное нормированное пространство, Λ — открытое множество в L. Рассмотрим задачу

$$\mathscr{A}(Z, \gamma) = 0, \tag{2.1}$$

где оператор $\mathscr{A}$ действует из $\Lambda \times [0, 1]$ в L и непрерывен.

Теорема 2.1. *Пусть производная $\mathscr{A}_Z$ существует и непрерывна, и выполнены условия:*

(1) *при $\gamma = 0$ задача* (2.1) *имеет единственное решение;*

(2) *существует замкнутое ограниченное множество $\bar{\Lambda}_0 \subset \Lambda$ такое, что при всех $\gamma \in [0, 1]$ для любого решения $Z^{\langle\gamma\rangle}$ задачи* (2.1) *верна априорная „оценка" $Z^{\langle\gamma\rangle} \in \bar{\Lambda}_0$;*

(3) *при всех $\gamma \in [0, 1]$ однородное уравнение в вариациях $\mathscr{A}_Z(Z^{\langle\gamma\rangle}, \gamma) V = 0$ имеет только тривиальное решение $V = 0$.*

Тогда при всех $\gamma \in [0, 1]$ задача (2.1) *имеет единственное решение.*

Теорема 2.2. *Пусть существует элемент $Z^{\langle 0\rangle} \in \Lambda$ такой, что $\mathscr{A}(Z, 0) = Z - Z^{\langle 0\rangle}$ и выполнено условие* 2) *теоремы* 2.1. *Тогда при всех $\gamma \in [0, 1]$ задача* (2.1) *имеет решение.*

Указанные теоремы эквивалентны теоремам о разрешимости нелинейных двухслойных РС в [4, 5], доказательство которых [6] использует теорему о неявной функции и теорему Брауэра о неподвижной точке.

По сравнению с теоремой 2.1 в теореме 2.2 присутствует очень частное предположение о $\mathscr{A}(Z, 0)$ и не гарантируется единственность решения, зато не требуется существование $\mathscr{A}_Z$ и тем более исследование уравнения в вариациях. Применение теорем 2.1 и 2.2 позволяет выводить существование решения РС, в первую очередь, из наличия априорных (или как будет видно ниже, из некоторых квазиаприорных) оценок решения. Тем самым нет необходимости (в отличие от ряда других работ по РС для задач газовой динамики) специально для доказательства существования решения РС строить итерационные процессы и обосновывать их сходимость.

3. Семейство разностных схем. Эталонная разностная схема и оценки её решения

Дискретизируем начально-краевую задачу (1.1)–(1.4). Введем в Q прямоугольную неравномерную сетку $\bar{\omega}^h \times \bar{\omega}^\tau$; в её узлах требуется найти (приближенную) скорость газа U. Введем еще одну сетку $\bar{\omega}^h_{1/2} \times \bar{\omega}^\tau$; в её узлах требуется найти (приближенные) удельный объем H и температуру Θ. Прием использования пары сеток и его эффективность в гидро- и газодинамике хорошо известны. Выпишем двухслойную разностную схему

$$(3.1)\qquad \bar\partial_t H = I\delta U,$$

$$(3.2)\qquad \bar\partial_t U = \delta(\nu R_{\rm I}\delta U - P_{\rm I}) + G,$$

$$(3.3)\qquad c_v\bar\partial_t\Theta = \delta(\lambda R_{\rm III}\delta\Theta) + (\nu R_{\rm II}\delta U - P_{\rm II})\delta U + F,$$

$$(3.4)\qquad U|_{i=0,n} = 0, \quad \delta\Theta|_{i=0,n} = 0, \quad (H,\, U,\, \Theta)|_{j=0} = (H^0,\, U^0,\, \Theta^0).$$

Предполагается, что $H^j_{-1/2} = H^j_{1/2}$, $H^j_{n+1/2} = H^j_{n-1/2}$. Функции G, F и H^0, U^0, Θ^0 заданы и удовлетворяют условиям $F \geqslant 0$ и $H^0 > 0$, $\Theta^0 > 0$.

Вид коэффициентов $I(H, \check H)$, $R_\alpha(H, \check H)$, $P_\alpha(H, \check H, \Theta, \check\Theta)$ ($\alpha = $ I, II), $R_{\rm III}(H_+, H_-, \check H_+, \check H_-)$ не фиксирован. Предполагается только, что коэффициенты определены на множествах $(\boldsymbol{R}^+)^2$, $(\boldsymbol{R}^+)^2$, $(\boldsymbol{R}^+)^4$, $(\boldsymbol{R}^+)^4$, соответственно и принадлежат пространствам $W^{1,\rm loc}_\infty$ на них; здесь $\boldsymbol{R}^+ = (0, +\infty)$. Кроме того, пусть $I > 0$, $R_\alpha > 0$ ($\alpha = $ I, II, III) и выполнены условия согласования

$$(3.5)\qquad I(H, H) = 1, \quad R_\alpha(H, H) = H^{-1}, \quad P_\alpha(H, H, \Theta, \Theta) = kH^{-1}\Theta$$
$$(\alpha = \text{I, II}), \quad R_{\rm III}(H, H, H, H) = H^{-1}.$$

Тем самым исследуется не одна РС, а достаточно широкое семейство РС.

Введем тройку и пары функции $Z = (H, U, \Theta)$, $W = (U, \Theta)$, $\Phi = (G, F)$.

Под решением РС будем понимать (вектор-) функцию Z, удовлетворяющую не только уравнениям (3.1)–(3.4), но и дополнительным условиям $H > 0$, $\Theta > 0$.

Под регулярным $\bar N$-решением РС будем понимать решение Z, удовлетворяющее неравенствам

$$(3.6)\qquad \bar N^{-1} \leqslant H, \quad \bar N^{-1} \leqslant \Theta, \quad \|H\|_{S_2^{1,1}W} + \|W\|_{W_2^{2,1}} \leqslant \bar N.$$

Последнее определение, как очевидно, инициировано предложением 1.1.

Ниже заметную роль играет специальная аппроксимация плотности

$$R^{\ln}(H, \check H) = (\ln H - \ln\check H)/(H - \check H) \quad \text{при} \quad H \not\equiv \check H, \quad R^{\ln}(H, H) = H^{-1}.$$

Для решения РС (3.1)–(3.4) справедливы следующие дискретные законы сохранения:

(1) закон сохранения массы (или, как иногда говорят, объема) — при $I \equiv 1$: $\|H^j\|_{L_1} = \|H^0\|_{L_1}$, $1 \leqslant j \leqslant m$;

(2) закон сохранения энергии (при $R_{\rm I} = R_{\rm II}$, $P_{\rm I} = P_{\rm II}$):

$$\bar\partial_t\|E\|_{L_1} + 0.5r\|\bar\partial_t U\|^2_{L_2} = (G,\, U)_{L_2} + \|F\|_{L_1}, \qquad E = 0.5s(U^2) + c_v\Theta;$$

(3) закон неубывания энтропии (при $P_{\rm II} = kR(H, \check H)\Theta$, где $[(R/I)(H, \check H) - R^{\ln}(H, \check H)](H - \check H) \leqslant 0$:

$$\bar\partial_t\langle S\rangle \geqslant 0, \qquad S = k\ln H + c_v\ln\Theta.$$

Более точно, справедливо неравенство

$$\bar{\partial}_t\langle S\rangle \geqslant \langle \lambda R_{\rm III}(\delta\ln\Theta)^2+R_{\rm II}\Theta^{-1}(\delta U)^2+F\Theta^{-1}\rangle.$$

При построении РС выполнению дискретных законов сохранения обычно придают большое значение (отметим, однако, что дискретный закон неубывания энтропии нередко забывают). То, что это оправдано, видно и из результатов данной статьи. Вместе с тем из них следует, что выполнение законов сохранения нельзя однозначно связывать с наличием у РС столь важных свойств, как устойчивость, существование и единственность регулярных решений, справедливость точных оценок погрешности (причем даже на сетке с любым — не обязательно малым — $h_{\max}$).

