POLSKA AKADEMIA NAUK · INSTYTUT MATEMATYCZNY

ROZPRAWY MATEMATYCZNE

KOMITET REDAKCYJNY
KAROL BORSUK redaktor
ANDRZEJ MOSTOWSKI MARCELI STARK
STANISŁAW TURSKI

XV

L. DUBIKAJTIS

La géométrie de Lie

WARSZAWA 1958
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

S. 7133

COPYRIGHT 1958
by
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA (Poland), ul. Miodowa 10

All Rights Reserved

No part of this book may be translated or reproduced in any form, by mimeograph or any other means, without permission in writing from the publishers

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

À ma femme,
à qui je dois d'avoir pu
préparer ce travail

INTRODUCTION

1. La géométrie de Lie, comme toutes les géométries, peut être définie par un groupe de transformations. Dans ce travail, en m'appuyant sur une telle définition, je vais donner un système d'axiomes de la géométrie de Lie. Tout d'abord j'aurai à définir ce que je comprends par système d'axiomes d'une géométrie déterminée par un groupe de transformations.

Au début, observons que le groupe de transformations définissant une géométrie peut être déterminé par un ensemble d'invariants. J'appelle un tel ensemble *système d'invariants caractérisant cette géométrie.*

Évidemment, chaque géométrie peut avoir beaucoup de différents systèmes d'invariants qui la caractérisent.

J'appelle *système d'axiomes* d'une géométrie un ensemble de théorèmes qui détermine un certain système d'invariants caractérisant cette géométrie.

Précisons: pour qu'un système de théorèmes A soit le système d'axiomes de la théorie T, il faut et il suffit qu'il remplisse les conditions suivantes:

1° Pour formuler les théorèmes A on utilise toutes les notions d'un système d'invariants caractérisant la théorie T.

2° Tout modèle vérifiant les théorèmes A est isomorphe à un modèle de la théorie T.

3° Inversement, chaque modèle de la théorie T est isomorphe à l'un des modèles vérifiant les théorèmes A.

En particulier, quand la théorie T est catégorique, cette définition se simplifie: on peut remplacer 2° et 3° par

2* Le système basé sur les axiomes A est catégorique [1].

3* Les axiomes A sont vérifiés dans un modèle de la théorie T.

La géométrie de Lie étant une théorie catégorique, je me servirai de cette dernière définition pour prouver que le système d'axiomes donné dans ce travail est bien celui de la géométrie de Lie.

---

[1] Plus précisément: le système ne doit être catégorique que par rapport aux notions mentionnées dans la condition 1°.

2. Pour définir le groupe de transformations déterminant la géométrie de Lie, il convient d'abord de fixer la nomenclature. J'appelle *espace de Möbius* ([2], p. 226) à n dimensions, l'espace euclidien à n dimensions auquel on a adjoint un et un seul point à l'infini, qui est situé sur toutes les droites mais n'est pas situé sur un cercle quelconque.

Dans la suite j'entends par *point* chaque point à distance finie ou à l'infini.

J'appellerai *surface sphérique à k dimensions* la surface d'une sphère à $k+1$ dimensions. En particulier, j'emploierai le terme *hypersphère* au lieu de surface sphérique à $n-1$ dimensions, *cercle* ou *circonférence* — au lieu de surface sphérique à 1 dimension et je dirai *hyperplan* au lieu de dire plan à $n-1$ dimensions et *droite* — au lieu de plan à 1 dimension.

Par *hypersphère orientée* j'entends une hypersphère avec un sens positif fixé (vers l'intérieur ou vers l'extérieur) des vecteurs normaux. Pareillement, je définis un *hyperplan orienté* comme un hyperplan avec un sens déterminé des vecteurs normaux.

J'appellerai *deux côtés* (*opposés*) d'une hypersphère (ou d'un hyperplan) le couple des deux hypersphères orientées (hyperplans orientés) que nous obtenons en fixant comme positifs les deux sens opposés des vecteurs normaux.

Toute hypersphère qui n'est pas orientée peut être considérée comme un couple de deux hypersphères orientées (celles qui sont ses deux côtés opposés) et nous profiterons souvent de ce fait. Ceci concerne aussi l'hyperplan et nous appellerons souvent hyperplan le couple des deux côtés d'un hyperplan.

J'appellerai *K-sphère* (cf. [2], p. 14 et 226) chacune des formes suivantes: 1. une hypersphère orientée, 2. un hyperplan orienté, 3. un point à distance finie, 4. le point à l'infini.

Je dirai que deux K-sphères différentes *se touchent* (ou sont en relation de *contact*) (²), quand ces K-sphères sont:

1. Une hypersphère orientée (ou un hyperplan orienté) et un point situé sur elle (sur lui), 2. un hyperplan orienté et le point à l'infini, 3. deux hypersphères orientées (ou une hypersphère orientée et un hyperplan orienté) tangentes de telle manière qu'au point de contact les vecteurs positifs normaux à ces deux K-sphères aient les mêmes sens, 4. deux hyperplans orientés parallèles, dont les vecteurs normaux positifs ont les mêmes sens, 5. deux K-sphères coïncidentes (c'est-à-dire la relation de contact est réflexive).

(²) J'introduis le terme *touchant* comme traduction du terme allemand „*berührend*" employé dans [2], p. 226.

En outre, il est évident que la relation de contact est aussi symétrique.

J'appellerai *groupe de transformations de Lie* (3) le groupe de toutes les transformations de l'espace de Möbius en lui-même, conservant les notions de K-sphère et celle de contact, c'est-à-dire le groupe dont l'ensemble des K-sphères et la relation de contact sont les seuls invariants formant un sytème d'invariants qui le caractérisent.

La géométrie de Lie est déterminée par ce groupe.

J'appellerai *modèle fondamental* de la géométrie de Lie à n dimensions (en le désignant par $\mathfrak{M}_n$) — l'espace de Möbius à n dimensions dans lequel on a défini l'ensemble des K-sphères et la relation de contact.

3. La géométrie de Lie, introduite en 1872 par Sophus Lie, a été étudiée et développée au XIX-ème siècle du point de vue de la géométrie différentielle (4), c'est-à-dire par des méthodes analytiques. Cependant, jusqu'à présent, il n'y a pas de cours synthétique de cette géométrie; elle n'a même pas été axiomatisée (5).

Ce travail a pour but de combler (au moins en partie) cette lacune et de donner un système complet d'axiomes de la géométrie de Lie à n dimensions (où n est un nombre naturel quelconque plus grand que 1).

Pour prouver que le système d'axiomes donné ci-dessous est bien celui de la géométrie de Lie, je démontrerai qu'il satisfait aux conditions: 1°, 2* et 3*, considérées plus haut (v. 1).

Pour que la condition 1° soit remplie il suffit que les axiomes concernent les notions de K-sphère et de contact.

La démonstration que la condition 3* est vérifiée (c'est-à-dire que le système d'axiomes est vérifié par le modèle $\mathfrak{M}_n$) sera faite dans le chapitre 1.

Enfin, dans les chapitres 2-7 je démontre la condition 2* qui affirme que le système d'axiomes est catégorique par rapport à ses notions primitives (c'est-à-dire celles de K-sphère et de contact). Cette dernière démonstration exige le développement d'un fragment assez considérable de la théorie basée sur ce système d'axiomes. C'est pourquoi ce travail est si volumineux; il peut servir de première épreuve d'un cours synthétique de la géométrie de Lie.

En particulier, chapitre 2 contient le système d'axiomes et un certain nombre de théorèmes généraux. Dans le chapitre 3 j'introduis

---

(3) Il ne faut pas confondre cette notion avec celle de *groupe de Lie*.

(4) On en trouve une étude approfondie chez W. Blaschke [2] et F. Klein [7].

(5) Quand j'ai communiqué mes résultats au VIII-ième Congrès des Mathématiciens Polonais en septembre 1953, M. H. Freudenthal, d'Utrecht, m'a informé qu'il avait construit un système d'axiomes de la géométrie de Lie à deux dimensions; ce système n'a d'ailleurs pas été publié.

un système de référence (en fixant trois K-sphères) qui permet de partager l'ensemble de toutes les K-sphères en trois sous-ensembles que j'appelle: 1. *ensemble des points*, 2. *ensemble des hyperplans orientés*, 3. *ensemble des hypersphères orientées*. Dans les chapitres 4 et 5 je montre que les points et les hyperplans ainsi déterminés satisfont aux axiomes de la géométrie affine. Évidemment, il était nécessaire, pour cela, de définir aussi convenablement les autres notions fondamentales de cette géométrie. Ensuite (chapitre 6) je prouve qu'on peut introduire dans cette géométrie affine une métrique telle que la troisième classe des K-sphères (déterminée au chapitre 3) soit l'ensemble des hypersphères orientées au sens propre du mot. Enfin, dans le chapitre 7, en me basant sur le fait que la géométrie métrique est catégorique, je définis l'isomorphisme de deux modèles quelconques du système d'axiomes — isomorphisme par rapport à la notion d'ensemble des K-sphères et celle de contact.

Dans ce travail je démontre quelques théorèmes méthodologiques relatifs à la théorie basée sur le système d'axiomes A. Ces théorèmes méthodologiques portent une numération continue à travers tous les chapitres et leurs numéros sont précédés de la lettre M pour les distinguer des théorèmes de la théorie même.

Les définitions de la méta-théorie ne sont pas numérotées (contrairement aux définitions de la théorie même).

4. Ce travail est un développement de la dissertation présentée pour le grade de candidat ès sciences mathématiques.

Suivant les conseils de mes Critiques j'y ai introduit beaucoup de changements et j'ai notablement simplifié maint chapitre. Le plus essentiel des changements est la généralisation des considérations à la géométrie plane (ce cas avait été exclu de ma dissertation), ce qui m'a obligé de changer une partie des théorèmes et des démonstrations.

Je tiens à remarcier mon Promoteur, M. S. Jaśkowski, de ses précieu conseils et ses remarques, ainsi que MM. A. Bielecki, S. Gołąb, A. Mostowski, E. Otto, qui ont bien voulu lire le manuscrit. J'exprime aussi ma profonde gratitude à tous ceux qui ont contribué à la préparation et à la publication de ce travail.

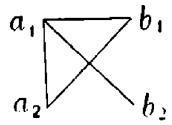
CHAPITRE 1

VÉRIFICATION DES AXIOMES PAR LE MODÈLE FONDAMENTAL DE LA GÉOMÉTRIE DE LIE

Dans ce chapitre nous allons prouver un certain nombre de théorèmes vérifiés dans $\mathfrak{M}_n$ — le modèle fondamental de la géométrie de Lie à n dimensions (où $n \geqslant 2$). Nous admettrons ensuite ces théorèmes comme axiomes de la géométrie de Lie.

Nous introduisons la notation suivante: les K-sphères seront désignées par des minuscules latines, et le contact de deux K-sphères a et b par un tiret, c'est-à-dire en écrivant $a-b$.

Dans le cas où plusieurs K-sphères se touchent, nous simplifierons la notation en écrivant, par exemple



au lieu d'écrire: a_1-b_1, a_1-a_2, a_1-b_2 et b_1-a_2.

DÉFINITION 1.1. Nous disons que *les ensembles des K-sphères $(a_1, \ldots, a_k)$ et $(b_1, \ldots, b_l)$ se touchent*, ou *sont en contact*, lorsque pour chaque $i = 1, 2, \ldots, k$ et pour chaque $j = 1, 2, \ldots, l$, on a $a_i - b_j$. Nous désignons cela par le symbole $(a_1, \ldots, a_k)-(b_1, \ldots, b_l)$.

Dans le cas particulier, $k = 1$, nous écrivons $a_1-(b_1, \ldots, b_l)$.

DÉFINITION 1.2. Nous disons que *les K-sphères $a_1, \ldots, a_k$ ne se touchent pas*, lorsque pour chaque $i \neq j$ les K-sphères a_i et a_j ne se touchent pas. Nous écrivons dans ce cas: $(a_1, \ldots, a_k)_{\not-}$; en particulier, on peut écrire $a \not- b$ au lieu de $(a, b)_{\not-}$.

Pour p K-sphères, $a_1, \ldots, a_p$, ou bien il existe une K-sphère b touchant $(a_1, \ldots, a_p)$, ou bien elle n'existe pas. Pour noter ces deux possibilités nous introduisons une fonction, employée dans la géométrie de Lie ([2], p. 229), définie comme il suit:

DÉFINITION 1.3. $\delta(a_1, \ldots, a_p) = -1$ veut dire qu'il existe au moins une K-sphère touchant $(a_1, \ldots, a_p)$; $\delta(a_1, \ldots, a_p) = +1$ veut dire qu'elle n'existe pas.

Évidemment, l'ordre des arguments n'a pas d'influence sur la valeur de cette fonction.

Dans la suite de ce chapitre nous ferons suivre chaque définition de quelques corollaires illustrant les notions qui y auront été introduites.

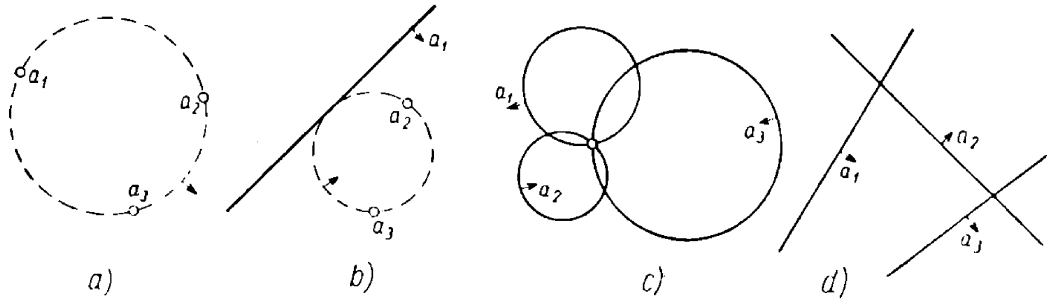


Fig. 1

COROLLAIRE 1. *Voici des exemples de trois K-sphères pour lesquelles* $\delta(a_1, a_2, a_3) = -1$ (fig. 1)(6):

a) *trois points différents,*

b) *un hyperplan orienté et deux points situés d'un même côté de celui-ci,*

c) *trois hypersphères orientées ayant un point commun,*

d) *trois hyperplans orientés.*

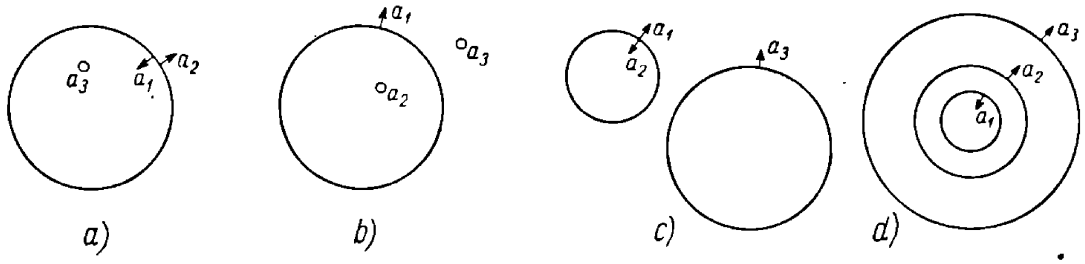


Fig. 2

COROLLAIRE 2. *Exemples de triples de K-sphères pour lesquels on a* $\delta(a_1, a_2, a_3) = +1$ (fig. 2):

a) *deux côtés opposés*(7) *d'une hypersphère (ou d'un hyperplan) et un point ne lui appartenant pas,*

b) *une hypersphère orientée (ou un hyperplan orienté) et deux points situés de ses deux côtés opposés,*

---

(6) Dans ce travail les figures correspondent, en général, au cas $n = 2$, c'est à-dire à la géométrie plane où les K-sphères sont des points, des cercles orientés et des droites orientées.

(7) Pour le terme *deux côtés opposés* voir Introduction, section 2.

c) *deux côtés opposés d'une hypersphère et un hyperplan orienté (ou hypersphère orientée) ne la coupant pas,*

d) *trois hypersphères orientées concentriques.*

Pour démontrer les théorèmes qui ne concernent que les notions définies au moyen des notions de K-sphère et de contact, nous nous servirons souvent des transformations de Lie, en ne les appelant que brièvement „transformations" (car, dans ce chapitre, nous ne parlerons pas d'autres).

En particulier nous nous baserons souvent sur les deux théorèmes suivants:

M. 1. *Si a_1, a_2, a_3 ne se touchent pas* (8), *leur invariant unique* (9) *par rapport aux transformations de Lie est la valeur de la fonction $\delta(a_1, a_2, a_3)$.*

M. 2. *a_1, a_2, a_3 étant trois K-sphères qui ne satisfont pas à la condition $(a_1, a_2, a_3)_{\not\sim}$, tous les contacts entre ces K-sphères forment un système complet de leurs invariants.*

Les démonstrations de ces deux théorèmes se trouvent dans [2], p. 229 et suivantes.

L'exemple suivant montre comment on peut se servir de ces deux théorèmes.

Exemple. Il s'agit de démontrer un théorème concernant trois K-sphères qui ne se touchent pas et qui n'ont pas de K-sphère les touchant.

En vertu du théorème M. 1, nous pouvons transformer (par une transformation de Lie) ces trois K-sphères en deux côtés d'une hypersphère et un point, son centre (10). Pour prouver notre théorème, il suffit de démontrer qu'il est vérifié par les K-sphères transformées, c'est-à-dire par les deux côtés d'une hypersphère et par son centre.

Évidemment, dans le même but nous pouvons transformer les trois K-sphères en un autre triple de K-sphères, par exemple en un hyperplan orienté et en deux points situés de ses côtés opposés (11).

Après ces considérations préliminaires, nous allons démontrer les théorèmes (vérifiés dans le modèle $\mathfrak{M}_n$), que nous admettrons comme axiomes de la géométrie de Lie.

Il est évident que les trois théorèmes suivants sont vrais dans le modèle $\mathfrak{M}_n$:

---

(8) Voir la définition 1.2.

(9) C'est-à-dire: le système complet d'invariants.

(10) Comparer Corollaire 2a.

(11) Comparer Corollaire 2b.

I.1. *La relation de contact est réflexive, c'est-à-dire pour chaque K-sphère a on a $a-a$.*

I.2. *La relation de contact est symétrique, c'est-à-dire $a-b$ implique $b-a$.*

I.3. *Il existe deux K-sphères, a et b, telles que $a \not- b$.*

Pour énoncer les théorèmes nous nous servirons souvent de notions secondaires. En définissant toutes ces notions nous n'emploierons que celles de K-sphère et de contact. C'est pourquoi les notions définies seront invariables par rapport aux transformations de Lie [12].

DÉFINITION 1.4. On dira que *les K-sphères $a_1, \ldots, a_k$ sont dépendantes de $(b_1, \ldots, b_l)$*, si pour chaque K-sphère c touchant $(b_1, \ldots, b_l)$, on a $c-(a_1, \ldots, a_k)$.

Nous pouvons aussi dire que $a_1, \ldots, a_k$ *dépendent de* $(b_1, \ldots, b_l)$, ou *l'ensemble* $(a_1, \ldots, a_k)$ *dépend de* $(b_1, \ldots, b_l)$.

COROLLAIRE 3. *Trois points quelconques différents* [13] b_1, b_2, b_3 *déterminent un cercle ou une droite. $a_1, \ldots, a_k$ étant des points y appartenant, ils dépendent de (b_1, b_2, b_3), car chaque hypersphère ou hyperplan passant par b_1, b_2, b_3 passe aussi par $a_1, \ldots, a_k$* (fig. 3).

COROLLAIRE 4. *Si a est une hypersphère orientée touchant l'hyperplan orienté b_1 au point b_2, alors a dépend de (b_1, b_2)* (fig. 4).

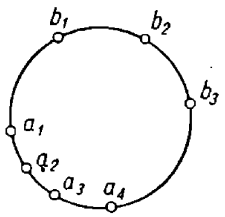


Fig. 3

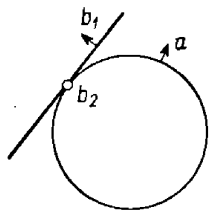


Fig. 4

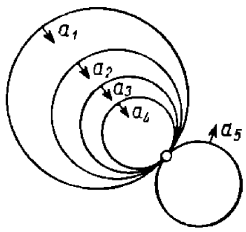


Fig. 5

DÉFINITION 1.5. *Les K-sphères $a_1, \ldots, a_k$ sont dépendantes*, veut dire qu'au moins une des K-sphères $a_1, \ldots, a_k$ dépend des autres. Dans le cas contraire, nous dirons que *les K-sphères $a_1, \ldots, a_k$ sont indépendantes.*

COROLLAIRE 5. *Le nombre naturel k étant plus grand que 2, si les hypersphères orientées $a_1, \ldots, a_k$ se touchent en un point fixé, alors elles sont dépendantes* (fig. 5).

---

(12) La même remarque se rapporte aussi aux notions introduites dans les définitions 1.1-1.3.

(13) Dans ce travail le terme „trois K-sphères" veut dire que les K-sphères sont absolument arbitraires et ne doivent même pas être différentes. Dans le cas contraire, nous signalerons toujours qu'elles sont différentes.

COROLLAIRE 6. *Si* $4 \leqslant k \leqslant n+2$, *la condition nécessaire et suffisante pour que les points* $a_1, \ldots, a_k$ *soient dépendants, est qu'ils soient situés sur une surface sphérique (ou sur un plan) à* $k-3$ *dimensions* (fig. 6).

On en conclut

COROLLAIRE 7. *Si les points* $a_1, \ldots, a_k$ *(où* $3 \leqslant k \leqslant n+1$*) sont indépendantes, ils déterminent une surface sphérique ou un plan à* $k-2$ *dimensions. Tout autre point situé sur cette surface est dépendant de* $(a_1, \ldots, a_k)$.

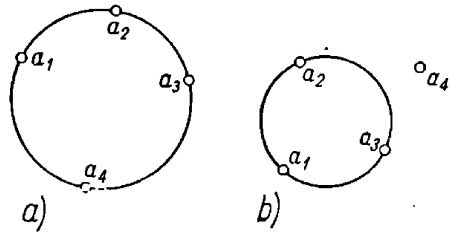


Fig. 6. $n = 2$, $k = 4$;
a) dépendants, b) indépendants

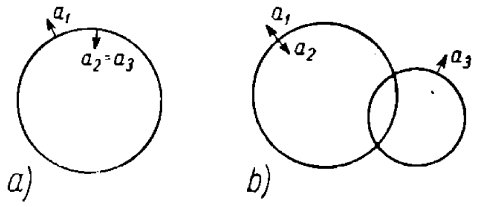


Fig. 7. $n = 2$, $l = 3$;
a) dépendants, b) indépendants

COROLLAIRE 8. *La nombre naturel* l *vérifiant les inégalités* $3 \leqslant \leqslant n+1$, *si les hypersphères orientées (ou les hyperplans orientés)* $a_1, \ldots, a$ *sont telles que l'ensemble de tous les points touchant* $(a_1, \ldots, a_l)$ *forme une surface sphérique (ou un plan) dont la dimension surpasse le nombre* $n+1-l$, *alors* $a_1, \ldots, a_l$ *sont dépendants* (fig. 7).

On en conclut immédiatement

COROLLAIRE 9. *Les hypersphères ou les hyperplans orientés* $a_1, \ldots, a$ *(où* l *vérifie les inégalités* $3 \leqslant l \leqslant n$*) étant indépendants, tous les points qui les touchent sont situés sur une surface sphérique ou sur un plan à* $n+1-l$ *dimensions.*

COROLLAIRE 10. *Pour que* $a_1, \ldots, a_k$ *soient indépendants, il faut et il suffit qu'il existe pour chaque* $i = 1, 2, \ldots, k$ *une* K*-sphère* b_i *telle que* $b_i - (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k)$ *et* $b_i \neq a_i$.

DÉFINITION 1.6. Un *simplexe* est l'ensemble des K-sphères $(a_1, \ldots, a_k)$ assujetti aux conditions suivantes:

(1) $k \geqslant 2$,

(2) $a_1, \ldots, a_k$ sont indépendantes,

(3) il existe b_1 et b_2 tels que $b_1 \neq b_2$ et $(b_1, b_2) - (a_1, \ldots, a_k)$.

Un simplexe à k éléments est désigné par une minuscule grecque avec l'indice k. Un simplexe à deux éléments est parfois dit *couple*.

Dans tout ce travail les caractères grecs ne seront employés que pour désigner des simplexes.

COROLLAIRE 11. *Chacun des ensembles qui suivent est un simplexe* (fig. 8):

a) *deux points différents,*

b) *trois points différents,*

c) *deux hypersphères ne se touchant pas (en particulier: deux côtés opposés d'une hypersphère),*

d) *deux côtés d'un hyperplan et une hypersphère orientée qui le coupe,*

e) *dans l'espace de dimension plus grande que 2, quatre points qui ne sont pas situés sur une droite ou sur un cercle.*

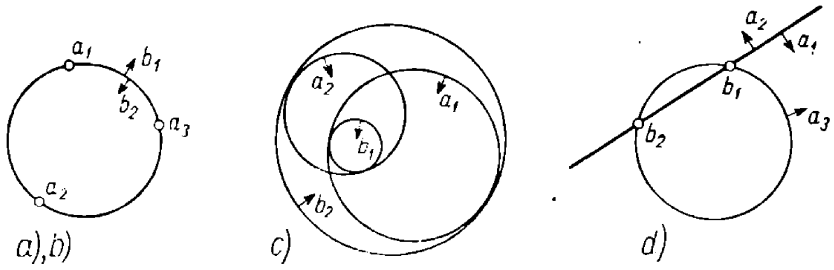


Fig 8.

COROLLAIRE 12. *Si* $4 \leqslant k \leqslant n+1$, *alors la condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble des k points,* $(a_1, \ldots, a_k)$, *soit un simplexe, est que ces points ne soient pas situés dans un plan (ou sur une surface sphérique) à* $k-3$ *dimensions*(14).

Par exemple, dans l'espace à trois dimensions, quatre points ne forment un simplexe que lorsque'ils ne sont pas situés sur un cercle ou sur une droite.

COROLLAIRE 13. $(a_1, \ldots, a_k)$ *étant un simplexe, il existe une transformation de Lie amenant* a_1 *au point à l'infini, et* $a_2, \ldots, a_k$ *en des points à distance finie.*

Démonstration. Puisque, d'après la définition 1.6(3), il existe des K-sphères b_1 et b_2 touchant $(a_1, \ldots, a_k)$, nous pouvons (en vertu du théorème M. 2) transformer a_1 en le point à l'infini, et b_1, b_2 — en b_1', b_2' — les deux côtés d'un hyperplan. Alors les transformées de $a_2, \ldots, a_k$, comme touchant b_1' et b_2', doivent être des points (à distance finie, car ils sont différents de a_1').

COROLLAIRE 14. $a_1, \ldots, a_k$ *étant des hypersphères ou hyperplans orientés (dont le nombre vériife les inégalités* $2 \leqslant k \leqslant n$*), si l'ensemble de toutes les K-sphères touchant* $a_1, \ldots, a_k$ *ne contient que des points, et ces points forment un plan ou une surface sphérique à* $n+1-k$ *dimensions* (fig. 9), *alors les K-sphères* $a_1, \ldots, a_k$ *forment un simplexe*(15).

II.1a. *Si* $\delta(a, b, c) = -1$, *alors les K-sphères* a, b, c *forment un simplexe, ou au moins deux d'entre elles se touchent.*

(14) Comparer Corollaire 6.

(15) Comparer Corollaire 8.

Démonstration. Si $(a, b, c)_{\neq}$, nous pouvons, en vertu du théorème M. 1 et du corollaire 1a, transformer a, b, c en trois points différents. D'après le corollaire 11b, nous voyons qu'ils forment un simplexe.

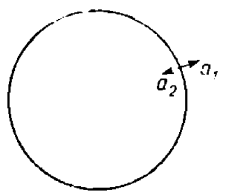


Fig. 9. $n+1-k=1$

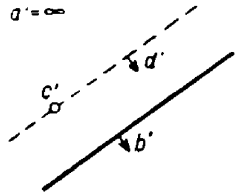


Fig. 10

II.1b. *Si a, b, c forment un simplexe, alors on a $\delta(a, b, c) = -1$. La même conséquence résulte du fait que la condition $(a, b, c)_{\neq}$ n'est pas vérifiée.*

Démonstration. La première partie du théorème résulte de la définition 1.6(3). Pour prouver la seconde il suffit de considérer le cas où $a-b$. Dans ce cas nous pouvons admettre deux possibilités: 1° $a-c$ et 2° $a \neq c$ et $b \neq c$.

1° $a - c$ implique que $a-(a, b, c)$ et alors $\delta(a, b, c) = -1$.

2° $a \neq c$ et $b \neq c$ permettent de transformer a en le point à l'infini, et c — en un point à distance finie.

Si b est différent de a, il sera transformé en un hyperplan ne passant pas par c' (fig. 10).

Menant par le point c' un hyperplan orienté parallèle (et de même sens) à b', nous prouverons l'existence de la K-sphère touchant (a, b, c).

II.2. *a, b, c étant trois K-sphères dépendantes différentes, on a $\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \rhd c$, c'est-à-dire elles se touchent toutes.*

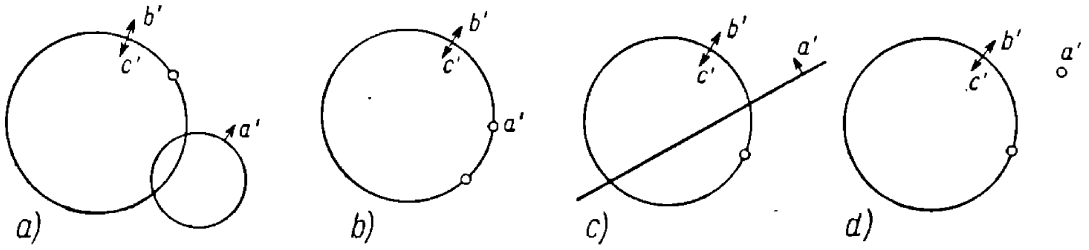


Fig. 11

Démonstration. Nous considérons le cas où a dépend de (b, c). D'abord, nous allons prouver que $b-c$. Supposons le contraire, c'est-à-dire $b \neq c$. Donc, on peut transformer b et c en deux côtés opposés d'une hypersphère. Quelle que soit la K-sphère a' — la transformée de a, il existe un point (fig. 11) qui ne la touche pas et qui est situé sur l'hy-

persphère (b', c') ce qui est en contradiction avec le fait que a dépend de (b, c). Nous avons ainsi démontré que $b - c$.

Afin de prouver que $a - b$ et $a - c$, il suffit de se baser sur la définition 1.4 et sur le fait que $b - (b, c)$ et $c - (a, c)$.

COROLLAIRE 15. *Si $(a_1, \ldots, a_k)$ est un simplexe, alors on a $(a_1, \ldots, a_k)_{\neq}$.*

Démonstration. D'abord nous allons prouver que les K-sphères $a_1, \ldots, a_k$ sont toutes différentes. En effet, si par exemple $a_1 = a_2$, alors a_1 dépendrait de $(a_2, \ldots, a_k)$, ce qui serait en contradiction avec la définition 1.6(2).

D'après la condition (3) de la définition du simplexe, il existe deux K-sphères b_1 et b_2 telles que $(b_1, b_2) - (a_1, \ldots, a_k)$ et $b_1 \neq b_2$. Nous pouvons transformer ces K-sphères en deux côtés opposés d'une hypersphère. La même transformation amène toutes les K-sphères $a_1, \ldots, a_k$ en des points y appartenant. Les points $a_1', \ldots, a_k'$ étant différents, ils ne se touchent pas. Donc $(a_1, \ldots, a_k)_{\neq}$.

II.3. *Si (a, b, c), (a, b, d) et (a, c, d) sont des simplexes, alors $\delta(b, c, d) = -1$.*

Démonstration. Puisque, en vertu du théorème II.1b, on a $\delta(a, b, c) = -1$ et, d'après le corollaire 15, $(a, b, c)_{\neq}$, donc il existe une transformation amenant a, b, c en trois points: a', b', c', dont a' est le point à l'infini. On vérifie aisément que la K-sphère d sera transformée en un point ou en une hypersphère ne passant pas par les points a', b', c' et telle qu'on puisse mener les hyperplans y touchant: l'un passant par b' et l'autre — par c'. Il en résulte que les points b' et c' sont situés en dehors de d' (fig. 12). Par conséquent il existe une hypersphère orientée (ou un hyperplan orienté) touchant d' et passant par les points b' et c'. Donc on a $\delta(b, c, d) = -1$.

III.1. *Étant donnés α_k, β_l, a_0 et b_0 satisfaisant aux conditions*

$$k + l = n + 3, \tag{1}$$

$$\alpha_k - \beta_l, \tag{2}$$

$$\alpha_k - b_0, \tag{3}$$

$$a_0 - \beta_l, \tag{4}$$

la condition $a_0 - b_0$ est aussi vérifiée.

Démonstration. Soient $\alpha_k = (a_1, \ldots, a_k)$ et $\beta_l = (b_1, \ldots, b_l)$. Transformant a_1 en le point à l'infini: a_1', et b_1 et b_2 en deux côtés (b_1' et b_2') d'un hyperplan, nous transformerons les K-sphères a_i (où $i = 0, 1, \ldots, k$) en points a_i'[16], et les K-sphères b_j (où $j = 0, 1, \ldots, l$) — en hyperplans orientés b_j' (fig. 13). En laissant de côté les cas parti-

[16] Comparer Corollaire 15.

culiers: $k = 2$ ou $l = 2$, nous pouvons nous baser sur les corollaires 7 et 9. Plus précisément: d'après le corollaire 7 les points $a'_1, \ldots, a'_k$ déterminent une surface sphérique ou un plan à $k-2$ dimensions, d'autre part, d'après le corollaire 9 tous les points $a'_0, a'_1, \ldots, a'_k$, comme touchant

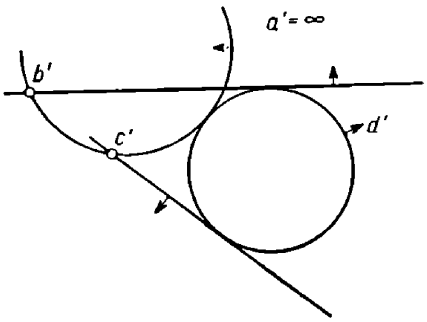


Fig. 12

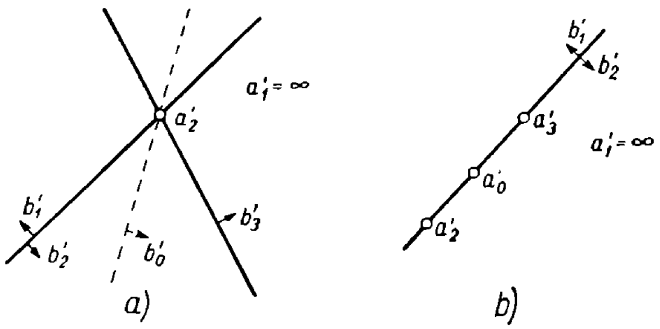


Fig. 13. a) $k = 2$, $l = 3$; $a'_0 = a'_1$ ou $a'_0 = a'_2$; b) $k = 3$, $l = 2$; $b'_0 = b'_1$ ou $b'_0 = b'_2$

$(b'_1, \ldots, b'_l)$, sont situés sur un plan à $n+1-l = n+1-(n+3-k) = k-2$ dimensions. Nous voyons donc que le point a'_0 est situé sur le plan déterminé par les points $a'_1, \ldots, a'_k$ et alors il dépend (en vertu du corollaire 7) de $(a'_1, \ldots, a'_k)$. Ceci implique le contact de a_0 avec chaque K-sphère b_0 touchant $(a_1, \ldots, a_k)$.

Dans le cas particulier $k = 2$, on peut facilement vérifier que a_0 doit être égal à a_1 ou a_2, et ainsi le théorème est vrai. Il en est de même dans le cas $l = 2$.

III.2. *Si $k+l < n+3$ et si $(a_1, \ldots, a_k)$ est un simplexe touchant β_l, alors il existe une K-sphère a_{k+1} touchant β_l, et telle que $a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}$ sont indépendants.*

Démonstration. Considérons la même transformation que dans la démonstration du théorème précédent. L'hyperplan dont les deux côtés sont b'_1 et b'_2, et les hyperplans orientés $b'_3, \ldots, b'_l$ se coupent en un plan p', dont la dimension est au moins $n-(l-1) = n+1-l$. Il est évident que le plan q' déterminé par les points $a'_1, \ldots, a'_k$ est situé dans le plan p'. D'après le corollaire 7 la dimension de q' est égale à $k-2$. Donc, en tenant compte de l'inégalité $k-2 < n+1-l$, on voit que le plan q' est différent du plan p' et qu'il existe des points du plan p' n'appartenant pas au plan q'. Prenant un telpoint pour a'_{k+1}, on vérifie aisément qu'il satisfait aux conditions du théorème (fig. 14).

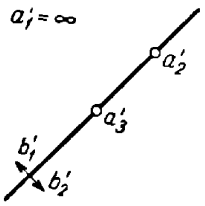


Fig. 14. $k = 2$, $l = 2$

En effet a'_{k+1}, étant situé dans le plan p', touche les hyperplans orientés $b'_1, \ldots, b'_l$. D'autre part, les points $a'_1, \ldots, a'_k, a'_{k+1}$, n'étant

pas situés dans un plan à $k-2$ dimensions, sont indépendants en vertu du corollaire 6.

III.3a. *Si* $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$ *est un simplexe, alors il existe des K-sphères* b_1 *et* b_2 *assujetties aux conditions suivantes:*

(1) $$(b_1, b_2) - (a_1, \ldots, a_n),$$

(2) $$\delta(b_1, b_2, a_{n+1}) = +1.$$

Démonstration. La condition (3) de la définition 1.6 implique l'existence des K-sphères c_1 et c_2, telles que $c_1 \neq c_2$ et $(c_1, c_2) - (a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$. Transformant a_{n+1} en le point à l'infini a'_{n+1}, et c_1, c_2 en deux côtés c'_1, c'_2 d'un hyperplan, on transforme $a_1, \ldots, a_n$ en des points à distance finie: $a'_1, \ldots, a'_n$. La K-sphère a'_{n+1} étant indépendante de $(a'_1, \ldots, a'_n)$, on peut mener une hypersphère par les points $a'_1, \ldots, a'_n$. Désignant les deux côtés de cette hypersphère par b'_1 et b'_2, on a $(b'_1, b'_2) - (a'_1, \ldots, a'_n)$ et en vertu du corollaire 2a $\delta(b'_1, b'_2, a'_{n+1}) = +1$ (fig. 15).

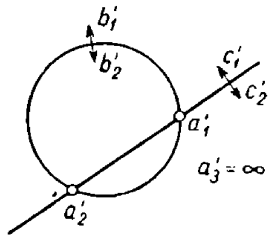


Fig. 15.
$\delta(b'_1, b'_2, a'_3) = +1$

III.3b. *Soit* $(a_1, \ldots, a_n)$ *un simplexe. Admettons que*

(1) $$(b_1, b_2) - (a_1, \ldots, a_n),$$

(2) $$\delta(b_1, b_2, a_{n+1}) = +1.$$

Alors les K-sphères $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ *forment un simplexe.*

Démonstration. En vertu du théorème M.1 et du corollaire 2a, nous pouvons transformer a_{n+1} en le point à l'infini et b_1, b_2 — en deux côtés d'une hypersphère. Les K-sphères $a_1, \ldots, a_n$ étant transformées en des points, on peut aisément vérifier que $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ forment un simplexe (fig. 15).

En effet, les points $a'_1, \ldots, a'_n, a'_{n+1}$ ne sont situés sur aucune surface sphérique ou plan à $n-2$ dimensions, donc, d'après le corollaire 12, ils forment un simplexe.

Définition 1.7. Les couples $\alpha_2 = (a_1, a_2)$ et $\beta_2 = (b_1, b_2)$ sont dits *liés* quand ils satisfont aux conditions suivantes:

(1) $\delta(a_1, a_2, b_1, b_2) = -1$,

(2) chacune des K-sphères a_1, a_2, b_1, b_2 dépend des autres.