Для всех основных анализируемых в статье понятий характерно то, что они относятся к достаточно широким (и естественным) классам данных, а не к индивидуальным данным или решениям. По мнению авторов, в нелинейном случае это позволяет, в частности, более адекватно отражать реальную практику, когда присутствуют ошибки в данных (например, связанные с их усечением при вводе в ЭВМ) и вычислительная погрешность.

Выделим в семействе РС эталонную РС (фактически, узкое подсемейство РС) с коэффициентами вида

$$I\equiv 1,\qquad R_{\rm I}=R_{\rm II}=R^{\rm ln},\qquad P_{\rm I}=P_{\rm II}=kH^{-1}\Theta.$$

О коэффициенте $R_{\rm III}$ в эталонной РС дополнительно предположим, что он не зависит от $H_\pm$ и удовлетворяет условию:

$$K(N)^{-1}\leqslant(\check{H}_+ + \check{H}_-)R_{\rm III}(\check{H}_+,\check{H}_-)\qquad \forall\check{H}_\pm\geqslant N^{-1},$$

где $N>1$ — любое.

Указанная РС названа эталонной по той причине, что существование регулярного решения РС (3.1)–(3.4) и оценки его погрешности выводятся из предварительно устанавливаемых соответствующих результатов для этой РС.

Для эталонной РС справедливы все три названных выше закона сохранения, и это существенно используется при выводе априорных оценок её решения (см. теорему 3.1 ниже).

Выбор $R_{\rm I}/I=R^{\rm ln}$ (имеющий место в эталонной РС) может, на первый взгляд, показаться экзотическим. Он нужен для того, чтобы переписать уравнение (3.2) с учетом (3.1) в виде

$$\nu\delta_t\delta\ln H=\bar{\partial}_t U+\delta P_{\rm I}-G. \tag{3.7}$$

Указанное уравнение лежит в основе всех известных к настоящему времени методов получения равномерных двусторонних оценок для H, играющих фундаментальную роль при выводе априорных оценок решения РС.

Введем величину

$$\bar{\tau} = \nu c_v \|H^0\|_{L_1}/(2k\mathscr{E}), \qquad \mathscr{E} = [(\|E^0\|_{L_1} + \|F\|_{L_{1,1}})^{1/2} + \sqrt{2}\,\|G\|_{L_{2,1}}]^2.$$

Отметим, что при $G = 0$, $F = 0$ имеем: $\mathscr{E} = \|E^0\|_{L_1}$ — начальная энергия газа.

Теорема 3.1. (а) *Пусть данные* РС *удовлетворяют условиям*

$$N^{-1} \leqslant H^0 \leqslant N, \qquad N^{-1} \leqslant \Theta^0, \qquad \|U^0\|_{L_2} + \|\Theta^0\|_{L_1} + \|G\|_{L_{2,1}} + \\ + \|F\|_{L_{1,1}} \leqslant N, \qquad 0 \leqslant F.$$

Тогда при $\tau_{\max} \leqslant \bar{\tau}$ *для решения эталонной* РС *верны априорные оценки*

$$K(N)^{-1} \leqslant H \leqslant K(N), \qquad K(N)^{-1} \leqslant \Theta, \qquad \|U\|_{V_2} + \|\Theta\|_{L_{1,\infty}} + \|\delta\Theta\|_{L_{1,1}} \leqslant K(N).$$

(б) *Пусть данные* РС *удовлетворяют условиям*

$$N^{-1} \leqslant H^0, \qquad N^{-1} \leqslant \Theta^0, \; \|Z^0\|_{W_2^1} + \|\Phi\|_{L_{2,2}} \leqslant N, \qquad U^0|_{i=0,n} = 0, \qquad 0 \leqslant F.$$

Тогда при $\tau_{\max} \leqslant \tau^0(N)$ *для решения эталонной* РС *верны априорные оценки* (3.6) *с* $\bar{N} = K(N)$, *т.е. решение эталонной* РС *является регулярным* $K(N)$-*решением.*

Следствие 3.1. *При единственном условии* $\tau_{\max} \leqslant \bar{\tau}$ *эталонная* РС *имеет решение.*

Следствие 3.1 гарантирует существование решения эталонной РС при единственном конкретном (и физичном) условии на $\tau_{\max}$, что является важным достоинством этой РС. Следствие вытекает из теоремы 2.2 в силу содержащихся в теореме 3.1(а) равномерных послойных априорных оценок $(1 \leqslant j \leqslant m)$

$$K(N)^{-1} \leqslant H^j \leqslant K(N), \qquad K(N)^{-1} \leqslant \Theta^j, \qquad \|U^j\|_{L_2} + \|\Theta^j\|_{L_1} \leqslant K(N).$$

Полезно отметить, что все сказанное об эталонной РС сохранит силу, если её взять в несколько более общем виде. Именно, можно положить $P_{\rm I} = P_{\rm II} = kR_{\rm IV}(H, \check{H})\Theta$, где $R_{\rm IV} \in W_\infty^{1,\rm loc}(\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^+)$, $R_{\rm IV} > 0$ и верны условия

(1) $\qquad (R_{\rm IV}(H, \check{H}) - R^{\rm ln}(H, \check{H}))(H - \check{H}) \leqslant 0;$

(2) $\qquad 1/R_{\rm IV}(aH, b\check{H}) \leqslant c_1 \max(a, b)/R_{\rm IV}(H, H) \qquad$ для $\forall a > 0,\ b > 0.$

О коэффициенте $R_{\rm III}$ в эталонной РС достаточно к указанным в начале § 3 условиям дополнительно предположить следующее: существует функция $R_{\rm V}(H, \check{H}) > 0$, монотонно убывающая по каждому из аргументов и такая, что:

(1) $\qquad R_{\rm V}(H, \check{H}) \geqslant c_2 R^{\rm ln}(H, \check{H}) \qquad$ при $\qquad \check{H} \leqslant H;$

(2) $\qquad R_{\rm V}(\max(H_+, H_-), \max(\check{H}_+, \check{H}_-)) \leqslant K(N) R_{\rm III}(H_+, H_-, \check{H}_+, \check{H}_-)$

при $\quad N^{-1} \leqslant H_\pm,\ N^{-1} \leqslant \check{H}_\pm \ (N > 1$ — любое).

Константы c_1, c_2, от $H, \check{H}$, разумеется, не зависят. При этом в выражении для $\bar{\tau}$ следует $\mathscr{E}$ заменить на $c_1\mathscr{E}$.

В частности, можно взять $R_{\mathrm{IV}} = R^{\mathrm{ln}}$, $R_{\mathrm{III}} = (sH)^{-\alpha}(s\check{H})^{\alpha-1}$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1/2$.

4. Устойчивость

Напомним, что в нелинейном случае в противоположность линейному устойчивость РС отнюдь не эквивалентна наличию априорных оценок решения. Отметим, что при наличии достаточно гладкого решения и малости шагов сетки оценки погрешности можно получать, не используя явно устойчивость РС [1 — 3]. Авторы придерживаются, однако, той точки зрения, что устойчивость является одним из основных свойств РС и заслуживает специального изучения.

Введем в правую часть уравнения (3.1) функцию B:

$$\bar{\partial}_t H = I\delta U + B. \tag{4.1}$$

Пусть $Z^{(1)} = (H^{(1)}, U^{(1)}, \Theta^{(1)})$ – решение РС (4.1), (3.2)–(3.4), отвечающее начальным функциям $Z^{(1),0} = (H^{(1),0}, U^{(1),0}, \Theta^{(1),0})$ и правым частям $B^{(1)}$, $\Phi^{(1)} = (G^{(1)}, F^{(1)})$, а $Z^{(2)} = (H^{(2)}, U^{(2)}, \Theta^{(2)})$ – начальным функциям $Z^{(2),0} = (H^{(2),0}, U^{(2),0}, \Theta^{(2),0})$ и правым частям $B^{(2)}$, $\Phi^{(2)} = (G^{(2)}, F^{(2)})$. При условии ограниченности некоторых (естественных) норм $Z^{(1)}$ и $Z^{(2)}$ укажем оценки разности $\Delta Z \equiv (\Delta H, \Delta W) = Z^{(1)} - Z^{(2)}$ в довольно широком наборе норм через соответствующие нормы разностей данных $\Delta Z^{(0)} = Z^{(1),0} - Z^{(2),0}$ и $\Delta B = B^{(1)} - B^{(2)}$, $\Delta\Phi = \Phi^{(1)} - \Phi^{(2)}$. Предположим для удобства, что справедливо дивергентное представление $\Delta\Phi = \bar{\partial}_t\Phi_a + \Phi_b + \delta\Phi c$, где, в частности, $\Phi_a = (G_a, F_a)$, $\Phi_c = (G_c, F_c)$, причем $F_c|_{i=0,n} = 0$. Пусть $N \leqslant \bar{N}$, $\bar{N}$ — параметр.

Теорема 4.1. *Пусть при $k = 1, 2$ выполнены условия*

$$\bar{N}^{-1} \leqslant H^{(k)} \leqslant \bar{N}, \quad \bar{N}^{-1}\Theta^{(k)} \leqslant \bar{N}, \quad \|\bar{\partial}_t H^{(k)}\|_{L_{\infty,2}} + \|\delta H^{(k),0}\|_{L_2} + \|\delta H^{(k)}\|_{L_{2,\infty}} + \|\delta W^{(k)}\|_{V_2} \leqslant \bar{N}.$$

Тогда при $\tau_{\max} \leqslant \tau^0(\bar{N})$ справедливы выражающие устойчивость РС (4.1), (3.2)–(3.4) *оценки*:

$$\|\Delta H\|_{L_{2,\infty}} + \|\Delta W\|_{L_{2,2}} + \|\delta I_\tau \Delta W\|_{L_{2,\infty}} \leqslant K(\bar{N})(\|\Delta H^0\|_{L_2} + \|\bar{G}_c^0\|_{L_2} + \gamma\tau_1\|\Delta\Theta^0\|_{L_2} + |\langle c_v\Delta\Theta^0 - F_a^0\rangle| + \|\bar{F}_c^0\|_{L_2} + \|I_\tau\Delta B\|_{L_{2,\infty}} + \|\Phi_a\|_{L_{2,2}} + \|\Phi_b\|_{L_{1,1}} + \|\Phi_c\|_{L_{2,1}}), \tag{4.2}$$

где $\Delta U^0 - G_a^0 = \delta\bar{G}_c^0$, $c_v\Delta\Theta^0 - F_a^0 - \langle c_v\Delta\Theta^0 - F_a^0\rangle = \delta\bar{F}_c^0$, $\bar{F}_c^0|_{i=0,n} = 0$, а $\gamma = 0$ в случае, когда P_{I} и *P_{II} не зависят от $\check{\Theta}$, либо $\gamma = 1$ в случае, когда*

$\tau_j \leqslant \bar{N}\tau_{j-1}$ *при* $2 \leqslant j \leqslant m$ (*одно из двух предполагается*);

$$(4.3) \qquad \|\Delta H\|_{L_{2,\infty}} + \|\bar{\partial}_t \Delta H\|_{L_{2,2}} + \|\Delta W\|_{V_2} \leqslant K(\bar{N})(\|\Delta Z^0\|_{L_2} + \\ + \|\Delta B\|_{L_{2,2}} + \|\Phi_a^0\|_{L_2} + \|\tau^{-1/2}\Phi_a\|_{L_{2,2}} + \|\Phi_b\|_{L_{q_1,r_1}} + \|\Phi_c\|_{L_{2,2}}),$$

где $(2q_1)^{-1} + r_1^{-1} = 5/4,\ q_1, r_1 \in [1, \infty]$;

$$(4.4) \qquad \|\Delta Z\|_c \leqslant K(\bar{N})(\|\Delta Z^0\|_{L_\infty} + \|I_\tau \Delta B\|_c + \|\Phi_b\|_{L_{q_2,r_2}} + \\ + \|I_\tau G_c\|_c + \|\Phi_c\|_{L_{2q_3,2r_3}});$$

где $(2q_i)^{-1} + r_i^{-1} < 1,\ q_i, r_i \in [1, \infty]$ *при* $i = 2, 3$;

$$(4.5) \qquad \|\Delta H\|_{S_2^{1,1}W} + \|\Delta W\|_{W_2^{2,1}} \leqslant K(\bar{N})(\|\Delta Z^0\|_{W_2^1} + \|\Delta B\|_{L_{2,2}} + \\ + \|\delta \Delta B\|_{L_{2,2}} + \|\Delta \Phi\|_{L_{2,2}}).$$

Последняя оценка справедлива при дополнительном предположении $I,\ R_1,\ P_1,\ P_{III} \in W_\infty^{2,\mathrm{loc}}$.

Следствие 4.1. *Регулярное* $\bar{N}$-*решение* РС (3.1)–(3.4) *при* $\tau_{\max} \leqslant \bar{\tau}^0(\bar{N})$ *единственно.*

Условие $F^{(k)} \geqslant 0$ ($k = 1, 2$) в теореме 4.1 не нужно. Условия согласования (3.5) также не используются.

Из теоремы 4.1 вытекает следующее. **1.** Регулярное $\bar{N}$-решение РС (3.1)–(3.4) при $\tau_{\max} \leqslant \bar{\tau}^0(\bar{N})$ устойчиво в сильном смысле (близком к типичному в линейном случае) и как следствие — единственно. В частности, оценка (4.2) выражает устойчивость по начальным функциям и правым частям в весьма слабых (негативных) нормах, а оценка (4.5) гарантирует устойчивость в классе, который определяет регулярное решение. Уместно сказать, что даже такое свойство, как единственность, формулируется не совсем традиционно: класс, в котором решение единственно (в случае эталонной схемы — класс данных, на котором решение единственно) связан с ограничением на $\tau_{\max}$.

2. Можно оценить влияние погрешности усечения данных. Существенно, что при этом для ошибки ε усечения начальных функций возникает условие типа $\|\varepsilon\|_{W_2^1} \leqslant \bar{N}$ или, загрубляя, $h_{\min}^{-1}\|\varepsilon\|_{L_\infty} \leqslant K(\bar{N})$, где $h_{\min}$ — минимальный шаг сетки $\bar{\omega}^h$. Если при анализе устойчивости ограничиваться не регулярными, а обладающими достаточно высокой „гладкостью" решениями, то соответствующее условие на ε может стать гораздо более жестким или даже практически нереальным.

3. Неравенство (4.2) (для случая эталонной РС) играет важную роль в доказательстве существования регулярных решений РС (3.1) — (3.4), см. п. 5. При этом используется случай $B \not\equiv 0$.

4. На неравенствах (4.2)–(4.4) (правда, по существу опять только для случая эталонной РС) базируется вывод оценок погрешности РС (3.1)–(3.4), см. п. 6. Здесь также важен случай $B \not\equiv 0$.