Cette relation est désignée par: $\alpha_2 \bigcirc \beta_2$ ou $(a_1, a_2) \bigcirc (b_1, b_2)$.

Dans le chapitre 2 nous verrons([17]) que les théorèmes I.1-III.3 impliquent les conclusions suivantes:

COROLLAIRE 16. *Si* $(a_1, a_2)\bigcirc(b_1, b_2)$, *alors il y a à distinguer trois cas qui s'excluent*: 1° $a_1 - b_1$, 2° $a_1 - b_2$, 3° $(a_1, a_2, b_1, b_2)_{\neq}$.

Dans le cas 1° on a aussi: $a_2 - b_2$, $a_1 \neq b_2$, $a_2 \neq b_1$, et en outre ou bien $a_1 = b_1$ et $a_2 = b_2$, ou bien il y a une K-sphère et une seule touchant (a_1, a_2, b_1, b_2) et alors $a_1 \neq b_1$ et $a_2 \neq b_2$ (fig. 16).

Le deuxième cas est analogue. C'est-à-dire on a ou bien $a_1 = b_2$, $a_2 = b_1$, ou bien $a_1 - b_2$, $a_2 - b_1$, $a_1 \neq b_1$, $a_2 \neq b_2$, $a_1 \neq b_2$, $a_2 \neq b_1$, et il y a une et une seule K-sphère touchant (a_1, a_2, b_1, b_2).

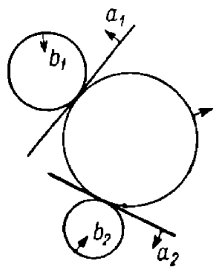


Fig. 16

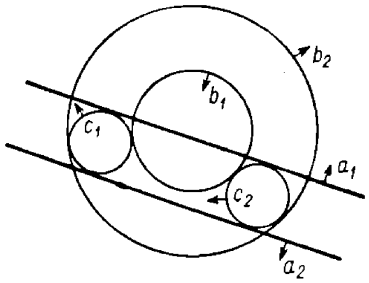


Fig. 17. $(c_1, c_2) = \gamma_2$

Dans le troisième cas il existe un simplexe γ_n, touchant les couples (a_1, a_2) et (b_1, b_2) (fig. 17).

DÉFINITION AUXILIAIRE([18]). Si $\alpha_2 \bigcirc \beta_2$, alors dans les deux permiers cas distingués dans le corollaire 16 nous dirons que *les couples* α_2 *et* β_2 *sont tangents* et nous écrirons $\alpha_2 \oplus \beta_2$ (fig. 16).

Dans le troisième cas du corollaire 16 nous dirons que *les couples* α_2 *et* β_2 *se coupent* et nous écrirons $\alpha_2 \ominus \beta_2$ (fig. 17).

COROLLAIRE 17a. α_2 *et* β_2 *étant deux hypersphères*([19]), *l'existence d'un point commun est la condition nécessaire et suffisante pour que* $\alpha_2 \bigcirc \beta_2$.

En particulier: *si* $\alpha_2 \oplus \beta_2$ *les hypersphères se coupent (dans le sens propre du mot), et si* $\alpha_2 \ominus \beta_2$ — *les hypersphères sont tangentes (dans le sens propre du mot)* (fig. 18a).

([17]) Voir les définitions 2.1 et 2.2 et les théorèmes 2.18, 2.19, 2.20 et 2.29.

([18]) On motivera cette définition, ainsi que le corollaire 16, dans le chapitre 2 (voir les définitions 2.1 et 2.2).

Les notions introduites par cette définition ne seront employées dans ce chapitre que dans les démonstrations et elles n'interviendront pas dans la formulation des théorèmes.

([19]) Cf. l'introduction section 2, où le couple des hypersphères orientées qui sont les deux côtés d'une hypersphère, a été nommé hypersphère.

b. α_2 *et* β_2 *étant deux hyperplans, on a toujours* $\alpha_2 \bigcirc \beta_2$. *Si, de plus,* α_2 *est parallèle à* β_2, *on a* $\alpha_2 \ominus \beta_2$, *et dans le cas contraire* $\alpha_2 \oplus \beta_2$ (fig. 18b).

COROLLAIRE 18. *Si les points différents* a_1, a_2, b_1, b_2 *sont situés sur un cercle ou sur une droite, alors on a* $(a_1, a_2) \oplus (b_1, b_2)$ (fig. 18c).

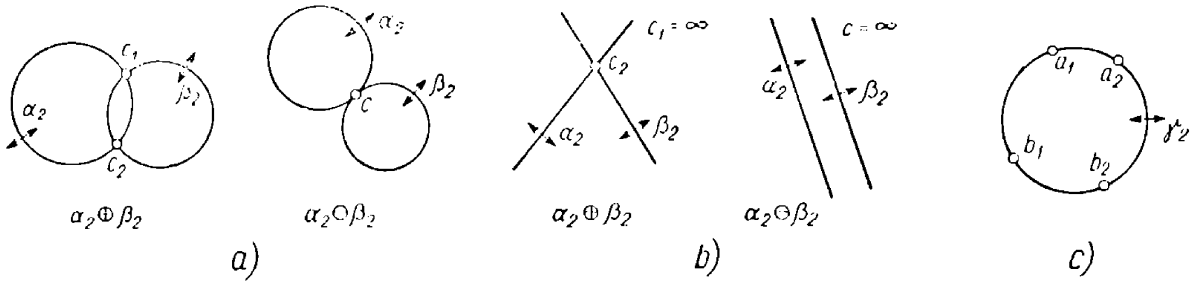


Fig. 18

COROLLAIRE 19. *Si* $(a_1, a_2) \bigcirc (b_1, b_2)$, *on peut transformer* $\alpha_2 = (a_1, a_2)$ *en un hyperplan* $\alpha_2' = (a_1', a_2')$ *et* b_1, b_2 — *en deux hyperplans orientés* b_1', b_2' *soumis à l'une des possibilités suivantes* (fig. 19):

1. b_1' *et* b_2' *coupent l'hyperplan* α_2' *en un même plan à* $n-2$ *dimensions, c'est-à-dire:* α_2', b_1' *et* b_2' *forment un faisceau* (fig. 19a),

2. *les hyperplans orientés* b_1' *et* b_2' *sont parallèles à l'hyperplan* α_2' *mais ils ont des sens opposés. Dans ce cas* α_2', b_1' *et* b_2' *forment un faisceau d'hyperplans parallèles* (fig. 19b).

Ces deux possibilités correspondent respectivement aux cas $\alpha_2 \oplus (b_1, b_2)$ *et* $\alpha_2 \ominus (b_1, b_2)$.

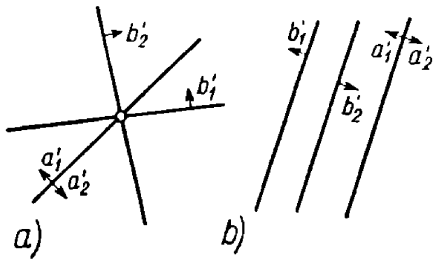


Fig. 19

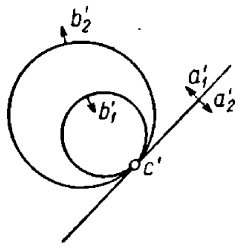


Fig. 20

Démonstration. Selon la définition 1.7 il existe une K-sphère c touchant (a_1, a_2, b_1, b_2). Comme en vertu du corollaire 15, on a $a_1 \neq a_2$, on peut transformer α_2 en un hyperplan, en transformant c en le point à l'infini: c'. Cette transformation amène b_1 et b_2 (qui touchent c) en des hyperplans orientés. Les possibilités 1 et 2 correspondent aux cas particuliers du corollaire 16.

Pour compléter le corollaire 19 considérons le

COROLLAIRE 20. *Si* $(a_1, a_2) \ominus (b_1, b_2)$, *on peut transformer* (a_1, a_2) *en un hyperplan,* b_1, b_2 *en deux hypersphères orientées tangentes à* (a_1', a_2') *au même point* (fig. 20).

Il est évident que dans l'espace à trois dimensions les théorèmes suivants sont vérifiés:

1. Étant donnés deux cercles, se coupant en deux points différents b_1, b_2 et non situés dans un plan, s'ils sont coupés par un plan en quatre points a_1, a_2, c_1, c_2, alors ces quatre points sont sur un cercle.
2. Soient deux dièdres bornés respectivement par les plans orientés a_1, a_2 et c_1, c_2, et tels que leurs arêtes soient situées toutes les deux dans un plan: $\beta_2 = (b_1, b_2)$. S'il existe une surface sphérique orientée inscrite dans les deux dièdres, alors il existe aussi un cône inscrit dans ceux-ci.
3. Si les surfaces sphériques α_2 et γ_2 ont un point commun, elles se coupent ou elles sont tangentes.

On peut aisément généraliser ces trois théorèmes à l'espace à n dimensions. Ils sont tous des cas particuliers du théorème suivant:

IV. *Soient trois couples*: α_2, β_2 *et* γ_2, *soumis aux conditions suivantes*:

(1) $\alpha_2 \bigcirc \beta_2$,

(2) $\beta_2 \bigcirc \gamma_2$,

(3) *il y a une K-sphère d touchant* α_2 *et* γ_2, *et ne touchant pas* β_2.

Alors on a $\alpha_2 \bigcirc \gamma_2$ (fig. 21).

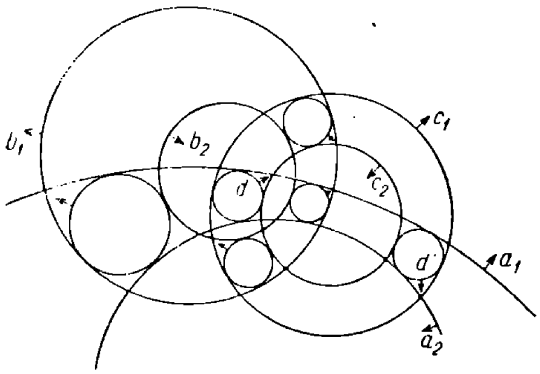


Fig. 21

Démonstration. On vérifie aisément que $(d, b_1, b_2)_{\neq}$ [20]. En effet si la K-sphère d touchait b_1, elle toucherait β_2, car d'après la définition 1.7 le contact $d-(a_1, a_2, b_1)$ implique le contact $d-b_2$. Mais ceci est en contradiction avec la condition (3) du théorème.

Maintenant il y a deux cas à distinguer: 1° $\delta(d, b_1, b_2) = +1$ et 2° $\delta(d, b_1, b_2) = -1$.

1° $\delta(d, b_1, b_2) = +1$. Transformons d en le point à l'infini et β_2 en une hypersphère β_2'. Il est facile de démontrer que cette trasnformation amène α_2 en un hyperplan coupant l'hypersphère β_2' ou tangent à celle-ci (fig. 22). Il en est de même pour γ_2. Donc, d'après le corollaire 17b, nous avons $\alpha_2' \bigcirc \gamma_2'$.

2° $\delta(d, b_1, b_2) = -1$. Transformons d, b_1, b_2 en trois points: d', b_1', b_2', dont d' est le point à l'infini. Nous désignons par σ_2' l'hyperplan bissecteur

[20] Les éléments d'un simplexe n'étant pas spécifiés, nous les désignerons par les minuscules latines correspondant au caractère grec désignant le simplexe. Par exemple, nous désignerons les éléments du simplexe α_k par $a_1, \ldots, a_k$; γ_2 — par c_1, c_2; φ_3 — par f_1, f_2, f_3.

du segment $b_1'b_2'$. Toutes les K-sphères touchant β_2' sont des hypersphères orientées dont les centres sont situés dans l'hyperplan σ_2'. Toutes les K-sphères touchant d' sont des hyperplans orientés.

Dans tous les deux cas résultant de la condition (1), c'est-à-dire $\alpha_2 \oplus \beta_2$ ou $\alpha_2 \ominus \beta_2$, on peut aisément vérifier que a_1' et a_2' forment un angle dont la bissectrice est σ_2' (fig. 23 a et b). Il est évident que tout cela se rapporte aussi à c_1', c_2', c'est-à-dire que σ_2' est aussi la bissectrice de l'angle c_1', c_2'.

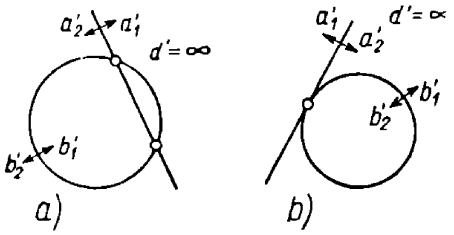


Fig. 22

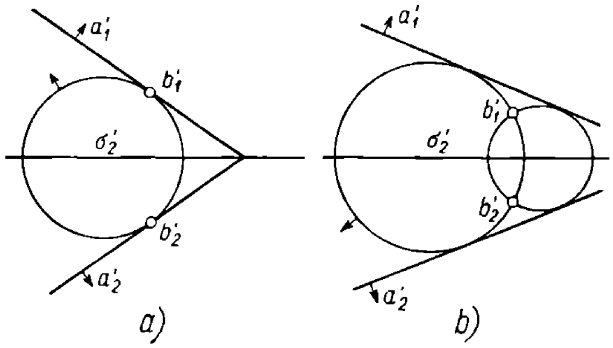


Fig. 23

Chaque K-sphère e' touchant α_2' est: ou bien un point dans le plan σ_2', ou bien une hypersphère orientée dont le centre est dans σ_2'. Dans tous les deux cas, le contact $e' - c_1'$ implique, en vertu de la symétrie, le contact $e' - c_2'$, donc c_2 dépend de (a_1, a_2, c_1) (fig. 24).

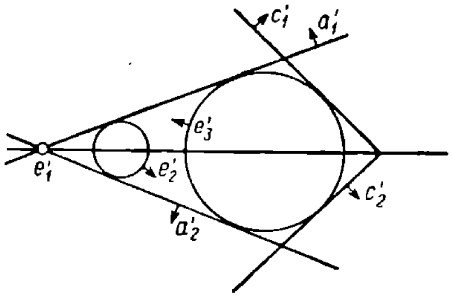


Fig. 24

De façon analogue, on démontre les autres dépendances parmi les K-sphères a_1, a_2, c_1, c_2; ceci nous permet, en tenant compte de l'existence de d', de conclure que (a_1, a_2) et (c_1, c_2) sont liés.

DÉFINITION 1.8. Nous dirons que *les simplexes α_k et β_l se séparent*, si pour chaque a et b, les conditions: 1° $a - \beta_l$, 2° $b - \alpha_k$, 3° $a - b$, impliquent l'égalité $a = b$.

On écrit dans ce cas $\alpha_k | \beta_l$.

COROLLAIRE 21. *Les simplexes α_2 et β_2 étant deux couples de points situés sur un cercle, la condition nécessaire et suffisante pour que $\alpha_2 | \beta_2$ est que les couples α_2 et β_2 se séparent au sens propre du mot* (fig. 25).

COROLLAIRE 22. *Soit α_3 un triple de points et β_2 un couple de points qui ne sont pas sur le cercle déterminé par les points a_1, a_2, a_3. La relation $\alpha_3 | \beta_2$ veut dire que les points a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 sont sur une surface sphéri-*

que ou sur un plan à deux dimensions et que les points b_1 et b_2 sont situés des deux côtés opposés du cercle déterminé par les points a_1, a_2, a_3 (fig. 26).

COROLLAIRE 23. *Si α_2 et β_2 sont: deux hypersphères, ou deux hyperplans, ou enfin une hypersphère et un hyperplan, alors ils se séparent.*

COROLLAIRE 24. *Si $\alpha_2 | \beta_2$ et si a_1, a_2, b_1 forment un simplexe, alors $\alpha_2 \oplus \beta_2$.*

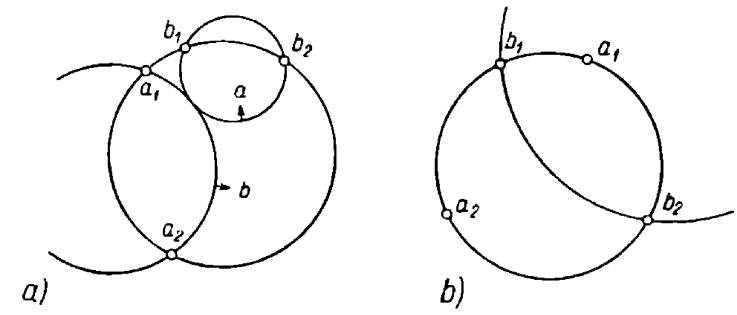


Fig. 25. a) les couples (a_1, a_2) et (b_1, b_2) ne se séparent pas; b) les couples (a_1, a_2) et (b_1, b_2) se séparent

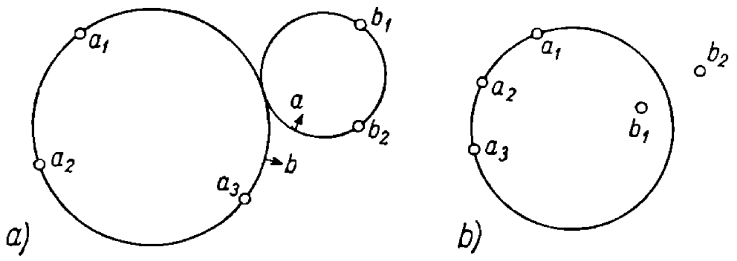
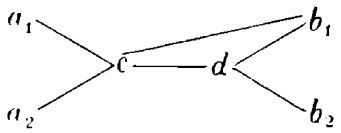


Fig. 26. a) (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2) ne se séparent pas; b) (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2) se séparent

Démonstration. D'abord nous allons prouver que b_2 dépend de (a_1, a_2, b_1). c étant une K-sphère arbitraire touchant (a_1, a_2, b_1), il existe, en vertu du théorème II.1b, une K-sphère d touchant (c, b_1, b_2). Ainsi nous avons les contacts suivants:



qui entraînent, d'après la définition 1.8, la coïncidence de c et d, d'où l'on a bien $c - b_2$, c'est-à-dire: b_2 dépend de (a_1, a_2, b_1).

Les démonstrations des autres relations de dépendance sont analogues.

Enfin, l'existence d'un couple touchant le simplexe (a_1, a_2, b_1) implique l'existence d'un couple touchant (a_1, a_2, b_1, b_2); en vertu du corollaire 16 ceci entraîne $a_2 \oplus \beta_2$.

V. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux ensembles de K-sphères. Admettons que*

(1) *il existe des K-sphères a_0 et b_0, telles que pour chaque $a \in \mathcal{A}$ et pour chaque $b \in \mathcal{B}$ on ait $(a_0, b)|(b_0, a)$,*

(2) *il existe des K-sphères $a_1 \in \mathcal{A}$ et $b_1 \in \mathcal{B}$, telles que a_0, a_1, b_1 forment un simplexe* ([21]).

Alors il existe une K-sphère c_0, telle que pour tout $a \in \mathcal{A}$ et pour tout $b \in \mathcal{B}$ différents de c_0, on ait $(b_0, c_0)|(a, b)$.

Démonstration. Nous prouverons d'abord qu'on peut transformer les K-sphères a_0, b_0 et tous les éléments des ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ en points d'une droite.

Du corollaire 24 et des conditions (1) et (2) on conclut que

$$(a_0, b_1) \oplus (a_1, b_0).$$

Donc, d'après la définition auxiliaire, on a $\delta(a_0, b_0, a_1) = -1$ et $(a_0, b_0, a_1)_{\neq}$. Transformons maintenant b_0, a_0, a_1 en trois points: b_0', a_0' et a_1', dont b_0' est le point à l'infini. En appliquant le corollaire 24 à la K-sphère b', la transformée d'un élément quelconque de l'ensemble $\mathcal{B}$, et au simplexe (a_0', b_0', a_1'), nous voyons que b' dépend de (a_0', b_0', a_1'), donc c'est un point situé sur la droite passant par les points a_0' et a_1'. De façon analogue on peut démontrer que tous les éléments de l'ensemble $\mathcal{A}$ sont aussi transformés en points situés sur la même droite (fig. 27).

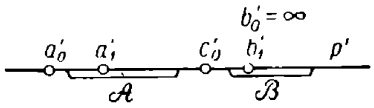


Fig. 27

Il est facile de vérifier que si nous fixons le sens de cette droite du point a_1' au point b_1', alors tous les points $b' \in \mathcal{B}'$ suivront tous les points $a' \in \mathcal{A}'$. Donc, en tenant compte du fait que les ensembles $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$ ne sont pas vides nous concluons, en vertu de la loi de continuité, l'existence du point c_0 vérifiant notre théorème.

Ayant démontré les théorèmes I.1, I.2, I.3, II.1a, b, II.2, II.3, III.1, III.2, III.3a, b, IV et V, nous pouvons les prendre pour les axiomes de la géométrie de Lie à n dimensions.

Dans la suite *le système d'axiomes* A désigne toujours le système composé des axiomes I-V.

La conclusion principale de toutes les considérations de ce chapitre est la suivante:

([21]) Rejetant la condition (2), nous obtenons aussi un théorème vrai, mais nous n'utiliserons que la forme affaiblie, avec la condition supplémentaire (2).

M.3. *Le modèle fondamental de la géométrie de Lie,* $\mathfrak{M}_n$, *satisfait au système d'axiomes* A.

Comme conclusion supplémentaire, qu'on peut obtenir en supposant non-contradictoire la géométrie euclidienne métrique, on a le théorème suivant:

M.4. *Le système d'axiomes* A *n'est pas contradictoire* (*car il a un modèle dans la géométrie euclidienne métrique*).

CHAPITRE 2

AXIOMES ET THÉORÈMES GÉNÉRAUX DE LA GÉOMÉTRIE DE LIE

Le système d'axiomes de la géométrie de Lie donné ici est basé sur deux notions primitives. Ce sont:

1. l'ensemble $\mathcal{L}$ de toutes les K-sphères,

2. le contact — relation binaire définie dans l'ensemble $\mathcal{L}$.

Ces deux notions, comme nous l'avons déjà dit dans l'introduction, forment un système complet d'invariants caractérisant la géométrie de Lie.

Les éléments de l'ensemble $\mathcal{L}$ (c'est-à-dire les K-sphères) seront appelés tout court *éléments* ([22]) et désignés par des caractères latins (majuscules ou minuscules).

Le contact sera désigné par le même symbole que dans le chapitre précédent, c'est-à-dire par un tiret. L'expression „$a-b$" nous lirons „*a et b se touchent*" ou „*a touche b*".

Le nombre des notions primitives est le plus petit possible. Observons aussi qu'il y a peu de théories possédant des notions primitives en nombre aussi petit. Notre système d'axiomes peut être énoncé en n'utilisant que ces deux notions. Mais, pour simplifier la forme des axiomes et pour les rendre plus clairs, nous introduisons quelques notions secondaires, les mêmes qu'au chapitre précédent, où elles ont été définies. Ici, nous n'en donnons qu'une liste.

DÉFINITION 1.1. $(a_1, \ldots, a_k) - (b_1, \ldots, b_l)$ = *les éléments* $a_1, \ldots, a_k$ *et* $b_1, \ldots, b_l$ *se touchent* = $a_1, \ldots, a_k$ *touchent* $(b_1, \ldots, b_l)$.

DÉFINITION 1.2. $(a_1, \ldots, a_k)_{\not -}$ = *les éléments* $a_1, \ldots, a_k$ *ne se touchent pas.*

En particulier: $a_1 \not - a_2$.

DÉFINITION 1.3. La fonction bivalente: $\delta(a_1, \ldots, a_k)$.

DÉFINITION 1.4. *Les éléments* $a_1, \ldots, a_k$ *dépendent de* $(b_1, \ldots, b_l)$.

DÉFINITION 1.5. $(a_1, \ldots, a_k)_i$ = *les éléments* $a_1, \ldots, a_k$ *sont indépendants.*

([22]) Nous évitons d'employer ici le terme *K-sphère*, car il est assez incommode et, d'autre part, il suggère un sens géométrique, ce qui ne répond pas à nos intentions.

$(a_1, \ldots, a_k)_d$ = *les éléments* $a_1, \ldots, a_k$ *sont dépendants* = ils ne sont pas indépendants.

DÉFINITION 1.6. *Le simplexe* α_k. En particulier: *le couple* α_2. Au lieu de dire $(a_1, \ldots, a_k)$ *est un simplexe*, on peut dire $a_1, \ldots, a_k$ *forment un simplexe.*

DÉFINITION 1.7. $\alpha_2 \bigcirc \beta_2$ = *les couples* α_2 *et* β_2 *sont liés.*

DÉFINITION 1.8. $\alpha_k | \beta_l$ = *les simplexes* α_k *et* β_l *se séparent.*

Le système d'axiomes A considéré dans ce travail contient 11 axiomes, partagés en 5 groupes, selon les notions qui y interviennent.

Ier groupe. Axiomes de contact

I.1. Tout élément a satisfait à la condition $a-a$.

I.2. Pour deux éléments quelconques a et b le contact $a-b$ implique le contact $b-a$.

I.3. Il existe deux éléments ne se touchant pas.

IIème groupe. Axiomes concernant des triples d'éléments

II.1. La condition nécessaire et suffisante pour que $\delta(a, b, c) = -1$ est ou bien que les éléments a, b, c forment un simplexe, ou bien qu'il existe parmi a, b, c au moins deux éléments qui se touchent.

II.2. Pour trois éléments différents la condition $(a, b, c)_d$ implique les contacts: $a \lhd \begin{smallmatrix} b \\ c \end{smallmatrix}$.

II.3. Si (a, b, c), (a, b, d), (a, c, d) sont des simplexes, alors $\delta(b, c, d) = -1$.

IIIème groupe. Axiomes de dimension (dépendant de n)

III.1. Les conditions: (1) $k+l = n+3$, (2) $\alpha_k - \beta_l$, (3) $\alpha_k - b_0$, (4) $a_0 - \beta_l$, impliquent le contact $a_0 - b_0$.

III.2. Le nombre $k+l$ étant moindre que $n+3$, si $a_1, \ldots, a_k$ forment un simplexe touchant β_l, alors il existe un élément a_{k+1} touchant β_l, et tel que les éléments $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1})$ soient indépendants.

III.3. Pour que $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$ soit un simplexe, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies:

(1) $a_1, \ldots, a_n$ forment un simplexe,

(2) il existe deux éléments b_1, b_2 touchant $(a_1, \ldots, a_n)$ et tels que $\delta(b_1, b_2, a_{n+1}) = +1$.

IVème groupe. Axiome de liaison

IV. Étant donnés trois couples α_2, β_2 et γ_2, si: (1) $\alpha_2 \bigcirc \beta_2$, (2) $\beta_2 \bigcirc \gamma_2$, (3) il existe un élément d touchant α_2 et γ_2, et ne touchant pas β_2, alors $\alpha_2 \bigcirc \gamma_2$.

Vème groupe. Axiome de séparation [23]

V. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux sous-ensembles de $\mathcal{L}$. Admettons que les deux conditions ci-dessous soient remplies:

(1) Il existe des éléments de $\mathcal{L}$: a_0 et b_0, tels que pour chaque $a \in \mathcal{A}$ et pour chaque $b \in \mathcal{B}$ on a $(a_0, b) | (b_0, a)$.

(2) Il existe des éléments $a_1 \in \mathcal{A}$ et $b_1 \in \mathcal{B}$ tels que a_0, a_1, b_1 forment un simplexe.

Alors il existe un élément c_0 tel que pour chaque élément $a \in \mathcal{A}$ et pour chaque élément $b \in \mathcal{B}$ différents de c_0 on ait: $(b_0, c_0) | (a, b)$.

Les théorèmes que nous allons établir dans ce chapitre, sont les conclusions les plus générales des axiomes I-V. Ils sont énoncés dans l'ordre des groupes des axiomes employés pour leur démonstration.

Les démonstrations les plus simples sont omises et remplacées par les numéros des axiomes et des théorèmes sur lesquels elles s'appuient.

THÉORÈME 2.01. *Quel que soit a_{k+1}, si l'élément a_0 dépend de $(a_1, \ldots, a_k)$, il dépend aussi de $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1})$.*

THÉORÈME 2.02. *Pour chaque élément a_{k+1}, la dépendance $(a_1, \ldots, a_k)_d$ implique la dépendance $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1})_d$, et inversement: l'indépendance $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1})_i$ entraîne l'indépendance $(a_1, \ldots, a_k)_i$.*

THÉORÈME 2.03. *Si les éléments $a_1, \ldots, a_k$ sont indépendants, alors ils sont différents.*

Les théorèmes 2.01-2.03 résultent directement des définitions sans être basés sur aucun axiome.

THÉORÈME 2.04. *Pour deux éléments quelconques il existe un élément les touchant.*

Démonstration. D'après l'axiome I.1, nous avons $a - a$, donc en vertu de II.1 on a $\delta(a, a, b) = -1$, c'est-à-dire pour chaque élément a et chaque élément b il existe un élément les touchant.

THÉORÈME 2.05. *Si $(a, b, c)_+$, alors les éléments a, b, c sont indépendants* (I.1, II.2).

---

[23] Cet axiome peut aussi être appelé *axiome de continuité*, car il joue dans la géométrie de Lie un rôle analogue à celui de l'axiome de continuité dans les autres géométries et il est l'unique axiome non élémentaire de ce système.

THÉORÈME 2.06. *Si* $\delta(a, b, c) = +1$, *alors les éléments* a, b, c *sont indépendants* (II.1, 2.05).

THÉORÈME 2.07. *Le nombre naturel* k *n'étant pas inférieur à* 3, *si les éléments* $a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k$ *forment un simplexe, alors les éléments* $a_1, \ldots, a_{k-1}$ *en forment aussi un* (2.02).

THÉORÈME 2.08. *Les quatre conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) $a = b$,

(2) a *dépend de* b,

(3) b *dépend de* a,

(4) a, b *sont dépendants* (fig. 28).

Démonstration. La condition (1) implique, d'après la définition 1.4, les conditions (2) et (3), donc aussi la condition (4). Pour prouver l'équivalence des conditions (1)-(4) il suffit de démontrer que la condition (4) implique la condition (1). Nous le ferons par l'impossible. Supposons que a, b soient dépendants, a étant différent de b. La dépendance $(a, b)_d$ entraîne en vertu de la définition 1.5 ou bien que a dépend de b, ou bien que b dépend de a. Admettons que a dépende de b. Évidemment b, comme touchant b, touche aussi a. Pour un élément quelconque c l'élément a est en vertu du théorème 2.01, dépendant de (b, c). Donc, pour un élément quelconque c il y a trois possibilités:

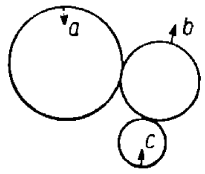


Fig. 28. a, b sont indépendants, car $c - b$ et $c \neq a$

1° $c = a$, et alors $c - b$,

2° $c = b$, et alors $c - b$,

3° a, b, c sont différents, et alors le fait que a dépend de (b, c) implique, en vertu de l'axiome II.2 les contacts $a \lhd^{b}_{c}$. Ainsi, nous voyons que pour chaque élément c, on a la contact: $c - b$. Considérons maintenant deux éléments d_1 et d_2 ne se touchant pas (leur existence résulte de l'axiome I.3). Évidemment d_1 et d_2 sont différents de b, car dans le cas contraire on aurait $d_1 - d_2$, contrairement à l'hypothèse. L'élément b dépend de (d_1, d_2), car chaque élément touchant (d_1, d_2) touche aussi b, donc selon l'axiome II.2 on a $d_1 - d_2$, en contradiction avec notre hypothèse.

THÉORÈME 2.09. *Si* $a \neq b$, *alors* (a, b) *est un simplexe.*

Démonstration. Selon l'axiome I.1 et le théorème 2.08 les éléments a, b sont indépendants. Donc, pour prouver notre théorème il suffit de démontrer l'existence de deux éléments c_1 et c_2 touchant (a, b) et tels que $c_1 \neq c_2$.

Dans ce but, considérons l'élément c_1 touchant (a, b), dont l'existence résulte du théorème 2.04. On peut aisément vérifier (d'après

l'axiome II.2) que c_1 ne dépend pas de (a, b), donc il existe un élément c_2 touchant (a, b) et ne touchant pas c_1.

THÉORÈME 2.10. *k et l étant deux nombres entiers vérifiant les inégalités $2 \leqslant k < l \leqslant n+1$, pour chaque simplexe $(a_1, \ldots, a_k)$ il existe des éléments $a_{k+1}, \ldots, a_l$ tels que $a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_l$ forment un simplexe.*

Démonstration. $(a_1, \ldots, a_k)$ étant un simplexe, il existe des éléments b_1 et b_2 touchant $(a_1, \ldots, a_k)$ et tels que $b_1 \neq b_2$. Or, d'après le théorème 2.09, (b_1, b_2) est un simplexe. Les simplexes $(a_1, \ldots, a_k)$ et (b_1, b_2) vérifient les prémisses de l'axiome III.2, il existe donc un élément a_{k+1} tel que $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}) - (b_1, b_2)$ et $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1})_i$. Alors, selon la définition 1.6, les éléments $a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}$ forment un simplexe. En répétant ce procedé nous obtiendrons le simplexe $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_l)$.

On peut généraliser l'axiome III.3:

THÉORÈME 2.11. *Soit k un nombre naturel vérifiant les inégalités $2 \leqslant k \leqslant n$*(24). *Pour que $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1})$ soit un simplexe il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies:*

(1) *$a_1, \ldots, a_k$ forment un simplexe,*

(2) *il existe des éléments b_1 et b_2 touchant $(a_1, \ldots, a_k)$ et tels que $\delta(b_1, b_2, a_{k+1}) = +1$* (fig. 29).

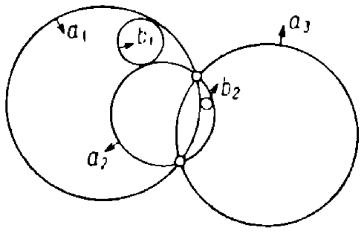


Fig. 29

Démonstration. Pour prouver ce théorème il suffit de compléter les simplexes $(a_1, \ldots, a_k)$ et $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1})$, en vertu du théorème 2.10, de façon à obtenir les simplexes $(a_1, \ldots, a_k, \bar{a}_{k+1}, \ldots, \bar{a}_n)$ et $(a_1, \ldots, a_k, \bar{a}_{k+1}, \ldots, \bar{a}_n, a_{k+1})$, et de se baser sur l'axiome III.3 et sur le théorème 2.07.

THÉORÈME 2.12. *Il existe trois éléments a, b, c tels que $\delta(a, b, c) = +1$.*

Démonstration. Ce théorème résulte de l'axiome I.3, et des théorèmes 2.09, 2.10 et 2.11.

THÉORÈME 2.13. *$(a_1, \ldots, a_k)$ étant un simplexe, on a $(a_1, \ldots, a_k)_{\neq}$.*

Démonstration. Supposons le contraire: $a_1 - a_2$. Il y a deux cas à distinguer: 1° $k > 2$ et 2° $k = 2$.

1° $k \geqslant 3$. En vertu du théorème 2.11 il existe des éléments b_1 et b_2 tels que $(b_1, b_2) - (a_2, \ldots, a_k)$ et $\delta(a_1, b_1, b_2) = +1$, en contradiction avec le contact $a_1 - a_2$.

2° $k = 2$. Dans ce cas nous complétons le simplexe (a_1, a_2) en vertu du théorème 2.10, obtenant un simplexe à trois éléments: (a_1, a_2, a_3).

---

(24) Pour $n = 2$ le théorème 2.11 est équivalent à l'axiome III.3.

Ce simplexe retombe dans le cas 1° déjà démontré, donc les éléments a_1, a_2, a_3 ne se touchent pas.

THÉORÈME 2.14. *a, b, c étant trois éléments différents, si $a \lhd \begin{smallmatrix} b \\ c \end{smallmatrix}$, alors l'élément a dépend de (b, c).*

Démonstration. Supposons que le théorème ne soit pas vrai, c'est-à-dire que les hypothèses du théorème soient remplies, mais qu'il existe un élément a' touchant (b, c) et ne touchant pas a. Dans ce cas b, c forment un simplexe car, selon le théorème 2.08, $(b, c)_i$ et les autres conditions de la définition 1.6 sont aussi remplies. Mais ceci est en contradictions avec le théorème 2.13.

Comme conclusion immédiate de ce théorème on a

THÉORÈME 2.15. *Les conditions:*

(1) $$a_1 \neq a_2,$$

(2) $$\begin{tikzcd} a_1 \arrow[r, dash] \arrow[dr, dash] & b_1 \\ a_2 \arrow[r, dash] & b_2 \end{tikzcd}$$

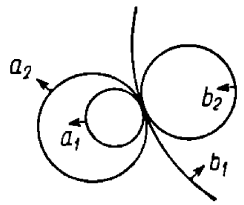


Fig. 30

impliquent le contact $b_1 - b_2$ (fig. 30).

THÉORÈME 2.16. *Si l'on a*

(1) $$a_1 \neq a_2,$$

(2) $$a_1 - a_2,$$

(3) $$a_1 \neq a_3,$$

alors il existe un et un seul élément b touchant (a_1, a_2, a_3).

Démonstration. L'existence de l'élément b résulte de l'axiome II.1. Si nous admettons l'existence de deux éléments différents b et b', alors en appliquant deux fois le théorème 2.15, nous arriverons à une contradiction.

En effet, $a_1 \neq a_2$ et

$$\begin{tikzcd} a_1 \arrow[r, dash] \arrow[dr, dash] & b \\ a_2 \arrow[r, dash] & b' \end{tikzcd}$$

impliquent $b - b'$, et $b \neq b'$ et

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, dash] \arrow[dr, dash] & a_1 \\ b' \arrow[r, dash] & a_3 \end{tikzcd}$$

impliquent $a_1 - a_3$, contrairement à la condition (3).

DÉFINITION 2.1. Les couples $\alpha_2 = (a_1, a_2)$ et $\beta_2 = (b_1, b_2)$ seront dits *tangents* si l'on a 1° $\alpha_2 \bigcirc \beta_2$ et 2° $a_1 - b_1$ et $a_2 - b_2$ ou $a_1 - b_2$ et $a_2 - b_1$.

Le fait que des couples α_2 et β_2 sont tangents sera désigné par le symbole $\alpha_2 \ominus \beta_2$ (fig. 31).

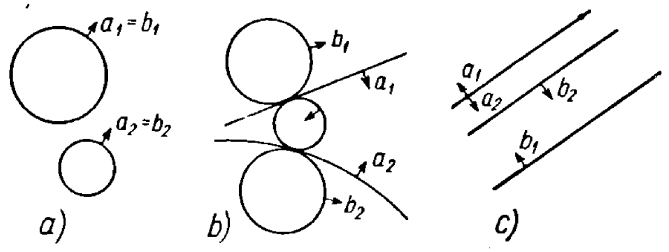


Fig. 31

DÉFINITION 2.2. Si les couples α_2 et β_2 sont liés, mais ne sont pas tangents, nous dirons qu'ils *se coupent*, et nous écrirons $\alpha_2 \oplus \beta_2$ (fig. 32). On peut aussi dire que le couple α_2 *coupe* β_2.

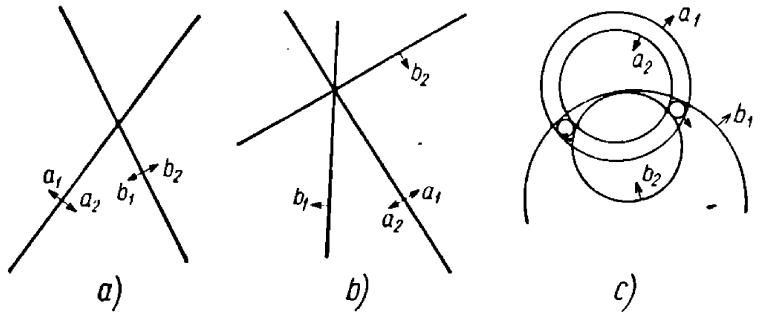


Fig. 32

THÉORÈME 2.17. *Deux simplexes* (a_1, a_2) *et* (b_1, b_2) *étant liés, la condition* $a_1 = b_1$ *implique l'égalité* $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$.