5. Существование и другие свойства регулярных решений разностной схемы

Укажем аналоги предложения 1.1 о свойствах решения дифференциальной задачи (1.1)–(1.4) сначала для введенной в п. 3 эталонной РС, а затем в общем случае РС (3.1)–(3.4).

Теорема 5.1. *Пусть данные* РС *удовлетворяют условиям*

(5.1)
$$N^{-1} \leqslant H^0,\ N^{-1} \leqslant \Theta^0, \quad \|Z^0\|_{W_2^1} + \|\Phi\|_{L_{2,2}} \leqslant N, \quad U^0|_{i=0,n} = 0, \quad F \geqslant 0.$$

Тогда можно указать такие функции $\tau^0(N)$ *и* $K_0(N)$, *что при* $\tau_{\max} \leqslant \tau^0(N)$ *решение* Z *эталонной* РС *существует, единственно и таково, что*

(5.2) $$K_0(N)^{-1} \leqslant H, \quad K_0(N)^{-1} \leqslant \Theta, \quad \|H\|_{S_2^{1,1}W} + \|W\|_{W_2^{2,1}} \leqslant K_0(N),$$

т.е. является регулярным $K_0(N)$*-решением.*

Эта теорема получается простым соединением теоремы 3.1 и следствий 3.1, 4.1.

Положим $\bar{R}_{\mathrm{III}}(H_+, H_-) = R_{\mathrm{III}}(H_+, H_-, H_+, H_-)$ и введем условие

(5.3) $$K(N)^{-1} \leqslant (H_+ + H_-)\bar{R}_{\mathrm{III}}(H_+, H_-) \quad \forall H_\pm \geqslant N^{-1},$$

где $N > 1$ — любое.

Теорема 5.2. *Пусть данные* РС *удовлетворяют условиям* (5.1). *Пусть* $l_0 = 0$, *если* $\bar{R}_{\mathrm{III}}$ *подчиняется условию* (5.3), *а иначе* $l_0 = 1$.

Тогда можно указать такие функции $\tau^0(N)$ *и* $K_0(N)$, *что при* $\tau_{\max} + l_0 h_{\max} \leqslant \tau^0(N)$ *регулярное* $K_0(N)$*-решение* Z (*т.е. решение, удовлетворяющее оценкам* 5.2)) РС (3.1)–(3.4) *существует и единственно и для него верна оценка*

(5.4) $$\|H - H_э\|_{L_{2,\infty}} + \|\bar{\partial}_t(H - H_э)\|_{L_{2,2}} + \|W - W_э\|_{v_2} \leqslant K(N)(\tau_{\max} + l_0 h_{\max}).$$

Здесь через $Z_э = (H_э, W_э)$ *обозначено решение эталонной* РС, *в которой полагается* $R_{\mathrm{III}} = \bar{R}_{\mathrm{III}}(\check{H}_+, \check{H}_-)$ *при* $l_0 = 0$ *либо* $R_{\mathrm{III}} = (s\check{H})^{-1}$ *при* $l_0 = 1$.

Доказательство теоремы 5.2 опирается на теорему 2.1 (о разрешимости задачи $\mathscr{A}(Z, \gamma) = 0$) и использует: (1) теорему 5.1 о решении эталонной РС; (2) теорему 4.1 об устойчивости (точнее, неравенство (4.2) в ней) в случае эталонной РС; (3) формулируемую ниже лемму 5.1 о квазиаприорных оценках решения РС (3.1)–(3.4); (4) следствие 4.1 о единственности решения РС.

Lemma 5.1. *Пусть данные* РС *удовлетворяют условиям* (5.1). *Если для решения* РС (3.1)–(3.4) *справедливы оценки*

$$\bar{N}^{-1} \leqslant H, \quad N^{-1} \leqslant \Theta, \quad \|Z\|_C + \|\delta W\|_{L_\infty,2} \leqslant \bar{N} \quad (c\bar{N} \geqslant N),$$

то при $\tau_{\max} \leqslant \tau^0(\bar{N})$ *оно является регулярным* $K_0(\bar{N})$*-решением.*

Эта лемма названа леммой о квазиаприорных оценках потому, что в ней речь идет не о любых решениях РС, а о таких, для которых предположено наличие „слабой" оценки.

Вывод оценки (5.4) является существенным элементом доказательства теоремы 5.2. Ниже при оценке погрешности РС (см. п. 6) она нужна и сама по себе.

Условие (5.3), как правило, выполняется; тогда $l_0 = 0$ и в теореме 5.2 исчезает условие малости $h_{\max}$.

Подчеркнем, что в теореме 5.2 (в отличие от теоремы 5.1) единственность произвольных решений РС (3.1)–(3.4) не установлена. Поэтому даже если данные РС удовлетворяют условиям (5.1), допустимо – гипотетически – наличие у РС паразитических решений, не являющихся $K_0(N)$-регулярными и такими, что при $\tau_{\max} \to 0$ реализуется по крайней мере одно из трех свойств:

$$\min_{i,j} H^j_{i-1/2} \to 0, \qquad \min_{i,j} \Theta^j_{i-1/2} \to 0, \qquad \|H\|_{S_2^{1,1}W} + \|W\|_{W_2^{2,1}} \to \infty.$$

Для эталонной РС подобное невозможно.

Подобная ситуация, по-видимому, типична для многих нелинейных РС. Существование паразитических решений РС для некоторых квазилинейных параболических задач установлено в [23].

При дополнительных условиях на данные РС можно получить новые оценки Z и $Z - Z_э$. Укажем некоторые из них.

Теорема 5.3. *Пусть данные* РС *удовлетворяют условиям* (5.1) *и* Z – *регулярное* $K_0(N)$*-решение* РС (3.1)–(3.4).

(а) *Если выполнено условие*

$$\|\delta^2 W^0\|_{L_2} + \|\bar{\partial}_t \Phi\|_{L_{2,1}} \leqslant N, \qquad \Phi^0 = \Phi^1, \qquad \delta\Theta^0|_{i=0,n} = 0 \tag{5.5}$$

и $R_{\mathrm{I}}, P_{\mathrm{I}}, R_{\mathrm{III}} \in W_\infty^{2,\mathrm{loc}}$, *то при* $\tau_{\max} \leqslant \tau^0(N)$ *имеем*

$$\|\bar{\partial}_t W\|_{V_2} + \|\delta^2 W\|_{L_{2,\infty}} \leqslant K(N)$$

(б) *Если выполнены условия п. (а) и* $\|\delta H^0\|_{L_\infty} + \|I_t G\|_C \leqslant N$, *то при* $\tau_{\max} \leqslant \tau^0(N)$ *имеем*

$$\|\delta H\|_C \leqslant K(N).$$

Введем условие аппроксимации: при любом $N > 1$

(5.6)
$$|\bar{R}_{\mathrm{III}}(H_+ + H_-) - 2/(H_+ + H_-)| \leqslant K(N)(H_+ - H_-)^2 \qquad \forall H_\pm \in [N^{-1}, N].$$

Для $\bar{R}_{\rm III}\in W^{2,\rm loc}_{\infty}$ указанное условие эквивалентно двум условиям согласования: $\bar{R}_{\rm III}(H, H) = H^{-1}$, $(D_{H_+}\bar{R}_{\rm III}-D_{H_-}\bar{R}_{\rm III})(H, H) = 0$ (второе из которых заведомо выполнено в случае $\bar{R}_{\rm III}(H_+, H_-) = \bar{R}_{\rm III}(H_-, H_+)$).

Теорема 5.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.2, *при* $l_0 = 1$ *выполнено условие* (5.6), *а* $\tau_{\max}+l_0h_{\max} \leqslant \tau^0(N)$.

(а) *Если* $\|\delta H^0\|_{L_4}+\|I_\tau G\|_{L_{4,\infty}} \leqslant N$, $l_0 = 1$, *то — в обозначениях теоремы* 5.2 *— верна оценка*

$$\|H-H_\text{э}\|_{L_{2,\infty}}+\|\bar{\partial}_t(H-H_\text{э})\|_{L_{2,2}}+\|W-W_\text{э}\|_{V_2} \leqslant K(N)(\tau_{\max}+h^2_{\max}).$$

(б) *Если выполнено условие* (5.5) *и при* $l_0 = 0$ *имеем* $R_{\rm III}\in W^{2,\rm loc}_{\infty}$, *а при* $l_0 = 1$ *выполнено условие п.* (а), *то верна оценка*

$$\|Z-Z_\text{э}\|_C \leqslant K(N)(\tau_{\max}+l_0h^2_{\max}).$$

Теорема 5.3 используется [8], например, при оценке погрешности методов реализации РС. Некоторый её вариант нужен и для доказательства теоремы 5.4.

Оценки $Z-Z_\text{э}$ в теоремах 5.2, 5.4 позволяют полностью свести задачу оценки погрешности РС (3.1)–(3.4) к задаче оценки погрешности эталонной РС.

6. Оценки погрешности

Важное место в анализе свойств РС традиционно принадлежит оценкам погрешности.

Предположим, что сетка $\bar{\omega}^h$ задана при помощи функции распределения узлов ζ так, что $x_i = \zeta(iX/n)$ при $0 \leqslant i \leqslant n$; в частности, $\zeta(0) = 0$ и $\zeta(X) = X$. Назовем сетку $\bar{\omega}^h$ почти равномерной, если $\|\zeta\|_{W^2_2(\Omega)} \leqslant N$ и $N^{-1} \leqslant D\zeta$ и сильно почти равномерной, если, сверх того $\|D^3\zeta\|_{L_2(\Omega)} \leqslant N$ и $D^2\zeta|_{x=0,X} = 0$.

Введем σw_i — среднее значение функции w на $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ и $\sigma_t w^j$ — среднее значение на (t_{j-1}, t_j), а также $\sigma_1 w_i$ — среднее с весом $e_i(x)$ значение на (x_{i-1}, x_{i+1}). Здесь i — целый или полуцелый индекс, $e_i(x) = (x-x_{i-1})/h_i$ при $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$, $e_i(x) = (x_{i+1}-x)/h_{i+1}$ при $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$; при вычислении $\sigma_1 w_i$ для $i = 1/2$, $n-1/2$ функция w продолжается за пределы Ω четно относительно точек $x = 0$, X.

Положим $(I_t v)(x, t) = \int\limits_0^t v(x, t')dt'$.

Теорема 6.1. *Пусть данные задачи* (1.1)–(1.4) *удовлетворяют условиям*

$$\|Z^0\|_{W^1_2(\Omega)}+\|\varphi\|_{L_2(Q)} \leqslant N,\quad N^{-1} \leqslant \eta^0,\quad N^{-1} \leqslant \Theta,\quad u^0|_{x=0,X} = 0,\quad f \geqslant 0.$$

Положим ниже $H^0 = \eta^0$ (*кроме п.* е, *где* $H^0 = \sigma\eta^0$), $W^0 = w^0$ (*кроме п.* в, *где* $W^0 = \sigma_1 w^0$), $G = \sigma_1\sigma_t g$, $F = \sigma_1\sigma_t f$ (*кроме п.* а, г, *где* $F = \sigma\sigma_t f$). *Тогда для регулярного* $K_1(N)$-*решения* (*его существование и единственность гарантированы при* $\tau_{\max} + l_0 h_{\max} \leqslant \tau^0(N)$) *верны оценки погрешности*:

(а) *оценка*

$$\|\eta - H\|_{L_{2,\infty}} + \|w - W\|_{L_{2,2}} + \|\delta(I_t w - I_\tau W)\|_{L_{2,\infty}} \leqslant K(N)(\tau_{\max} + h_{\max});$$

(б) *если сетка* $\bar\omega^h$ *почти равномерна, то*

$$\|\eta - H\|_{L_{2,\infty}} + \|\bar\partial_t(\eta - H)\|_{L_{2,2}} + \|w - W\|_{V_2} \leqslant K(N)(\tau_{\max}^{1/2} + h_{\max});$$

(в) *если* $\|D^2\eta^0\|_{L_2(\Omega)} + \|DI_t g\|_{L_{2,\infty}(Q)} \leqslant N$, *выполнено условие* (5.6) *и сетка* $\bar\omega^h$ *сильно почти равномерна, то*

$$\|\eta - H\|_{L_{2,\infty}} + \|w - W\|_{L_{2,2}} + \|\delta(I_t w - I_\tau W)\|_{L_{2,\infty}} \leqslant K(N)(\tau_{\max} + h_{\max}^2);$$

(г) *если* $\|D^2 w\|_{L_2(\Omega)} + \|D_t\varphi\|_{L_{2,1}(Q)} \leqslant N$, $D\Theta^0|_{x=0,X} = 0$, *то*

$$\|\eta - H\|_{L_{2,\infty}} + \|\bar\partial_t(\eta - H)\|_{L_{2,2}} + \|w - W\|_{V_2} \leqslant K(N)(\tau_{\max} + h_{\max});$$

(д) *если выполнены условия на данные* Z^0 *и* φ *из п.* в, г, *условие* (5.6) *и*

$$\|(D_t u)^0\|_{W_2^1(\Omega)} + \|(D_t\theta)^0\|_{W_2^1(\Omega)} + \|D_t\varphi\|_{L_2(Q)} \leqslant N, \qquad (D_t u)^0|_{x=0,X} = 0$$

(*где* $(D_t u)^0 = D\pi^0 + g|_{t=0}$, $c_v(D_t\theta)^0 = D(\lambda\varrho^0 D\theta^0) + \pi^0 Du^0 + f|_{t=0}$ *и* $\pi^0 = \nu\varrho^0 Du^0 - k\varrho^0\theta^0$, $\varrho^0 = 1/\eta^0$), *а сетка* $\bar\omega^h$ *сильно почти равномерна, то*

$$\|\eta - H\|_{L_{2,\infty}} + \|\bar\partial_t(\sigma\eta - H)\|_{L_{2,2}} + \|w - W\|_{V_2} \leqslant K(N)(\tau_{\max} + h_{\max}^2);$$

(е) *если выполнены все условия п.* д *и* $\|\varphi\|_{L_{\infty,1}(Q)} \leqslant N$, *то*

$$\|\sigma\eta - H\|_C + \|w - W\|_C \leqslant K(N)(\tau_{\max} + h_{\max}^2).$$

Следствие 6.1. *Из п.* (а), (б) *следуют оценки*

$$\|\eta - H\|_{L_{q,\infty}} \leqslant K(N)(\tau_{\max} + h_{\max})^{1/q + 1/2},$$

$$\|w - W\|_{L_{q,\infty}} \leqslant K(N)(\tau_{\max}^{1/2} + h_{\max})^{1/q + 1/2} \qquad (2 \leqslant q \leqslant \infty).$$

Следствие 6.2. *В п.* (г) *можно отбросить условия*

$$\|D^2\theta^0\|_{L_2(\Omega)} + \|D_t f\|_{L_{2,1}(Q)} \leqslant N, \qquad D\theta^0|_{x=0,X} = 0,$$

в п. (д) — *условие*

$$\|(D_t\theta)^0\|_{W_2^1(\Omega)} + \|D_t f\|_{L_2(Q)} \leqslant N$$

и заменить тогда $w - W$ *на* $u - U$.