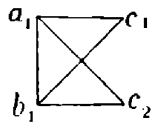
Démonstration. Selon la définition 1.7 b_2 dépend de $(a_1, a_2) = (a_1, a_2, b_1)$. Donc, en tenant compte de ce que $a_1 \not\sim a_2$, on conclut, en vertu de l'axiome II.2, que parmi les éléments a_1, a_2, b_2 il y en a deux égaux. La seule égalité possible est $b_2 = a_2$ (car $a_1 \neq a_2$ et $b_2 \neq b_1 = a_1$). Donc, on a bien $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$.

THÉORÈME 2.18. *Deux simplexes* (a_1, a_2) *et* (b_1, b_2) *étant liés, la condition* $a_1 - b_1$ *implique* $(a_1, a_2) \ominus (b_1, b_2)$.

Démonstration. Supposons qu'on ait $a_2 \not\sim b_2$. Dans ce cas on peut aisément vérifier que $(a_1, a_2, b_2)_{\not\sim}$.

En effet: 1° $a_2 \not\sim b_2$, par hypothèse, 2° $a_1 \not\sim a_2$, d'après le théorème 2.13, 3° $a_1 \not\sim b_2$, car dans le cas contraire a_2 comme dépendant de (a_1, b_1, b_2) qui touche l'élément a_1, toucherait aussi a_1.

Puisque, d'après la condition (1) de la définition 1.7, on a $\delta(a_1, a_2, b_2) = -1$, nous voyons en vertu de l'axiome II.1 que a_1, a_2, b_2 forment un simplexe. Donc, il y a des éléments c_1 et c_2 touchant (a_1, a_2, b_2) et tels que $c_1 \neq c_2$. L'élément b_1 étant dépendant de (a_1, a_2, b_2), nous avons



et alors d'après le théorème 2.15 on a $a_1 = b_1$. En vertu du théorème 2.17 ceci entraîne l'égalité $a_2 = b_2$ contradictoire à notre hypothèse. Donc on a bien $a_2 - b_2$.

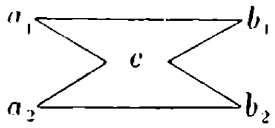
THÉORÈME 2.19. *Si $a_2 \ominus \beta_2$, alors un et un seul des deux contacts a lieu:* 1. $a_1 - b_1$, 2. $a_1 - b_2$.

Démonstration. Pour démontrer ce théorème il suffit de répéter certaines considérations de la démonstration du théorème 2.18. Il s'agit ici de démontrer que la condition $a_1 - b_1$ implique $a_1 \neq b_2$.

THÉORÈME 2.20. *Si $a_2 \ominus \beta_2$, alors ou bien $a_2 = \beta_2$, ou bien il y a un et un seul élément c touchant a_2 et β_2.*

Ce théorème résulte directement du théorème 2.16.

THÉORÈME 2.21. *Étant donnés les éléments différents a_1, a_2, b_1, b_2, c, tels que*

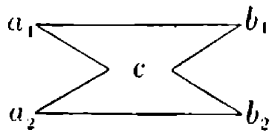


et $b_1 \neq b_2$, les éléments a_1, a_2 et b_1, b_2 forment deux simplexes liés, et même tangents.

Démonstration. On démontre ce théorème en appliquant plusieurs fois les théorèmes 2.15 et 2.16 (comparer la figure 31b).

De ce théorème résulte immédiatement

THÉORÈME 2.22. *(a_1, a_2) et (b_1, b_2) étant des simplexes satisfaisant aux conditions $a_1 \neq b_1$, $a_2 \neq b_2$ et*



ils satisfont aussi à la condition $(a_1, a_2) \ominus (b_1, b_2)$.

THÉORÈME 2.23. *Si $\alpha_2|\beta_2$ et s'il existe un élément c touchant α_2 et β_2, alors on a $\alpha_2 \bigcirc \beta_2$* (fig. 33).

Démonstration. Supposons, qu'au contraire, α_2 et β_2 ne soient pas liés, alors et qu'un élément, soit a_1, ne dépende pas des autres: (a_2, b_1, b_2).

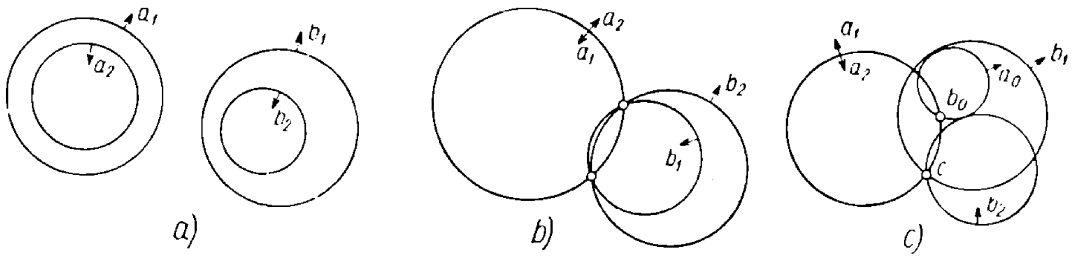
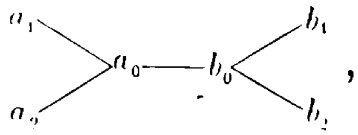


Fig. 33. a) $\alpha_2|\beta_2$, mais l'élément c n'existe pas; b) $\alpha_2|\beta_2$ et l'élément c existe; c) l'élément c existe, mais on n'a pas $\alpha_2|\beta_2$, car $\alpha_2 - b_0 - a_0 - \beta_2$ et $b_0 \neq a_0$

Il existe donc un élément b_0 ne touchant pas l'élément a_1 et touchant (a_2, b_1, b_2). En vertu de l'axiome II.1 il existe un élément a_0 tel que les contacts suivants ont lieu:



Puisque les couples α_2 et β_2 se séparent, nous en concluons que $a_0 = b_0$ et par suite $b_0 - a_1$, en contradiction avec notre hypothèse.

THÉORÈME 2.24. *Pour chaque simplexe à $n+1$ éléments il existe exactement deux éléments qui le touchent* (fig. 34).

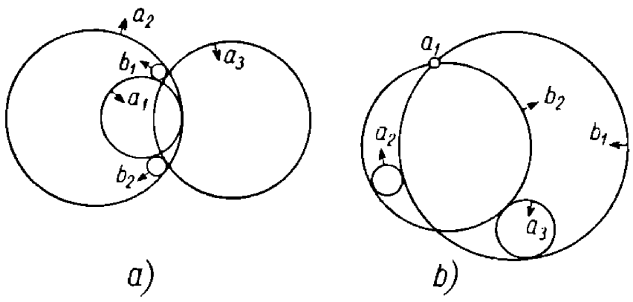


Fig. 34. b_1, b_2 = les éléments touchant le simplexe (a_1, a_2, a_3)

Démonstration. Pour un simplexe quelconque a_{n+1}, l'existence de ces deux éléments résulte de la troisième condition de la définition de simplexe. On a donc $a_{n+1} - (b_1, b_2)$.

S'il existait un troisième élément b_0 touchant a_{n+1}, il dépendrait, en vertu de l'axiome III.1, des éléments b_1, b_2, ce qui entraîne (d'après l'axiome II.2) l'égalité $b_0 = b_1$ ou $b_0 = b_2$.

THÉORÈME 2.25. *Aucun simplexe n'a plus de $n+1$ éléments.*

C'est-à-dire: *pour tout simplexe a_k on a $k \leqslant n+1$.*

Démonstration. Supposons, au contraire, qu'il existe un simplexe $a_{n+2} = (a_1, \ldots, a_{n+1}, a_{n+2})$. Les deux éléments b_1, b_2 touchant a_{n+2} en vertu de la définition 1.6, touchent aussi $(a_1, \ldots, a_{n+1})$, ce sont donc, en vertu du théorème 2.24, les seuls éléments touchant $(a_1, \ldots, a_{n+1})$. Donc chaque élément touchant $(a_1, \ldots, a_{n+1})$ touche aussi a_{n+2}, ce qui est en contradiction avec le fait que a_{n+2} est indépendant de $(a_1, \ldots, a_{n+1})$.

THÉORÈME 2.26. *k étant un nombre naturel, les conditions*

(1) $\beta_2 - (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1})$,

(2) $(a_1, \ldots, a_k)_i$,

(3) $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1})_d$

impliquent que a_{k+1} dépend de $(a_1, \ldots, a_k)$.

Démonstration (par induction). 1° Pour $k = 1$ le théorème est vrai en vertu du théorème 2.08.

2° Supposons que le théorème soit vrai pour $k-1 \geqslant 1$, et supposons remplies les conditions (1)-(3). Il y a à considérer deux possibilités: 1. il existe un nombre $i \leqslant k$ tel qu'on ait $(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k, a_{k+1})_d$, et 2. pour chaque $i \leqslant k$, on a $(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k, a_{k+1})_i$.

1. Soit par ex. $(a_2, \ldots, a_{k+1})_d$. Nous avons donc

(1′) $\beta_2 - (a_2, \ldots, a_{k+1})$,

(2′) $(a_2, \ldots, a_k)_i$ (cela résulte de (2) en vertu du théorème 2.02),

(3′) $(a_2, \ldots, a_k, a_{k+1})_d$.

En nous basant sur l'hypothèse d'induction, nous en concluons que a_{k+1} dépend de $(a_2, \ldots, a_k)$ et, d'après le théorème 2.01, il dépend donc ausside $(a_1, \ldots, a_k)$.

2. Pour chaque $i = 1, \ldots, k$ on a $(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k, a_{k+1})_i$. De la condition (3) il résulte que parmi les nombres $1, \ldots, k, k+1$ il y a un nombre j tel que l'élément a_j dépend de $(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_k, a_{k+1})$. Il est évident que dans notre cas les éléments $a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_k, a_{k+1}$ forment un simplexe. Nous le désignerons par γ_k. En appliquant plusieurs fois l'axiome III.2, on peut compléter le simplexe β_2 (touchant γ_k) de façon à obtenir un simplexe β_{n+3-k} touchant γ_k.

L'élément a_j, comme dépendant de γ_k, touche β_{n+3-k}, donc on a $(a_1, \ldots, a_{k+1}) - \beta_{n+3-k}$. Le simplexe $(a_1, \ldots, a_k)$ touchant β_{n+3-k}, on conclut en vertu de l'axiome III.1 que a_{k+1} dépend de $(a_1, \ldots, a_k)$.

THÉORÈME 2.27. *Si* 1° $k \geqslant 2$, 2° $(a_1, \ldots, a_k)_d$, 3° $\beta_2 - (a_1, \ldots, a_k)$, *alors il existe parmi $a_1, \ldots, a_k$ au moins deux éléments dépendant des autres.*

Démonstration (par induction). 1° Pour $k = 2$ le théorème est vrai en vertu du théorème 2.08.

2° Supposons que pour un nombre naturel $k-1$, plus grand que 1, le théorème soit vrai. Si les éléments $a_1, \ldots, a_k$ satisfont aux conditions 2 et 3, alors il existe (d'après la définition 1.5) parmi eux un élément, soit a_1, dépendant des autres. Maintenant, nous avons deux cas à distinguer:

1. $(a_1, a_3, \ldots, a_k)_i$, et alors en vertu du théorème 2.26 l'élément a_2 dépend de $(a_1, a_3, \ldots, a_k)$ et le théorème est prouvé.

2. $(a_1, a_3, \ldots, a_k)_d$, et alors d'après l'hypothèse d'induction il existe outre a_1 encore un élément, a_j, dépendant de $(a_1, a_3, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_k)$, donc dépendant aussi de $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_k)$.

THÉORÈME 2.28. *$(a_1, \ldots, a_k)$ et $(b_1, \ldots, b_l)$ étant deux simplexes tels que chaque a_i dépend de $(b_1, \ldots, b_l)$, ils vérifient les conditions: 1. $k \leqslant l$, 2. il existe parmi $b_1, \ldots, b_l$ des éléments $b_{i_{k+1}}, \ldots, b_{i_l}$, tels que $a_1, \ldots, a_k, b_{i_{k+1}}, \ldots, b_{i_l}$ forment un simplexe et tous les b_j dépendent de ce simplexe* (fig. 35).

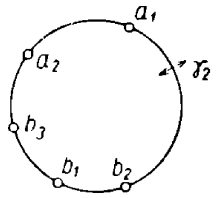


Fig. 35.
(a_1, a_2, b_1) = le simplexe cherché

Démonstration. 1. En se basant sur l'axiome III.2 on peut démontrer l'existence d'un simplexe γ_{n+3-l} touchant $(b_1, \ldots, b_l)$. Les éléments $a_1, \ldots, a_k$ comme dépendant de $(b_1, \ldots, b_l)$ touchent aussi γ_{n+3-l}.

L'hypothèse $k > l$ entraîne, en vertu de l'axiome III.1 et des contacts $(a_1, \ldots, a_l) - \gamma_{n+3-l} - a_k$, que a_k dépend de $(a_1, \ldots, a_l)$, ce qui est en contradiction avec les hypothèses du théorème. Donc, on a bien $k \leqslant l$.

2. Supposons que parmi les simplexes de la forme $(a_1, \ldots, a_k, b_{i_1}, \ldots, b_{i_p})$ le simplexe $(a_1, \ldots, a_k, b_{i_1}, \ldots, b_{i_s})$ possède le plus grand nombre d'éléments (s est évidemment un nombre vérifiant les inégalités $0 \leqslant s \leqslant l$). Il faut prouver que chaque b_j dépend de $(a_1, \ldots, a_k, b_{i_1}, \ldots, b_{i_s})$ et que $s = l-k$.

En effet: 2.1. D'après notre hypothèse, pour chaque b_j les éléments $a_1, \ldots, a_k, b_{i_1}, \ldots, b_{i_s}, b_j$ ne forment pas de simplexe. Les conditions (1) et (3) de la définition d'un simplexe étant vérifiées, nous avons la dépendance: $(a_1, \ldots, a_k, b_{i_1}, \ldots, b_{i_s}, b_j)_d$. On en conclut, en vertu du théorème 2.26, que b_j dépend de $(a_1, \ldots, a_k, b_{i_1}, \ldots, b_{i_s})$.

2.2. Maintenant, nous nous baserons sur la première partie du notre théorème (déjà démontré dans 1): les éléments $b_1, \ldots, b_l$ étant dépendants de $(a_1, \ldots, a_k, b_{i_1}, \ldots, b_{i_s})$, nous avons l'inégalité $l \leqslant k+s$. D'autre part, les éléments $a_1, \ldots, a_k, b_{i_1}, \ldots, b_{i_s}$ étant dépendants de $(b_1, \ldots, b_l)$, nous avons l'inégalité $k+s \leqslant l$. Donc, $s = l-k$ et notre théorème est démontré.

THÉORÈME 2.29. *Les couples* (a_1, a_2) *et* (b_1, b_2) *se coupant, les éléments* a_1, a_2, b_1, b_2 *satisfont aux condtitions*:

(1) $(a_1, a_2, b_1, b_2)_{\neq}$,

(2) *il existe un simplexe* γ_n *touchant* (a_1, a_2, b_1, b_2) (fig. 36).

Démonstration. La condition (1) résulte immédiatement du théorème 2.18 et de la définition 2.2.

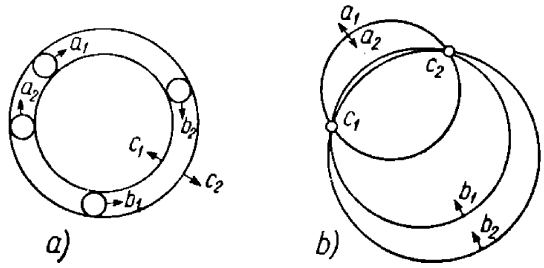


Fig. 36. $(c_1, c_2) = \gamma_n$

Pour prouver l'existence du simplexe γ_n, remarquons d'abord que les éléments (a_1, a_2, b_1) forment un simplexe.

En effet, de la condition (1) résulte $(a_1, a_2, b_1)_{\neq}$, et d'après la définition 1.7 nous avons $\delta(a_1, a_2, b_1) = -1$. On en conclut, en vertu de l'axiome II.1, que les éléments a_1, a_2, b_1 forment un simplexe.

En complétant le couple touchant ce simplexe (selon l'axiome III.2), nous obtiendrons le simplexe cherché γ_n.

L'élément b_2 étant dépendant de (a_1, a_2, b_1), il touche aussi γ_n.

THÉORÈME 2.30. *Pour quatre éléments différents* a_1, a_2, a_3, a_4, *les conditions*: (1) $(a_1, a_2, a_3, a_4)_d$ *et* (2) $\gamma_2 - (a_1, a_2, a_3, a_4)$ *entraînent que* a_1, a_2 *et* a_3, a_4 *forment des couples qui se coupent* (comparer la figure 36).

Démonstration. De la condition (2) résulte, en vertu des théorèmes 2.13 et 2.15, que les éléments a_1, a_2, a_3, a_4 ne se touchent pas. Or, d'après le théorème 2.05 trois éléments quelconques parmi a_1, a_2, a_3, a_4 sont indépendants. On en conclut en se basant sur le théorème 2.26, que les conditions des définitions 1.7 et 2.2 sont vérifiées.

THÉORÈME 2.31. a_1, a_2, a_3, a_4 *étant quatre éléments différents touchant le simplexe* γ_n, *ils forment deux couples*, (a_1, a_2) *et* (a_3, a_4) *qui se coupent* (fig. 36) ([25]).

Démonstration. De l'hypothèse $(a_1, a_2, a_3) - \gamma_n$ résulte, en vertu des théorèmes 2.13, 2.15 et 2.05, que les éléments a_1, a_2, a_3 forment un simplexe touchant γ_n. Selon l'axiome III.1, l'élément a_4, touchant γ_n, dépend de (a_1, a_2, a_3). Donc, toutes les conditions du théorème 2.30 sont vérifiées, et par conséquent $(a_1, a_2) \oplus (a_3, a_4)$.

([25]) Dans la géométrie à deux dimensions le théorème 2.30 est inutile, car il est alors, une forme affaiblie du théorème 2.31.

THÉORÈME 2.32. *Les conditions*

(1) $$(a_1, a_2) \oplus (a_3, a_4),$$

(2) $$(a_1, a_3) \oplus (a_2, a_4),$$

(3) $$(a_1, a_4) \oplus (a_2, a_3)$$

sont équivalentes.

Démonstration. L'une de ces conditions étant remplie, les éléments a_1, a_2, a_3, a_4 satisfont, indépendamment de leur ordre, aux conditions du théorème 2.31. Par conséquent deux couples quelconques de ces éléments se coupent.

THÉORÈME 2.33. *Les couples* (a_1, a_2) *et* (a_3, a_4) *se coupant, chacune des trois conditions suivantes exclut les autres* (fig. 37):

(1) $$(a_1, a_2) | (a_3, a_4),$$

(2) $$(a_1, a_3) | (a_2, a_4),$$

(3) $$(a_1, a_4) | (a_2, a_3).$$

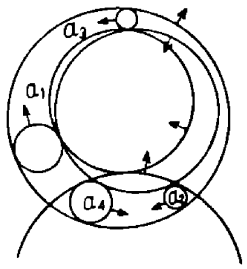
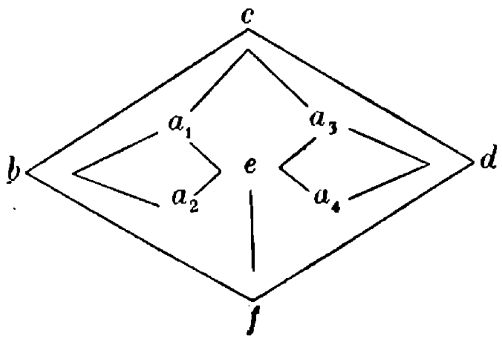


Fig. 37.
$(a_1, a_2) | (a_3, a_4)$, mais on n'a pas $(a_1, a_3) | | (a_2, a_4)$ (evidemment on n'a pas aussi: $(a_1, a_4) | (a_2, a_3)$)

Démonstration. En vertu du théorème 2.32 il suffit de démontrer que si les couples (a_1, a_2) et (a_3, a_4) se coupent et s'ils se séparent, alors les couples (a_1, a_3) et (a_2, a_4) ne se séparent pas. Dans ce but supposons que les couples (a_1, a_2) et (a_3, a_4) se coupent et qu'ils vérifient la condition (1), c'est-à-dire qu'on ait $(a_1, a_2) \oplus (a_3, a_4)$ et $(a_1, a_2) | (a_3, a_4)$, et démontrons l'existence de certains éléments b, c, d, e, f qui vérifient les contacts suivants:

(4)



En effet: 1. Les éléments a_1, a_2, a_3 ne se touchant pas, ils sont indépendants en vertu du théorème 2.05, donc il existe un élément b touchant (a_1, a_2) et ne touchant pas a_3. On en conclut, en tenant compte de l'hypothèse (1), que:

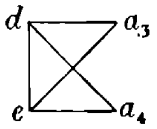
(5) $$\delta(a_3, a_4, b) = +1.$$

2. Selon l'axiome II.1 l'élément $c-(a_1, a_3, b)$ existe.

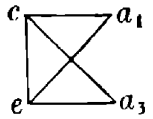
3. Le même axiome entraîne l'existence de l'élément $d-(a_3, a_4, c)$.

4. D'après la condition (1) de la définition 1.7 l'élément $e-(a_1, a_2, a_3, a_4)$ existe.

5. Pour prouver que $d \neq e$ admettons le contraire, c'est-à-dire que $d-e$. En appliquant plusieurs fois le théorème 2.15 nous obtiendrons successivement:

$a_3 \neq a_4$ et 

impliquent $d = e$, d'où $c-e$, et puis

$a_1 \neq a_3$ et 

impliquent $c = e$, d'où $b-e$, donc, d étant égal à e, $b-d$ en contradiction avec la condition (5). Par suite, d et e ne se touchent pas.

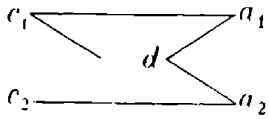
On en conclut, en vertu du théorème 2.09, que d, e forment un simplexe. Des conditions $(a_3, a_4)-(d, e)$ et (5) il résulte, d'après le théorème 2.11, que b, d, e forment aussi un simplexe, il existe donc un élément f touchant (b, d, e).

Ainsi, nous avons démontré l'existence des éléments qui vérifient le schéma (4).

En appliquant plusieurs fois le théorème 2.15, on peut démontrer que $(a_2, a_4, c, f)_{\neq}$. De l'axiome II.1 on conclut, en tenant compte de (4), que les triples (f, a_2, a_4), (f, a_2, c) et (f, a_4, c) sont des simplexes. En vertu de l'axiome II.3, il existe donc un élément g touchant (a_2, a_4, c). L'élément g est différent de c, car $c \neq a_2$, donc les couples (a_1, a_3) et (a_2, a_4) ne se séparent pas.

THÉORÈME 2.34. *Les conditions*:

(1) $$(a_1, a_2) \bigcirc (b_1, b_2) \ominus (c_1, c_2),$$

(2) 

(3) $$c_1 \neq a_1$$

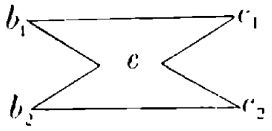
entraînent le contact c_2-d (fig. 38).

Démonstration. Si l'élément d touchait b_1 ou b_2, il toucherait (en vertu de la définition 1.7) (b_1, b_2), et alors aussi c_2, et le théorème serait vérifié.

Supposons le contraire, c'est-à-dire

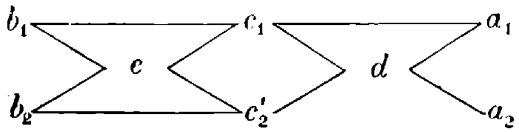
(4) $$d \neq b_1 \quad \text{et} \quad d \neq b_2.$$

En nous basant sur le théorème 2.19 nous pouvons admettre que

(5) 

(6) $$c_1 \neq b_2.$$

D'après l'axiome II.1 il existe un élément c_2' touchant (e, b_2, d). Nous avons donc

(7) 

Il est facile de vérifier que (c_1, c_2') est un couple lié à (b_1, b_2). Donc, en vertu de (1), (4) et (7) et d'après l'axiome IV, on a $(c_1, c_2') \bigcirc (a_1, a_2)$, d'où, vu les théorèmes 2.18 et 2.19 et la définition 2.1, on obtient $c_2' - a_2$.

Il suffit maintenant de prouver que $c_2' = c_2$. Dans ce but nous nous baserons sur le théorème 2.16, en tenant compte du fait que

$$(c_2, c_2') - (e, a_2, b_2).$$

THÉORÈME 2.35. *S'il existe un et un seul élément c_0 touchant a_k et b, alors il existe aussi un élément a_0 touchant b et dépendant de a_k* (fig. 39).

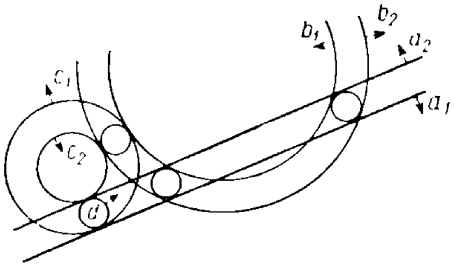


Fig. 38.

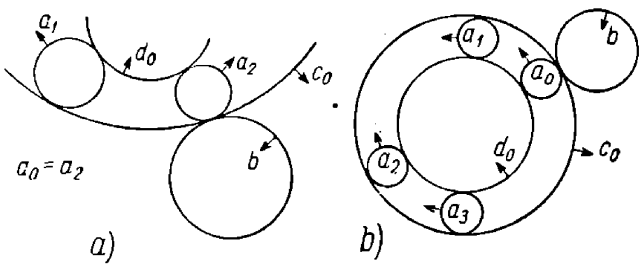
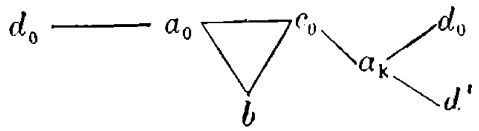


Fig. 39. a) $k = 2$, b) $k = 3$

Démonstration. Si l'élément c_0 dépendait de a_k, il vérifierait la thèse du théorème. Supposons donc que c_0 ne dépende pas de a_k. Alors il existe un élément d_0 touchant a_k et ne touchant pas c_0.

Nous démontrerons que l'élément a_0, touchant (b, c_0, d_0) (dont l'existence résulte du théorème 2.16), vérifie la thèse de notre théorème.

Supposons, au contraire, qu'il y ait un élément d', vérifiant les conditions (1) $d' - a_k$ et (2) $d' \neq a_0$. Nous avons donc



Maintenant nous introduirons certains éléments vérifiant les contacts suivants:

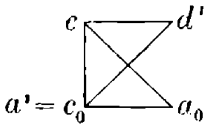
(3)

et tels que (d_0, d'), (a_0, a') et (c_0, c') soient trois couples satisfaisant aux conditions de l'axiome IV.

En effet: 1. Selon l'axiome II.1 il existe un e touchant (d', d_0, a_0).

2. Du même axiome résulte l'existence de l'élément a' touchant (b, d', e).

3. Pour prouver l'existence d'un élément touchant (c_0, d_0, d') mais ne touchant pas a', il suffit de démontrer que a' ne touche pas le simplexe a_k. Il en est ainsi, car dans le cas contraire a' serait égal à c_0 — le seul élément touchant a_k et b. Et alors nous aurions



d'où, en tenant compte de (2) on aurait l'égalité $e = a' = c_0$ contradictoire à l'hypothèse que $d_0 \neq c_0$. Donc parmi les éléments du simplexe a_k il en existe un ne touchant pas a'. Nous le désignerons par a_1.

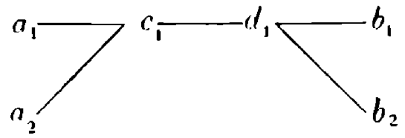
4. D'après l'axiome II.1 il existe un élément c' touchant (a_1, b, a').

Maintenant, en tenant compte des conditions $d_0 \neq c_0$, $d' \neq a_0$, $a' \neq a_1$ et des hypothèses du théorème on peut conclure que les éléments d_0, d', $a_0, a', c_0, c', e, b, a_1$ sont différents et que $a_0 \neq a'$. Donc, en vertu du théorème 2.21, on a $(d_0, d') \bigcirc (a_0, a') \bigcirc (c_0, c')$, d'où on conclut selon l'axiome IV que $(d_0, d') \bigcirc (c_0, c')$, en contradiction avec les hypothèses de notre théorème, car c' est, dans ce cas, un élément différent de c_0 et touchant en même temps a_k et b.

Le théorème est donc démontré, car en admettant qu'il n'est pas vérifié par l'élément a_0, nous avons été amenés à une contradiction.

THÉORÈME 2.36. *Si* (1) $\alpha_2 \bigcirc \beta_2$ *et si* (2) α_2 *et* β_2 *ne se séparent pas, alors pour chaque* c_0 *touchant* α_2 *il existe un élément* d_0 *touchant en même temps* c_0 *et* β_2 (fig. 40).

Démonstration. La condition (2) entraîne l'existence des éléments c_1 et d_1, tels qu'on ait (en désignant α_2 et β_2 par (a_1, a_2) et (b_1, b_2)), les contacts suivants:



et $c_1 \neq d_1$.

En écartant les cas évidents, nous pouvons admettre que :

(3) $$(c_0, c_1, b_1, b_2)_{\neq},$$

(4) $$c_0 \neq d_1.$$

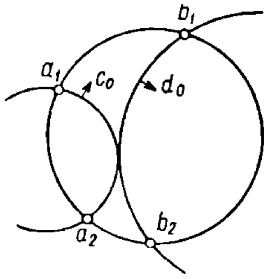
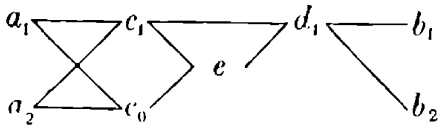


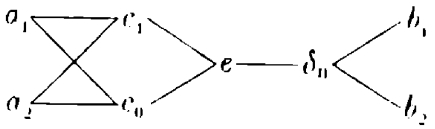
Fig. 40

Il existe donc, en vertu du théorème 2.16, un et un seul élément e touchant (c_0, c_1, d_1). Donc nous avons



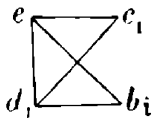
Maintenant nous allons prouver qu'il existe un simplexe δ_n, touchant (e, b_1, b_2), c'est-à-dire tel qu'on a

(5)



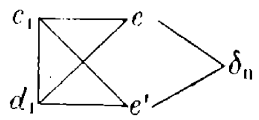
Ensuite nous prouverons que e est l'élément unique touchant δ_n et c_0.

En effet: 1. L'hypothèse $e - b_1$ ou $e - b_2$ conduit à une contradiction, car les contacts



impliquent ou bien $c_1 - b_i$, ou bien $e = d_1$ d'où $c_0 - d_1$; ceci est en contradiction avec l'une des conditions (3) et (4). Nous avons donc $(b_1, b_2, e)_{\neq}$ d'où, en vertu de l'axiome II.1, on conclut que b_1, b_2, e forment un simplexe γ_3. En nous basant sur l'axiome III.2, nous pouvons démontrer l'existence d'un simplexe δ_n vérifiant les conditions (5).

2. Supposons qu'il y ait outre e un autre élément, e', touchant c_0 et δ_n. D'après le théorème 2.31 (e, e') est un simplexe lié à β_2. On en conclut, en tenant compte des conditions (1) et (3), que $\alpha_2 \bigcirc \beta_2 \bigcirc (e, e')$, $\alpha_2 - c_0 - (e, e')$ et $(c_0, b_1, b_2)_{\neq}$ et alors, en vertu de l'axiome IV, nous avons $\alpha_2 \bigcirc (e, e')$, d'où $c_1 - e'$. D'autre part, (e, e') étant lié à β_2, nous avons $d_1 - e'$. Donc on a



d'où, en vertu du théorème 2.16, $e = e'$.

Nous avons donc démontré que e est l'élément unique touchant δ_n et c_0. En nous basant sur le théorème 2.35, nous pouvons en conclure l'existence d'un élément d_0 touchant c_0 et dépendant de δ_n. Cet élément vérifie la thèse de notre théorème.

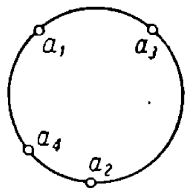


Fig. 41

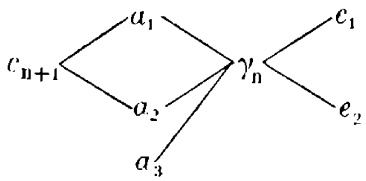
THÉORÈME 2.37. *Pour chaque simplexe* (a_1, a_2, a_3) *il existe un élément* a_4 *tel que* $(a_1, a_2)|(a_3, a_4)$ (fig. 41).

Démonstration. Selon la définition 1.6 et l'axiome III.2, il existe un simplexe $\gamma_n = (c_1, \ldots, c_n)$ touchant (a_1, a_2, a_3) et on peut le compléter de façon à obtenir le simplexe $(c_1, \ldots, c_n, c_{n+1})$ touchant (a_1, a_2). En nous basant sur l'axiome III.3 nous voyons qu'il existe un simplexe (e_1, e_2) vérifiant les conditions

$$(1) \qquad (e_1, e_2) - \gamma_n,$$

$$(2) \qquad \delta(e_1, e_2, c_{n+1}) = +1.$$

Nous avons donc les contacts



entraînant, en vertu du théorème 2.31, que $(a_1, a_2) \oplus (e_1, e_2)$.

Maintenant il y a trois cas à distinguer: 1. $a_3 = e_1$, 2. $a_3 = e_2$, 3. $e_1 \neq a_3 \neq e_2$.

1. Dans le cas où $a_3 = e_1$, il suffit d'admettre $a_4 = e_2$ et de se baser sur le théorème 2.36 en tenant compte de la condition (2).

2. Le cas $a_3 = e_2$ est analogue au précédent.

3. Dans le cas où $e_1 \neq a_3 \neq e_2$, on voit que les éléments a_1, a_2, a_3 e_1, e_2 sont tous différents, et alors en vertu du théorème 2.31, on a

$$(3) \qquad (a_1, a_2) \oplus (a_3, e_i) \quad \text{pour} \quad i = 1, 2.$$

On peut vérifier que les éléments e_1, e_2, a_3, c_{n+1} ne se touchent pas, donc en vertu de l'axiome. II.1 les éléments e_1, e_2, a_3 forment un simplexe. Si (e_1, a_3, c_{n+1}) et (e_2, a_3, c_{n+1}) étaient en même temps des simplexes, nous aurions, d'après l'axiome II.3, $\delta(e_1, e_2, c_{n+1}) = -1$ en contradiction avec (2).

On en conclut que ou bien $\delta(e_1, a_3, c_{n+1}) = +1$, ou bien $\delta(e_2, a_3, c_{n+1}) = +1$. Donc, d'après le théorème 2.36 et en tenant compte de la condition (3), nous voyons que ou bien $(a_1, a_2)|(a_3, e_1)$, ou bien $(a_1, a_2)|(a_3, e_2)$, et ainsi notre théorème est démontré.

Tous les théorèmes de ce chapitre sont vérifiés dans chaque modèle de la géométrie de Lie à n dimensions.

Au début du chapitre suivant nous fixerons un système de référence. Ce système sera formé de trois éléments fixés. Toutes les définitions seront basées sur ce système, les notions qui y seront définies seront donc des notions relatives, dépendant du système admis. Les théorèmes des chapitres suivants ne seront vérifiés dans un modèle de la géométrie de Lie que si l'on aura déterminé un système de réference dans ce modèle.

CHAPITRE 3

SYSTÈME DE RÉFÉRENCE. POINTS, HYPERPLANS ET HYPERSPHÈRES

En vertu du théorème 2.12 il existe trois éléments tels qu'aucun élément ne les touche. Nous choisissons un tel triple N, $\bar{k}$, $\underline{k}$ pour système de référence. Les éléments N, $\bar{k}$, $\underline{k}$ seront fixés dans toutes les considérations des chapitres 3-7. Toutes les définitions de ces chapitres détermineront des notions relatives — dépendant des éléments fixés N, $\bar{k}$, $\underline{k}$.

L'élément N sera nommé *point à l'infini*, le couple $\varkappa_2 = (\bar{k}, \underline{k})$ — *hypersphère fondamentale*, et $\bar{k}$ et $\underline{k}$ respectivement ses *côtés*, *extérieur* et *intérieur*.

La fixation de ces trois éléments nous permet de distinguer des éléments nommés points et d'introduire la notion d'hyperplan et celle d'hypersphère ([26]).

DÉFINITION 3.1. L'élément a est appelé *point* quand il existe un simplexe α_2 tel que $(a, N) - \alpha_2 \oplus \varkappa_2$.

Les points sont désignés par des majuscules $A, B, \ldots$ La lettre N est réservée au point à l'infini. Si un point est différent de N, il est dit *point à distance finie*.

DÉFINITION 3.2. Le simplexe α_k est dit *simplexe ponctuel* quand tous ses éléments sont des points.

DÉFINITION 3.3. Le couple α_2 est dit *conjugué* s'il existe un simplexe ponctuel β_{n+1} le touchant.

Les deux éléments d'un couple conjugué sont dits ses *côtés*.

DÉFINITION 3.4. Le couple conjugué est dit *hyperplan* s'il touche N, dans le cas contraire il est dit *hypersphère* ([27]).

Les considérations de ce chapitre ont pour but de prouver les théorèmes qui justifieront en partie les définitions 3.1-3.4. Ces théorèmes sont les suivants:

([26]) Les définitions de ces notions seront justifiées dans ce chapitre, et aussi dans les chapitres suivants.

([27]) Dans la géométrie à trois dimensions nous dirons „plan" au lieu de dire „hyperplan", et „surface sphérique" au lieu de dire „hypersphère". Dans la géométrie plane nous dirons „droite" ou „cercle" au lieu de dire „hyperplan" ou „hypersphère".

THÉORÈME 3.01. *On peut décomposer l'ensemble $\mathcal{L}$ de tous les éléments en deux parties disjointes:*

1. *L'ensemble $\mathcal{P}$, contenant tous les points,*
2. *L'ensemble $\mathcal{H}$, contenant tous les côtés des couples conjugués.*

Pour chaque élément a de l'ensemble $\mathcal{H}$ il y a un et un seul élément a' tel que a, a' forment un couple conjugué. L'élément a' appyrtient aussi à l'ensemble $\mathcal{H}$ (fig. 43).

THÉORÈME 3.02. *L'ensemble $\mathcal{H}$ est la somme de deux ensembles disjoints, $\mathcal{H}_p$ et $\mathcal{H}_s$, dont le premier contient les côtés des hyperplans et le second — les côtés des hypersphères* (fig. 43).

En particulier: $\bar{k}$ et $\underline{k}$ appartiennent à $\mathcal{H}_s$.

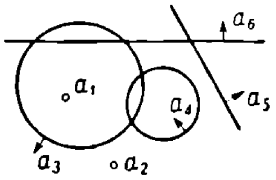


Fig. 44

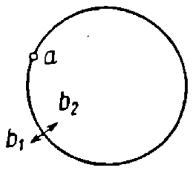


Fig. 43. $a_1, a_2 \in \mathcal{P}$, $a_3, a_4 \in \mathcal{H}_s$, $c_5, c_6 \in \mathcal{H}_p$

THÉORÈME 3.03. *A et B étant deux points différents, ils ne se touchent pas.*

THÉORÈME 3.04. *Si a touche un couple conjugué, alors il est un point* (fig. 44).

Comme conclusion immédiate des théorèmes 3.03 et 3.04 on a

Les notions de la géométrie plane, déterminées par les définitions 3.1-3.4 sont représentées sur la figure 42.