Обсудим указанные оценки погрешности.

В теореме (как, впрочем, во всей работе) отсутствуют требования на решение дифференциальной задачи. Возникающие по ходу доказательства требования такого рода выражены в терминах данных задачи. И это сделано достаточно аккуратно: оценки $w-W$ в п. (б)–(г) по порядку совпадают с оптимальными оценками погрешности РС для линейного параболического уравнения [12, 13].

Оценки п. (а)–(д) позволяют проследить за увеличением порядка малости погрешности и усилением её нормы с ростом требований на данные. Оценки п. (а), (б) и следствие 6.1 даны при минимальных в статье условиях на данные, гарантирующих только существование и единственность регулярного обобщенного решения. В этих условиях допустимы практически произвольные разрывы у DZ^0 и φ. Следствие 6.1 интересно несовпадением порядков оценок $\eta-H$ и $w-W$ в нормах $L_{q,\infty}$. Это несовпадение — по существу и обусловлено различием в свойствах гладкости η и w.

Оценка п. (в) выведена при дополнительных условиях на η^0 и g, зато имеет максимальный (для наших РС) порядок (отметим, что линии разрывов у g по-прежнему могут быть весьма произвольны — запрещаются лишь участки, параллельные оси t).

В оценках п. (б), (г), (д) прослеживается повышение порядка погрешности в одной и той же норме до максимального. При этом в п. (г) допустимы разрывы у $D\eta^0$ и у φ по x, а в п. (д) возникают дополнительные условия на $(D_t u)^0$ и $(D_t \Theta)^0$. Следствие 6.2 показывает, что порядок малости $\|\eta-H\|_{L_{2,\infty}}$ и $\|u-U\|_{V_2}$ связан, в первую очередь, с порядком гладкости η^0, u^0, $(D_t u)^0$, g, а не θ^0, f. Наконец, оценка п. (д) — это оценка максимального порядка в равномерной норме, всегда представляющей интерес для практики.

Кроме условий гладкости данных, существенны условия согласования. Самое слабое из них — условие $u^0|_{x=0,X}=0$ — присутствует во всех оценках; в п. (г), (д) появляется еще по одному подобному условию. На практике условия согласования могут быть даже более обременительны, чем условия гладкости. Проводимый зачастую анализ погрешности в предположении достаточной гладкости решения необходимо связан с выполнением условий согласования высокого порядка (явно это редко указывается).

Оценки п. (а), (г) примечательны тем, что справедливы для любой квазиравномерной сетки $\bar{\omega}^h$, а при этом условии уравнение (3.3) РС (для Θ) не аппроксимирует — в стандартном смысле — соответствующее дифференциальное (1.3). При обосновании этих и других оценок существенную роль играет дивергентный характер погрешности аппроксимации.

7. Баротропный случай

Часто рассматривают так называемую баротропную модель движения газа, в которой давление p является функцией только от η. В этом случае вместо уравнений (1.1)–(1.3) получается замкнутая система уравнений для η и u:

(7.1) $$D_t\eta = Du,$$

(7.2) $$D_t u = D(\nu\varrho Du - p) + g, \qquad p = p(\eta).$$

Дополним её краевыми и начальными условиями

(7.3) $$u|_{x=0,X} = 0, \qquad (\eta, u)|_{t=0} = (\eta^0, u^0).$$

Потребуем, чтобы функция $p(\eta)$ удовлетворяла условиям:

(A_1) $$p \in W_\infty^{1,\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^+), \qquad p \geqslant 0;$$

(A_2) $$\eta p(\eta) = O(E^{(0)}(\eta)) \quad \text{при} \quad \eta \to +0, \quad \text{где } E^{(0)}(\eta) = \int_\eta^1 p(\zeta)d\zeta;$$

(A_3) $$p(\eta) = O(1) \quad \text{при} \quad \eta \to +\infty.$$

Эквивалентный класс функций получается при замене условий A_2 и A_3 условием A_{23}: существуют постоянные $C^{(0)} > 0$, $C^{(1)} > 0$ такие, что

$$\eta p(\eta) \leqslant C^{(0)}E^{(1)}(\eta) \equiv C^{(0)}(E^{(0)}(\eta) + C^{(1)}\eta) \qquad \forall \eta \in \boldsymbol{R}^+.$$

Перечисленным условиям заведомо удовлетворяют наиболее широко используемые на практике функции $p(\eta) = p_1\eta^{-\gamma}$ с $p_1 > 0$, $\gamma \geqslant 0$ (точные постоянные $C^{(0)}$, $C^{(1)}$ для них указаны в [9]). Наличие нелинейной функции $p(\eta)$, которая может стремиться к $+\infty$ при $\eta \to +0$, определяет специфику баротропной задачи.

В данном параграфе условимся считать, что $Z = (\eta, u)$, $Z^0 = (\eta^0, u^0)$ и $w = u$, $w^0 = u^0$, $\varphi = g$ и будем игнорировать условия на θ, $D\theta^0$, $(D_t\theta)^0$, f и свойства θ. (Отметим, что теми же методами можно разобрать и задачу (7.1), (7.2), (1.3), (1.4); здесь мы этого делать не будем).

Предложение 7.1. Предложение 1.1 — с учетом принятых в данном параграфе соглашений — справедливо и для начально-краевой задачи (7.1)–(7.3).

Относительно доказательства этого предложения при тех или иных предположениях о p см. [14, 16]; случай именно условий A_1–A_3 см. в [9].

Для задачи (7.1)–(7.3) изучим двухслойную РС

(7.4) $$\bar{\partial}_t H = I\delta U,$$

(7.5) $$\bar{\partial}_t U = \delta(\nu R_1 \delta U - P) + G,$$

(7.6) $$U|_{i=0,n} = 0, \qquad (H, U)|_{j=0} = (H^0, U^0).$$

Функции H, U определены на тех же сетках, что и выше; по-прежнему $H^0 > 0$. Коэффициенты $I(H, \check{H})$, $R_1(H, \check{H})$, $P(H, \check{H})$ принадлежат пространству $W_\infty^{1,\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^+)$, $I > 0$, $R_1 > 0$ и справедливы условия согласования $I(H, H) = 1$, $R_1(H, H) = H^{-1}$, $P(H, H) = p(H)$.

В качестве баротропной эталонной РС выделим РС с коэффициентами $I \equiv 1$, $R_1 = R^{\ln}$, $P = P^{(-E^{(0)})}$,
где

$$P^{(-E^{(0)})}(H, \check{H}) = -(E^{(0)}(H) - E^{(0)}(\check{H}))/(H - \check{H})$$

при $H \neq \check{H}$, $P^{(-E^{(0)})}(H, H) = p(H)$.

В данном параграфе условимся считать, что $Z = (H, U)$, $Z^0 = (H^0, U^0)$ и $W = U$, $W^0 = U^0$, $\Phi = G$ и будем игнорировать условия на Θ^0, $\delta\Theta^0$, F и свойства Θ.

Все результаты п.п. 3–6 переносятся на баротропный случай.