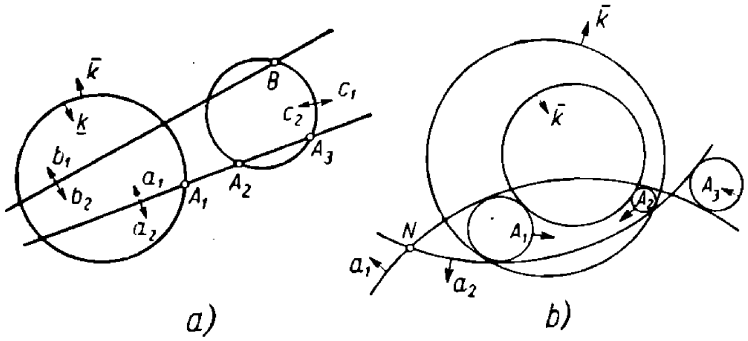


Fig. 42. a) $\varkappa_2 = (\bar{k}, \underline{k})$, $\alpha_2 = (a_1, a_2)$, $\beta_2 = (b_1, b_2)$, $\gamma_2 = (c_1, c_2)$ — couples conjugués; $\varkappa_2$ et γ_2 — hypersphères; α_2, β_2 — hyperplans; (A_1, A_2), (A_1, A_2, A_3), (A_2, B, A_3) — simplexes ponctuels. b) Un autre système de référence. A_1, A_2, A_3 — points; (a_1, a_2) — hyperplan

THÉORÈME 3.05. *Si A est un point et si (b_1, b_2) est un couple conjugué alors ou bien*

(1) $$A - (b_1, b_2),$$

ou bien

(2) $$\delta(A, b_1, b_2) = +1.$$

On peut donc dire que *la condition $A - b_1$ implique la condition $A - b_2$* (fig. 45).

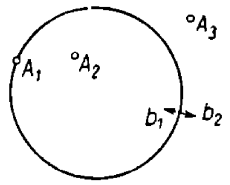


Fig. 45.
$A_1 - (b_1, b_2)$,
$\delta(A_2, b_1, b_2) = +1$
$= \delta(A_3, b_1, b_2)$

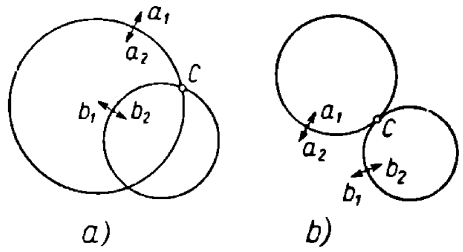


Fig. 46. a) $\alpha_2 \oplus \beta_2$, b) $\alpha_2 \ominus \beta_2$

THÉORÈME 3.06. *(a_1, a_2) et (b_1, b_2) étant deux couples conjugués, la condition*

(1) $$\delta(a_1, a_2, b_1, b_2) = -1,$$

implique

(2) $$(a_1, a_2) \bigcirc (b_1, b_2) \qquad \text{(fig. 46).}$$

En particulier, la condition

(1′) $$a_1 = b_1$$

implique

(2′) $$(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$$

et la condition

(1″) $$a_1 - b_1$$

implique (fig. 46b)

(2″) $$(a_1, a_2) \ominus (b_1, b_2).$$

THÉORÈME 3.07. *Le nombre naturel k ne surpassant pas $n+1$, il existe un couple conjugué touchant k points quelconques: $A_1, \ldots, A_k$.*

Donc chaque élément dépendant des points $A_1, \ldots, A_k$ (où $k \leqslant n+1$) est, en vertu du théorème 3.04, aussi un point (fig. 47).

THÉORÈME 3.08. *Si le point C et le couple conjugué α_2 vérifient les conditions*

(1) $$C \not\sim \alpha_2,$$

(2) $$C - \beta_2,$$

(3) $$\alpha_2 \bigcirc \beta_2,$$

alors le couple β_2 est aussi conjugué (fig. 48).

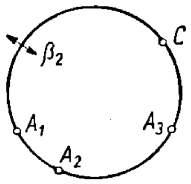


Fig. 47

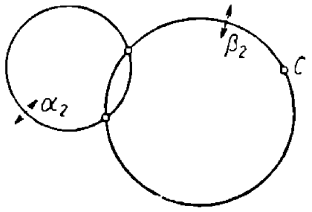


Fig. 48

THÉORÈME 3.09. *Si le point C, le simplexe ponctuel $(A_1, \ldots, A_k)$ et le couple conjugué α_2 vérifient les conditions*

(1) $$C \not\sim \alpha_2,$$

(2) $$(A_1, \ldots, A_k) - \alpha_2,$$

alors les points $A_1, \ldots, A_k$, C sont indépendants (fig. 49).

THÉORÈME 3.10. *Si $a \neq b$ et $a - b$, alors il existe un et un seul point touchant les éléments a et b* (fig. 50).

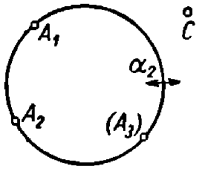


Fig. 49

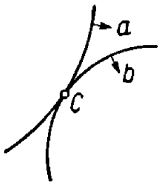


Fig. 50

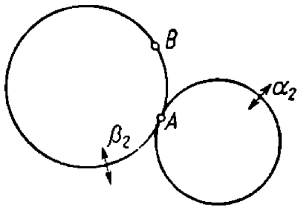


Fig. 51

THÉORÈME 3.11. *Si le point A touche le couple conjugué α_2 et si le point B ne le touche pas, alors il existe un et un seul couple β_2 tel que*

(1) $$\beta_2 - (A, B),$$

(2) $$\alpha_2 \ominus \beta_2.$$

Le couple β_2 doit être un couple conjugué (fig. 51).

THÉORÈME 3.12. *Si $n+2$ points $A_1, \ldots, A_{n+2}$ sont indépendants, alors*

(1) $$\delta(A_1, \ldots, A_{n+2}) = +1,$$

et chaque point B vérifie la condition

(2) $$B \text{ dépend de } (A_1, \ldots, A_{n+2}).$$

Pour démontrer ces 12 théorèmes, nous nous baserons sur 25 lemmes. Tous ces lemmes étant des cas particuliers de nos théorèmes, nous les avons désignés, entre parenthèses, par les numéros des théorèmes correspondants. Par exemple, en tête du lemme 1 nous avons écrit (théorème 3.03a), ce qui signifie que le lemme 1 est un cas particulier du théorème 3.03.

Maintenant nous allons prouver tous les lemmes et les théorèmes 3.01-3.12.

LEMME 1 (théorème 3.03a). *A étant un point à distance finie, nous avons $A \neq N$.*

Démonstration. Selon la définition 3.1, A et N touchent un couple (a_1, a_2). Nous avons donc les contacts

$$\begin{matrix} N & & a_1 \\ & \times & \\ A & & a_2 \end{matrix} \quad \text{où} \quad a_1 \neq a_2.$$

Donc, d'après le théorème 2.15, on a ou bien $N = A$, ou bien $N \neq A$.

LEMME 2 (théorème 3.07a). *Le nombre naturel k étant moindre que $n+1$, les deux conditions*

(1) $$(a_1, \ldots, a_k) - \varkappa_2,$$

(2) $$(a_1, \ldots, a_k)_i,$$

vérifiées en même temps, impliquent l'existence d'un simplexe β_2 touchant $(N, a_1, \ldots, a_k)$ et coupant $\varkappa_2$, c'est-à-dire remplissant les conditions $(N, a_1, \ldots, a_k) - \beta_2$ et $\beta_2 \oplus \varkappa_2$ (fig. 52).

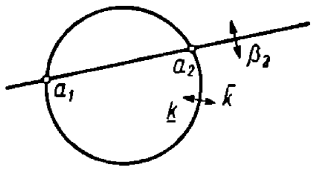


Fig. 52

Démonstration. Il suffit de démontrer notre théorème pour $k = n$. Dans ce cas, en tenant compte du fait que $\delta(\bar{k}, \underline{k}, N) = +1$, nous voyons que les conditions (1) et (2) de l'axiome III.3 sont remplies, donc $a_1, \ldots, a_k, N$ forment un simplexe. D'après le théorème 2.31, le couple (b_1, b_2), touchant ce simplexe, coupe le couple $\varkappa_2$.

LEMME 3 (théorème 3.04a). *Si $a - \varkappa_2$, alors a est un point.*

Démonstration. Notre lemme résulte directement du lemme 2 et de la définition 3.1.

LEMME 4 (théorème 3.02a). *Le couple $\varkappa_2 = (\bar{k}, \underline{k})$ est une hypersphère au sens de la définition* 3.4.

Démonstration. On applique le lemme 3.

LEMME 5 (théorème 3.09a). *Si le simplexe ponctuel* $\beta_k = (B_1, \ldots, B_k)$ *touche* $\varkappa_2$, *alors les points* $N, B_1, B_2, \ldots, B_k$ *sont indépendants* (fig. 53).

Démonstration. D'après le théorème 2.25 le nombre k ne peut pas surpasser $n+1$. S'il vérifie les inégalités $2 \leqslant k \leqslant n$, notre lemme résulte du théorème 2.11. Pour $k = 1$, le lemme résulte du théorème 2.08.

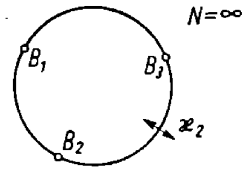


Fig. 53

Il faut encore démontrer le lemme pour $k = n+1$. Dans ce cas le seul couple touchant $(B_1, \ldots, B_k)$, c'est-à-dire le couple $\varkappa_2$, ne touche pas N. Or, il n'existe aucun élément touchant $(B_1, \ldots, B_k, N)$. En tenant compte des faits que $k-(B_1, \ldots, B_k)$ et que d'après le lemme 2 pour chaque j il y a un élément touchant $(B_1, \ldots, B_{j-1}, B_{j+1}, \ldots, B_k, N)$, nous voyons qu'aucun des éléments $B_1, \ldots, B_k, N$ ne dépend des autres, ce qu'il fallait démontrer.

LEMME 6 (théorème 3.08a). *Pour que le couple* β_2 *soit un hyperplan, il suffit qu'il vérifie les conditions*

(1) $$N-\beta_2,$$

(2) $$\varkappa_2 \oplus \beta_2 \quad \text{(fig. 54).}$$

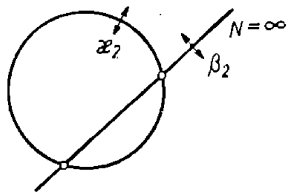


Fig. 54

Démonstration. D'après le théorème 2.29 et le lemme 3, il existe un simplexe ponctuel $(A_1, \ldots, A_n)$ touchant les couples β_2 et $\varkappa_2$. Puisque, d'après le lemme 5, $A_1, \ldots, A_n$, N forment un simplexe touchant β_2, le couple β_2 est, en vertu des définitions 3.3 et 3.4, un hyperplan.

LEMME 7 (théorème 3.06a). *Si les hyperplans* α_2 *et* β_2 *sont liés à* $\varkappa_2$, *ils sont aussi liés entre eux.*

C'est-à-dire: α_2 *et* β_2 *étant deux hyperplans, les conditions* $\alpha_2 \bigcirc \varkappa_2$ *et* $\beta_2 \bigcirc \varkappa_2$ *impliquent* $\alpha_2 \bigcirc \beta_2$.

Démonstration. Notre lemme résulte immédiatement de l'axiome IV.

LEMME 8 (théorème 3.05a). *L'hyperplan* $\beta_2 = (\bar{b}, \underline{b})$ *étant lié à* $\varkappa_2$, *chaque point* A *vérifie l'une des conditions suivantes*:

(1) $$A-(\bar{b}, \underline{b}),$$

(2) $$\delta(A, \bar{b}, \underline{b}) = +1.$$

Démonstration. D'après la définition 3.1 et le lemme 6, chaque point A est situé dans un hyperplan α_2 coupant $\varkappa_2$. En vertu du théorème 2.29 et du lemme 3, on en conclut l'existence d'un simplexe ponctuel $(C_1, \ldots, C_n)$ touchant les couples α_2 et $\varkappa_2$. Considérons maintenant les deux possibilités suivantes:

1. $(C_1, \ldots, C_n, N) - \beta_2$, et alors, en vertu du lemme 5 et du théorème 2.24, $\alpha_2 = \beta_2$, d'où $A - (\bar{b}, \underline{b})$.

2. Un des éléments C_i (par exemple C_1) ne touche pas le couple β_2 (fig. 55). En tenant compte du fait que $\delta(\bar{k}, \underline{k}, N) = +1$, nous concluons, en vertu du théorème 2.36, que $\beta_2 | \varkappa_2$ et alors, d'après la définition 1.8, on a $\delta(C_1, \bar{b}, \underline{b}) = +1$. En appliquant encore une fois le théorème 2.36 et le lemme 7, on a $\beta_2 | \alpha_2$, ce qui établit notre lemme.

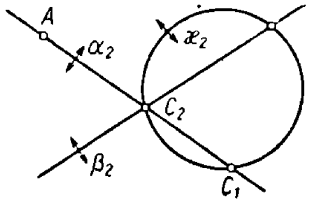


Fig. 55

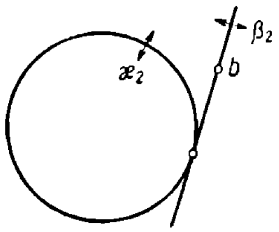


Fig. 56

Maintenant nous allons prouver les deux lemmes suivants:

LEMME 9 (théorème 3.08b). *Pour que le couple β_2 soit un hyperplan il suffit qu'il vérifie les conditions $N - \beta_2 \ominus \varkappa_2$* (fig. 56).

LEMME 10 (théorème 3.04b). *Si l'élément b touche un hyperplan β_2 lié à $\varkappa_2$, alors b est un point* (fig. 56).

Démonstration des lemmes 9 et 10. La condition $N - \beta_2 \ominus \varkappa_2$ implique, en vertu du théorème 2.36, que $\beta_2 | \alpha_2$. β_2 et α_2 étant deux couples différents, il existe, en vertu du théorème 2.19, un et un seul point B_0 touchant ces deux couples. Considérons maintenant un point arbitraire A, différent de B_0 et touchant $\varkappa_2$. Ce point vérifie, d'après la définition 1.8, la condition

$$\delta(A, \bar{b}, \underline{b}) = +1, \tag{1}$$

où $\bar{b}$ et $\underline{b}$ désignent les deux côtés du couple β_2.

Dans nos considérations il convient de distinguer le cas $n = 2$, dans lequel la démonstration se complique.

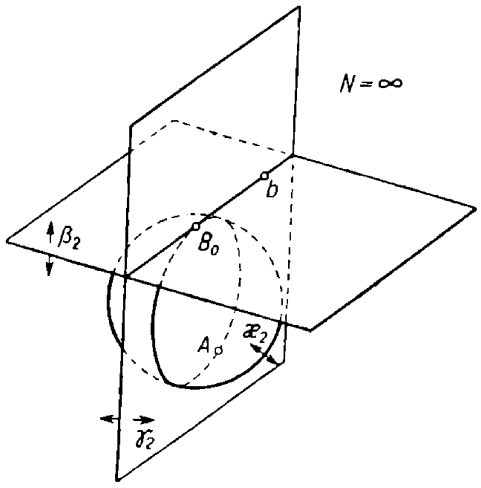


Fig. 57. $n = 3$

1. D'abord nous admettons $n \geqslant 3$ (fig. 57). Pour un élément quelconque b, touchant $(\bar{b}, \underline{b})$ et différent de N et de B_0, il est évident que b, B_0, N forment un simplexe. Selon l'axiome III.2 nous pouvons le compléter de façon à obtenir le simplexe $(b, B_0, N, c_1, \ldots, c_{n-3})$, tou-

chant le couple β_2. (Dans le cas $n = 3$, ce procédé est inutile.) Nous en concluons, d'après l'axiome III.3 et en tenant compte de la condition (1), que les éléments $b, B_0, N, c_1, \ldots, c_{n-3}, A$ forment aussi un simplexe. Désignant par γ_2 le couple touchant ce simplexe, nous voyons que, d'après le théorème 2.31, $\gamma_2 \oplus \beta_2$.

Les conditions de l'axiome IV étant vérifiées, on en conclut que $\gamma_2 \bigcirc \varkappa_2$. D'où, en tenant compte de l'existence de deux différents éléments A et B touchant γ_2 et $\varkappa_2$, nous avons

(2) $$\gamma_2 \oplus \varkappa_2.$$

Nous avons donc démontré que

(3) pour chaque élément b touchant β_2 il existe un couple γ_2 vérifiant les conditions $(N, b) - \gamma_2 \oplus \varkappa_2$.

Donc, d'après la définition 3.1, l'élément b est un point. (Le lemme 10 est ainsi démontré.)

Chaque simplexe δ_{n+1} touchant le couple β_2 est donc un simplexe ponctuel, et alors β_2, comme touchant — de plus — N, est un hyperplan et le lemme 9 est aussi démontré.

2. Supposons maintenant $n = 2$. Dans ce cas la démonstration consiste aussi à démontrer que la condition (3) est remplie (fig. 58). Dans ce but nous considérons le simplexe (b, N) au lieu du simplexe $(b, B_0, N, c_1, \ldots, c_{n-3})$ et par le même procédé nous concluons que $\gamma_2 \bigcirc \varkappa_2$ (où γ_2 désigne le couple touchant le simplexe (b, N, A)).

En prenant deux points A différents: A_1 et A_2, touchant $\varkappa_2$ et différents de B_0, nous obtiendrons deux couples γ_2: $\gamma_2^{(1)}$ et $\gamma_2^{(2)}$ (fig. 58). Les points B, A_1 et A_2 étant différents, si nous admettons que $\gamma_2^{(1)} \ominus \varkappa_2$ et $\gamma_2^{(2)} \ominus \varkappa_2$, alors les couples $\beta_2, \gamma_2^{(1)}$ et $\gamma_2^{(2)}$ seront aussi différents. En désignant respectivement par $\bar{b}, \bar{c}_1, \bar{c}_2$ les côtés des hyperplans $\beta_2, \gamma_2^{(1)}$ et $\gamma_2^{(2)}$, touchant $\bar{k}$, nous aurons les contacts $(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{b}) - (b, N, \bar{k})$. On peut aisément vérifier que $(\bar{b}, \bar{c}_1)$ et $(b, N, \bar{k})$ sont des simplexes. Le contact $\bar{c}_2 - (b, N, \bar{k})$ entraîne, en vertu de l'axiome III.1, que $\bar{c}_2$ dépend de $(\bar{b}, \bar{c}_1)$, d'où résulte l'une des égalités $\bar{b} = \bar{c}_2$ ou $\bar{c}_1 = \bar{c}_2$. Mais ces égalités sont en contradiction avec le fait que les points A_1, A_2 et B sont différents. On en conclut que notre hypothèse $\gamma_2^{(1)} \ominus \varkappa_2$ et en même temps $\gamma_2^{(2)} \ominus \varkappa_2$, est fausse, donc on a

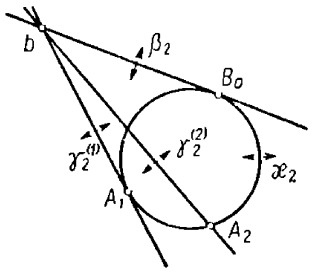


Fig. 58

(2′) $$\text{ou bien } \gamma_2^{(1)} \oplus \varkappa_2, \text{ ou bien } \gamma_2^{(2)} \oplus \varkappa_2.$$

Donc, dans le cas $n = 2$, la condition (3) est aussi remplie et nos deux lemmes sont ainsi démontrés.

LEMME 11 (théorème 3.07b). *Si les conditions*

(1) $$1 \leqslant k \leqslant n-1,$$

(2) $$(N, A_1, \ldots, A_k)_i$$

sont vérifiées, il existe un hyperplan α_2 vérifiant les conditions suivantes:

(3) $$\alpha_2 - (N, A_1, \ldots, A_k),$$

(4) $$\alpha_2 \bigcirc \varkappa_2.$$

Démonstration. Nous démontrerons par induction un théorème un peu plus fort.

Les conditions (1) et (2) impliquent l'existence de l'hyperplan vérifiant les conditions (3) et (4), mais si l'on a, de plus,

(1′) $$k \neq n-1,$$

alors il existe un hyperplan vérifiant la condition (3) et

(4′) $$\alpha_2 \oplus \varkappa_2.$$

1° Pour $k = 1$ le théorème renforcé est vrai en vertu de la définition 3.1 et du lemme 6.

2° Supposons maintenant que le théorème soit vrai pour un certain nombre k, moindre que $n-2$.

Si nous admettons que

(5) $$k \leqslant n-3,$$

(6) $$(N, A_1, \ldots, A_k, A_{k+1})_i,$$

alors le nombre $k+1$ étant moindre que $n-1$, il s'agit de démontrer l'existence d'un hyperplan β_2 touchant $(N, A_1, \ldots, A_{k+1})$ et coupant le simplexe $\varkappa_2$.

D'après l'hypothèse d'induction il existe un hyperplan $\alpha_2 = (\bar{a}, \underline{a})$, vérifiant les conditions (3) et (4′) (cf. fig. 59). En écartant le cas banal $A_{k+1} - \alpha_2$, nous pouvons, en vertu du lemme 8, admettre que

(7) $$\delta(A_{k+1}, \bar{a}, \underline{a}) = +1.$$

De la définition 3.1 et du lemme 6 résulte l'existence d'un hyperplan γ_2 vérifiant les conditions

(8) $$\gamma_2 - (N, A_{k+1}),$$

(9) $$\gamma_2 \oplus \varkappa_2.$$

De la condition (4′) nous concluons, en vertu du théorème 2.29, qu'il existe un simplexe ponctuel $\beta_n = (B_1, \ldots, B_n)$, touchant α_2 et $\varkappa_2$.

Le point N touchant α_2 et γ_2, l'hypothèse $\beta_n - \gamma_2$ entraînerait, en vertu du lemme 5 et du théorème 2.24, l'égalité $\alpha_2 = \gamma_2$ — en contradiction avec l'hypothèse (7). Donc, l'un des points B_i, soit B_1, ne touche pas γ_2 (fig. 59). Le nombre k étant, en vertu de l'hypothèse (5), moindre que $n-2$, on peut compléter le simplexe $(N, A_1, \ldots, A_k)$ de façon à obtenir le simplexe $(N, A_1, \ldots, A_k, D_{k+1}, \ldots, D_{n-1})$ touchant α_2 et tel que B_1 et B_2 dépendent de lui. Dans ce but, si B_1 ne dépend pas de $(N, A_1, \ldots, A_k)$, nous posons $D_{k+1} = B_1$, et si B_2 ne dépend pas de $(N, A_1, \ldots, A_k, D_{k+1})$, nous posons $D_{k+2} = B_2$. Les points $N, A_1, \ldots, A_k, D_{k+1}, D_{k+2}$ forment, en vertu du théorème 2.26, un simplexe dont le nombre d'éléments, étant inférieur à $(1+k+2)+1$, ne surpasse pas n. Ce simplexe touchant α_2, on peut le compléter de façon à obtenir le simplexe $(N, A_1, \ldots, A_k, D_{k+1}, D_{k+2}, \ldots, D_{n-1})$ touchant α_2. (Les éléments $D_{k+1}, \ldots, D_{n-1}$ sont, en vertu de la définition 3.1, des points). Selon l'axiome III.3, on en conclut, en tenant compte de l'hypothèse (7), que les points $N, A_1, \ldots, A_k, D_{k+1}, \ldots, D_{n-1}, A_{k+1}$ forment aussi un simplexe. Nous prouverons que le couple β_2 touchant ce simplexe satisfait à la thèse de notre théorème.

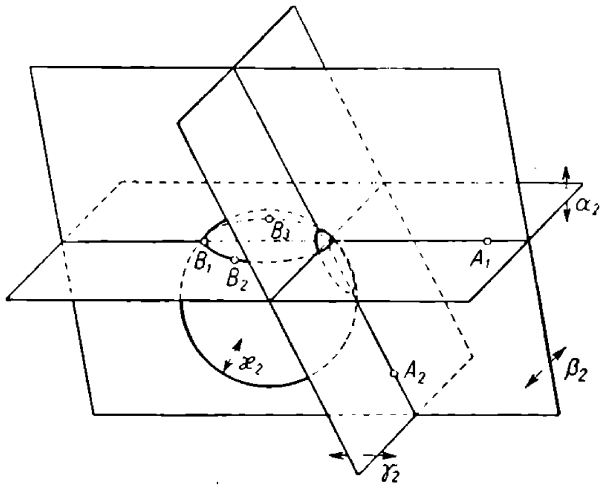


Fig. 59. $n = 3$

En effet, le couple β_2, touchant le simplexe ponctuel $\beta_{n+1} = (N, A_1, \ldots, A_k, D_{k+1}, \ldots, D_{n-1}, A_{k+1})$, est un hyperplan. Le simplexe $\beta_n = (N, A_1, \ldots, A_k, D_{k+1}, \ldots, D_{n-1})$ touchant α_2 et β_2, on en conclut, en vertu du théorème 2.31, que $\alpha_2 \oplus \beta_2$. Les couples α_2 et γ_2 étant liés (en vertu du lemme 7), nous pouvons appliquer deux fois l'axiome IV: Les conditions $\beta_2 \oplus \alpha_2 \bigcirc \gamma_2$, $\beta_2 - A_{k+1} - \gamma_2$ et $A_{k+1} \not\sim \alpha_2$ entraînent $\beta_2 \bigcirc \gamma_2$; les conditions $\beta_2 \bigcirc \gamma_2 \oplus \varkappa_2$, $\beta_2 - B_1 - \varkappa_2$ et $B_1 \not\sim \gamma_2$ impliquent $\beta_2 \bigcirc \varkappa_2$. En outre, les couples β_2 et $\varkappa_2$ se coupent, car il y a deux points différents les touchant: B_1 et B_2.

Nous avons donc démontré (dans le cas où $k+1 < n-1$) l'existence de l'hyperplan β_2 vérifiant les conditions $\beta_2 \oplus \varkappa_2$ et $\beta_2 - (N, A_1, \ldots, A_k, A_{k+1})$.

3° Il faut encore démontrer notre théorème pour $k = n-1$ (fig. 59). Dans ce cas nous répétons les considérations du n° 2°, mais en général on ne peut adjoindre au simplexe $(N, A_1, \ldots, A_{n-2})$ qu'un seul point B_1, et alors il n'est pas possible d'exclure le cas où β_2 et $\varkappa_2$ n'ont qu'un seul point commun, c'est-à-dire $\beta_2 \ominus \varkappa_2$.

LEMME 12 (théorème 3.06b). *α_2 et β_2 étant deux hyperplans, les conditions*

(1) *il existe un point C touchant α_2 et β_2,*

(2) $$\alpha_2 \bigcirc \varkappa_2$$

entraînent $\alpha_2 \bigcirc \beta_2$.

Démonstration. Le sens général de la démonstration est le suivant: Sur l'hyperplan β_2, nous fixons un plan à $(n-2)$ dimensions (différent de l'arête des hyperplans α_2 et β_2). Par ce plan nous menons l'hyperplan γ_2 lié à $\varkappa_2$. Les conditions $\alpha_2 \bigcirc \gamma_2 \bigcirc \beta_2$ impliquent $\alpha_2 \bigcirc \beta_2$ (fig. 60).

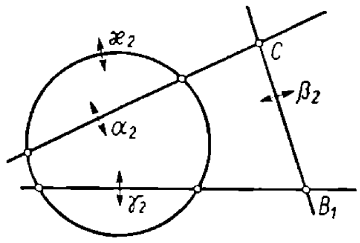


Fig. 60

Dans le cas $n = 2$ le théorème est évident, car les conditions $\alpha_2 - (C, N) - \beta_2$ impliquent, en vertu du théorème 2.31, $\alpha_2 \oplus \beta_2$.

Nous prouverons le théorème pour le cas $n \geqslant 3$. Posons $(\bar{a}, \underline{a}) = \alpha_2$ et $(\bar{b}, \underline{b}) = \beta_2$. Soit $(B_1, \ldots, B_{n+1})$ le simplexe ponctuel touchant, d'après la définition 3.3, l'hyperplan β_2. Les points C et N touchant aussi β_2, il y a (d'après le théorème 2.28) parmi les points B_i des points — soit $B_1, \ldots, B_{n-1}$ — tels que $N, C, B_1, \ldots, B_{n-1}$ forment un simplexe touchant β_2 et que B_n et B_{n+1} dépendent de ce simplexe. En vertu du lemme 11 il y a un hyperplan $\gamma_2 = (\bar{c}, \underline{c})$ touchant $(B_1, \ldots, B_{n-1})$ et lié à $\varkappa_2$. D'après le lemme 7 on a donc $\alpha_2 \bigcirc \gamma_2$.

Maintenant, nous distinguerons deux cas possibles:

1. $C - \gamma_2$; alors, en vertu du théorème 2.24, $\gamma_2 = \beta_2$, d'où $\alpha_2 \bigcirc \beta_2$.

2. $C \neq \gamma_2$; alors, d'après le lemme 8: $C \neq \bar{c}$ et $C \neq \underline{c}$, donc les éléments $\bar{b}, \underline{b}, \bar{c}, \underline{c}$ sont différents. On en conclut, en vertu du théorème 2.31 que $\beta_2 \bigcirc \gamma_2$. Les conditions $\alpha_2 \bigcirc \gamma_2 \bigcirc \beta_2$, $\alpha_2 - C - \beta_2$ et $C \neq \gamma_2$ étant remplies, nous avons, d'après l'axiome IV, $\alpha_2 \bigcirc \beta_2$.

LEMME 13 (théorème 3.06c). *L'hyperplan α_2 ayant un point A commun avec $\varkappa_2$, on a $\alpha_2 \bigcirc \varkappa_2$.*

Démonstration. En vertu de la définition 3.3 le couple α_2 est déterminé par un simplexe ponctuel à $n+1$ éléments. D'après le théorème 2.28, il existe parmi ces points des points $B_1, \ldots, B_{n-1}$ tels que $B_1, \ldots, B_{n-1}, A, N$ forment un simplexe touchant α_2. D'après le lemme 11 il existe un hyperplan β_2 vérifiant les conditions

(1) $$\beta_2 - (B_1, \ldots, B_{n-1}, N),$$

(2) $$\beta_2 \bigcirc \varkappa_2.$$

Nous distinguerons deux possibilités: 1. $A - \beta_2$ et 2. $A \neq \beta_2$.

1. Si $A - \beta_2$, on a $\beta_2 - (B_1, \ldots, B_{n-1}, A, N)$, et selon le théorème 2.24, $\beta_2 = \alpha_2$. Donc $\alpha_2 \bigcirc \varkappa_2$.

2. Si $A \not\sim \beta_2$, les conditions du théorème 2.31 sont vérifiées par les couples α_2 et β_2, et alors on a

(3) $$\alpha_2 \oplus \beta_2.$$

D'après l'hypothèse $A \not\sim \beta_2$ et les conditions (2) et (3), on peut conclure, en vertu de l'axiome IV, que les couples α_2 et $\varkappa_2$ sont liés.

LEMME 14 (théorème 3.06d). *L'hyperplan α_2 lié à $\varkappa_2$ est lié à chaque hyperplan β_2.*

Démonstration. Le théorème étant démontré (dans le lemme 12) dans le cas où les hyperplans α_2 et β_2 ont un point commun à distance finie, il s'agit maintenant de le prouver dans le cas où

(1) α_2 et β_2 n'ont pas de points communs à distance finie.

Nous distinguerons deux cas: 1. $n \geqslant 3$, et 2. le cas plus compliqué: $n = 2$.

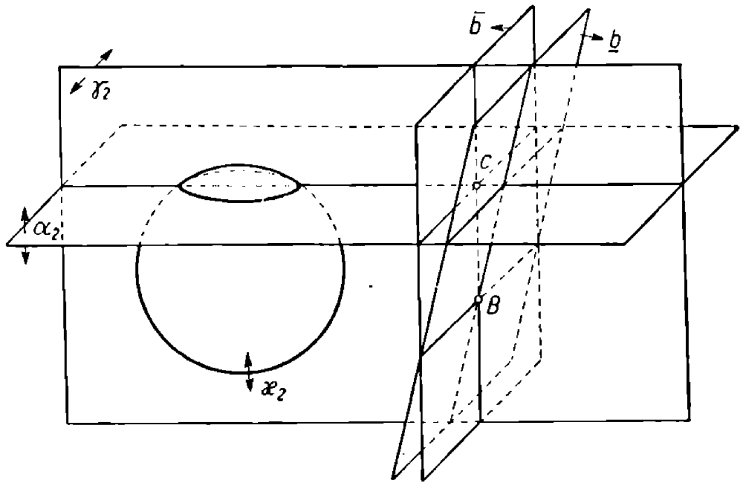


Fig. 61. $n = 3$

1. $n \geqslant 3$ (fig. 61). Soient respectivement $\bar{a}, \underline{a}$ et $\bar{b}, \underline{b}$ les côtés des hyperplans α_2 et β_2. D'abord nous prouverons qu'il n'existe pas d'éléments touchant $(\bar{a}, \underline{a}, \bar{b})$ et différents de N. Supposons, au contraire, qu'il y ait un élément c différent de N et touchant $(\bar{a}, \underline{a}, \bar{b})$. L'élément c, touchant α_2, est (en vertu du lemme 10) un point. En se basant sur le lemme 11, on peut mener un hyperplan, $\gamma_2 = (\bar{c}, \underline{c})$ lié à $\varkappa_2$ touchant le point c et B — un point quelconque situé sur β_2. Selon le lemme 12, les hyperplans β_2 et γ_2 sont liés, donc le point c, touchant $(\bar{c}, \underline{c}, \bar{b})$, touche aussi $\underline{b}$, ce qui est contradictoire à la condition (1).

Donc, nous voyons que N est l'élément unique touchant $(\bar{a}, \underline{a}, \bar{b})$. On en conclut, en vertu de l'axiome II.1, que $\bar{b}$ touche $\bar{a}$, ou il touche $\underline{a}$. Le même raisonnement relatif à $\underline{b}$ nous permet de conclure, en vertu du théorème 2.22, que $\alpha_2 \ominus \beta_2$.

2. $n = 2$ (fig. 62). La droite $a_2 = (\bar{a}, \underline{a})$ étant liée à $\varkappa_2$, il existe un point A touchant a_2 et $\varkappa_2$. Évidemment il y a un point B touchant a_2 et différent de A et de N. Il est aussi évident qu'il existe deux points différents C et D touchant β_2 et différents de N. On en conclut que tous

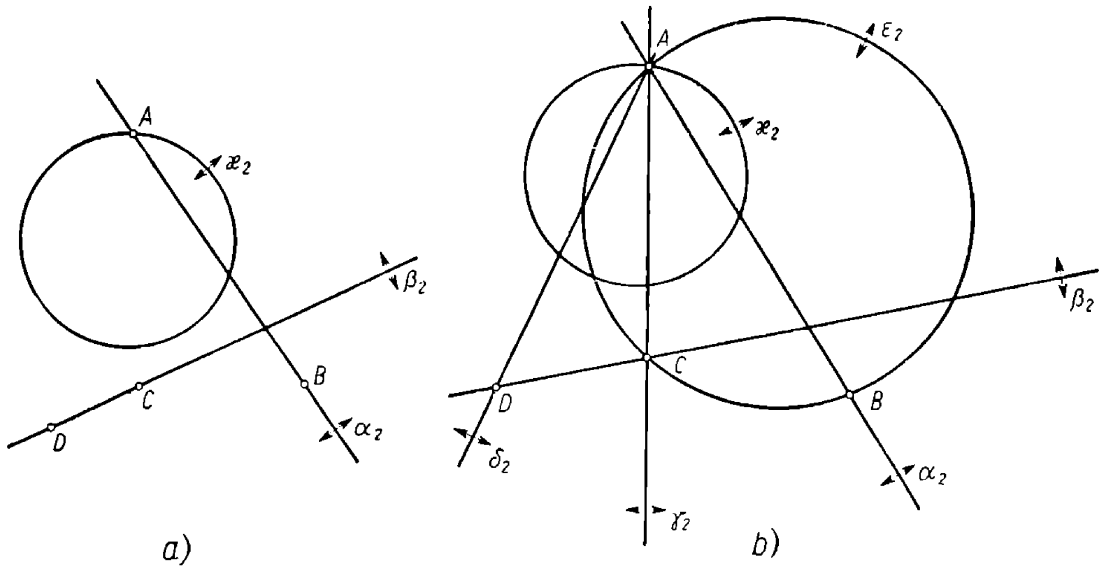


Fig. 62

les points A, B, C, D, N sont différents, car dans le cas contraire nous aurions une contradiction avec la condition (1). En outre la condition (1) implique que

$$C \neq a_2, \tag{2}$$

$$D \neq a_2. \tag{3}$$

On en conclut, en vertu du lemme 8, que $\delta(C, \bar{a}, \underline{a}) = +1$ et $\delta(D, \bar{a}, \underline{a}) = +1$, donc, d'après l'axiome III.3, (A, N, C), (A, N, D) et (A, B, C) sont des simplexes. Nous désignerons les couples touchant ces simplexes respectivement par $\gamma_2 = (\bar{c}, \underline{c})$, δ_2 et ε_2; ces couples sont évidemment conjugués (fig. 62b). Selon le lemme 13, on a

$$\gamma_2 \bigcirc \varkappa_2, \tag{4}$$

$$\delta_2 \bigcirc \varkappa_2. \tag{5}$$

Nous allons maintenant mener par C une droite φ_2 liée à $\varkappa_2$ mais ne passant pas par le point A. Dans ce but, nous considérons un simplexe (E_1, E_2, E_3) touchant le couple $\varkappa_2$. γ_2 et $\varkappa_2$ étant différents, au moins l'un des points E_i ne touche pas γ_2. Nous le désignerons par E_1. La condition $E_1 \neq \gamma_2$ entraîne, en tenant compte du lemme 8 et de la condition (4), que $\delta(E_1, \bar{c}, \underline{c}) = +1$. Or, d'après l'axiome III.3, (C, N, E_1)

est un simplexe. Nous désignerons le couple touchant ce simplexe par φ_2. On peut aisément vérifier que φ_2 est un hyperplan satisfaisant aux conditions

(6) $$\varphi_2 \bigcirc \varkappa_2,$$

(7) $$A \not\sim \varphi_2.$$

En effet, la condition (6) résulte du lemme 13. Si la condition (7) n'était pas vérifiée, le couple φ_2, touchant (A, N, C), serait égal au couple γ_2, ce qui est incompatible avec la condition $E_1 \not\sim \gamma_2$.

De la même manière on peut démontrer les conditions suivantes:

(8) $$C \not\sim \delta_2,$$

(9) $$N \not\sim \varepsilon_2.$$

En effet, $C - \delta_2$ entraîne $\delta_2 = \beta_2$, et par suite $A - \beta_2$, ce qui est incompatible avec la condition (1); $N - \varepsilon_2$ entraîne $\varepsilon_2 = \alpha_2$, donc $C - \alpha_2$, ce qui est aussi en contradiction avec la condition (1).

Selon le théorème 2.31 l'existence des points A, B implique

(10) $$\alpha_2 \oplus \varepsilon_2$$

et l'existence des points D, N implique

(11) $$\beta_2 \oplus \delta_2.$$

En se basant sur le lemme 7 on peut conclure que

(12) $$\varphi_2 \bigcirc \alpha_2,$$

(13) $$\varphi_2 \bigcirc \delta_2.$$

Maintenant, nous nous baserons quatre fois sur l'axiome IV:

1. Les contacts $\varphi_2 - C - \varepsilon_2$ et les conditions (12), (10) et (2) entraînent

(14) $$\varphi_2 \bigcirc \varepsilon_2.$$

2. Les contacts $\delta_2 - A - \varepsilon_2$ et les conditions (13), (14) et (7) entraînent

(15) $$\delta_2 \bigcirc \varepsilon_2.$$

3. Les contacts $\beta_2 - C - \varepsilon_2$ et les conditions (11), (15) et (8) entraînent

(16) $$\beta_2 \bigcirc \varepsilon_2.$$

4. Les contacts $\alpha_2 - N - \beta_2$ et les conditions (10), (16) et (9) entraînent

(17) $$\alpha_2 \bigcirc \beta_2,$$

ce qu'il est fallait démontrer.

LEMME 15 (théorème 3.05b). *A étant un point et* $(\bar{b}, \underline{b})$ *étant un hyperplan, on a l'un des cas suivants:*

(1) $$A - (\bar{b}, \underline{b}),$$

(2) $$\delta(A, \bar{b}, \underline{b}) = +1.$$

Démonstration. D'après la définition 3.1, il existe un hyperplan $\alpha_2 = (\bar{a}, \underline{a})$ touchant A et coupant $\varkappa_2$. Du lemme 14 résulte que $\alpha_2 \bigcirc \beta_2$. Nous admettons maintenant que la condition (1) n'est pas remplie. Or, α_2 et β_2 étant différents, parmi les points touchant β_2 il en existe au moins un, soit B_1, ne touchant pas α_2 (fig. 63). En vertu du lemme 8, $\delta(B_1, \bar{a}, \underline{a}) = +1$, donc, d'après le théorème 2.36, nous en concluons, en tenant compte de la condition $\alpha_2 \bigcirc \beta_2$, que $\alpha_2 | \beta_2$. D'où, vu la définition 1.8, résulte la condition (2).

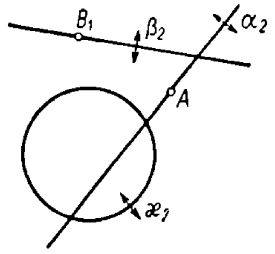


Fig. 63

LEMME 16 (théorème 3.07c). *Les points* $N, A_1, \ldots, A_n$ *étant indépendants, il existe un hyperplan les touchant.*

Démonstration. En vertu du lemme 11, nous pouvons mener un hyperplan $\alpha_2 = (\bar{a}, \underline{a})$ touchant $(N, A_1, \ldots, A_{n-1})$ et lié à $\varkappa_2$. Si le point A_n ne lui appartient pas, il satisfait (d'après le lemme 8) à la condition $\delta(A_n, \bar{a}, \underline{a}) = +1$. En nous basant sur l'axiome III.3, nous pouvons en conclure que les points $(N, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n)$ forment un simplexe. Le couple touchant ce simplexe est l'hyperplan vérifiant notre lemme.

LEMME 17 (théorème 3.07d). *Si* $(N, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1})_i$, *alors il y a exactement un couple conjugué touchant les points* $A_1, \ldots, A_{n+1}$.

Démonstration. L'hypothèse du lemme entraîne, en vertu du théorème 2.02, l'indépendance des points $N, A_1, \ldots, A_n$. D'après le lemme 16, il y a un hyperplan $\beta_2 = (\bar{b}, \underline{b})$ touchant $(N, A_1, \ldots, A_n)$. $\bar{b}$ et $\underline{b}$ étant en vertu du théorème 2.24 les éléments uniques touchant $(N, A_1, \ldots, A_n)$, et le point A_{n+1} étant indépendant de $(N, A_1, \ldots, A_n)$, on peut conclure que $A_{n+1} \not\bigcirc \beta_2$. Donc, d'après le lemme 15, $\delta(A_{n+1}, \bar{b}, \underline{b}) = +1$. En nous basant sur l'axiome III.3, nous en concluons que les points $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ forment un simplexe. Le couple unique les touchant est évidemment conjugué.

LEMME 18 (théorème 3.07e). *Si les points* $A_1, \ldots, A_k$ *vérifient les conditions*

(1) $$1 \leqslant k \leqslant n+1,$$

(2) $$(A_1, \ldots, A_k)_i,$$

(3) $$(N, A_1, \ldots, A_k)_d,$$

alors il existe un hyperplan qui les touche.

Démonstration. Nous prouverons le lemme par induction.

1° Pour $k = 1$ et $k = 2$, en vertu du théorème 2.08 ou du lemme 1, un des points A_i est égal à N, donc, d'après le lemme 11 ou le lemme 16, notre lemme est vrai.

2° Admettons que le lemme soit vrai pour un certain nombre naturel $k < n+1$. Supposons que les points $A_1, \ldots, A_k, A_{k+1}$ vérifient les conditions

$$(A_1, \ldots, A_k, A_{k+1})_i, \tag{4}$$

$$(N, A_1, \ldots, A_k, A_{k+1})_d. \tag{5}$$

Évidemment il y a un hyperplan $\alpha_2 = (\bar{a}, \underline{a})$ passant par les points $A_1, \ldots, A_k$. En effet, si la condition (3) est remplie, l'existence de cet hyperplan résulte de l'hypothèse d'induction, dans le cas où $(N, A_1, \ldots$ $\ldots, A_k)_i$, elle résulte des lemmes 11 ou 16.

Si A_{k+1} touche cet hyperplan, le lemme est démontré. Supposons, au contraire, que $A_{k+1} \not\sim \alpha_2$, alors d'après le lemme 15 nous avons $\delta(A_{k+1}, \bar{a}, \underline{a}) = +1$, d'où, en vertu du théorème 2.11, $(A_1, \ldots, A_k, A_{k+1})$ est un simplexe. Désignons par β_2 le couple touchant ce simplexe.

Nous avons maintenant deux cas à distinguer: 1. $N - \beta_2$ et 2. $N \not\sim \beta_2$.

1. $N - \beta_2$, alors les hypothèses du théorème 2.27 sont remplies. Nous en concluons que la condition suivante est remplie:

(6) Parmi les points $A_1, \ldots, A_{k+1}$ il existe un point A_i dépendant de $(N, A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_{k+1})$.

2. $N \not\sim \beta_2$, alors N ne dépend pas de $(A_1, \ldots, A_{k+1})$. Les points $N, A_1, \ldots, A_{k+1}$ étant dépendants, la condition (6) est remplie dans ce cas.

Par les points $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_{k+1}$ on peut mener un hyperplan γ_2 (soit en vertu du lemme 11 ou du lemme 16, soit en vertu de l'hypothèse d'induction). Il est évident que, en vertu de la condition (6), le point A_i touche l'hyperplan γ_2, et ainsi notre lemme est démontré.

Lemme 19 (théorème 3.07f). *Si* $1 \leqslant k \leqslant n+1$ *et si* $(A_1, \ldots, A_k)_d$, *alors il existe un couple conjugué touchant les points* $A_1, \ldots, A_k$.

Démonstration (par induction). 1° Pour $k = 2$ le lemme est évident. (Pour $k = 1$, les prémisses du lemme ne sont pas vérifiées, car chaque point A_1 satisfait à la condition: $(A_1)_i$.)

2° Admettons que le lemme soit vrai pour un certain nombre naturel k moindre que $n+1$.

Supposons que les points $A_1, \ldots, A_{k+1}$ soient dépendants. D'après la définition, un des points A_i, soit le point A_{k+1}, dépend des autres. Mais par les points $A_1, \ldots, A_k$ on peut mener un couple conjugué (soit en vertu de l'hypothèse d'induction, soit en vertu des lemmes 11, ou 16, ou enfin 18). Le point A_{k+1}, comme dépendant des points $A_1, \ldots, A_k$, touche aussi ce couple.

Une conclusion directe des lemmes 11, 16, 17, 18 et 19 est le théorème suivant:

THÉORÈME 3.07. *Le nombre naturel k vérifiant les inégalités $1 \leqslant k \leqslant n+1$, il y a un couple conjugué β_2, touchant des points arbitraires $A_1, \ldots, A_k$.*

De ce théorème on déduit

THÉORÈME 3.03. *Des points différents ne se touchent pas.*

Démonstration. Pour prouver ce théorème il suffit de mener un couple conjugué par deux points et de s'appuyer sur le théorème 2.15.

THÉORÈME 3.05. *Pour un point A et pour un couple conjugué $(\bar{b}, \underline{b})$, un des cas suivants a lieu: ou bien*

$$A - (\bar{b}, \underline{b}), \tag{1}$$

ou bien

$$\delta(A, \bar{b}, \underline{b}) = +1. \tag{2}$$

Démonstration. En tenant compte du lemme 15, il suffit de démontrer le lemme dans le cas où $\beta_2 = (\bar{b}, b)$ est une hypersphère, c'est-à-dire où $N \neq \beta_2$ (fig. 64). Désignons par $(B_1, \ldots, B_{n+1})$ le simplexe ponctuel touchant le couple β_2. D'après le théorème 3.07 il existe un hyperplan γ_2 touchant $(B_1, \ldots, B_n, N)$ et, selon la définition 3.3 et le lemme 6, il existe un hyperplan δ_2 lié à $\varkappa_2$ et touchant le point B_{n+1}. β_2 étant une hypersphère, il existe un point C touchant β_2 et ne touchant pas δ_2. On peut mener par N, A, C un hyperplan $\alpha_2 = (\bar{a}, \underline{a})$ [28].

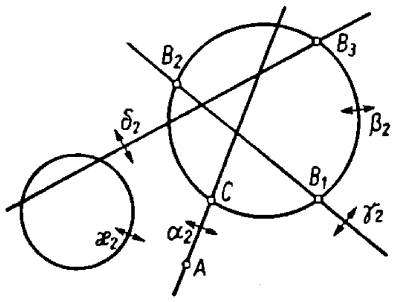


Fig. 64

Nous démontrerons maintenant que les couples α_2 et β_2 sont liés, ce qui entraîne en vertu du théorème 2.36 que $\alpha_2 | \beta_2$ (car chaque point B touchant β_2 et ne touchant pas α_2, vérifie en vertu du lemme 15, la condition $\delta(B, \bar{a}, \underline{a}) = +1$). Ainsi notre lemme sera démontré.

---

[28] Dans le cas où $n \geqslant 3$, la démonstration se simplifie, car au lieu de deux hyperplans différents α_2 et δ_2, il suffit de considérer un hyperplan α_2 passant par les points A, N, B_{n+1} et lié à $\varkappa_2$.

Pour prouver la liaison $\alpha_2 \bigcirc \beta_2$, nous nous baserons sur les considérations suivantes:

Selon le théorème 2.31 on a $\gamma_2 \oplus \beta_2$. D'après le lemme 14 $\gamma_2 \bigcirc \delta_2$ et $\alpha_2 \bigcirc \delta_2$. En appliquant deux fois l'axiome IV, nous voyons que $\delta_2 \bigcirc \gamma_2 \bigcirc \beta_2$, $\delta_2 - B_{n+1} - \beta_2$ et $B_{n+1} \neq \gamma_2$ entraîne $\delta_2 \bigcirc \beta_2$; $\alpha_2 \bigcirc \delta_2 \bigcirc \beta_2$, $\alpha_2 - C - \beta_2$ et $C \neq \delta_2$ entraîne $\alpha_2 \bigcirc \beta_2$, ce qu'il fallait encore démontrer.

LEMME 20 (théorème 3.01 a). *Si b est différent de N et touche N, alors il existe un élément b' tel que (b, b') est un hyperplan.*

Démonstration. Distinguons les trois possibilités suivantes (fig. 65):

1. $(b, \bar{k}, \underline{k})$ est un simplexe,
2. $b - \bar{k}$ (ou $b - \underline{k}$),
3. $\delta(b, \bar{k}, \underline{k}) = +1$.

1. $b, \bar{k}, \underline{k}$ forment un simplexe. Il existe un simplexe α_n touchant $(b, \bar{k}, \underline{k})$. Selon le lemme 3 le simplexe α_n est un simplexe ponctuel, et

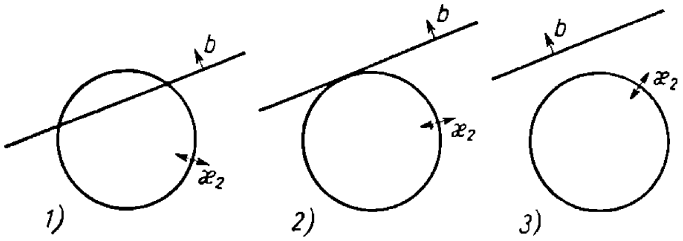


Fig. 65

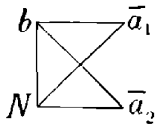
nous désignerons ses éléments par $A_1, \ldots, A_n$. En vertu du lemme 5, les points $A_1, \ldots, A_n, N$ sont indépendants. Donc, il existe exactement un couple conjugué β_2 touchant $(A_1, \ldots, A_n, N)$. Un des éléments de ce couple est b, et le second est l'élément cherché — b'.

2. $b - \bar{k}$ entraîne l'existence d'un point B (à distance finie) touchant $(b, \bar{k}, \underline{k})$. On peut évidemment mener l'élément b' touchant $(N, B, \underline{k})$. Selon le théorème 2.22 on a $\varkappa_2 \ominus (b, b')$. En tenant compte du contact $N - (b, b')$, nous en concluons en vertu du lemme 9 que le couple (b, b') est l'hyperplan cherché.

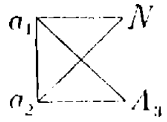
3. $\delta(b, \bar{k}, \underline{k}) = +1$. Il s'agit de prouver l'existence d'un simplexe ponctuel γ_{n+1}, touchant b. Dans ce but nous mènerons deux hyperplans différents coupant l'élément b, d'une certaine façon:

Étant donné un simplexe ponctuel $\alpha_{n+1} = (A_1, \ldots, A_{n+1})$ touchant le couple $\varkappa_2$, nous pouvons mener $n+1$ hyperplans $\alpha_2^{(i)} = (\bar{a}_i, \underline{a}_i)$, touchant respectivement les points $N, A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_{n+1}$ (pour $i = 1, 2, \ldots, n+1$). Parmi ces hyperplans il n'y en a qu'un seul ne vérifiant pas la condition $(b, \bar{a}_i, \underline{a}_i)_{\neq}$, car l'existence de deux tels

hyperplans conduit à une contradiction. (Si par exemple $b - \bar{a}_1$ et $b - \bar{a}_2$, alors les contacts



entraînent $\bar{a}_1 - \bar{a}_2$ et les contacts



entraînent $N - A_3$ ce qui est incompatible avec le théorème 3.03.)

Le nombre n étant supérieur ou égal à 2, nous voyons qu'il y a au moins deux hyperplans $a_2^{(i)}$ vérifiant la condition $(b, \bar{a}_i, \underline{a}_i)_+$. Nous les désignerons par $a_2^{(1)}$ et $a_2^{(2)}$ (fig. 66).

D'après l'axiome II.1 $(b, \bar{a}_1, \underline{a}_1)$ et $(b, \bar{a}_2, \underline{a}_2)$ sont des simplexes. Nous menons les simplexes les touchant, qui sont en vertu de la défnition 3.1 des simplexes ponctuels:

$$(N, C_1^{(1)}, \ldots, C_{n-1}^{(1)}) - (b, \bar{a}_1, \underline{a}_1)$$

et

$$(N, C_1^{(2)}, \ldots, C_{n-1}^{(2)}) - (b, \bar{a}_2, \underline{a}_2).$$

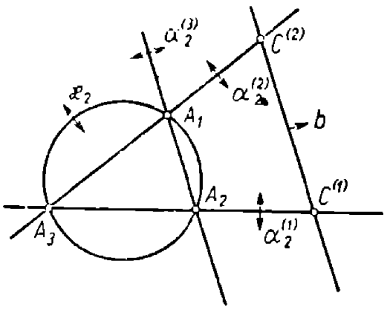


Fig. 66

Nous démontrerons maintenant que parmi les points $C_1^{(2)}, \ldots, C_{n-1}^{(2)}$ il y a un point $C_i^{(2)}$ tel que $(N, C_1^{(1)}, \ldots, C_{n-1}^{(1)}, C_i^{(2)})$ est un simplexe.

En effet, selon le théorème 3.07 il existe un couple touchant $(N, C_1^{(1)}, \ldots, C_{n-1}^{(1)}, C_i^{(2)})$ (pour chaque i). Donc, si pour chaque i les points $N, C_1^{(1)}, \ldots, C_{n-1}^{(1)}, C_i^{(2)}$ ne forment pas de simplexe, les points $N, C_1^{(1)}, \ldots, C_{n-1}^{(1)}, C_i^{(2)}$ sont dépendants et en vertu du théorème 2.26 $C_i^{(2)}$ dépend de $(N, C_1^{(1)}, \ldots, C_{n-1}^{(1)})$. Donc, les points $N, C_1^{(2)}, \ldots, C_{n-1}^{(2)}, A_3$ touchent l'hyperplan $a_2^{(1)}$ (et évidemment $a_2^{(2)}$). Ces points sont indépendants (dans le cas contraire A_3 dépendrait de $(N, C_1^{(2)}, \ldots, C_{n-1}^{(2)})$ et il toucherait b contrairement à l'hypothèse $\delta(b, \bar{k}, \underline{k}) = +1$). Par conséquent $(N, C_1^{(2)}, \ldots, C_{n-1}^{(2)}, A_3)$ est un simplexe. Nous avons donc démontré que les hyperplans $a_2^{(1)}$ et $a_2^{(2)}$ touchent le même simplexe ponctuel $(N, C_1^{(2)}, \ldots, C_{n-1}^{(2)}, A_3)$, donc ils sont égaux, ce qui est incompatible avec les définitions de ces hyperplans. Ainsi, l'hypothèse que les points $N, C_1^{(1)}, \ldots, C_{n-1}^{(1)}, C_i^{(2)}$ ne forment de simplexe pour aucun i, nous a conduit à une contradiction.

Il existe donc un simplexe ponctuel $(N, C_1^{(1)}, \ldots, C_{n-1}^{(1)}, C_i^{(2)})$ touchant b. Le seul couple touchant ce simplexe est, en vertu des définitions 3.3 et 3.4, un hyperplan dont un côté est b et le second — l'élément cherché b'.

LEMME 21 (théorème 3.04c). *Chaque élément touchant un hyperplan est un point.*

Démonstration. Soit a un élément touchant l'hyperplan $\alpha_2 = (\bar{a}, \underline{a})$ (fig. 67). α_2 étant évidemment un hyperplan différent de $\varkappa_2$, il y a un point B touchant $\varkappa_2$ et ne touchant pas α_2. D'après le théorème 3.05 $\delta(B, \bar{a}, \underline{a}) = +1$. Nous en concluons, en tenant compte du théorème 2.11 et des contacts $(N, a) - \alpha_2$, que N, a, B forment un simplexe. Il existe donc un élément b touchant (N, B, a). D'après le lemme 20, il y a aussi un élément b' formant avec b un hyperplan touchant (N, B). En vertu du lemme 13, l'hyperplan (b, b') est lié à $\varkappa_2$, donc, selon le lemme 14, $(\bar{a}, \underline{a}) \bigcirc (b, b')$, d'où $a - (b, b')$. Par conséquent, en vertu du lemme 10, a est un point.

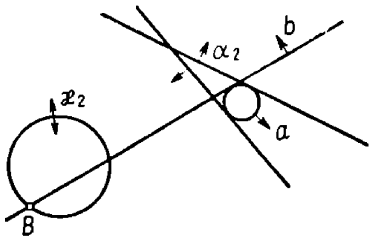


Fig. 67

LEMME 22 (théorème 3.06e). *Étant donnés deux couples conjugués* $(\bar{a}, \underline{a})$ *et* $(\bar{b}, \underline{b})$, *l'égalité* $\bar{a} = \bar{b}$ *entraîne l'égalité* $(\bar{a}, \underline{a}) = (\bar{b}, \underline{b})$.

Démonstration. Soit $(A_1, \ldots, A_{n+1})$ le simplexe ponctuel touchant $(\bar{a}, \underline{a})$. $\bar{a}$ étant égal à $\bar{b}$, nous avons le contact $(A_1, \ldots, A_{n+1}) - \bar{b}$. Or, en vertu du théorème 3.05, $(A_1, \ldots, A_{n+1}) - (\bar{b}, \underline{b})$. Par conséquent, d'après le théorème 2.24 on a $(\bar{b}, \underline{b}) = (\bar{a}, \underline{a})$.

THÉORÈME 3.10. *Si* (1) $a \neq b$ *et si* (2) $a - b$, *alors il existe un et un seul point* C *touchant* (a, b).

Démonstration. 1. Nous démontrerons l'existence du point C vérifiant les conditions de notre théorème.

1.1. Supposons que la condition supplémentaire (3) $N - a$ (ou (3′) $N - b$) soit remplie.

Du lemme 20 résulte ou bien que $N = a$, et alors $N - (a, b)$, ou bien qu'il y a un élément a' formant avec a un hyperplan. L'élément c, touchant en vertu de l'axiome II.1 (a, b, a'), est d'après le lemme 21 un point. Ainsi l'existence du point touchant (a, b) est démontrée.

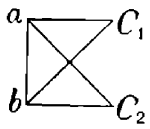
1.2. Supposons maintenant que les conditions (3) et (3′) ne soient pas remplies, c'est-à-dire que nous ayons (4) $N \neq a$ et $N \neq b$.

D'après l'axiome II.1 il existe un élément $\bar{c}$ touchant (N, a, b) (fig. 68). Dans la suite nous répétons les considérations du n° 1.1: il existe un élément $\underline{c}$ formant avec $\bar{c}$ un hyperplan, et il existe aussi un élément d

touchant $(a, \bar{c}, \underline{c})$. L'élément d est un point, et, en se basant sur le théorème 2.15, on peut démontrer que $d-(a, b)$.

2. Nous démontrerons maintenant qu'il n'y a qu'un seul point vérifiant les conditions de notre théorème.

En effet, si $(C_1, C_2)-(a, b)$, alors, d'après le théorème 2.15, les contacts



entraînent le contact C_1-C_2, ce qui implique, en vertu du théorème 3.03, l'égalité $C_1 = C_2$.

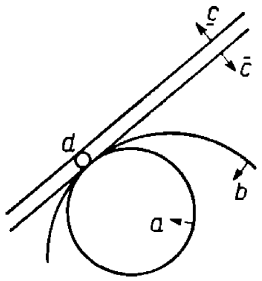


Fig. 68

THÉORÈME 3.01. *a n'étant pas un point, il existe un et un seul élément a' formant avec a un couple conjugué*

Inversement: si (a, a') est un couple conjugué, alors a n'est pas un point.

Démonstration. Nous partagerons la démonstration en trois parties. En précisant, nous démontrerons que

1. Si a n'est pas un point, alors il y a un élément a' formant avec lui un couple conjugué.

2. Il n'y a qu'un seul élément a', formant avec a un couple conjugué.

3. Si a, a' forment un couple conjugué, alors a n'est pas un point.

1. Dans le cas où $a-N$, l'existence de a' a été démontrée dans le lemme 20. Nous pouvons donc admettre que

(1) $a \neq N$,

(2) a n'est pas un point (fig. 69).

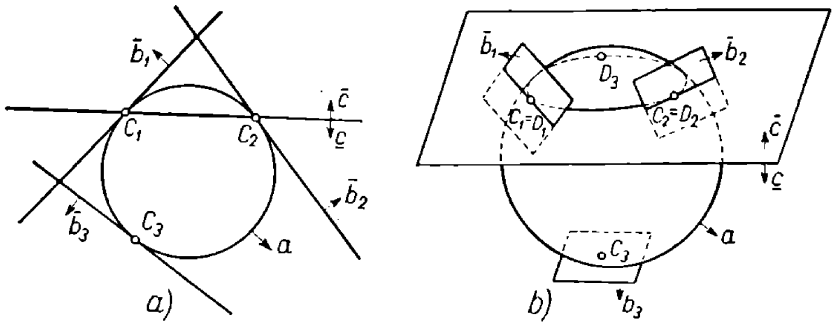


Fig. 69. a) $n = 2$, b) $n = 3$

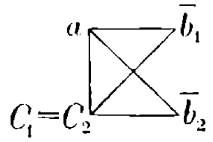
D'après le théorème 2.09, a, N forment un simplexe. Il existe donc un simplexe $(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3)$ touchant (a, N). D'après le théorème 3.10 on en conclut l'existence des points C_1, C_2, C_3 vérifiant la condition

(3) $$C_i-(\bar{b}_i, a) \quad (\text{pour } i = 1, 2, 3).$$

Il est évident que ces points vérifient les inégalités

(4) $$C_i \neq \bar{b}_i \quad \text{et} \quad C_i \neq a \quad (\text{pour } i = 1, 2, 3).$$

Si deux des points C_1, C_2, C_3 étaient égaux, par exemple $C_1 = C_2$, nous aurions



d'où, en vertu du théorème 2.15, $\bar{b}_1 - \bar{b}_2$, contrairement à l'hypothèse que $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$ forment un simplexe. Nous avons donc (d'après le théorème 3.03), la condition $(C_1, C_2, C_3)_{\neq}$. On en conclut, selon le théorème 2.05, que

(5) $$(C_1, C_2, C_3)_i.$$

Nous démontrerons maintenant que les points N, C_1, C_2, C_3 sont indépendants. Supposons le contraire: $(N, C_1, C_2, C_3)_d$. Un de ces points étant dépendant des autres, on peut, en vertu du théorème 3.07, mener un couple conjugué par ces quatre points, même si $n = 2$. Donc, les conditions du théorème 2.26 sont remplies, et alors le point N dépend de (C_1, C_2, C_3). Mais on en conclut que $N - a$, ce qui est incompatible avec la condition (1). Nous avons ainsi démontré que

(6) $$(N, C_1, C_2, C_3)_i.$$

Ceci entraîne l'existence d'un élément $\bar{c}$ vérifiant les conditions

(7) $$\bar{c} - (N, C_1, C_2),$$

(8) $$\bar{c} \neq C_3.$$

Selon le lemme 20, il existe un élément $\underline{c}$ formant avec $\bar{c}$ un hyperplan. D'après l'axiome II.2 les éléments $\bar{c}, \underline{c}, a$ sont indépendants. Nous en concluons, en tenant compte des contacts $(C_1, C_2) - (\bar{c}, \underline{c}, a)$, qu'ils forment un simplexe. Ainsi, en vertu de l'axiome III.2, il existe un simplexe $\delta_n = (D_1, \ldots, D_n)$ touchant $(\bar{c}, \underline{c}, a)$ (ce simplexe est, en vertu du lemme 21, un simplexe ponctuel) (fig. 69 b).

Nous démontrerons maintenant que

(9) $$(D_1, \ldots, D_n, C_3)_i.$$

En effet, si les points $D_1, \ldots, D_n, C_3$ étaient dépendants, nous pourrions, en nous basant sur les théorèmes 3.07 et 2.26, démontrer que C_3 dépend de $(D_1, \ldots, D_n)$, et alors $C_3 - \bar{c}$, contrairement à la condition (8).

Selon le théorème 3.07 il existe un couple conjugué a_2, touchant $(D_1, \ldots, D_n, C_3)$ et, d'après le théorème 2.24, un des éléments de ce couple est a et le second forme avec lui un couple conjugué.

2. Du lemme 22 résulte que si (a, a') et (a, a'') sont des couples conjugués, alors $a' = a''$. Donc, il n'y a qu'un seul élément a' formant avec a un couple conjugué.

3. Supposons que (a, a') soit un couple conjugué et $(B_1, \ldots, B_{n+1})$ soit un simplexe ponctuel le touchant. Les conditions $a - B_1$ et $a - B_2$ entraînent que si a était un point, il serait égal à B_1 et à B_2, d'où $B_1 = B_2$. Mais ceci est incompatible avec la définition d'un simplexe. Donc l'élément a n'est pas un point.

Comme conclusion qu'on peut tirer de ce théorème, en tenant compte de la définition 3.4 et du lemme 4, on a le théorème suivant:

THÉORÈME 3.02. *Pour chaque élément a on a l'une des trois possibilités suivantes, qui s'excluent*: 1. *a est un point*, 2. *a est un côté d'un hyperplan*, 3. *a est un côté d'une hypersphère.*

En particulier: *$\bar{k}$ et $\underline{k}$ sont les côtés d'une hypersphère.*

Remarque. Du théorème 3.05 résulte que si (a, a') est un hyperplan, alors $N - (a, a')$, et si (a, a') est une hypersphère, donc $N \not\sim a$ et en même temps $N \not\sim a'$.

LEMME 23 (théorème 3.06f). *Si l'hyperplan α_2 et le couple conjugué β_2 ont un point commun, alors on a $\alpha_2 \bigcirc \beta_2$.*

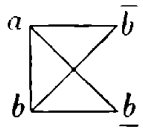
Démonstration. Nous démontrerons d'abord que

$$\alpha_2 | \beta_2. \tag{1}$$

À cet effet, supposons que les éléments a et b vérifient la condition

$$\alpha_2 - b - a - \beta_2. \tag{2}$$

L'élément b étant, en vertu du lemme 21, un point, il doit, en vertu du théorème 3.05, vérifier ou bien la condition $b - \beta_2$, ou bien la condition $\delta(b, \bar{b}, \underline{b}) = +1$ (où $\bar{b}$ et $\underline{b}$ désignent les côtés du couple β_2). Mais le deuxième possibilité est en contradiction avec l'existence de l'élément a touchant $(b, \bar{b}, \underline{b})$. Nous avons donc les contacts



d'où résulte l'égalité $a = b$.

La condition (2) entraînant l'égalité $a = b$, la condition (1) est démontrée.

On en conclut, d'après le théorème 2.23 et en tenant compte de l'existence d'un point touchant les couples α_2 et β_2, que ces couples sont liés.

THÉORÈME 3.04. *Chaque élément touchant un couple conjugué est un point.*

Démonstration. Il suffit de démontrer notre théorème pour un couple conjugué qui est une hypersphère, car la deuxième possibilité a été considérée dans le lemme 21.

Soit a un élément touchant l'hypersphère $(\bar{b}, \underline{b})$ (fig. 70). Nous désignerons par B un point arbitraire, touchant $(\bar{b}, \underline{b})$. D'après le théorème 3.05, $\delta(\bar{b}, \underline{b}, N) = +1$, donc, en vertu du théorème 2.11, nous en concluons que (a, B, N) est un simplexe. Pour un élément quelconque $\bar{c}$ touchant ce simplexe il existe, en vertu du lemme 20, un élément $\underline{c}$ formant avec lui un hyperplan. Le point B touchant les couples $(\bar{b}, \underline{b})$ et $(\bar{c}, \underline{c})$, ces deux couples sont liés d'après le lemme 23. Donc la condition $a-(\bar{b}, \underline{b}, \bar{c})$ entraîne le contact $a-\underline{c}$, et l'élément a, touchant l'hyperplan $(\bar{c}, \underline{c})$, est un point en vertu du lemme 21.

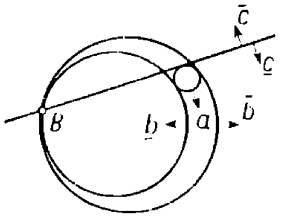


Fig. 70

LEMME 24 (théorème 3.06g). *Les couples conjugués ayant un point commun sont liés.*

Démonstration. Nous prouverons d'abord que deux couples conjugués α_2 et β_2 vérifient toujours la condition

$$\alpha_2 | \beta_2. \tag{1}$$

En effet, supposons que les éléments a et b remplissent la condition

$$\alpha_2 - b - a - \beta_2. \tag{2}$$

Donc, en vertu du théorème 3.04, a et b sont des points, et alors le contact $a-b$ entraîne l'égalité $a = b$. Nous avons ainsi démontré la condition (1).

Il suffit maintenant de s'appuyer sur le théorème 2.23 pour en déduire notre lemme.

LEMME 25 (théorème 3.06h). *$(\bar{a}, \underline{a})$ et $(\bar{b}, \underline{b})$ étant deux couples conjugués, la condition $\bar{a}-\bar{b}$ implique $(\bar{a}, \underline{a}) \ominus (\bar{b}, \underline{b})$.*

Démonstration. Dans le cas où $\bar{a} = \bar{b}$, notre lemme résulte du lemme 22. Supposons donc que $\bar{a} \neq \bar{b}$. Il existe donc, en vertu du théorème 3.10, un et un seul point C touchant $(\bar{a}, \bar{b})$. Du théorème 3.05 résulte que $C-(\bar{a}, \underline{a})$ et $C-(\bar{b}, \underline{b})$. On en conclut, d'après le lemme 24, que $(\bar{a}, \underline{a}) \bigcirc (\bar{b}, \underline{b})$, et ainsi, en tenant compte du théorème 2.18, nous voyons que $(\bar{a}, a) \ominus (\bar{b}, \underline{b})$.

Le lemme 24 avec les lemmes 22 et 25 donnent, en tenant compte du théorème 3.04 le théorème 3.06:

THÉORÈME 3.06. *$(\bar{a}, \underline{a})$ et $(\bar{b}, \underline{b})$ étant deux couples conjugués, la condition*

(1) $$\delta(\bar{a}, \underline{a}, \bar{b}, \underline{b}) = -1$$

implique (cf. fig. 46, p. 45)

(2) $$(\bar{a}, \underline{a}) \bigcirc (\bar{b}, \underline{b}).$$

En particulier, la condition

(1′) $$\bar{a} = \bar{b}$$

implique

(2′) $$(\bar{a}, \underline{a}) = (\bar{b}, \underline{b})$$

et la condition

(1″) $$\bar{a} - \bar{b}$$

implique

(2″) $$(\bar{a}, \underline{a}) \ominus (\bar{b}, \underline{b}).$$

THÉORÈME 3.09. *Si*

(1) α_2 *est un couple conjugué,*

(2) $$\beta_k = (B_1, \ldots, B_k) - \alpha_2,$$

(3) $$C \not\sim \alpha_2,$$

alors les points $B_1, \ldots, B_k, C$ sont indépendants.

Démonstration. Le point C est évidemment indépendant des points $B_1, \ldots, B_k$. Le nombre k vérifie, en vertu de la définition 1.6 et du théorème 2.25, les inégalités $2 \leqslant k \leqslant n+1$.

Supposons que le théorème ne soit pas vrai, c'est-à-dire que $(B_1, \ldots, B_k, C)_d$. Donc un de ces points dépend des autres et on peut, en vertu du théorème 3.07, mener un couple conjugué touchant les points $B_1, \ldots, B_k, C$. Les hypothèses du théorème 2.26 étant satisfaites, nous voyons que C dépend de $(B_1, \ldots, B_k)$ contrairement aux conditions (2) et (3). L'hypothèse que $B_1, \ldots, B_k, C$ sont dépendants nous a fourni une contradiction.

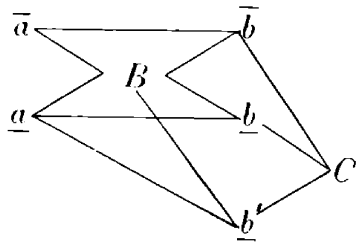
THÉORÈME 3.08. *Si* (1) α_2 *est un couple conjugué,* (2) $C \not\sim \alpha_2$, (3) $C - \beta_2$, (4) $\alpha_2 \bigcirc \beta_2$, *alors β_2 est un couple conjugué.*

Démonstration. Nous distinguerons deux cas: 1. $\alpha_2 \oplus \beta_2$ et 2. $\alpha_2 \ominus \beta_2$.

1. La condition $\alpha_2 \oplus \beta_2$ implique l'existence d'un simplexe ponctuel $(A_1, \ldots, A_n)$ touchant α_2 et β_2. D'après le théorème 3.09, les points $A_1, \ldots, A_n, C$ sont indépendants, donc, en vertu des théorèmes 3.07

et 2.24, il existe exactement un couple touchant ces points et il est conjugué. Ce couple est évidemment β_2.

2. Admettons que $\alpha_2 \ominus (\bar{b}, \underline{b})$ (où $\bar{b}$ et $\underline{b}$ désignent les éléments du couple β_2). Selon le théorème 3.01 il existe un élément $\underline{b}'$ formant avec $\bar{b}$ un couple conjugué. Donc, d'après le lemme 25 on a $\alpha_2 \ominus (\bar{b}, \underline{b}')$, d'où, en vertu du théorème 3.05, résulte que $C - (\bar{b}, \underline{b}')$. On peut maintenant démontrer qu'on a les contacts suivants:



où $\underline{a} \neq B$ et $\underline{a} \neq C$. Ainsi, d'après le théorème 2.16, $\underline{b} = \underline{b}'$. Nous voyons donc que le couple $(\bar{b}, \underline{b})$ est conjugué.

THÉORÈME 3.11. *A et B étant deux points, et α_2 un couple conjugué, si* (1) $A - \alpha_2$ *et si* (2) $B \neq \alpha_2$, *alors il existe un et un seul couple β_2 vérifiant les conditions*: $(A, B) - \beta_2 \ominus \alpha_2$. *Le couple β_2 est un couple conjugué* (cf. fig. 51, p. 46).

Démonstration. D'après le théorème 2.16, il existe un et un seul élément $\bar{b}$ touchant $(A, \bar{a}, B)$ et un et un seul élément $\underline{b}$ touchant $(A, \underline{a}, B)$. Il est facile de vérifier que $\bar{b}$ et $\underline{b}$ ne se touchent pas, ils forment donc un couple. En vertu du théorème 3.08, ce couple est conjugué et il remplit les conditions de notre théorème.

THÉORÈME 3.12. *Si $n+2$ points $A_1, \ldots, A_{n+2}$ sont indépendants, alors*

$$\delta(A_1, \ldots, A_{n+2}) = +1 \tag{1}$$

et chaque point B vérifie la condition

$$B \text{ dépend de } (A_1, \ldots, A_{n+2}). \tag{2}$$

Démonstration. Supposons, au contraire, qu'il y ait un élément c touchant $(A_1, \ldots, A_{n+2})$. Il est évident que c n'est pas un point. On en conclut (en vertu du théorème 3.01) qu'il existe un élément c' formant avec c un couple conjugué. Selon le théorème 3.05, les points $A_1, \ldots, A_{n+2}$ touchent le couple (c, c'). Les points $A_1, \ldots, A_{n+1}$, étant indépendants, les éléments c et c' sont, en vertu du théorème 2.24, les seuls éléments touchant les points $A_1, \ldots, A_{n+1}$. Nous voyons donc que tous les éléments touchant $(A_1, \ldots, A_{n+1})$ touchent aussi A_{n+2}, c'est-à-dire A_{n+2} dépend de $(A_1, \ldots, A_{n+1})$, contrairement à l'hypothèse du théorème. On en conclut que la condition (1) est remplie.

Il est évident que chaque point B dépend de $(A_1, \ldots, A_{n+2})$, car chaque élément touchant $(A_1, \ldots, A_{n+2})$ touche aussi B.

Nous avons donc déjà démontré les théorèmes 3.01-3.12. Ces théorèmes montrent qu'il existe une certaine correspondance entre les notions de point, d'hyperplan et d'hypersphère déterminées par les définitions 3.1-3.4 d'une part, et les notions déterminées par les mêmes termes dans la géométrie métrique à n dimensions d'autre part. Dans les chapitres suivants, nous verrons que cette correspondance est absolue, c'est-à-dire que les notions déterminées ici sont isomorphes aux notions correspondantes de la géométrie métrique.

CHAPITRE 4

VARIÉTÉS. AXIOMES D'INCIDENCE DE LA GÉOMÉTRIE AFFINE

En nous basant sur les notions de la géométrie métrique déterminées dans le chapitre précédent (point, hyperplan et hypersphère), nous en introduirons ici d'autres: celles de plan à k dimensions et de surface sphérique à k dimensions. Ces deux notions sont comprises sous le nom de *variété ponctuelle à k dimensions*, ou tout court *variété à k dimensions*.

DÉFINITION 4.1. Une *variété à k dimensions* désigne: 1. l'ensemble vide — dans le cas où $k = -2$,

2. l'ensemble contenant un point unique — dans le cas où $k = -1$,

3. l'ensemble des éléments dépendant d'un simplexe a_{k+2} — dans le cas où $0 \leqslant k \leqslant n-1$,

4. l'ensemble de tous les points — dans le cas où $k = n$.

Le nombre k est appelé *dimension* de la variété. Une variété à k dimensions sera désignée par une minuscule avec l'indice k suscrit, soit a^{-1}, b^0, d^1, c^0, e^1 (fig. 71). La dimension de la variété a^k est désignée par $d(a^k)$.

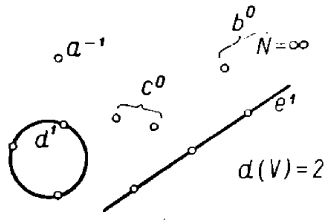


Fig. 71

Toutes les variétés à -2 dimensions étant égales, nous les désignerons souvent par le symbole $\wedge$. Pour la même raison, nous désignerons souvent une variété à n dimensions par le symbole $\vee$, en l'appelant *espace ponctuel*.

DÉFINITION 4.2. Les symboles $a \in b^k$ et $a^k \subset b^l$ employés dans la suite ont leur sens ordinaire et désignent les notions connues de la théorie des ensembles.