Теорема 7.1. *Теоремы* 3.1, 5.1, *следствие* 3.1 и *теоремы* 4.1, 5.2, 5.3, 6.1, *следствия* 4.1. 6.1 — *с учетом принятых в данном параграфе соглашений и указываемых ниже модификаций — справедливы и для баротропной эталонной* РС *и* РС (7.4) — (7.6) *соответственно.*

Модификации таковы: (1) *в теореме* 3.1а *и следствии* 3.1 *надо положить*

$$\bar{\tau} = \nu \|H^0\|_{L_1}/[4C^{(0)}(\mathscr{E} + C^{(1)}\|H^0\|_{L_1})],$$

$$\mathscr{E} = (\|E^{(1)}(H^0) + 0.5s\,[(U^0)^2]\|_{L_1}^{1/2} + \sqrt{2}\|G\|_{L_{2,1}})^2,$$

(2) *в неравенстве* (4.2) *теоремы* 4.1 *следует опустить слагаемые, связанные с* $\Delta\Theta^0$ *и* $c_v\Delta\Theta^0 - F_u^0$; *для справедливости неравенства* (4.5) *нужно предположить, что* I, R_1, $P \in W_\infty^{2,\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^+)$;

(3) *в теореме* 5.2 *следует положить* $l_0 = 0$;

(4) *в теореме* 5.3б *не требуется выполнение условий п.* (а);

(5) *в п.* (в), (д), (е) *теоремы* 6.1 *надо предположить, что* $p'' \in L_\infty^{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^+)$, $\pi^0 = \nu\varrho^0 Du^0 - p(\eta^0)$; *кроме того в п.* (в) *достаточно считать, что сетка* $\bar{\omega}^h$ *почти равномерна, а в п.* (д), (е) — *квазиравномерна.*

Дополнение 7.1. *В п.* (в), (д), (е) *теоремы* 6.1 *условие* $\|D^2\eta^0\|_{L_2(\Omega)} + \|DI_t g\|_{L_{2,\infty}(Q)} \leqslant N$ *можно ослабить до* $\|D\eta^0\|_{L_\infty(\Omega)} + \|I_t g\|_{L_\infty(Q)} \leqslant N$, *если в п.* (в), (д) *положить* $H^0 = \sigma\eta^0$ *и заменить* $\eta - H$ *на* $\sigma\eta - H$.

Указанное дополнение означает, что в п. (в) теоремы 6.1 становятся допустимыми практически произвольные разрывы $D\eta^0$ и g, а в п. (д), (е) — такие разрывы $D\eta^0$, что сохраняется непрерывность $(D_t u)^0$, и разрывы g по x. Более того, получающаяся в п. (в) оценка $\|\sigma\eta - H\|_{L_{2,\infty}} \leqslant K(N)(\tau_{\max} + h_{\max}^2)$ относится к числу весьма редких — ведь она имеет второй по $h_{\max}$ порядок, но не требует существования $D^2\eta^0$ (достаточно, чтобы $\|\eta^0\|_{W_\infty^1(\Omega)} \leqslant N$).

В баротропном случае справедлива следующая специфическая теорема единственности решения РС.

Теорема 7.2. *Пусть коэффициенты* РС (7.4)–(7.6) *удовлетворяют условию* $R_1/I = R^{\ln}$, *причем* $R_1 = R^{\ln}$ *либо* $R_1 = \check{H}^{-1}$, *и условию* (*единствен-*

ному для P — другие можно отбросить)

$$HD_H P(H, \check{H}) \leqslant \bar{\alpha} \quad \forall H, \check{H} \in \boldsymbol{R}^+ \tag{7.7}$$

при некотором $\bar{\alpha} \geqslant 0$. *Тогда при* $\tau_{\max} \leqslant \nu/\bar{\alpha}$ *решение* РС *единственно.*

В частности, если $D_H P \leqslant 0$, *то решение* РС *единственно при любой сетке.*

Доказательство опирается на уравнение (3.7).

Условие (7.7) является сеточным аналогом условия [16]:

$$(\mathrm{A}_2') \qquad \eta p'(\eta) \leqslant \alpha \quad \forall \eta \in \boldsymbol{R}^+$$

при некотором $\alpha \geqslant 0$; при $\alpha = 0$ оно переходит в условие $p' \leqslant 0$. Во многих случаях (в частности, для $P = P^{(-E^{(0)})}$ или $P = p(H)$) условие A_2' влечет условие (7.7) с $\bar{\alpha} = \alpha$. С другой стороны, для $P = p(\check{H})$ при любой p имеем $D_H P = 0$.

В заключение параграфа изучим случай, когда условие A_2 (на p) заменяется условием A_2'.

Предложение 7.1 сохраняет силу.

Оказывается, что в качестве эталонной РС в указанном случае удобно взять РС с коэффициентами [5, 6, 22]

$$I \equiv 1, \quad R_1 = R^{\ln}, \quad P = p(H). \tag{7.8}$$

Теорема 7.3. *Пусть p удовлетворяет условиям* A_1, A_2', A_3 *и* $\tau_{\max} \leqslant \nu/(4\alpha)$. *Рассмотрим эталонную* РС *с коэффициентами* (7.8).

(а) *Пусть данные* РС *удовлетворяют условиям*

$$N^{-1} \leqslant H^0 \leqslant N, \qquad \|\delta H^0\|_{L_2} + \|U^0\|_{L_2} + \|G\|_{L_{2,1}} \leqslant N.$$

Тогда верны априорные оценки

$$K(N)^{-1} \leqslant H \leqslant K(N), \qquad \|\delta H\|_{L_{2,\infty}} + \|U\|_{v_2} \leqslant K(N).$$

(б) *Пусть данные* РС *удовлетворяют условиям*

$$\|Z^0\|_{W_2^1} + \|G\|_{L_{2,2}} \leqslant N, \qquad N^{-1} \leqslant H^0, \qquad U^0|_{i=0,n} = 0.$$

Тогда верны априорные оценки

$$K(N)^{-1} \leqslant H, \qquad \|H\|_{S_2^{1,1}W} + \|U\|_{W_2^{2,1}} \leqslant K(N). \tag{7.9}$$

В случае $\alpha = 0$ (*когда* $p' \leqslant 0$) *условие на* $\tau_{\max}$ *пропадает, а величины* $K(N)$ *в п.* (а) *и* (*при дополнительном условии* $\|G\|_{L_{2,1}} \leqslant N$) *в п.* (б) *не зависят от* T.

Теорема 7.4. *Пусть p удовлетворяет условиям* A_1, A_2', A_3. *Тогда теорема* 7.1 *сохраняет силу для баротропной эталонной* РС *с коэффициентами* (7.8) *и* РС (7.4)–(7.6), *со следующими изменениями для названной эталонной* РС:

(1) *вместо теоремы* 3.1 *справедлива теорема* 7.3;

(2) *следствие* 3.1 *и теорема* 5.1 *верны при* $\tau_{\max} \leqslant \nu/(4\alpha)$ (*а не при* $\tau_{\max} \leqslant \bar{\tau}$ *или* $\tau_{\max} \leqslant \tau^0(N)$).

Опираясь на оценки (7.9) с не зависящими от T величинами $K(N)$, можно установить стабилизацию решения эталонной РС при $t_j \to +\infty$. Стабилизация в дифференциальном случае доказана в [15].

Пусть $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < \ldots$ (где $t_m \to +\infty$ при $m \to \infty$) — сетка на $\boldsymbol{R}^+$. Положим для $0 \leqslant k < j \leqslant \infty$

$$\|V\|_{L_{2,r}(Q^{k,j})} = \Big(\sum_{k<l<j+1} \|V^l\|_{L_2}^r \tau_l\Big)^{1/r}.$$

При $p'(\eta) < 0$, $G = 0$ стационарными (т.е. не зависящими от j) решениями уравнений (7.4), (7.5) РС с коэффициентами (7.8) служат только постоянные $Z = (C_H, 0)$. Положим $Z^\infty = (\langle H^0 \rangle, 0)$.

Пусть $a \geqslant 0$ — параметр. Введем функцию $E_a^j = \prod_{1 \leqslant l \leqslant j} (1 + a\tau_l)$. Как нетрудно видеть, $\bar{\partial}_t E_a = a\check{E}_a$, $E_a^0 = 1$, а также

$$\exp[at_j/(1 + a\tau_{\max})] \leqslant E_a^j \leqslant \exp(at_j). \tag{7.10}$$

Таким образом, E_a служит сеточным аналогом функции $\exp(at)$.