DÉFINITION 4.3. La *base* d'une variété a^k est un ensemble ponctuel $(A_1, \ldots, A_s)$ qui vérifie les conditions:

(1) $(A_1, \ldots, A_s)_i$,

(2) Un point B satisfait à la condition $B \in a^k$ si et seulement si B dépend de $(A_1, \ldots, A_s)$ (fig. 71).

Si $(A_1, \ldots, A_s)$ est la base de la variété a^k, on peut aussi dire que *l'ensemble* $(A_1, \ldots, A_s)$ *engendre* a^k, et écrire $a^k(A_1, \ldots, A_s)$.

Remarque. D'après la définition 1.5 l'ensemble vide et chaque ensemble à un élément sont des ensembles d'éléments indépendants.

THÉORÈME 4.01. *L'ensemble* $(A_1, \ldots, A_s)$ *est une base de la variété* a^k *si et seulement si les trois conditions suivantes sont remplies:*

$$(A_1, \ldots, A_s) \subset a^k, \tag{1}$$

$$(A_1, \ldots, A_s)_i, \tag{2}$$

$$s = k+2. \tag{3}$$

Démonstration. 1. Nous démontrerons d'abord que la condition

$$a^k(A_1, \ldots, A_s) \tag{4}$$

implique les conditions (1)-(3).

En effet, la condition (2) résulte directement de la définition 4.3.

Chaque point A_i (où $i = 1, 2, \ldots, s$) dépend de $(A_1, \ldots, A_s)$. Donc, d'après la définition 4.3, chaque $A_i \in a^k$. La condition (1) est donc aussi remplie.

Pour prouver que la condition (3) est remplie, nous distinguerons quatre cas correspondant aux cas particuliers de la définition 4.1:

1.1. $k = -2$. Si s était plus grand que 0, le point A_1, dépendant de la base, appartiendrait à la variété qui est l'ensemble vide, ce qui est impossible. Donc s doit être égal à $0 = k+2$.

1.2. $k = -1$. Il est évident que $s > 0$, car le point appartenant à a^k ne peut être dépendant de l'ensemble vide. D'autre part, si s était plus grand que 1, il y aurait deux points différents A_1 et A_2 appartenant à a^k, ce qui est en désaccord avec la définition 4.1. On en conclut que $s = 1 = k+2$.

1.3. $0 \leqslant k \leqslant n-1$. D'après la définition 4.1 la variété a^k est engendrée par un simplexe β_{k+2}. Selon l'axiome III.2 il existe un simplexe γ_{n+1-k} touchant β_{k+2}.

Si $a \in a^k$, alors $a - \gamma_{n+1-k}$ comme dépendant de β_{k+2}. Inversement: si $a - \gamma_{n+1-k}$, alors, en vertu de l'axiome III.1, a dépend de β_{k+2}, d'où $a \in a^k$.

En particulier, les points $A_1, \ldots, A_s$ doivent toucher γ_{n+1-k}. Il est facile de vérifier que si s était moindre que $k+2$, il existerait un élément a_0 indépendant de $(A_1, \ldots, A_s)$ et touchant γ_{n+1-k}, donc appartenant à a^k. Mais ceci serait en contradiction avec la condition (4). D'autre part, si s était plus grand que $k+2$, nous aurions une contradiction avec l'axiome III.1. Nous voyons donc que $s = k+2$.

1.4. $k = n$. Si s était plus petit que $n+2$ il existerait, en vertu du théorème 3.07, un couple conjugué a_2 touchant $(A_1, \ldots, A_s)$ et alors

tous les points devraient toucher ce couple. Cela conduit à une contradiction.

D'autre part, s ne peut pas surpasser $n+2$, car d'après le théorème 3.12, $n+3$ points quelconques sont dépendants. Nous voyons donc que $s = n+2 = k+2$.

2. Nous démontrerons maintenant que si l'ensemble $(A_1, \ldots, A_s)$ vérifie les conditions (1)-(3), il vérifie aussi la condition (4). Ce théorème est évident dans les cas $k = -2$ et $k = -1$. Il faudra encore considérer les cas 2.1 $0 \leqslant k \leqslant n-1$ et 2.2 $k = n$.

2.1. $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Soit $(A_1, \ldots, A_s)$ un ensemble vérifiant les conditions (1)-(3) et soit β_{k+2} une base de la variété a^k. D'après l'axiome III.2, il existe un simplexe γ_{n+1-k} touchant β_{k+2}. Des conditions (1)-(3) résulte que $A_1, \ldots, A_s$ forment un simplexe touchant γ_{n+1-k} et tel qu'un élément arbitraire a touche γ_{n+1-k} si et seulement s'il dépend de $(A_1, \ldots, A_s)$. Mais, dans 1.3 nous avons démontré que la condition $a - \gamma_{n+1-k}$ est équivalente à la condition $a \epsilon a^k$. On en conclut que $(A_1, \ldots, A_s)$ est bien une base de la variété a^k.

2.2. Si les points $A_1, \ldots, A_s$ vérifient les conditions (1)-(3) et $k = n$, alors, en vertu du théorème 3.12, chaque point dépend de $(A_1, \ldots, A_s)$, les points $A_1, \ldots, A_s$ forment donc une base de la variété V.

Comme conclusion directe du théorème 4.01 on trouve que la dimension de chaque variété est déterminée univoquement, car toutes les bases d'une variété ont le même nombre d'éléments.

La théorème suivant est évident:

THÉORÈME 4.02. *Tout ensemble ponctuel ayant k éléments indépendants (où k est un nombre naturel vérifiant les inégalités $0 \leqslant k \leqslant n+2$) est la base d'une variété à $k-2$ dimensions.*

THÉORÈME 4.03. *Si $a \epsilon a^k$, alors a est un point.*

Démonstration. Pour $k = -2, -1, n$ le théorème résulte directement de la définition 4.1. Pour un autre k, il suffit de mener un couple conjugué touchant la base et de s'appuyer sur le théorème 3.04.

THÉORÈME 4.04. *Entre l'ensemble des couples conjugués et l'ensemble des variétés à $n-1$ dimensions il y a une correspondance biunivoque. Cette correspondance est déterminée par la condition*

$$(*) \qquad a^{n-1} - \alpha_2.$$

En outre, si a^{n-1} correspond à α_2, alors pour chaque élément b les conditions suivantes sont équivalentes: (1) $b \epsilon a^{n-1}$ *et* (2) $b - \alpha_2$.

Démonstration. 1. Nous démontrerons d'abord que si a^{n-1} et α_2 vérifient la condition (*), alors les conditions (1) et (2) sont équivalentes. Dans ce but nous désignerons par β_{n+1} la base de la variété a^{n-1}.

L'hypothèse (*) entraîne le contact $\beta_{n+1} - \alpha_2$. Il est évident qu'un élément quelconque dépend de β_{n+1} si et seulement s'il touche α_2, c'est-à-dire les conditions (1) et (2) sont bien équivalentes.

2. Nous démontrerons maintenant que pour chaque $a^{n-1}(\beta_{n+1})$ il existe un et un seul couple vérifiant la condition (*) et que ce couple est conjugué. Et inversement, pour chaque couple conjugué il existe une et une seule variété à $n-1$ dimensions vérifiant la condition (*).

En effet, le couple unique touchant, en vertu des théorèmes 3.07 et 2.24, le simplexe ponctuel β_{n+1} est le couple cherché. Inversement: pour chaque couple conjugué, l'ensemble de tous les points touchant ce couple forme la variété unique vérifiant la condition (*).

THÉORÈME 4.05. *Pour chaque variété a^k on a l'inclusion $\wedge \subset a^k \subset \vee$.*

Démonstration. La condition $\wedge \subset a^k$ résulte des propriétés de l'ensemble vide. La condition $a^k \subset \vee$ résulte directement du théorème 4.03 et de la définition de $\vee$.

THÉORÈME 4.06. *La condition $a^k \subset b^l$ entraîne l'inégalité $k \leqslant l$.*

Démonstration. Supposons que le théorème ne soit pas vrai, c'est-à-dire que les conditions suivantes soient remplies en même temps:

$$a^k \subset b^l, \tag{1}$$

$$k > l. \tag{2}$$

Désignons par $(A_1, \ldots, A_{l+2}, A_{l+3}, \ldots, A_{k+2})$ la base de la variété a^k. Il est facile de vérifier que l'ensemble $(A_1, \ldots, A_{l+2})$ est une base de la variété b^l, car il satisfait aux conditions (1)-(3) du théorème 4.01.

Le point A_{k+2}, appartenant à a^k, appartient aussi à b^l. Il doit donc dépendre de sa base $(A_1, \ldots, A_{l+2})$. Mais ceci est incompatible avec l'indépendance des points $A_1, \ldots, A_{l+2}, A_{l+3}, \ldots, A_{k+2}$.

THÉORÈME 4.07. *Si deux variétés de même dimension, a^k et b^k, vérifient la condition $a^k \subset b^k$, alors $a^k = b^k$.*

Démonstration. Soit $(A_1, \ldots, A_s)$ une base de la variété a^k. Évidemment cet ensemble vérifie les conditions (1)-(3) du théorème 4.01. On en conclut qu'il vérifie aussi les conditions

$$(A_1, \ldots, A_s) \subset b^k, \tag{1}$$

$$(A_1, \ldots, A_s)_i, \tag{2}$$

$$s = k+2. \tag{3}$$

Donc, en vertu du théorème 4.01 l'ensemble $(A_1, \ldots, A_s)$ engendre aussi la variété b^k, et par conséquent, d'après la définition 4.3, nous voyons que $a^k = b^k$.

DÉFINITION 4.4. Nous appelons *union* de a^k et b^l la plus petite variété contenant les variétés a^k et b^l, et nous la désignons par $a^k \cup b^l$.

Plus précisément: $c^s = a^k \cup b^l$ veut dire que les trois conditions suivantes sont remplies:

(1) $$a^k \subset c^s,$$

(2) $$b^l \subset c^s,$$

(3) si $a^k \subset d^r$ et si $b^l \subset d^r$, alors $c^s \subset d^r$.

La figure 72 montre un exemple d'union de deux variétés.

THÉORÈME 4.08. *Pour deux variétés quelconques a^k et b^l il existe une et une seule variété qui est leur union.*

Si l'on a $a^k(A_1, \ldots, A_{k+2})$ et $b^l(B_1, \ldots, B_{l+2})$, alors la suite $A_1, \ldots, A_{k+2}, B_{i_1}, \ldots, B_{i_m}$, obtenue de la suite $A_1, \ldots, A_{k+2}, B_1, \ldots, B_{l+2}$ en omettant successivement les éléments dépendant des éléments précédents, est la base de l'union (fig. 72).

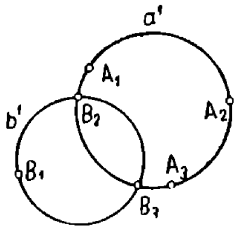


Fig. 72. $n = 3$; $b^1(B_1, B_2, B_3)$, $a^1(A_1, A_2, A_3)$, $b^1 \cup a^1 = c^2 =$ le plan sur lequele sont situés tous les deux couples.

Démonstration. Supposons, en effet, que $A_1, \ldots, A_{k+2}, B_{i_1}, \ldots, B_{i_m}$ forment la base d'une variété c^s. (Nous le prouverons à la fin de cette démonstration.) Les points $A_1, \ldots, A_{k+2}, B_1, \ldots, B_{l+2}$ étant dépendants de $(A_1, \ldots, A_{k+2}, B_{i_1}, \ldots, B_{i_m})$, les ensembles $(A_1, \ldots, A_{k+2})$ et $(B_1, \ldots, B_{l+2})$ sont contenus dans c^s. On en conclut que les variétés $a^k(A_1, \ldots, A_{k+2})$ et $b^l(B_1, \ldots, B_{l+2})$ vérifient les conditions $a^k \subset c^s$ et $b^l \subset c^s$. D'autre part, chaque variété d^r, contenant a^k et b^l, contient les points $A_1, \ldots, A_{k+2}, B_{i_1}, \ldots, B_{i_m}$, elle contient donc aussi la variété c^s. Par conséquent, la variété c^s est l'union des variétés a^k et b^l.

Pour prouver que c^s est la seule variété vérifiant les conditions de la définition 4.4, il suffit de remarquer que s'il existait deux unions, c^s et d^r, elles devraient satisfaire aux conditions $c^s \subset d^r$ et $d^r \subset c^s$, et alors elles devraient être égales.

Pour compléter notre démonstration il faut encore démontrer que l'ensemble $(A_1, \ldots, A_{k+2}, B_{i_1}, \ldots, B_{i_m})$ forme bien une base. Selon le théorème 4.02, il suffit, dans ce but, de prouver que les points $A_1, \ldots, A_{k+2}, B_{i_1}, \ldots, B_{i_m}$ sont indépendants et que leur nombre ne surpasse pas $n+2$.

Nous démontrerons l'indépendance par induction par rapport au nombre m.

1° Pour $m = 0$ il est évident que les points $A_1, \ldots, A_{k+2}$ sont indépendants.

2° Admettons maintenant que les points $A_1, \ldots, A_{k+2}, B_{i_1}, \ldots, B_{i_r}$ (où $0 \leqslant r < m \leqslant n-k$) soient indépendants. Si les points $A_1, \ldots, A_{k+2}$,

$B_{i_1}, \ldots, B_{i_r}, B_{i_{r+1}}$ étaient dépendants, alors, selon le théorème 3.07, il existerait un couple les touchant. Il en résulterait, d'après le théorème 2.26, que le point $B_{i_{r+1}}$ dépend de $(A_1, \ldots, A_{k+2}, B_{i_1}, \ldots, B_{i_r})$ contrairement à la définition de la suite $A_1, \ldots, A_{k+2}, B_{i_1}, \ldots, B_{i_m}$. Nous voyons donc que la condition $(A_1, \ldots, A_{k+2}, B_{i_1}, \ldots, B_{i_r})_i$ entraîne la condition $(A_1, \ldots, A_{k+2}, B_{i_1}, \ldots, B_{i_r}, B_{i_{r+1}})_i$ pour r vérifiant les inégalités $0 \leqslant r < m \leqslant n-k$.

3° La preuve par induction doit être terminée pour $r = n-k$, car dans ce cas le nombre des éléments indépendants dans la suite $A_1, \ldots, A_{k+2}, B_{i_1}, \ldots, B_{i_r}$ est égal à $n+2$, donc, en vertu du théorème 3.12, chaque point B_i dépend de l'ensemble $(A_1, \ldots, A_{k+2}, B_{i_1}, \ldots, B_{i_r})$.

Nous avons donc démontré que les conditions suivantes sont remplies:

$$(A_1, \ldots, A_{k+2}, B_{i_1}, \ldots, B_{i_m})_i, \tag{1}$$

$$0 \leqslant k+2+m \leqslant n+2. \tag{2}$$

D'après le théorème 4.02, $(A_1, \ldots, A_{k+2}, B_{i_1}, \ldots, B_{i_m})$ est donc bien une base.

DÉFINITION 4.5. Nous appellerons *intersection* de a^k et b^l la plus grande variété contenue dans les variétés a^k et b^l, et nous la désignerons par $a^k \frown b^l$.

Plus précisément: $c^s = a^k \frown b^l$ veut dire que les trois conditions suivantes sont remplies:

(1) $c^s \subset a^k$,

(2) $c^s \subset b^l$,

(3) Si $d^r \subset a_k$ et si $d^r \subset b^l$, alors $d^r \subset c^s$.

La figure 73 montre un exemple d'intersection de variétés.

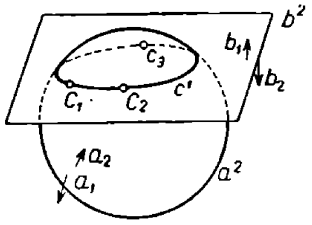


Fig. 73. $n = 3$, $c^1(C_1, C_2, c_3) = a^2 \frown b^2$

THÉORÈME 4.09. *Pour deux variétés quelconques il existe une et une seule variété qui est leur intersection.*

Démonstration. En écartant les cas évidents, nous pouvons considérer deux variétés a^k et b^l vérifiant les conditions suivantes:

(1) $0 \leqslant k \leqslant l \leqslant n-1$,

(2) il y a deux points différents C_1 et C_2 appartenant aux variétés a^k et b^l (fig. 73).

On en conclut, selon la définition 4.1, que les variétés a^k et b^l sont engendrées respectivement par les simplexes α_{k+2} et β_{l+2}. En vertu de

l'axiome III.2 il existe des simplexes $(a_1, \ldots, a_{n+1-k})$ et $(b_1, \ldots, b_{n+1-l})$ vérifiant les conditions

$$(3) \qquad (a_1, \ldots, a_{n+1-k}) - \alpha_{k+2} \quad \text{et} \quad (b_1, \ldots, b_{n+1-l}) - \beta_{l+2}.$$

Nous extrayons maintenant de la suite $a_1, \ldots, a_{n+1-k}, b_1, \ldots, b_{n+1-l}$ la suite $a_1, \ldots, a_{n+1-k}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_m}$ obtenue en rejetant les éléments dépendant des précédents ([29]).

Les points C_1 et C_2, dépendant de α_{k+2} et β_{l+2}, touchent $(a_1, \ldots, a_{n+1-k})$ et $(b_1, \ldots, b_{n+1-l})$ et, par suite, ils vérifient la condition

$$(4) \qquad (C_1, C_2) - (a_1, \ldots, a_{n+1-k}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_m}).$$

En appliquant m fois le théorème 2.26, nous démontrerons que les éléments $a_1, \ldots, a_{n+1-k}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_m}$ sont indépendants, et qu'ils forment ainsi un simplexe. On peut maintenant compléter le simplexe (C_1, C_2) de façon à obtenir un simplexe $(C_1, C_2, c_3, \ldots, c_{k-m+2})$ touchant $(a_1, \ldots, a_{n+1-k}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_m})$.

Si un élément quelconque d dépend de $(C_1, C_2, c_3, \ldots, c_{k-m+2})$, alors il touche $(a_1, \ldots, a_{n+1-k}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_m})$. Cela entraîne que $d - (a_1, \ldots, a_{n+1-k})$ et que $d - (b_1, \ldots, b_{n+1-l})$, d'où $d \in a^k$ et $d \in b^l$. On en conclut en particulier que $c_3, \ldots, c_{k-m+2}$ sont des points et que le simplexe $(C_1, C_2, c_3, \ldots, c_{k-m+2})$ engendre une variété c^{k-m} contenue dans les variétés a^k et b^l. D'autre part, chaque point qui appartient en même temps à a^k et à b^l, touchant $(a_1, \ldots, a_{n+1-k}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_m})$, dépend de $(C_1, C_2, c_3, \ldots, c_{k-m+2})$, il appartient donc aussi à c^{k-m}.

Nous voyons donc que c^{k-m} est l'intersection des variétés a^k et b^l. Le fait qu'elle est l'intersection unique résulte directement de la définition 4.5. (De même que l'union dans le théorème précédent.)

THÉORÈME 4.10. *L'ensemble des variétés forme un treillis.*

Démonstration. Nous nous baserons sur la définition suivante d'un treillis: un *treillis* est un ensemble partiellement ordonné dans lequel deux éléments quelconques ont une union et une intersection ([30]).

Il est évident que le relation $\subset$ met en ordre partiel l'ensemble de toutes les variétés. L'existence de l'union et de l'intersection pour deux éléments quelconques a été démontrée dans les théorèmes 4.08 et 4.09.

Nous allons maintenant considérer quelques propriétés de ce treillis ([31]).

([29]) Comparer la manière dont on a formé la suite choisie dans le théorème 4.08.

([30]) Comparer la définition d'un treillis dans [8], p. 173, [1], p. 16, et [3], p. 24, 20 et 3.

([31]) Mathematical Reviews signale que les propriétés d'un tel treillis ont été décrites (sans démonstration) par Schin-ichi Izumi [5].

THÉORÈME 4.11. *Si deux variétés a^k et b^l ont deux points différents communs* (fig. 74), *alors on a*

$$d(a^k \cup b^l) + d(a^k \cap b^l) = d(a^k) + d(b^l). \tag{1}$$

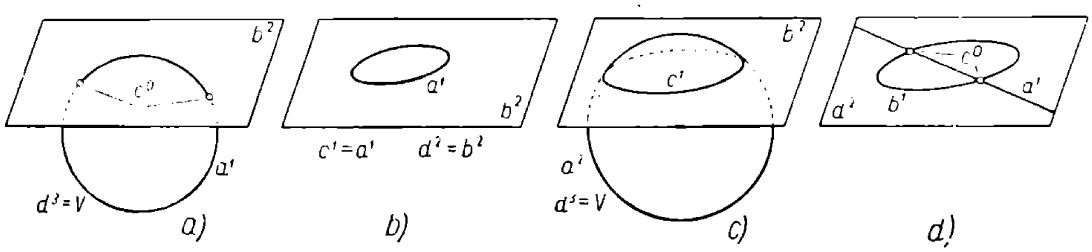


Fig. 74. $n = 3$; a) $0+3 = 1+2$, b) $1+2 = 1+2$, c) $1+3 = 2+2$, d) $0+2 = 1+1$

Démonstration. Soient $a^k(A_1, \ldots, A_{k+2})$, $b^l(B_1, \ldots, B_{l+2})$, $c^m(C_1, \ldots, C_{m+2})$ et $d^p(D_1, \ldots, D_{p+2})$ quatre variétés vérifiant les conditions

$$(E_1, E_2) \subset a^k, \quad (E_1, E_2) \subset b^l, \tag{2}$$

$$c^m = a^k \cap b^l, \tag{3}$$

$$d^p = a^k \cup b^l. \tag{4}$$

En écartant les cas évidents nous pouvons admettre que k et l vérifient les conditions

$$0 \leqslant k \leqslant n-1, \quad 0 \leqslant l \leqslant n-1. \tag{5}$$

On en conclut que $(A_1, \ldots, A_{k+2})$ et $(B_1, \ldots, B_{l+2})$ sont des simplexes. La condition (2) implique que $(C_1, \ldots, C_{m+2})$ est aussi un simplexe. Nous désignerons ces trois simplexes respectivement par α_{k+2}, β_{l+2} et γ_{m+2}. D'après l'axiome III.2 il existe des simplexes $\bar{\alpha}_{n+1-k}$ et $\bar{\beta}_{n+1-l}$, vérifiant les conditions

$$\alpha_{k+2} - \bar{\alpha}_{n+1-k} \quad \text{et} \quad \beta_{l+2} - \bar{\beta}_{n+1-l}. \tag{6}$$

De la définition 4.5 résulte que $c^m \subset a^k$ et que $c^m \subset b^l$, d'où l'on a $\gamma_{m+2} - \bar{\alpha}_{n+1-k}$ et $\gamma_{m+2} - \bar{\beta}_{n+1-l}$. D'après l'axiome III.2, on peut compléter le simplexe γ_{m+2} de façon à obtenir $\gamma'_{k+2} = (C_1, \ldots, C_{m+2}, c'_1, \ldots, c'_{k-m})$ touchant $\bar{\alpha}_{n+1-k}$ et encore une fois — pour obtenir $\gamma''_{l+2} = (C_1, \ldots, C_{m+2}, c''_1, \ldots, c''_{l-m})$ touchant $\bar{\beta}_{n+1-l}$. Le simplexe γ'_{k+2}, touchant $\bar{\alpha}_{n+1-k}$, est contenu dans a^k, donc, en vertu du théorème 4.01,

il est une base de la variété a^k. Un raisonnement pareil montre que γ''_{l+2} est une base de le variété b^l (fig. 75 et 76).

Pour obtenir une base de la variété d^p il faut, d'après le théorème 4.08, former une suite extraite des bases γ'_{k+2} et γ''_{l+2}. Il est évident que les

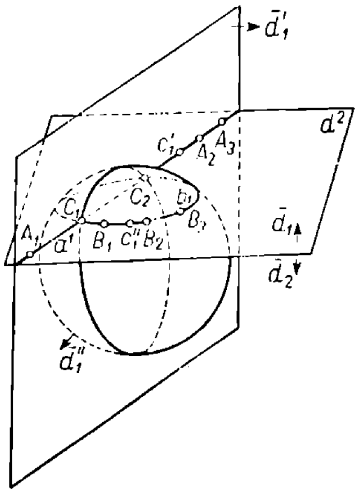


Fig. 75.
$n = 3$; $a^1(A_1, A_2, A_3)$; $b^1(B_1, B_2, B_3)$; $c^0 = a^1 \cap b^1$; $c^0(C_1, C_2)$; $a^1(C_1, C_2, c'_1)$; $b^1(C_1, C_2, c''_1)$; $d^p(C_1, C_2, c'_1, c''_1)$ et alors $p \leqslant 2 = 1+1-0$. $d_2 - (\bar{d}_1, \bar{d}_2)$; $a^1 - (\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}'_1)$; $b^1 - (\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}''_1)$; $c^m - (\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}'_1, \bar{d}''_1)$ et alors $m+2+4 \leqslant n+3 = 6$ d'où $m \geqslant 0 = 1+1-2$.

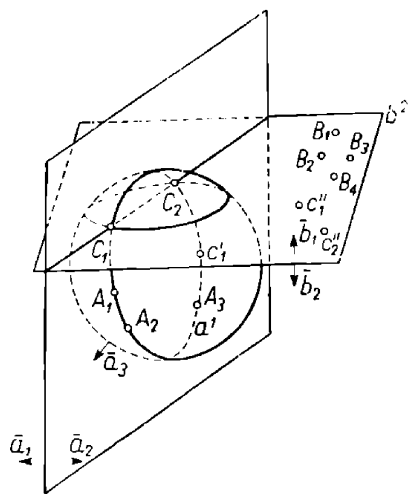


Fig. 76.
$n = 3$; $a^1(A_1, A_2, A_3)$; $b^1(B_1, B_2, B_3, B_4)$; $c^0 = a^1 \cap b^2$; $c^0(C_1, C_2)$; $a^1(C_1, C_2, c'_1)$; $b^2(C_1, C''_2, c''_1, c''_2)$; $d^p(C_1, C_2, c'_1, c''_1, c''_2)$; et alors $p \leqslant 3 = 1+2-0$; $a^1 - (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3;)$ $b^2 - (\bar{b}_1, \bar{b}_2)$; $c^m - (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{b}_1)$ et alors $m+2+4 \geqslant n+3 = 6$, d'où $m \geqslant 0 = 1-2+3$

éléments $C_1, \ldots, C_{m+2}$ du simplexe γ''_{l+2} sont à rejeter, comme dépendant de γ'_{k+2}, le nombre des éléments de la suite choisie ne surpasse donc pas le nombre $(m+2)+(k-m)+(l-m)$. Ainsi on a

$$p+m \leqslant k+l. \tag{7}$$

Nous prouverons maintenant que l'inégalité contraire est aussi remplie. Dans ce but nous distinguerons les deux cas suivants: 1. $p \leqslant n-1$ et 2. $p = n$.

1. Dans le cas où $p \leqslant n-1$, la base de la variété d^p est un simplexe: δ_{p+2}. Le simplexe $\bar{\delta}_{n+1-p}$, touchant δ_{p+2}, touche aussi les simplexes α_{k+2} et β_{l+2}. En répétant avec le simplexe $\bar{\delta}_{n+1-p}$ le même procédé qu'avec le simplexe γ_{m+2}, nous pouvons le compléter: une fois — jusqu'au simplexe $\bar{\delta}'_{n+1-k}$ touchant α_{k+2}, et une seconde fois — jusqu'au simplexe $\bar{\delta}''_{n+1-l}$ touchant β_{l+2}. Avec les éléments des simplexes $\bar{\delta}'_{n+1-k}$ et $\bar{\delta}''_{n+1-l}$, nous formons maintenant une suite extraite, en rejetant les éléments dépendant des éléments précédents. On doit rejeter dans cette suite les $n+1-p$ éléments du simplexe $\bar{\delta}_{n+1-p}$ qui y entrent une seconde fois.

Donc le nombre des éléments de cette suite ne surpasse pas le nombre $(n+1-p)+(p-k)+(p-l)$. D'autre part, cette suite détermine, en vertu de la démonstration du théorème 4.09 la base de la variété c^m, comme simplexe qui la touche. Par conséquent, le nombre de ses éléments est égal à $(n+3)-(m+2)$. Nous avons donc l'inégalité $(n+3)-(m+2) \leqslant (n+1-p)+(p-k)+(p-l)$, d'où

$$p+m \geqslant k+l. \tag{8}$$

2. Supposons $p = n$ (fig. 76). D'après le théorème 3.07, il existe un couple conjugué $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ touchant le simplexe a_{k+2}. Nous pouvons compléter ce couple de façon à obtenir un simplexe $\bar{a}_{n+1-k}$ touchant a_{k+2}. De la même façon on peut construire un simplexe $\bar{\beta}_{n+1-l}$ touchant β_{l+2} et contenant un couple conjugué $(\bar{b}_1, \bar{b}_2)$. En formant une suite extraite des simplexes $\bar{a}_{n+1-k}$ et $\bar{\beta}_{n+1-l}$, de la même façon que dans le cas 1, nous en rejetons l'élément $\bar{b}_2$, comme dépendant de $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1)$. Alors le nombre des éléments de cette suite ne surpasse pas $(n+1-k)+(n+1-l)-1$. Ce nombre étant égal à $n+1-m$, comme nous l'avons vu dans le cas 1, nous avons l'inégalité $(n+1-m) \leqslant (n+1-k)+(n+1-l)-1$, d'où nous obtenons (8).

L'égalité (1) résulte directement des inégalités (7) et (8).

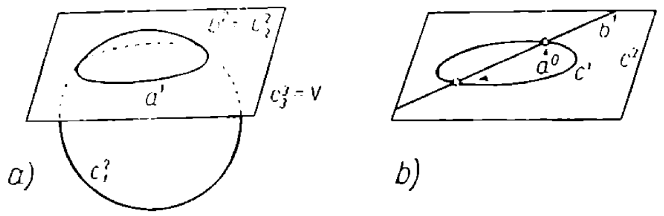


Fig. 77. $n = 3$; a) $c_1^2 \cap b^2 = a^1$, $c_2^2 \cap b^2 = b^2$, $c_3^3 \cap b^2 = b^2$; b) $c^1 \cap b^1 = a^0$, $c^2 \cap b^1 = b^1$

THÉORÈME 4.12. *Pour trois variétés a^k, b^{k+1} et c^l les conditions:* (1) $a^k \subset b^{k+1}$ *et* (2) $a^k \subset c^l$, *impliquent ou bien* (3) $b^{k+1} \cap c^l = a^k$, *ou bien* (4) $b^{k+1} \cap c^l = b^{k+1}$ (fig. 77).

Démonstration. Des propriétés des treillis il résulte que $a^k \subset b^{k+1} \cap c^l$ et $b^{k+1} \cap c^l \subset b^{k+1}$. Donc, en vertu du théorème 4.06, nous avons l'inégalité $k \leqslant d(b^{k+1} \cap c^l) \leqslant k+1$. Pour démontrer notre théorème il suffit maintenant de s'appuyer sur le théorème 4.07.

THÉORÈME 4.13. *Pour $k+2$ points $A_1, \ldots, A_{k+2}$ (où k est un nombre entier vérifiant les inégalités $0 \leqslant k \leqslant n-1$), il existe un simplexe ponctuel β_{k+2} tel que tous les points A_i dépendent de β_{k+2}.*

Démonstration. Selon le théorème 3.07, il existe un couple conjugué a_2 touchant $(A_1, \ldots, A_{k+2})$. La suite $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$, obtenue de la

suite $A_1, \ldots, A_{k+2}$ en rejetant successivement les éléments dépendant des éléments qui les précèdent, est évidemment un ensemble de points indépendants. Si $m < k+2$ on peut, en vertu de l'axiome III.2, compléter cet ensemble de façon à obtenir le simplexe à $k+2$ éléments touchant α_2. Ce simplexe étant ponctuel, il vérifie notre théorème.

THÉORÈME 4.14. *Si $-1 \leqslant k \leqslant n$, alors pour qu'il existe une variété a^k contenant les points $A_1, \ldots, A_{k+3}$, il faut et il suffit que ces points soient dépendants.*

Démonstration. 1. Nous démontrerons d'abord que la condition

(1) $$(A_1, \ldots, A_{k+3})_d$$

entraîne la condition

(2) il existe une variété a^k contenant $A_1, \ldots, A_{k+3}$.

En effet, la condition (1) implique que parmi ces points il en y a un, par exemple A_{k+3}, dépendant des autres. Par les points $A_1, \ldots, A_{k+2}$ on peut mener une variété quel que soit le nombre k vérifiant l'hypothèse de notre théorème.

En effet, pour $k = -1$ l'ensemble $(A_1, \ldots, A_{k+2})$ ne contient qu'un point A_1, donc il est contenu dans la variété $a^{-1}(A_1)$. Pour k vérifiant les inégalités $0 \leqslant k \leqslant n-1$ l'existence d'une variété a^k contenant les points $A_1, \ldots, A_{k+2}$ résulte du théorème 4.13. Enfin, pour $k = n$ l'inclusion $(A_1, \ldots, A_{k+2}) \subset a^n = \vee$ résulte de la définition 4.1,4. Le point A_{k+3} étant dépendant de $(A_1, \ldots, A_{k+2})$ appartient aussi à la variété a^k.

2. Nous démontrerons maintenant que la condition (2) implique la condition (1). Supposons, au contraire, qu'il existe des points $A_1, \ldots, A_{k+3}$ vérifiant la condition (2) et en même temps la condition

(3) $$(A_1, \ldots, A_{k+3})_i.$$

Donc, d'après le théorème 2.02, $(A_1, \ldots, A_{k+2})_i$ et par suite, en vertu du théorème 4.01, les points $A_1, \ldots, A_{k+2}$ forment une base de la variété a^k. On en conclut que le point A_{k+3}, appartenant à a^k, dépend de $(A_1, \ldots, A_{k+2})$ contrairement à l'hypothèse (3). Ainsi la condition (2) entraîne la condition (1).

DÉFINITION 4.6. Le nombre naturel k vérifiant les inégalités $0 \leqslant k \leqslant n-1$, nous appelons la variété a^k:

1. *plan à k dimensions* si et seulement si $N \in a^k$,

2. *surface sphérique à k dimensions* si et seulement si N n'appartient pas à a^k.

Les plans à une dimension seront aussi appelés *droites* et les surfaces sphériques à une dimension — *cercles* ou *circonférences* (fig. 78).

Remarque. Cette définition détermine non seulement les notions de plan et de surface sphérique à une, deux, ..., $n-1$ dimensions, mais aussi celles de plan à 0 dimensions et de surface sphérique à 0 dimensions. Ce sont des couples de points, dont l'un est à l'infini dans le cas d'un plan à 0 dimensions, et tous les deux sont à distance finie — dans le cas d'une surface sphérique (à 0 dimensions).

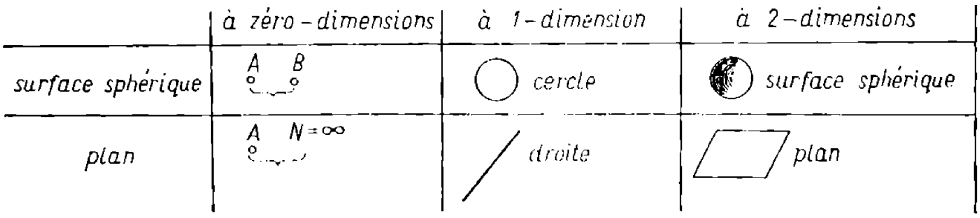


Fig. 78

En nous servant des notions introduites ici, nous pouvons démontrer tous les axiomes d'incidence de la géométrie affine à n dimensions (voir [6], p. 281-282). Ce seront les théorèmes 4.15-4.20.

THÉORÈME 4.15. *k étant un nombre naturel vérifiant les inégalités $1 \leqslant k \leqslant n-1$, il existe $k+2$ points à distance finie qui ne sont situés dans aucun plan à k dimensions.*

Démonstration. Le couple $\varkappa_2$ étant une hypersphère, il existe un simplexe ponctuel $A_1, \ldots, A_{n+1}$ touchant ce couple. Le point N ne touchant pas $\varkappa_2$, nous voyons, en vertu du théorème 3.09, que les points N, $A_1, \ldots, A_{k+2}$ (où $k \leqslant n-1$) sont indépendants, donc, d'après le théorème 4.14, il n'existe aucune variété a^k qui les contienne.

THÉORÈME 4.16. *Le nombre naturel k vérifiant les inégalités $1 \leqslant k \leqslant n-1$, dans chaque plan à k dimensions il existe $k+1$ points différents à distance finie.*

Démonstration. D'après la définition 4.1, il existe une base du plan a^k, et cette base contient $k+2$ points indépendants, donc différents. Même si l'un des ces points est à l'infini, il existe encore $k+1$ points vérifiant notre théorème.

THÉORÈME 4.17. *Le nombre k vérifiant les inégalités $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on peut mener par $k+1$ points quelconques à distance finie un plan à k dimensions.*

Démonstration. En vertu du théorème 4.13 il existe un simplexe ponctuel a_{k+2} tel que les points $N, A_1, \ldots, A_{k+1}$ dépendent de lui. La variété engendrée par ce simplexe vérifie notre théorème.

THÉORÈME 4.18. a. *Pour deux points différents à distance finie il n'y a qu'une droite passant par ces points.*

b. *Si $k+1$ points à distance finie: $A_1, \ldots, A_{k+1}$ (où k vérifie les inégalités $2 \leqslant k \leqslant n-1$) ne ont situés dans aucun plan à $k-1$ dimensions, alors il n'y a qu'un plan à k dimensions passant par ces points.*

Démonstration. En vertu du théorème 4.07, si les points N, $A_1, \ldots, A_{k+1}$ (où k vérifie les inégalités $1 \leqslant k \leqslant n-1$) sont indépendants, alors la variété engendrée par ces points est la seule variété qui les contienne. Donc il suffit de démontrer que dans le cas a, et aussi dans le cas b, les points $N, A_1, \ldots, A_{k+1}$ sont indépendants. En effet, dans le cas a les points A_1 et A_2 étant des points différents à distance finie, on a (en vertu des théorèmes 2.05 et 3.03) l'indépendance $(N, A_1, A_2)_i$. Pour prouver l'indépendance $(N, A_1, \ldots, A_{k+1})_i$ dans le cas b, il suffit de s'appuyer sur le théorème 4.14.

THÉORÈME 4.19. *Etant donnés deux plans a^k et b^l (où $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et $1 \leqslant l \leqslant n-1$), s'il existe $k+1$ points à distance finie: $A_1, \ldots, A_{k+1}$ qui ne sont situés dans aucun plan à $k-1$ dimensions, et tels qu'ils vérifient les conditions*

$$(A_1, \ldots, A_{k+1}) \subset a^k, \tag{1}$$

$$(A_1, \ldots, A_{k+1}) \subset b^l, \tag{2}$$

alors on a

$$a^k \subset b^l. \tag{3}$$

Démonstration. D'après le théorème 4.14, les points N, $A_1, \ldots$ $\ldots, A_{k+1}$ sont indépendants, donc, en vertu du théorème 4.02, ils engendrent un plan c^k. Les conditions (1) et (2) entraînent les inclusions $c^k \subset a^k$ et $c^k \subset b^l$. Ainsi, en nous basant sur le théorème 4.07, nous voyons que $c^k = a^k$, et par suite $a^k \subset b^l$.

THÉORÈME 4.20. *Etant donnés deux plans, a^k et b^l (où k et l vérifient les inégalités $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et $1 \leqslant l \leqslant n-1$), si les conditions suivantes sont remplies:*

$$k+l-n = m > 0, \tag{1}$$

(2) *il existe un point à distance finie, C_0, appartenant à a^k et à b^l,*

alors il existe à distance finie encore des points $C_1, \ldots, C_m$ appartenant à a^k et à b^l et tels qu'on ne puisse mener aucun plan à $m-1$ dimensions par les points $C_0, C_1, \ldots, C_m$.

Démonstration. Les deux points différents N et C_0 appartenant aux plans a^k et b^l, nous concluons, en vertu du théorème 4.11, que $k+l-d(a^k \cap b^l) = d(a^k \cup b^l) \leqslant n$. Donc on a l'inégalité $d(a^k \cap b^l) \geqslant k+l-n = m$. D'après le théorème 4.01, les inégalités $n-1 \geqslant k \geqslant d(a^k \cap b^l) \geqslant m > 0$ impliquent que la base de la variété $a^k \cap b^l$ est un simplexe $\delta_s = (D_1, \ldots, D_s)$, où $s \geqslant m+2$. D'après le théorème 2.28,

on en conclut qu'il existe un simplexe ponctuel $(N, C_0, D_{i_1}, \ldots, D_{i_m})$ contenu dans la variété $a^k \frown b^l$. Du théorème 4.14 résulte qu'il n'existe aucun plan à $m-1$ dimensions contenant les points $N, C_0, D_{i_1}, \ldots, D_{i_m}$ et ainsi les points $D_{i_1}, \ldots, D_{i_m}$ satisfont à notre théorème.

Dans ce chapitre nous avons démontré qu'en fixant un système de référence, $(N, \bar{k}, \underline{k})$, on peut définir dans notre théorie les notions de point et de plan vérifiants les axiomes d'incidence de la géométrie affine à n dimensions.

Dans le chapitre suivant nous démontrerons que ces notions satisfont aussi à d'autres axiomes de la géométrie affine.

CHAPITRE 5

AXIOMES D'ORDRE, DE PARALLÉLISME ET DE CONTINUITÉ DE LA GÉOMÉTRIE AFFINE À n DIMENSIONS

Dans ce chapitre nous introduirons les relations de contact, de parallélisme et la relation „situé entre". Ces notions nous permettront de démontrer tous les axiomes de la géométrie affine.

DÉFINITION 5.1. La variété a^k est *tangente* à b^l, si ces variétés vérifient l'une des conditions suivantes:

(1) $a^k \subset b^l$,

(2) $k \leqslant l$, $d(a^k \cap b^l) = -1$ et $d(a^k \cup b^l) = l+1$ (fig. 79 et 80).

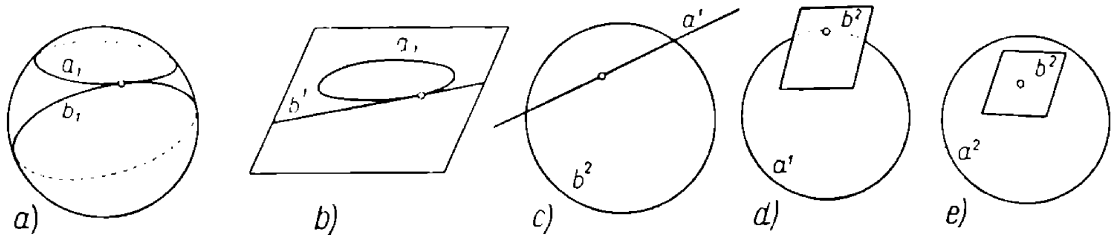


Fig. 79. $n = 3$

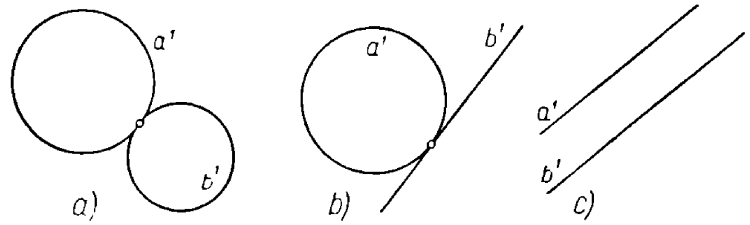


Fig. 80. $n = 2$

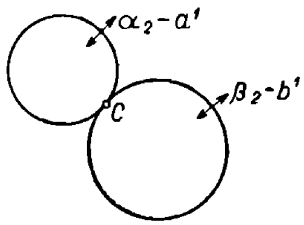


Fig. 81.
$n = 2$; $a^1 \mathrm{s} b^1$, $\alpha_2 \ominus \beta_2$

Nous écrivons dans ce cas a^k s b^l.

Si a^k et b^l sont des plans, alors on peut dire: a^k *est parallèle à* b^l au lieu de dire: a^k est tangent à b^l, et écrire $a^k || b^l$ au lieu de a^k s b^l.

THÉORÈME 5.01. *Si les variétés* a^{n-1} *et* b^{n-1}, *correspondent respectivement aux couples conjugués* α_2 *et* β_2, *alors la condition*

(1) $$\alpha_2 \ominus \beta_2$$

est équivalente à la condition (fig. 81)

(2) $$a^{n-1} \text{ s } b^{n-1}.$$

Démonstration. Supposons que la variété a^{n-1} soit engendrée par le simplexe $\bar{\alpha}_{n+1}$ et b^{n-1} — par le simplexe $\bar{\beta}_{n+1}$. Donc on a les contacts $\alpha_2 - \bar{\alpha}_{n+1}$ et $\beta_2 - \bar{\beta}_{n+1}$.

1. Nous démontrerons d'abord que la condition (1) entraîne la condition (2). En écartant le cas $\alpha_2 = \beta_2$ où l'on a $a^{n-1} = b^{n-1}$, nous pouvons admettre, en vertu du théorème 2.20, qu'il existe un et un seul point C touchant α_2 et β_2. D'après le théorème 4.04, nous voyons que le point C est le point unique appartenant en même temps à a^{n-1} et à b^{n-1}. Donc $a^{n-1} \frown b^{n-1} = c^{-1}(C)$. Puisque les variétés a^{n-1} et b^{n-1} sont différentes, nous concluons, en vertu du théorème 4.07, que $d(a^{n-1} \smile b^{n-1}) > n-1$ d'où résulte que $a^{n-1} \smile b^{n-1} = \mathbb{V} = d^n$. La condition (2) est ainsi remplie.

2. Nous démonterons maintenant que la condition (2) entraîne la condition (1). En admettant (2), nous devrons considérer deux cas possibles. D'après le premier $a^{n-1} \subset b^{n-1}$, donc, en vertu du théorème 4.07, $a^{n-1} = b^{n-1}$, d'où $\alpha_2 = \beta_2$. Dans le second cas on a $a^{n-1} \frown b^{n-1} = c^{-1}$. Les variétés a^{n-1} et b^{n-1} ont alors un et un seul point commun, c'est-à-dire il existe un et un seul élément touchant α_2 et β_2. De là, en nous basant sur les théorèmes 3.06 et 2.29, nous concluons qu'on a $\alpha_2 \ominus \beta_2$.

Le théorème suivant est très facile à démontrer:

THÉORÈME 5.02. *Si a^k s b^l et si l'on n'a pas $a^k \subset b^l$, alors les nombres k et l vérifient les inégalités $0 \leqslant k \leqslant l \leqslant n-1$.*

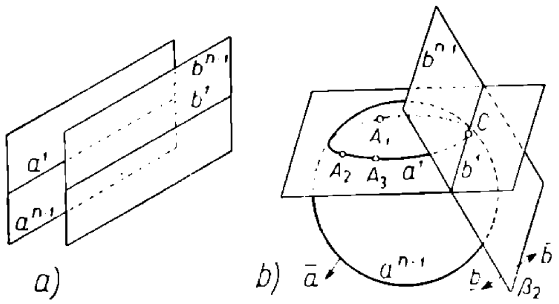


Fig. 82. $n = 3$

Nous démontrerons maintenant le théorème suivant:

THÉORÈME 5.03. *Si les variétés a^k, b^l, b^{n-1} vérifient les conditions:* (1) a^k s b^l *et* (2) $b^l \subset b^{n-1}$, *alors il existe une variété a^{n-1} vérifiant les conditions suivantes:* (3) $a^k \subset a^{n-1}$ *et* (4) a^{n-1} s b^{n-1} (fig. 82).

Démonstration. Pour la démonstration, il faut considérer séparément les deux cas de la définition 5.1:

1. $a^k \subset b^l$. Dans ce cas il suffit d'admettre que $a^{n-1} = b^{n-1}$ et le théorème sera démontré.

2. Soient $a^k \frown b^l = c^{-1}(C)$ et $a^k \smile b^l = d^{l+1}$. On en conclut, en vertu du théorème 5.02, que $0 \leqslant k \leqslant l \leqslant n-1$, et alors nous pouvons admettre que la base de la variété a^k est un simplexe α_{k+2} (fig. 82b). D'après l'axiome III.2 il existe un simplexe α'_{n+1-k} touchant α_{k+2}. En laissant de côté le

cas banal, nous pouvons admettre que la variété a^k n'est pas contenue dans b^{n-1} et alors, en vertu du théorème 4.12, nous obtiendrons

$$d^{l+1} \frown b^{n-1} = b^l. \tag{5}$$

Nous désignerons par $\beta_2 = (\bar{b}, \underline{b})$ le couple correspondant à la variété b^{n-1}. Le point C, appartenant à $b^l \subset b^{n-1}$, touche $\bar{b}$. D'autre part, le point C, appartenant à a^k, dépend de α_{k+2} et par conséquent il touche α'_{n+1-k}.

Nous démontrerons maintenant que le point C est l'élément unique vérifiant les conditions

$$C - \bar{b}, \tag{6}$$

$$C - \alpha'_{n+1-k}. \tag{7}$$

Supposons, au contraire, qu'il existe un élément e différent de C et vérifiant les conditions $e - \bar{b}$ et $e - \alpha'_{n+1-k}$. L'élément e, touchant α'_{n+1-k}, dépend de α_2, donc il est un point. D'après le théorème 3.05 nous avons alors $e - \beta_2$, c'est-à-dire $e \in b^{n-1}$. D'autre part, $e \in a^k \subset d^{l+1}$. On en conclut que $e \in b^{n-1} \frown d^{l+1}$, c'est-à-dire, en vertu de la condition (5), $e \in b^l$. Mais cette dernière condition est incompatible avec l'hypothèse que a^k et b^l n'ont qu'un seul point commun C.

Nous avons donc démontré qu'il existe un et un seul élément C vérifiant les conditions (6) et (7). On en déduit, en vertu du théorème 2.35, l'existence d'un élément $\bar{a}$ touchant $\bar{b}$ et dépendant de α'_{n+1-k}. D'après le théorème 3.01, il existe un couple conjugué $\alpha_2 = (\bar{a}, \underline{a})$ et la variété correspondant à ce couple remplit les conditions (3) et (4).

Nous démontrerons maintenant l'axiome de parallélisme sous la forme suivante:

THÉORÈME 5.04. *Étant donnés un point A à distance finie et une droite b^1, il existe une et une seule droite a^1 passant par A et parallèle à b^1.*

Démonstration[32]. Nous distinguerons deux cas: 1. $A \in b^1$ et 2. A n'appartient pas à b^1.

1. $A \in b^1$. Dans ce cas la droite cherchée a^1 a au moins deux points différents A et N en commun avec b^1. Nous sommes donc dans le premier cas de la définition 5.1: $a^1 \subset b^1$. On en conclut, en vertu du théorème 4.07, que $a^1 = b^1$. Il est facile de vérifier que c'est la seule droite remplissant les conditions de notre théorème.

2. A n'appartient pas à b^1. Désignons par a^0 la variété engendrée par le couple (A, N). Il est évident que $a^0 \, s \, b^1$, car $a^0 \frown b^1 = c^{-1}(N)$ et

[32] Pour $n = 2$ notre théorème résulte directement du théorème 3.11.

$d(a^0 \cup b^1) = 2$. En nous basant sur les axiomes d'incidence de la géométrie affine, nous voyons qu'il existe une variété b^{n-1} contenant b^1 et ne contenant pas le point A. Donc, d'après le théorème 5.03, il existe aussi une variété a^{n-1} vérifiant les conditions

$$(1) \qquad a^0 \subset a^{n-1},$$

$$(2) \qquad a^{n-1} \text{ s } b^{n-1} \qquad \text{(fig. 83).}$$

Soit $a^0 \cup b^1 = d^2$. Le point A appartenant à a^0 (contenu dans a^{n-1}) et, d'autre part, n'appartenant pas à b^{n-1}, nous voyons que a^{n-1} est différent de b^{n-1}. Ainsi la condition (2) entraîne, en vertu de la définition 5.1, la condition $d(a^{n-1} \cap b^{n-1}) = -1$. On en conclut que d^2 n'est pas contenu dans a^{n-1}, et alors $d(d^2 \cap a^{n-1}) < 2$. D'autre part, on a $n \geqslant d(d^2 \cup a^{n-1}) = 2 + n - 1 - d(d^2 \cap a^{n-1})$, d'où $d(d^2 \cap a^{n-1}) \geqslant 1$. On a donc l'égalité $d(d^2 \cap a^{n-1}) = 1$.

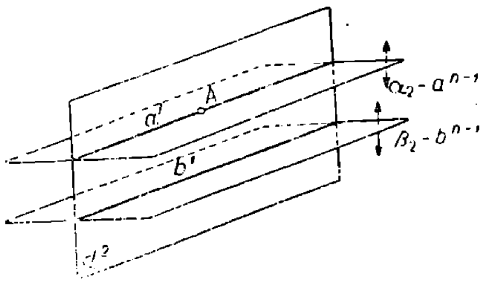


Fig. 83. $n = 3$

Il est facile de vérifier que la droite $a^1 = d^2 \cap a^{n-1}$ remplit les conditions de notre théorème. En effet, on a $e^{-1}(N) \subset a^1 \cap b^1 \subset a^{n-1} \cap b^{n-1} = e^{-1}(N)$, d'où $a^1 \cap b^1 = e^{-1}(N)$ et d'autre part, $d^2 = a^0 \cup b^1 \subset a^1 \cup b^1 \subset d^2$ entraîne $a^1 \cup b^1 = d^2$. Les conditions de la définition 5.1 sont donc remplies.

Il faut encore démontrer que a^1 est la variété unique satisfaisant aux conditions de notre théorème. Supposons, au contraire, qu'il existe une autre droite e^1 passant par le point A et parallèle à b^1. Donc on peut, en vertu du théorème 5.03, mener un plan e^{n-1} contenant e^1 et parallèle à b^{n-1}. En désignant respectivement par α_2, par β_2 et par ε_2 les hyperplans correspondant, en vertu du théorème 4.04, aux plans a^{n-1}, b^{n-1} et e^{n-1}, nous verrons que, d'après le théorème 5.01, $\alpha_2 \ominus \beta_2$ et $\varepsilon_2 \ominus \beta_2$. On en conclut, en vertu du théorème 3.11 et en tenant compte des contacts $A - \alpha_2$, $A - \varepsilon_2$ et de $A \neq \beta_2$, que $\alpha_2 = \varepsilon_2$, donc $a^{n-1} = e^{n-1}$. Les conditions $a^0 = (A, N) \subset e^1$ et $d^2 = a^0 \cup b^1$ entraînent $d^2 \subset e^1 \cup b^1$. En tenant compte de l'égalité $d(e^1 \cup b^1) = 2$, nous avons donc, en vertu du théorème 4.07, la condition $d^2 = e^1 \cup b^1$. Les inclusions $e^1 \subset e^{n-1} = a^{n-1}$ et $e^1 \subset d^2$ entraînent alors l'inclusion $e^1 \subset d^2 \cap a^{n-1} = a^1$, d'où l'on obtient, d'après le théorème 4.07, l'égalité $e^1 = a^1$.

Nous introduirons maintenant la relation „situé entre". Elle nous permettra d'énoncer et de démontrer les axiomes hilbertiens d'ordre: théorèmes 5.05-5.08 (voir [4], p. 4-5).

DÉFINITION 5.2. Nous dirons que *le point B est situé entre les points A et C*, et nous écrirons $A|B|C$, si et seulement si A, B, C sont des points à distance finie vérifiant la condition $(A, C)|(B, N)$ (fig. 84).

THÉORÈME 5.05. *Si $A|B|C$, alors*

(1) *A, B, C sont trois points différents à distance finie,*

(2) *A, B, C sont situés sur une droite,*

(3) *$C|B|A$.*

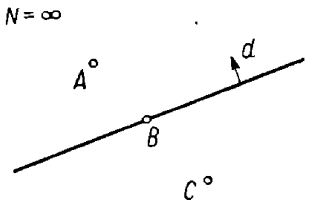
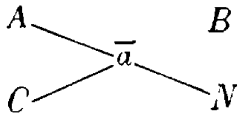


Fig. 84. $n = 2$; $\delta(A, C, \bar{d}) = +1$, $A|B|C$

Démonstration. Les conditions (1) et (3) résultent directement des définitions 5.2 et 1.8.

Pour prouver la condition (2) remarquons qu'en vertu du théorème 3.07, il existe un couple conjugué $(\bar{a}, \underline{a})$ touchant. Nous avons donc les contacts



Il en résulte, en vertu de l'axiome II.1, l'existence d'un élément b touchant $(\bar{a}, B, N)$. En tenant compte de la condition $(A, C)|(B, N)$, nous en concluons que l'élément b est égal à $\bar{a}$, d'où résulte qu'il touche les points A, B, C, N ([33]). Les couples (A, C) et (B, N) vérifiant les hypothèses du théorème 2.23, ils sont liés, donc le point C dépend des points A, B, N, c'est-à-dire il est situé sur la droite $a^1(A, B, N)$.

THÉORÈME 5.06. *Pour deux points différents quelconques A et B il existe un point C vérifiant la condition $A|B|C$.*

Démonstration. Le théorème résulte directement du théorème 2.37.

THÉORÈME 5.07. *Si $A|B|C$, alors on n'a ni $B|C|A$, ni $C|A|B$.*

Démonstration. Le théorème résulte directement du théorème 2.33.

En définissant maintenant les notions de segment, de ses extrémités et de son intérieur, comme le fait Hilbert (voir [4], p. 5), nous pourrons énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 5.08. (Axiome de Pasch). *Étant donnés trois points à distance finie, A_1, A_2, A_3 qui ne sont situés sur aucune droite, et étant donnée une droite b^1 située dans le plan déterminé par les points A_1, A_2, A_3 et ne passant par aucun des points A_1, A_2, A_3, si la droite b^1 coupe le segment A_1A_2, alors elle coupe ou bien le segment A_1A_3, ou bien le segment A_2A_3.*

([33]) Dans le cas $n \geqslant 3$, l'existence de l'élément touchant les points A, B, C, N résulte directement du théorème 3.07.

Démonstration[31]. Admettons qu'on ait $A_1 \epsilon a^2$, $A_2 \epsilon a^2$, $A_3 \epsilon a^2$, $b^1 \subset a^2$, $B \epsilon b^1$, $A_1|B|A_2$, mais que A_i ne soient pas situés sur b^1 et qu'il n'y ait aucune droite contenant en même temps les points A_1, A_2 et A_3. Il s'agit donc de démontrer que ou bien il existe un point C vérifiant les conditions $C \epsilon b^1$ et $A_2|C|A_3$, ou bien il existe un point D vérifiant les conditions $D \epsilon b^1$ et $A_2|D|A_3$. Remarquons d'abord qu'il existe un plan b^{n-1} contenant la droite b^1, mais ne contenant pas le plan a^2 (fig. 85). Il est évident que le point B est situé sur b^{n-1}, et les points A_i ne le sont pas. En désignant par $\beta_2 = (\bar{b}, \underline{b})$ l'hyperplan correspondant à b^{n-1}, nous aurons le contact $B - (\bar{b}, \underline{b})$. Donc, en vertu de l'hypothèse $A_1|B|A_2$, c'est-à-dire $(A_1, A_2)|(B, N)$, nous en concluons que $\delta(A_1, A_2, \bar{b}) = +1$. (A_1, A_2, A_3) étant un simplexe, nous voyons en vertu de l'axiome II.3, que $(A_1, A_3, \bar{b})$ ou bien $(A_2, A_3, \bar{b})$ n'est pas un simplexe. Admettons que $(A_1, A_3, \bar{b})$ ne le soit pas. On en conclut, d'après l'axiome II.1, en tenant compte de la condition $(A_1, A_3, \bar{b})_{\neq}$, qu'on a

(1) $\delta(A_1, A_3, \bar{b}) = +1$.

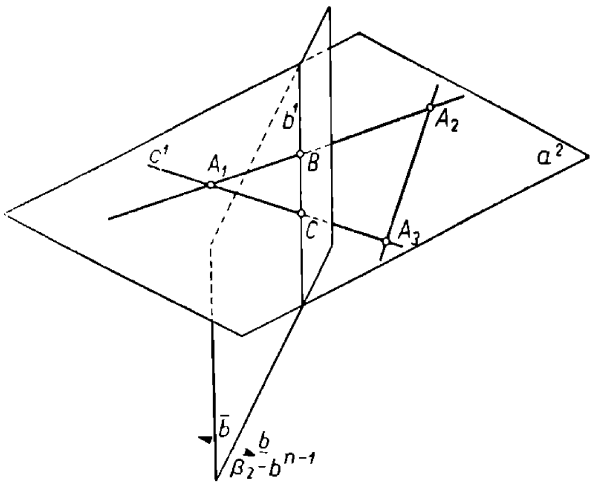


Fig. 85. $n = 3$; $\delta(A_1, A_3, \bar{b}) = +1$

Menons maintenant la droite $c^1(A_1, A_3, N)$, et distinguons deux cas possibles: 1. c^1 s b^{n-1} et 2. c^1 et b^{n-1} ont, outre N, encore un point commun C.

1. c^1 s b^{n-1} mène à une contradiction, car il existe dans ce cas (d'après le théorème 5.03) un hyperplan $(\bar{c}, \underline{c}) - c^{n-1}$ vérifiant les conditions: $c^1 \subset c^{n-1}$ et b^{n-1} s c^{n-1}. De là il résulte que ou bien l'élément $\bar{c}$, ou bien $\underline{c}$ touche $(A_1, A_3, \bar{b})$, contrairement à la condition (1).

2. Admettons donc qu'il existe un point C différent de N et appartenant à c^1 et b^{n-1}. Les points C, A_1, A_3, N étant situés sur une droite c^1, ils sont liés. On en conclut, en tenant compte de la condition (1) et du contact $\bar{b} - (N, C)$, que ces points vérifient, d'après le théorème 2.36, la condition $(A_1, A_3)|(C, N)$, c'est-à-dire $A_1|C|A_3$. D'autre part, le point C, vérifiant les inclusions $C \epsilon c^1 \subset a^2$ et $C \epsilon b^{n-1}$, appartient à la variété $a^2 \frown b^{n-1}$. Il faut encore démontrer que la variété $a^2 \frown b^{n-1}$ est identique à la droite b^1. En effet, il en est ainsi, puisqu'on a les conditions suivantes: $b^1 \subset a^2$, $b^1 \subset b^{n-1}$ et a^2 n'appartient pas à b^{n-1}, d'où résulte, en

[34] Dans le cas $n = 2$ la démonstration se simplifie, mais son idée reste la même.

vertu du théorème 4.12, l'égalité $a^2 \frown b^{n-1} = b^1$. Nous avons donc démontré que le point C satisfait aux conditions demandées.

Maintenant nous allons prouver encore un axiome de la géométrie affine: l'axiome de continuité, sous la forme suivante:

THÉORÈME 5.09 (Théorème de Dedekind). *Si tous les points intérieurs d'un segment A_0B_0 sont partagés en deux ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, vérifiant les conditions:*

(1) *si $A_0|C|B_0$, alors ou bien $C \in \mathcal{A}$, ou bien $C \in \mathcal{B}$,*

(2) *les ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ne sont pas vides,*

(3) *les ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont disjoints,*

(4) *si $A \in \mathcal{A}$ et si $B \in \mathcal{B}$, on a $A_0|A|B$,*

alors il existe un et un seul point C_0 tel que

1° *la condition $A_0|P|C_0$ entraîne $P \in \mathcal{A}$ et*

2° *la condition $C_0|Q|B_0$ entraîne $Q \in \mathcal{B}$* (fig. 86).

Démonstration. Si $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$, alors, en vertu de la condition (1), $(A_0, B)|(A, N)$. La condition (2) implique l'existence des points $A_1 \in \mathcal{A}$ et $B_1 \in \mathcal{B}$. De la condition (3) il résulte que les points A_1 et B_1 sont différents. Les points A_1 et B_1 comme points intérieurs du segment A_0B_0 sont différents du point A_0. Donc A_0, A_1, B_1 forment un simplexe. Ainsi, les conditions de l'axiome V sont remplies, d'où résulte l'existence d'un point C_0, tel que pour des éléments quelconques $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$ différents de C_0, nous ayons $(A, B)|(N, C_0)$, c'est-à-dire $A|C_0|B$. En se basant sur les théorèmes d'ordre résultant des théorèmes 5.05-5.08, il est facile de vérifier que le point C_0 satisfait aux conditions 1° et 2° et qu'il est l'élément unique vérifiant ces conditions.

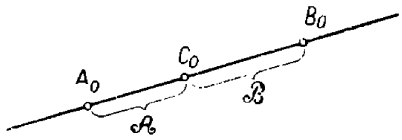


Fig. 86

Dans ce chapitre nous avons démontré que les points à distance finie et les plans (déterminés dans les chapitres 3 et 4) satisfont aux axiomes de Hilbert dits axiomes d'ordre, de parallélisme et de continuité. En tenant compte du fait que les axiome d'incidence sont aussi vérifiés, nous voyons que tous les axiomes de la géométrie affine le sont aussi. C'est pourquoi, dans la suite, nous nous rapporterons souvent à différents théorèmes de la géométrie affine sans les avoir précédemment démontrés.

CHAPITRE 6

MÉTRIQUE

En nous appuyant sur quelques théorèmes de la géométrie affine que nous admettrons sans démonstration, nous démontrerons dans ce chapitre que:

1° Toutes les formes appelées ici „hypersphères"([35]) sont des surfaces du second degré sans points à l'infini, c'est-à-dire des ellipsoïdes.

2° Toutes les „hypersphères" sont des surfaces semblables.

Comme conséquence de ces deux faits il est possible d'admettre une métrique telle que toutes les „hypersphères" deviennent effectivement des hypersphères.

Dans ce but il faudra fixer un système de référence dont l'origine sera le centre d'une „hypersphère" fixée et les axes seront les diamètres conjugués de cette „hypersphère" et les unités seront choisies sur les axes aux points où ceux-ci coupent „l'hypersphère".

Si nous appelons ce système de référence *système d'axes rectangulaires à unités égales*, alors nous pourrons définir les notions de distance et d'angle et la géométrie affine deviendra ainsi une géométrie métrique.

Pour les considérations ci-dessous nous nous baserons sur les théorèmes suivants, admis sans démonstration:

THÉORÈME A. *Si une ligne plane vérifie le théorème de Pascal, elle est une conique.*

En précisant, nous énoncerons un cas particulier de ce théorème:

Soient trois points, A, B et C, et les droites a^1 et b^1 parallèles, passant respectivement par les points A et B (fig. 87). *Considérons un point D tel que les couples de droites AC, BD et AD, BC se coupent respectivement aux points E et F situés sur une droite parallèle à a^1 (ou bien AC et BD sont parallèles et en même temps $AD \| BC$). L'ensemble de tous les points D remplissant cette condition forme une conique.*

([35]) En appelant dans ce chapitre (en vertu de la définition 3.4) les couples conjugués qui ne touchent pas N — hypersphères, nous écrirons toujours „hypersphère" entre guillemets. Le terme „hypersphère" sans guillemets désignera le notion d'hypersphère dans le sens propre du mot, c'est-à-dire celle qu'on pourra introduire après avoir déterminé une métrique dans la géométrie affine. La même remarque se rapporte aussi aux notions de sphère et de cercle (définition 4.6).

En énonçant les deux théorèmes suivants, nous distinguerons les surfaces vérifiant une condition particulière:

DÉFINITION 6.1. Nous dirons qu'une *surface à $n-1$ dimensions vérifie la condition* (c) si et seulement si pour chaque hyperplan γ_2 il existe exactement deux hyperplans tels que chacun d'eux ait un et un seul point commun avec la surface considérée. Nous appellerons ces deux points *sommets opposés* de la surface considérée.

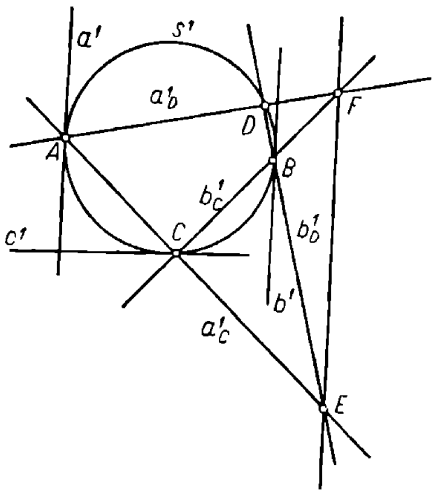


Fig. 87

THÉORÈME B. *Toute surface du second degré à $n-1$ dimensions vérifiant la condition* (c) *est un ellipsoïde* (cf. fig. 88).

THÉORÈME C. *Si une surface vérifie la condition* (c) *et si chaque plan à deux dimensions passant par deux sommets opposés quelconques coupe la surface suivant une conique, alors cette surface est une surface du second degré.*

THÉORÈME D. *Deux surfaces semblables à une troisième surface sont semblables entre elles.*

THÉORÈME E. *Supposons que deux ellipsoïdes α_2 et β_2 soient tangents en un point S. Si pour chaque droite passant par le point S et coupant les ellipsoïdes α_2 et β_2 respectivement aux points A et B, les hyperplans tangents à ces ellipsoïdes aux points A et B sont parallèles, alors les ellipsoïdes sont semblables* (cf. fig. 89).

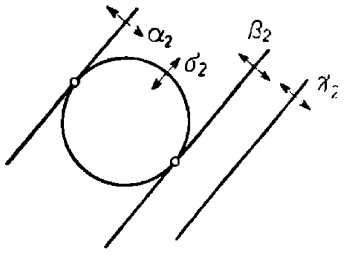


Fig. 88

Nous démontrerons maintenant quelques théorèmes relatifs aux couples conjugués appelés „hypersphères". Ces théorèmes nous permettront d'appliquer les théorèmes A-E, et, par suite, d'introduire la métrique correspondant à nos buts.

THÉORÈME 6.01. *Toute „hypersphère" vérifie la condition* (c) (fig. 88).

Démonstration. Remarquons d'abord qu'un hyperplan a exactement un point commun avec une „hypersphère" si et seulement s'il est tangent à cette „hypersphère" au sens de la définition 5.1. Il s'agit donc de démontrer que pour une „hypersphère" $\sigma_2 = (\bar{s}, \underline{s})$ et pour un hyperplan $\gamma_2 = (\bar{c}, \underline{c})$ il existe exactement deux hyperplans: $\alpha_2 = (\bar{a}, \underline{a})$ et $\beta_2 = (\bar{b}, \underline{b})$, vérifiant respectivement les conditions:

(1) $$\gamma_2 \ominus \alpha_2 \ominus \sigma_2,$$

(2) $$\gamma_2 \ominus \beta_2 \ominus \sigma_2.$$

En effet, en vertu du théorème 2.16 il existe un et un seul élément $\bar{a}$ touchant $(\bar{c}, N, \bar{s})$ et un et un seul élément $\bar{b}$ touchant $(\underline{c}, N, \bar{s})$. En nous basant sur le théorème 3.01, nous formons les couples conjugués $\alpha_2 = (\bar{a}, \underline{a})$ et $\beta_2 = (\bar{b}, \underline{b})$. Ces couples vérifient, en vertu du théorème 3.06, les conditions (1) et (2). D'autre part, il est évident que $\alpha_2 \neq \beta_2$ car dans le cas contraire nous aurions l'identité $\bar{a} = \bar{b}$, et alors l'élément $\bar{a}$ toucherait $(\bar{c}, \underline{c})$ contrairement au théorème 3.04. Il est aussi facile de démontrer que α_2 et β_2 sont les seuls hyperplans vérifiant les conditions de notre théorème.

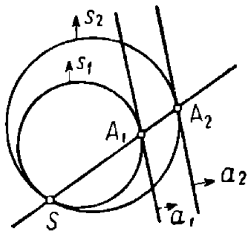


Fig. 89

DÉFINITION 6.2. Si le couple $\sigma_2 = (\bar{s}, \underline{s})$ est une „hypersphère", nous appellerons les éléments $\bar{s}$ et $\underline{s}$ ou bien *côtés de „l'hypersphère"* σ_2, ou bien *„hypersphères orientées"*.

D'une façon analogue les éléments $\bar{a}$ et $\underline{a}$ seront appelés *côtés de l'hyperplan* $\alpha_2 = (\bar{a}, \underline{a})$ ou *hyperplans orientés.*

THÉORÈME 6.02. *Étant données deux „hypersphères orientées": s_1 et s_2 et deux hyperplans orientés: a_1 et a_2, vérifiant les conditions:*

(1) *s_1 touche s_2 au point S,*

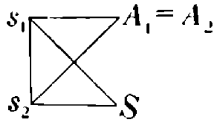
(2) *tout a_i touche s_i en un point A_i différent de S,*

(3) *A_1, A_2, S sont situés sur une droite,*

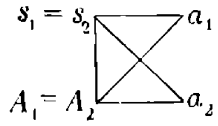
alors les hyperplans orientés a_1 et a_2 se touchent (évidemment au point N) (fig. 89).

Démonstration. Distinguons deux cas: 1. $A_1 = A_2$ et 2. $A_1 \neq A_2$.

1. $A_1 = A_2$. Dans ce cas nous avons les contacts

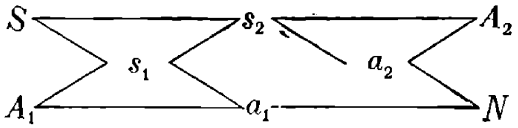


d'où, en tenant compte de l'inégalité $A_1 \neq S$ et du théorème 3.03, nous concluons que $s_1 = s_2$. Ainsi, on a les contacts



qui entraînent $a_1 = a_2$.

2. $A_1 \neq A_2$. Dans ce cas les points N, S, A_1 et A_2, comme points différents situés sur une droite, forment en vertu du théorème 2.30, deux couples liés: $(A_1, S) \bigcirc (A_2, N)$. D'autre part, on a les contacts suivants:



On en conclut, en vertu du théorème 2.21, que $(A_1, S) \ominus (s_2, a_1)$. Donc, s_2 et A_2 étant différents, les hypothèses du théorème 2.34 sont vérifiées, d'où on déduit $a_1 - a_2$.

En nous basant sur le théorème A, nous démontrerons maintenant que chaque „hypersphère" satisfait aux hypothèses du théorème C, elle est donc une surface du second degré:

THÉORÈME 6.03. *Étant donnés une „sphère" s^{n-1} et deux plans parallèles a^{n-1} et b^{n-1}, tangents à s^{n-1} respectivement aux points A et B, l'intersection s^1 d'un plan quelconque à deux dimensions passant par les points A et B avec la „sphère" s^{n-1} — est une ligne vérifiant les hypothèses du théorème A, elle est donc une conique.*

Démonstration. Soient donnés $\sigma_2 - s^{n-1}$, $\alpha_2 - a^{n-1}$, $\beta_2 - b^{n-1}$, vérifiant les conditions $a^{n-1} \mathrm{s}\, s^{n-1}$, $b^{n-1} \mathrm{s}\, s^{n-1}$ et $a^{n-1} \| b^{n-1}$. Désignons respectivement par A et par B les points de contact des plans a^{n-1} et b^{n-1} avec la „sphère" s^{n-1}. Soit e^2 un plan quelconque (à deux dimensions) passant par les points A et B (fig. 90).

Nous examinerons maintenant la variété $s^{n-1} \frown e^2$. Elle contient deux points différents A et B, donc on peut appliquer le théorème 4.11. On en conclut que

$$(1) \qquad d(s^{n-1} \frown e^2) = (n-1)+2-d(s^{n-1} \smile e^2).$$

D'autre part, N n'appartenant pas à s^{n-1}, le plan e^2 n'est pas contenu dans s^{n-1} et alors $d(s^{n-1} \smile e^2) = n$. Cette dernière égalité implique, en vertu de l'égalité (1), que $s^{n-1} \frown e^2$ est une variété à une dimension. En précisant, elle est une „sphère" à une dimension, c'est-à-dire un „cercle". Nous le désignerons par $s^1 = s^{n-1} \frown e^2$.

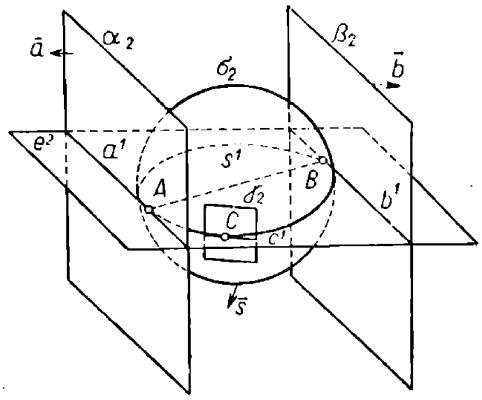


Fig. 90. $n = 3$

Considérons C — un point quelconque du „cercle" s^1 différent de A et B. D'après les théorèmes 2.05 et 4.01 nous voyons que A, B, C forment une base de s^1. Il est facile de vérifier que A, B, C, N forment une base du plan e^2. Le point C étant situé sur „l'hypersphère" σ_2, il existe, en vertu du théorème 3.11, un et un seul hyperplan γ_2 touchant σ_2 au point C. Il est facile de démontrer que les plans a^{n-1}, b^{n-1} et $c^{n-1} - \gamma_2$, coupent le plan e^2 suivant des droites. Nous désignerons ces droites par a^1, b^1 et c^1. Il est évident que $a^1 \| b^1$ et que les droites a^1, b^1 et c^1 sont tangentes au „cercle" s^1 respectivement aux points A, B et C (fig. 90).

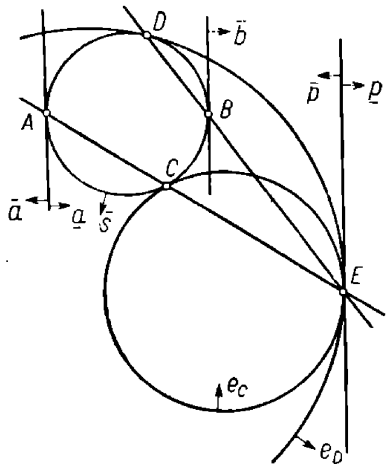
Nous démontrerons maintenant qu'un point arbitraire D du plan e^2 est situé sur le „cercle" s^1 si et seulement si les conditions du théorème A sont remplies. Nous établirons d'abord que cette condition est nécessaire, et ensuite nous montrerons qu'elle est suffisante.

1. Nous admettons qu'un certain point D est situé sur le „cercle" s^1, et nous démontrerons que les hypothèses du théorème A sont vérifiées.

En écartant les cas évidents, nous pouvons admettre que les points A, B, C, D sont différents.

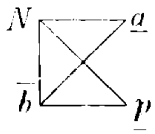
Nous menons, de même que dans le théorème A (fig. 87), les droites $a^1_C(A, C, N)$, $a^1_D(A, D, N)$, $b^1_C(B, C, N)$ et $b^1_D(B, D, N)$.

Toutes ces droites, ainsi que les droites a^1, b^1 et c^1, sont évidemment situées dans le plan e^2. Si les droites a^1_C et b^1_D se coupent, nous désignerons par E leur point d'intersection. D'une façon analogue, nous désignerons par F le point d'intersection des droites a^1_D et b^1_C (évidemment s'il existe). Il s'agit maintenant de démontrer que si le point E existe, alors le point F existe aussi et ils sont situés tous les deux sur une droite parallèle à a^1; si le point E n'existe pas, alors le point F n'existe pas non plus.

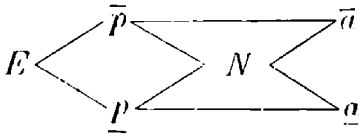


. 91

1.1. Admettons que le point E existe. En nous basant sur le théorème 2.16, nous introduirons successivement les éléments $e_C-(\bar{s}, C, E)$, $e_D-(\bar{s}, D, E)$, $\bar{p}-(e_C, E, N)$ et $\underline{p}-(e_D, E, N)$ (fig. 91). Nous démontrerons maintenant que $\bar{p}$, $\underline{p}$ forment un couple conjugué. En effet, en appliquant deux fois le théorème 6.02 nous obtenons les contacts $\bar{p}-\bar{a}$ et $\underline{p}-\bar{b}$. Le parallélisme des hyperplans α_2 et β_2 entraîne le contact $\bar{b}-\underline{a}$, d'où

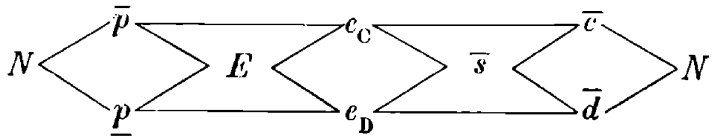


et par conséquent $\underline{p}-\underline{a}$. Nous avons donc les contacts suivants:



qui impliquent, en vertu du théorème 3.08, que $\pi_2 = (\bar{p}, \underline{p})$ est un hyperplan parallèle à α_2 et à β_2.