Теорема 7.5. *Пусть* p *удовлетворяет условию* A_1 *и условию*: $p'(\eta) \leqslant -\varepsilon_0(b) < 0$ *для* $b^{-1} \leqslant \eta \leqslant b$ (*при всех* $b > 1$).

Если $N^{-1} \leqslant H^0$, $\|Z^0\|^{(1)} + \|G\|_{L_{2,r}(Q^{0,\infty})} \leqslant N$ *для* $r = 1, 2$, *то решение* Z^j *эталонной* РС *с коэффициентами* (7.8) *стремится к* Z^∞ *при* $t_j \to \infty$ *и, более того, при всех* $0 \leqslant k < j$ *верна оценка с* $a = K_1(N)^{-1}$:

$$\|Z^j - Z^\infty\|_{W_2^1}^2 \leqslant K(N)(E_a^j)^{-1}(E_a^k \|Z^k - Z^\infty\|_{W_2^1}^2 + \|\check{E}_a^{1/2} G\|_{L_{2,2}(Q^{k,j})}^2).$$

В частности, если $\|G\|_{L_{2,2}(Q^{k,\infty})}^2 \leqslant \varphi(t_k)$ *для* $k \geqslant 0$, *то*

$$\|Z^j - Z^\infty\|_{W_2^1}^2 \leqslant K(N)\big((E_a^j)^{-1} E_a^k + \varphi(t_k)\big), \quad 0 \leqslant k < j, \tag{7.11}$$

а, если, более того, $\|(\check{E}_\varepsilon)^{1/2} G\|_{L_{2,2}(Q^{k,\infty})} \leqslant N$ *при некотором* $\varepsilon > 0$, *то*

$$\|Z^j - Z^\infty\|_{W_2^1}^2 \leqslant K(N)(E_{\min(a,\varepsilon)}^j)^{-1}, \quad j \geqslant 0. \tag{7.12}$$

Условия теоремы 7.5 заведомо выполнены для функций $p \in C^1(\boldsymbol{R}^+)$ таких, что $p \geqslant 0$, а $p' < 0$.

В случае, когда функция φ задана на $[0, +\infty)$, $\varphi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ (и φ не зависит от сеток), оценка (7.11) гарантирует стабилизацию Z^j к Z^∞ в норме W_2^1, равномерную относительно сеток. Оценка (7.12) гарантирует сеточную экспоненциально быструю стабилизацию (см. (7.9)), причем равномерную относительно сеток и начинающуюся с момента $j = 0$.

Литература

[1] В. Н. Абрашин, *О разностных схемах газовой динамики*, Дифференц. уравнения 17 (4) (1981), 710–718.

[2] В. Н. Абрашин и П. П. Матус, *Разностные схемы для нелинейных гиперболических уравнений с кусочно-гладкими решениями, II*, Дифференц. уравнения 15 (7) (1979), 1225–1238.

[3] —, *О точности разностных схем для одномерных задач газовой динамики*, Дифференц. уравнения 17 (7) (1981), 1155–1170.

[4] А. А. Амосов и А. А. Злотник, *Разностная схема для уравнений движения вязкого теплопроводного газа, её свойства и оценки погрешности „в целом"*, Докл. АН СССР 284 (2) (1985), 265–269.

[5] —, *Разностная схема для уравнений одномерного движения вязкого баротропного газа, её свойства и оценки погрешности „в целом"*, Докл. АН СССР 288 (2) (1986), 270–275.

[6] —, *Разностная схема для уравнений одномерного движения вязкого баротропного газа*, В сб.: Вычислительные процессы и системы. Вып. 4 (под ред. Г. И. Марчука) Наука, Москва 1986, 192–218.

[7] —, *Исследование конечно-разностного метода для уравнений одномерного движения вязкого теплопроводного газа. Априорные оценки и устойчивость*, Препринт № 121 ОВМ АН СССР, Москва 1986.

[8] —, *Исследование конечно-разностного метода для уравнений одномерного движения вязкого теплопроводного газа. Оценки погрешности и реализация*, Препринт № 127 ОВМ АН СССР, Москва 1986.

[9] —, *Разностные схемы второго порядка точности для уравнений одномерного движения вязкого газа*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 27 (7) (1987), 1032–1049.

[10] С. Н. Антонцев, А. В. Кажихов и В. Н. Монахов, *Краевые задачи механики неоднородных жидкостей*, Наука, Новосибирск 1983.

[11] О. М. Белоцерковский и Ю. М. Давыдов, *Метод крупных частиц в газовой динамике*, Наука Москва 1982.

[12] А. А. Злотник, *О скорости сходимости в L_2 проекционно-разностных схем для параболических уравнений*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 18 (6) (1978), 1454–1465.

[13] —, *О скорости сходимости в $V_2(Q_T)$ проекционно-разностных схем для параболических уравнений*, Вестник МГУ, Сер. вычисл. матем. и киберн. 1 (1980), 27–35.

[14] А. В. Кажихов, *Корректность „в целом" смешанных краевых задач для модельной системы уравнений вязкого газа*, Динамика сплошной среды вып. 21, 1975, 18–47.

[15] —, *О стабилизации решений начально-краевой задачи для уравнений баротропной вязкой жидкости*, Дифференц. уравнения 15 (4) (1979), 662–667.

[16] А. В. Кажихов и В. Б. Николаев, *К теории уравнений Навье–Стокса вязкого газа с немонотонной функцией состояния*, Докл. АН СССР 246 (5) (1979), 1045–1047.

[17] А. В. Кажихов и В. В. Шелухин, *Однозначная разрешимость в целом по времени начально-краевых задач для одномерных уравнений вязкого газа*, Прикл. математика и механика 41 (2) (1977), 282–291.

[18] В. М. Ковеня и Н. Н. Яненко, *Метод расщепления в задачах газовой динамики*, Наука, Новосибирск 1981.

[19] Б. Г. Кузнецов и Ш. Смагулов, *О сходящихся разностных схемах для уравнений вязкого газа*, Численные методы механики сплошной среды вып. 57, 1982, 77–89.

[20] Б. Л. Рождественский и Н. Н. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике*, Наука, Москва 1978.

[21] Б. Р. Рысбаев, *Исследование устойчивости и сходимости разностных схем для одномерных уравнений газовой динамики*, Дисс. канд. физ. мат. наук, Каз. ГУ Алма-Ата, 1986.

[22] Б. Р. Рысбаев и Ш. Смагулов, *О сходящихся разностных схемах для уравнений вязкого газа*, Докл. АН СССР 287 (3) (1986), 558–559.

[23] А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов и А. П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, Москва 1987.
[24] А. А. Самарский и Ю. П. Попов, *Разностные методы решения задач газовой динамики*, Наука, Москва 1980.
[25] Ш. Смагулов, *О сходящихся разностных схемах для уравнений вязкого теплопроводного газа*, Докл. АН СССР 275 (1) (1984), 31–35.
[26] —, *Устойчивые разностные схемы для модели вязкого газа*, Вестник АН Каз. ССР 7 (1985), 60–62.
[27] И. Л. Туретаев, *Скорость сходимости в L_2 разностных схем для одномерных уравнений вязкого газа*, Динамика сплошной среды, вып. 74, Новосибирск 1986, 81–86.
[28] Ю. И. Шокин и Н. Н. Яненко, *Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике*, Наука, Новосибирск 1985.

Presented to the Semester
Numerical Analysis and Mathematical Modelling
February 25—May 29, 1987