En menant l'hyperplan $\delta_2 = (\bar{d}, \underline{d})$ tangent à σ_2 au point D, de sorte que $\bar{d} - \bar{s}$, nous aurons les contacts suivants (fig. 92):

(2)


Il est facile de démontrer que $\bar{p}$, $\underline{p}$; e_C, e_D et $\bar{c}$, $\bar{d}$ forment des couples et que le point N ne touche pas le couple (e_C, e_D). Ces couples satisfont donc aux conditions de l'axiome IV, et par suite nous avons:

(3) $$(\bar{c}, \bar{d}) \bigcirc (\bar{p}, \underline{p}).$$

Pour démontrer que la droite b_C^1 coupe l'hyperplan π_2 il suffit de remarquer que si b_C^1 était parallèle à π_2, elle serait parallèle à β_2, ce qui serait incompatible avec l'existence du point à distance finie, B, commun à b_C^1 et β_2 et du point C situé sur b_C^1 mais non pas sur β_2.

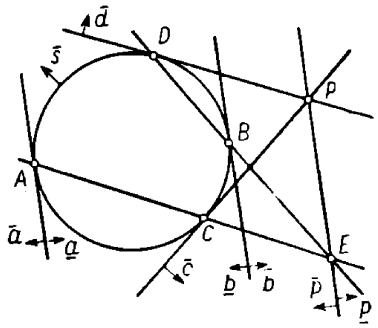


Fig. 92

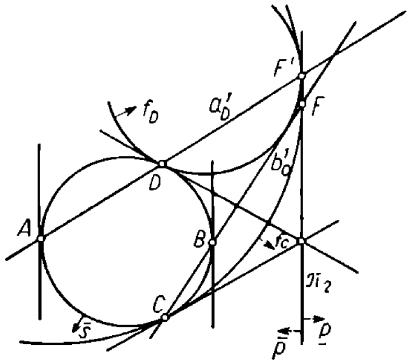


Fig. 93

De la même façon on peut démontrer que la droite a_D^1 coupe aussi l'hyperplan π_2. Nous désignerons les deux points d'intersection respectivement par F et F' (fig. 93).

Nous menons maintenant les éléments

$$f_C - (\bar{s}, C, F), \quad f_D - (\bar{s}, D, F'), \quad \underline{p}' - (f_C, F, N), \quad \bar{p}' - (f_D, F', N).$$

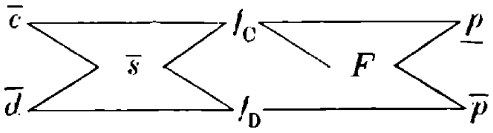
D'après le théorème 6.02, nous avons les contacts $\underline{p}' - \bar{a}$ et $\bar{p}' - \bar{a}$. Donc, en tenant compte des autres contacts, nous avons

On en conclut, en vertu des théorèmes 2.15 et 3.03, que $\bar{p}' = \bar{p}$ et $\underline{p}' = \underline{p}$.

D'autre part, les contacts

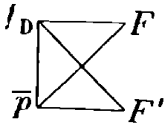
impliquent les contacts $\bar{c}-f_C$ et $\bar{d}-f_D$.

En nous basant sur les contacts consideres, nous obtenons



De là, en tenant compte de la condition (3) on conclut, en vertu du théorème 2.34, que $F-f_D$.

Étant donnés les contacts



nous voyons donc que $F = F'$, c'est-à-dire les droites a_D^1 et b_C^1 se coupent en un point F situé dans l'hyperplan π_2.

Les points E et F étant situés dans π_2 et sur e^2, sont aussi sur la droite p^1 qui est l'arête de e^2 avec π_2. Cette droite est évidemment parallèle à a^1 et à b^1.

Nous avons donc démontré que si les droites a_C^1 et b_D^1 se coupent en un point à distance finie, E, alors les droites a_D^1 et b_C^1 se coupent en un point à distance finie, F, et, de plus, les points E et F sont sur une droite p^1 parallèle à a^1 et b^1.

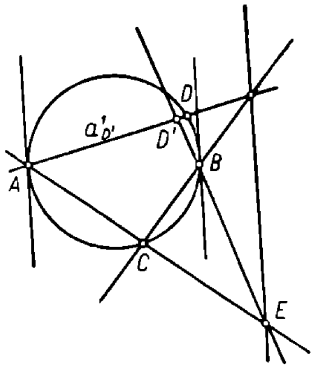


Fig. 94

1.2. Admettons que le point E n'existe pas, c'est-à-dire que les droites a_C^1 et b_D^1 soient parallèles. Dans ce cas le point F n'existe pas non plus. En effet, s'il existait alors, en répétant pour le point F au lieu du point E les considérations analogues à celles du n° 1.1, nous arriverions à la conclusion que le point E existe, contrairement à notre hypothèse.

2. Admettons qu'un point D' différent des points A, B, C et n'appartenant pas à la droite a^1, satisfasse aux conditions du théorème de Pascal (dans le théorème A). Nous démontrerons que le point D' est sur le „cercle" s^1. Dans ce but nous menons la droite $a_{D'}^1(N, A, D')$ (fig. 94). Cette droite, étant située sur e^2 et différente de a^1, doit, en vertu des

théorèmes 5.03, 5.01 et 3.11, avoir deux points différents communs avec s^1. L'un d'eux est le point A et le second sera appelé D.

Le point D étant sur s^1, nous concluons, d'après la première partie de notre démonstration, que ce point vérifie les conditions du théorème de Pascal.

Donc, ou bien les droites DB et $D'B$ passent toutes les deux par le point E, ou bien elles sont parallèles à la droite AC. Par conséquent, ayant encore un point commun B, elles coïncident.

On en conclut que les points D et D' coïncident aussi, et le point D' est bien sur le „cercle" s^1.

THÉORÈME 6.04. *Chaque „hypersphère" σ_2 est un ellipsoïde à $n-1$ dimensions.*

Démonstration. Dans le théorème 6.03 nous avons démontré que chaque „cercle" s^1 est une conique. Nous voyons donc que „l'hypersphère" σ_2 vérifie les conditions du théorème C. En tenant compte du théorème B, nous en concluons que σ_2 est bien un ellipsoïde.

THÉORÈME 6.05. *Si les „hypersphères" α_2 et β_2 ne sont pas tangentes, alors il existe une „hypersphère" γ_2 tangente à ces deux „hypersphères".*

Démonstration. Nous distinguerons deux cas suivant la position mutuelle des „hypersphères": $(\bar{a}, \underline{a}) = \alpha_2$ et $(\bar{b}, \underline{b}) = \beta_2$.

1. Admettons que les „hypersphères" α_2 et β_2 n'aient pas de point commun. Le point N étant, en vertu de l'axiome II.2, indépendant de $\bar{a}, \bar{b}$, il existe un élément $\bar{c}$ touchant $(\bar{a}, \bar{b})$ et ne touchant pas N. L'élément $\bar{c}$ n'étant pas, par hypothèse, un point, il existe (d'après le théorème 3.01) un élément $\underline{c}$ formant avec $\bar{c}$ une „hypersphère". D'après le théorème 3.06, nous concluons que $(\bar{c}, \underline{c})$ est tangente à α_2 et β_2.

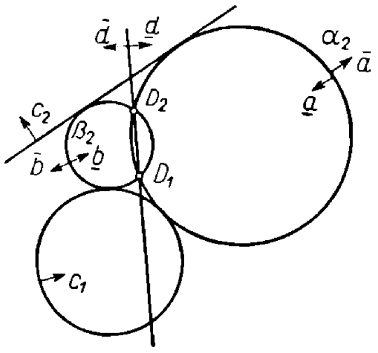


Fig. 95

2. Admettons maintenant que les „hypersphères" α_2 et β_2 aient un point commun. N'étant pas tangentes, elles se coupent, c'est-à-dire $\alpha_2 \oplus \beta_2$. Donc, d'après le théorème 2.29 (en tenant compte du théorème 3.04) il existe un simplexe ponctuel $(D_1, \ldots, D_n)$ touchant α_2 et β_2.

D'après le théorème 3.07 il existe un hyperplan $(\bar{d}, \underline{d})$ passant par les points $N, D_1, \ldots, D_n$ (fig. 95). Les éléments $\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}$ ne se touchant pas, ils forment, en vertu de l'axiome II.1, un simplexe. Nous en concluons, en vertu du théorème 2.11, qu'il existe deux éléments c_1 et c_2, touchant $(\bar{a}, \bar{b})$ et vérifiant la condition

$$\delta(c_1, c_2, \bar{d}) = +1. \tag{1}$$

De cette dernière condition résulte que les éléments c_1 et c_2 ne peuvent en même temps toucher N, car l'élément $\bar{d}$ touche aussi N. Nous pouvons donc admettre que $c_1 \neq N$. Si c_1 était un point, alors comme tous les points touchant $\bar{a}$ et $\bar{b}$, il toucherait aussi $\bar{d}$, contrairement à la condition (1). Nous voyons donc que c_1 n'est ni un point, ni un hyperplan orienté. Par conséquent, il est un côté d'une „hypersphère" $(\bar{c}, \underline{c})$ vérifiant notre théorème (fig. 95).

THÉORÈME 6.06. *Deux „hypersphères" arbitraires sont semblables.*

Démonstration. Du théorème 6.02 et du théorème E* résulte que si deux „hypersphères" sont tangentes, elles sont semblables. Nous en concluons, en vertu du théorème 6.05 et du théorème D, que deux „hypersphères" arbitrairessont aussi semblables.

Nous avons déjà dit que, dans une géométrie affine, on peut introduire une métrique en prenant un ellipsoïde à $n-1$ dimensions pour hypersphère. Dans ce cas, tous les ellipsoïdes semblables à l'ellipsoïde fixé deviendront aussi des hypersphères.

Dans notre cas il suffit, par exemple, d'admettre que $\varkappa_2$ est une hypersphère au sens propre du mot, et alors, en vertu du théorème 6.06, tous les couples appelés „hypersphères" deviendront aussi des hypersphères au sens ordinaire du mot.

En tenant compte du fait que par $n+1$ points arbitraires indépendants on peut mener un et un seul couple conjugué, nous pourrons démontrer le théorème suivant:

M. 5. *Une métrique étant fixée de la façon décrite ci-dessus, l'ensemble de toutes les „hypersphères" déterminées par la définition* 3.4 *est isomorphe à l'ensemble de toutes les hypersphères (sensu stricto) du modèle de la géométrie métrique construit dans les chapitres* 2-6.

Les considérations de ces chapitres justifient la terminologie que nous avons introduite. Il en est ainsi, puisque nous avons construit (en nous basant sur le système d'axiomes A), un modèle de la géométrie métrique dans lequel aux points, hyperplans et hypersphères de la géométrie métrique correspondent les éléments désignés par nous comme points à distance finie et les couples d'éléments appelés hyperplans et „hypersphères".

Il est aussi facile de démontrer que les relations $\alpha_2 \ominus \beta_2$ et $\alpha_2 \oplus \beta_2$ relatives aux hyperplans ou aux „hypersphères" correspondent aux notions „être tangent" (ou „être parallèle") et „se couper". Ceci justifie notre terminologie.

CHAPITRE 7

CATÉGORICITÉ DE L'AXIOMATIQUE A

Dans la théorie basée sur le système d'axiomes A et développée dans les chapitres 2-6, nous avons introduit, entre autres, les notions suivantes:

(1) point à l'infini N (définition 3.1),
(2) points à distance finie (définition 3.1),
(3) hyperplans orientés (définition 6.2),
(4) hypersphères orientées (définition 6.2),
(5) hyperplans (définition 3.4),
(6) hypersphères (définition 3.4).

Les objets représentant une des notions (1)-(4), sont des éléments de l'ensemble des K-sphères, et ceux des types (5)-(6) sont des couples conjugués.

Entre les objets (1)-(6) il peut y avoir certaines relations. Celles qui nous intéressent dans ce chapitre sont les suivantes:

(7) la K-sphère a touche la K-sphère b $(a-b)$,
(8) le point A est situé sur le couple conjugué α_2 $(A-\alpha_2)$,
(9) les couples conjugués α_2 et β_2 sont tangents $(\alpha_2 \ominus \beta_2)$,
(10) les couples conjugués α_2 et β_2 se coupent $(\alpha_2 \oplus \beta_2)$,
(11) l'hyperplan orienté (l'hypersphère orientée) a est un côté de l'hyperplan (l'hypersphère) α_2 $(\alpha_2 = (a, a'))$.

Considérons maintenant deux modèles arbitraires $\mathfrak{H}_n$ et $\mathfrak{H}_n^*$ de la théorie basée sur le système d'axiomes A. Les résultats des considérations des chapitres 2-6 nous permettent de déduire le théorème suivant:

M. 6. *Pour deux modèles $\mathfrak{H}_n$ et $\mathfrak{H}_n^*$ de la théorie basée sur le système d'axiome* A *(et développée dans les chapitres* 2-6*), il existe un isomorphisme $\sim$, tel qu'au point à l'infini, aux points à distance finie, aux hyperplans, aux hypersphères et à l'hypersphère fondamentale $\varkappa_2$ dans le modèle $\mathfrak{H}_n$ — correspondent dans le modèle $\mathfrak{H}_n^*$ des objets du même genre, et que les relations* (8), (9) *et* (10) *sont conservées.*

Démonstration. Les notions (1), (2), (5) et (6) satisfont, comme nous l'avons démontré dans les chapitres précédents, aux axiomes de la géométrie métrique. Puisque cette géométrie est catégorique, il y a une

correspondance $\sim$ vérifiant les conditions de notre théorème. La seule difficulté qui se présente ici est relative à l'hypersphère fondamentale $\varkappa_2$. Pourtant, nous savons qu'en fixant un isomorphisme entre deux modèles de la géométrie métrique, on peut mettre en correspondance deux hypersphères quelconques, par exemple — les hypersphères fondamentales.

Le but de ce chapitre est d'étendre l'isomorphisme décrit plus haut aux notions (3), (4), (7) et (11).

Pour simplifier les considérations, nous introduirons la notation suivante:

Dans le modèle $\mathfrak{H}_n$ nous désignerons les objets (1)-(6) par les mêmes symboles qu'auparavant:

(1) N,

(2) $A, B, C, \ldots,$

(3), (4) $a, b, c, \ldots, a', b', \ldots, \bar{a}, \underline{b}, \ldots$

(5), (6) $\alpha_2, \beta_2, \ldots$

Dans le modèle $\mathfrak{H}_n^*$, nous désignerons les objets (1)-(6) par les mêmes symboles munis d'un astérisque.

La relation d'isomorphisme sera désignée par le symbole $\sim$ et la relationé largie — par le symbole $\approx$. Par exemple, on peut écrire $\alpha_2 \sim \beta_2^*$, $A \sim C^*$, $\varkappa_2 \sim \varkappa_2^*$, $\alpha_2 \sim \beta_2^*$, $a \approx b^*$.

Les relations (7)-(11) seront désignées dans tous les deux modèles par les mêmes symboles, ceux employés jusqu'à présent. Par exemple, nous pouvons écrire: $a - b$, $\alpha_2 \ominus \beta_2$, $c^* - d^*$, $\alpha_2^* \oplus \gamma_2^*$ etc.

Comme nous l'avons déjà dit, l'isomorphisme $\sim$ met en correspondance les hypersphères $\varkappa_2$ et $\varkappa_2^*$, c'est-à-dire $\varkappa_2 \sim \varkappa_2^*$. Nous étendons cet isomorphisme en fixant la correspondance suivante entre les côtés des couples conjugués dans tous les deux modèles:

DÉFINITION. 1. *Si A et B^* sont des points, alors on a $A \approx B^*$ si et seulement si $A \sim B^*$.*

2. *$\underline{k} \approx \underline{k}^*$ (où $\underline{k}$ désigne un des trois éléments fixés: $N, \bar{k}, \underline{k}$, c'est-à-dire un côté de l'hypersphère fondamentale $\varkappa_2$).*

3. *Si $\bar{a}$ est un hyperplan orienté (ou une hypersphère orientée différente de $\underline{k}$), alors la condition $\bar{a} \approx \bar{a}^*$ est vérifiée si et seulement s'il existe des couples conjugués:*

(1) $\alpha_2 = (\bar{a}, \underline{a})$, $\beta_2 = (\bar{b}, \underline{b})$, (1′) $\alpha_2^* = (\bar{a}^*, \underline{a}^*)$, $\beta_2^* = (\bar{b}^*, \underline{b}^*)$,

vérifiant les conditions

(2) $\alpha_2 \ominus \beta_2 \ominus \varkappa_2$, (2′) $\alpha_2^* \ominus \beta_2^* \ominus \varkappa_2^*$,

(3) $\bar{a} - \bar{b} - \bar{k}$, (3′) $\bar{a}^* - \bar{b}^* - \bar{k}^*$

et tels qu'on ait

(4) $$\alpha_2 \sim \alpha_2^*,$$

(5) $$\beta_2 \sim \beta_2^*.$$

Il s'agit maintenant de répondre à deux questions: 1. la correspondance $\approx$ est-elle biunivoque? 2. la correspondance $\approx$ conserve-t-elle la relation de contact (7)?

Une réponse positive nous permettra de déduire que l'axiomatique A est catégorique.

Nous démontrerons d'abord quelques théorèmes de notre théorie qui nous permettront de répondre à ces deux questions.

THÉORÈME 7.01. *Si l'élément $\bar{a}$, différent de $\underline{k}$, n'est pas un point, alors il existe des couples conjugués*

(1) $$\alpha_2 = (\bar{a}, \underline{a}) \quad \textit{et} \quad \beta_2 = (\bar{b}, \underline{b})$$

tels que

(2) $$\alpha_2 \ominus \beta_2 \ominus \varkappa_2,$$

(3) $$\bar{a} - \bar{b} - \bar{k} \quad \text{(fig. 96).}$$

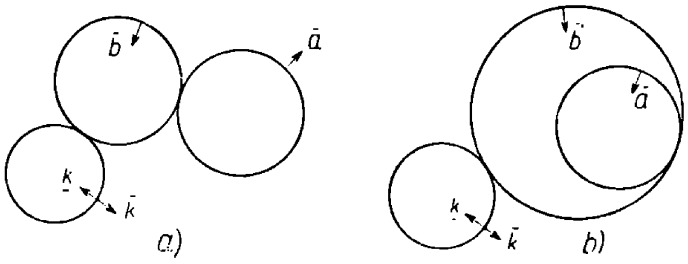


Fig. 96

Démonstration. D'après le théorème 3.01, il existe un élément $\underline{a}$ tel que $\bar{a}, \underline{a}$ forment un couple conjugué α_2,

1. Si $\bar{a} = \bar{k}$, il suffit d'admettre $\alpha_2 = \beta_2 = \varkappa_2$ et $\bar{a} = \bar{b} = \bar{k}$.

2. Si $\bar{a}$ est différent de $\bar{k}$, alors $\bar{a}$ étant aussi différent de $\underline{k}$, nous avons $\alpha_2 \neq \varkappa_2$. Donc, il existe un point P situé sur $\varkappa_2$ et non pas sur α_2. Nous menons un élément $\bar{b}$ touchant $(P, \bar{k}, \bar{a})$. L'élément $\bar{b}$ n'est pas un point, car dans ce cas il vérifierait la condition $P = \bar{b}$, et alors ($\bar{b}$ touchant $\bar{a}$), le point P serait situé sur α_2, contrairement à notre hypothèse. Ainsi il existe un couple conjugué β_2 dont un côté est l'élément $\bar{b}$. Il est facile de vérifier que les couples α_2 et β_2 remplissent les conditions de notre théoréme.

THÉORÈME 7.02. *Pour deux couples conjugués α_2 et β_2 vérifiant la condition* (2) *du théorème précédent il existe un et un seul élément $\bar{a}$ vérifiant les conditions* (1) *et* (3) *de ce théorème* (fig. 96).

Démonstration. Si nous posons $\alpha_2 = (a, a')$ et $\beta_2 = (b, b')$, la condition (2) implique qu'on a un et un seul des quatre cas suivants: $a-b-\bar{k}$, $a-b'-\bar{k}$, $a'-b-\bar{k}$, $a'-b'-\bar{k}$. Donc exactement un des éléments a et a' vérifie les conditions de notre théorème.

THÉORÈME 7.03. *Si les couples conjugués*

(1) $$\alpha_2 = (\bar{a}, \underline{a}), \quad \beta_2 = (\bar{b}, \underline{b}), \quad \gamma_2 = (\bar{c}, \underline{c}), \quad \beta_2' = (\bar{b}', \underline{b}')$$

vérifient les conditions

(2) $$\alpha_2 \ominus \beta_2 \ominus \gamma_2,$$

(2') $$\alpha_2 \ominus \beta_2' \ominus \gamma_2,$$

(3) $$\bar{a}-\bar{b}-\bar{c},$$

(4) $$\bar{b}'-\bar{c},$$

alors la condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait

(5) $$\bar{a}-\bar{b}'$$

est que l'un des deux cas suivants se présente:

1° *il existe un point P situé sur les couples $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ et β_2'* (fig. 97a);

2° *si A, A', C, C' sont les points de contact des couples $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ et β_2' (précisément: $\alpha_2-A-\beta_2$, $\alpha_2-A'-\beta_2'$, $\gamma_2-C-\beta_2$, $\gamma_2-C'-\beta_2'$),*

alors les points A, A', C, C' forment deux couples liés (fig. 97b).

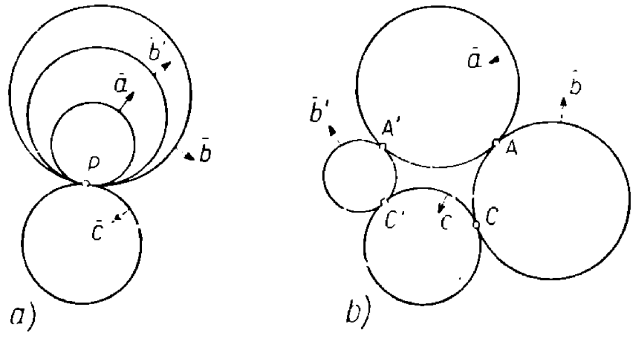


Fig. 97

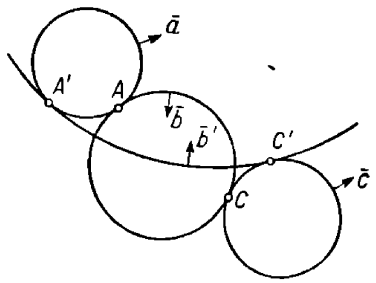
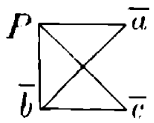


Fig. 98

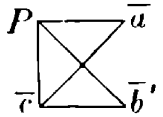
La figure 98 montre un système vérifiant les conditions (1)-(4), mais ne vérifiant pas la condition (5).

Démonstration. 1. La condition est suffisante.

1.1. Admettons qu'on ait le cas 1° $P-(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{b}')$. Alors les contacts



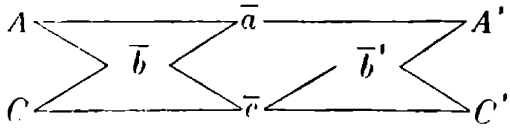
impliquent $\bar{a}-\bar{c}$, d'où nous obtenons les contacts



qui entraînent $\bar{a}-\bar{b}'$.

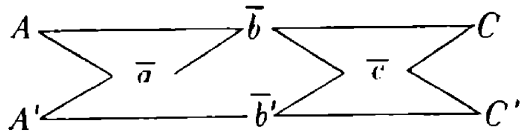
1.2. Admettons maintenant qu'on ait le cas 2° les points A, A', C, C' forment deux couples liés. Nous pouvons distinguer les trois cas suivants: a. $(A, C)\bigcirc(A', C')$, b. $(A, A')\bigcirc(C, C')$, c. $(A, C')\bigcirc(A', C)$.

a. La condition $(A, C)\bigcirc(A', C')$ et les contacts



impliquent, en vertu du théorème 2.34, le contact $\bar{a}-\bar{b}'$.

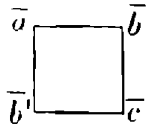
b. La condition $(A, A')\bigcirc(C, C')$ et les contacts



impliquent, d'après le théorème 2.34, le contact $\bar{a}-\bar{b}'$.

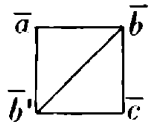
c. Si nous admettons qu'on ait le cas c, mais que les conditions a et b ne soient pas vérifiées, alors, en vertu des théorèmes 2.29 et 2.31, on aura $(A, C')\ominus(A', C)$. On en conclut, d'après le théorème 3.03, que les couples (A, C') et (A', C) sont égaux, et alors ou bien $A = A' \neq C = C'$, ou bien $A = C \neq A' = C'$. Mais chacune de ces deux possibilités mène à une contradiction avec l'hypothèse suivant laquelle les cas a et c n'ont pas lieu.

2. La condition est nécessaire. Si l'on admet les conditions (1)-(5), les éléments $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{b}'$ jouent tous le même rôle. Il suffit donc de considérer les deux cas suivants: 2.1. Outre les contacts



il y a d'autres contacts entre les éléments $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{b}'$, c'est-à-dire on a $\bar{a}-\bar{c}$ ou $\bar{b}-\bar{b}'$, ou bien 2.2. $\bar{a}\not-\bar{c}$ et $\bar{b}\not-\bar{b}'$.

2.1. Admettons qu'on ait les contacts



En nous basant sur le théorème 2.15, nous en concluons que ou bien $\bar{a}-\bar{c}$, ou bien $\bar{b} = \bar{b}'$. La première possibilité implique l'existence d'un point P touchant $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{b}')$ (fig. 99) et de la seconde il s'ensuit ou bien que le point P vérifiant la condition 1° existe aussi (fig. 100a), ou bien que l'on a l'égalité des couples $(A, C) = (A', C')$, c'est-à-dire que la condition 2° est vérifiée (fig. 100b).

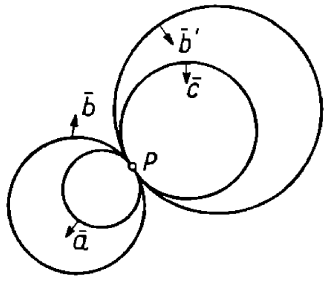


Fig. 99

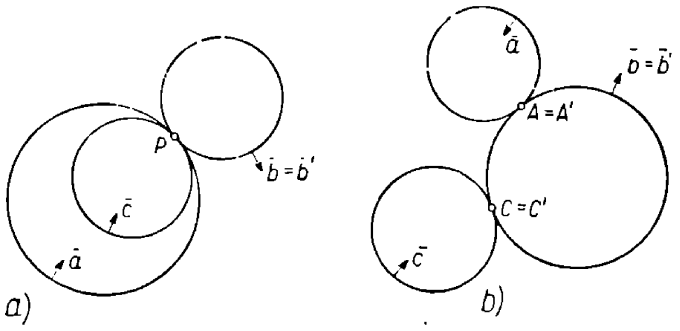
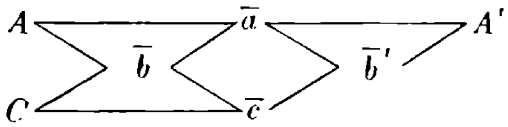
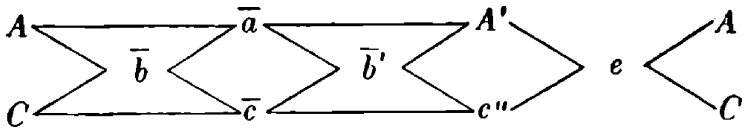


Fig. 100

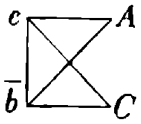
2.2. L'hypothèse $\bar{a} \neq \bar{c}$ et $\bar{b} \neq \bar{b}'$ implique que les éléments $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{b}'$ sont différents, d'où il résulte que les points A, A', C, C' sont aussi différents et que chacun d'eux touche exactement deux éléments parmi $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{b}'$. De plus, les contacts suivants ont lieu:



Du théorème 3.07 résulte l'existence d'un élément e touchant (A', A, C), et de l'axiome II.1 on déduit l'existence d'un élément c'' touchant $(\bar{c}, \bar{b}', e)$. Nous avons donc

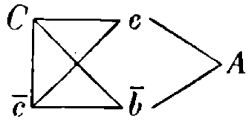


Il est évident que l'élément c'' est différent des éléments $\bar{b}$, $\bar{c}$ et $\bar{b}'$. En effet, l'égalité $c'' = \bar{b}$ entraîne



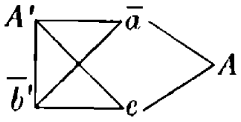
d'où résulte $e = \bar{b}$, donc $A'-\bar{b}$, ce qui est une contradiction.

Pareillement, l'égalité $c'' = \bar{c}$ entraîne



d'où résulte $e = \bar{b}$, donc $A' - \bar{b}$, ce qui est une contradiction.

Enfin, l'égalité $c'' = \bar{b}'$ entraîne



d'où $c = \bar{a}$, donc $C - \bar{a}$, ce qui est aussi une contradiction.

On en conclut, en vertu du théorème 2.21, que les conditions de l'axiome IV sont remplies, c'est-à-dire qu'on a $(A, C) \ominus (\bar{a}, \bar{c}) \ominus (A', c'')$, $(A, C) - e - (A', c'')$ et $e \not\sim (\bar{a}, \bar{c})$. Donc les couples (A, C) et (A', c'') sont liés. L'élément c'', comme dépendant de (A, C, A'), est (en vertu du théorème 4.03) un point. Donc, C' étant (d'après le théorème 3.10) le seul point touchant $(\bar{c}, \bar{b}')$, on a $c'' = C'$. Nous avons ainsi démontré que $(A, C) \bigcirc (A', C')$.

Nous sommes maintenant en état de démontrer des théorèmes méthodologiques relatifs à la correspondance $\approx$.

M. 7. *La correspondance $\approx$ déterminée dans ce chapitre est une correspondance biunivoque.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que la relation $\approx$ fait correspondre à chaque K-sphère du modèle $\mathfrak{H}_n$ une et une seule K-sphère du modèle $\mathfrak{H}_n^*$.

Grâce à la symétrie (résultant de la définition de la relation $\approx$ entre les modèles $\mathfrak{H}_n$ et $\mathfrak{H}_n^*$), on voit que dans ce cas à chaque K-sphère du modèle $\mathfrak{H}_n^*$ correspond aussi exactement une K-sphère du modèle $\mathfrak{H}_n$.

Si la K-sphère a est un point, la relation $\sim$ et aussi la relation $\approx$ font correspondre à a un et un seul élément a^*. Il en est de même dans le cas où $a = \underline{k}$. Il suffit donc d'examiner le cas où a n'est ni un point, ni l'hypersphère orientée fondamentale $\underline{k}$. Dans ce cas, d'après le théorème 7.01, il existe des couples conjugués α_2 et β_2 vérifiant les conditions

$$\alpha_2 = (a, \underline{a}), \quad \beta_2 = (\bar{b}, \underline{b}), \tag{1}$$

$$\alpha_2 \ominus \beta_2 \ominus \varkappa_2, \tag{2}$$

$$a - \bar{b} - \bar{k}. \tag{3}$$

L'isomorphisme $\sim$ fait correspondre à ces couples univoquement des couples α_2^* et β_2^* tels qu'on ait

$$\alpha_2^* \ominus \beta_2^* \ominus \varkappa_2^*. \tag{2*}$$

En se basant sur le théorème 7.02, on peut dire qu'il existe une K-sphère $\bar{a}^*$ pour laquelle on a

$$(1^*) \qquad \alpha_2^* = (\bar{a}^*, \underline{a}^*), \quad \beta_2^* = (\bar{b}^*, \underline{b}^*),$$

$$(3^*) \qquad \bar{a}^* - \bar{b}^* - \bar{k}^*.$$

Nous avons donc démontré que pour chaque K-sphère a il existe une K-sphère $\bar{a}^*$ vérifiant toutes les conditions de la définition de la relation $\approx$, c'est-à-dire que $a \approx \bar{a}^*$.

Il faut encore démontrer que la K-sphère $\bar{a}^*$ est déterminée univoquement.

En vertu du théorème 3.01, le couple conjugué α_2 est déterminé univoquement par l'élément a. On en conclut que le couple α_2^* est aussi univoquement déterminé. Le problème consiste à examiner si à l'élément a correspond toujours le même côté du couple α_2^*, indépendamment du choix du couple β_2. Il en est bien ainsi. Considérons, pour la démonstration, deux couples conjugués différents β_2 et β_2' vérifiant les conditions (1), (2) et (3) (fig. 101). D'après le théorème 7.03 ou bien 1° il existe un point P touchant $\alpha_2, \beta_2, \varkappa_2, \beta_2'$, ou bien 2° les points de contact forment des couples liés, c'est-à-dire ils sont égaux par couples, ou ils sont différents et situés sur un cercle ou sur une droite.

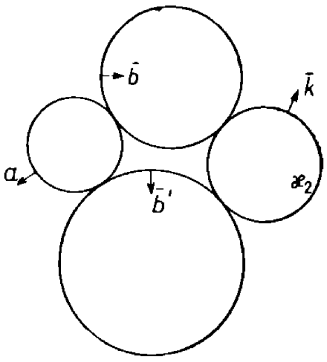


Fig. 101

Dans tous les deux cas — grâce à l'isomorphisme des points (par la relation $\sim$) — la condition 1° ou 2° est remplie dans le modèle $\mathfrak{H}_n^*$ en même temps que dans le modèle $\mathfrak{H}_n$. On en conclut, en vertu du théorème 7.03, que $\bar{a}^* - \bar{b}'^* - \bar{k}^*$. Donc l'élément $\bar{a}^*$ est déterminé univoquement et la démonstration est terminée.

Il est évident que la relation (11): „a est un côté du couple conjugué α_2" — est conservée par la correspondance $\approx$. Il faut encore démontrer le théorème suivant:

M. 8. *La correspondance $\approx$ conserve la relation de contact des K-sphères.*

Démonstration. Nous pouvons laisser de côté le cas où un des éléments considérés est un point. (Dans ce cas il suffit de se baser sur le théorème 3.05 et sur le fait que la correspondance $\approx$ conserve les relations (8) et (11)).

Donc nous pouvons admettre que $a - c$, $\alpha_2 = (a, a')$, $\gamma_2 = (c, c')$, $\alpha_2 \approx \alpha_2^*$, $\gamma_2 \approx \gamma_2^*$, $\alpha_2^* = (a^*, a'^*)$, $\gamma_2^* = (c^*, c'^*)$, $\alpha_2 \ominus \gamma_2$, $\alpha_2^* \ominus \gamma_2^*$, $a \approx a^*$, $c \approx c^*$.

Le théorème sera démontré si nous prouvons que l'on a la première des deux possibilités résultant de la condition $\alpha_2^* \ominus \gamma_2^*$ c'est-à-dire: 1° $a^* - c^*$ et en même temps $a'^* - c'^*$ ou 2° $a^* - c'^*$ et en même temps $a'^* - c^*$.

Pour le prouver, nous distinguons deux cas: 1. $\gamma_2 \ominus \varkappa_2$ (ou $\alpha_2 \ominus \varkappa_2$) et 2. $\varkappa_2$ n'est tangent ni à α_2, ni à γ_2.

1. Admettons que $\gamma_2 \ominus \varkappa_2$ (le cas où $\alpha_2 \ominus \varkappa_2$ est analogue) (fig. 102a).

1.1. Supposons, en particulier, $c - \bar{k}$. On a alors

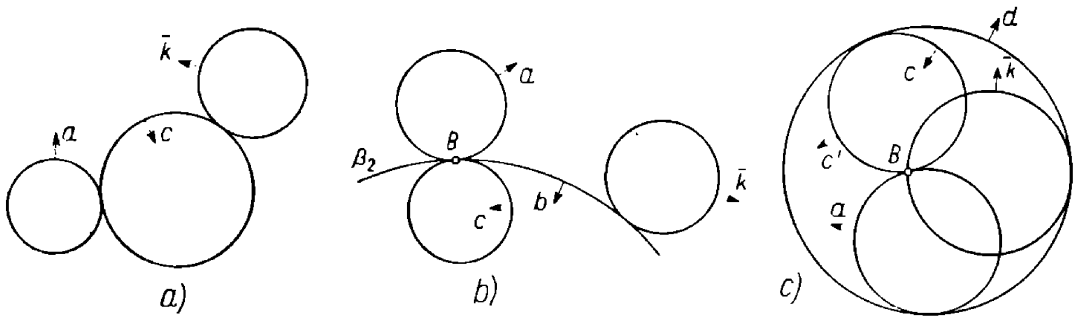


Fig. 102

(1) $\gamma_2 = (c, c')$, $\varkappa_2 = (\bar{k}, \underline{k})$, $\gamma_2^* = (c_2^*, c'^*)$, $\varkappa_2^* = (\bar{k}^*, \underline{k}^*)$,

(2) $\gamma_2 \ominus \varkappa_2 \ominus \varkappa_2$, $\gamma_2^* \ominus \varkappa_2^* \ominus \varkappa_2^*$,

(3) $c - \bar{k} - \bar{k}$, $\bar{k}^* - \bar{k}^*$,

(4) $\gamma_2 \sim \gamma_2^*$,

(5) $\varkappa_2 \sim \varkappa_2^*$.

Donc le contact $c'^* - \bar{k}^*$ impliquerait la correspondance $c \sim c'^*$, incompatible avec le correspondance $c \sim c^*$.

En répétant ces raisonnements, nous déduirons des conditions:

(1′) $\alpha_2 = (a, a')$, $\gamma_2 = (c, c')$, $\alpha_2^* = (a^*, a'^*)$, $\gamma_2^* = (c^*, c'^*)$,

(2′) $\alpha_2 \ominus \gamma_2 \ominus \varkappa_2$, $\alpha_2^* \ominus \gamma_2^* \ominus \varkappa_2^*$,

(3′) $a - c - \bar{k}$, $c^* - \bar{k}^*$,

(4′) $\alpha_2 \sim \alpha_2^*$,

(5′) $\gamma_2 \sim \gamma_2^*$,

(6) $a \sim a^*$,

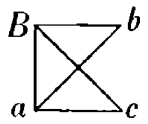
que $a^* - c^*$, et que l'on n'a pas $a'^* - c^*$.

1.2. La seconde supposition, $c' - \bar{k}$ implique, d'après les mêmes considérations que celles du n° 1.1, le contact $a'^* - c'^*$, donc aussi $a^* - c^*$.

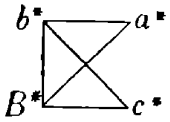
2. Admettons maintenant qu'on n'ait ni $\alpha_2 \ominus \varkappa_2$, ni $\gamma_2 \ominus \varkappa_2$. Désignons par B le point de contact des couples conjugués α_2 et γ_2. D'après l'axiome II.1 il existe un élément b touchant $(a, B, \bar{k})$. Il faut encore distinguer deux cas: 2.1. $b \neq B$ (fig. 102b) et 2.2. $b = B$ (fig. 102c).

2.1. Admettons que $b \neq B$. Le contact $b - B$ entraîne en vertu des théorèmes 3.03 et 3.01, que b est un côté d'un certain couple conjugué β_2 (fig. 102b).

Les contacts

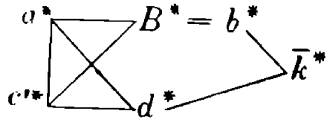


entraînent le contact $c - b$. En nous basant sur le fait que $\beta_2 \ominus \varkappa_2$, nous concluons d'après la première partie de notre démonstration (n° 1), que le contact $a - b$ entraîne le contact $a^* - b^*$ et $c - b$ entraîne $c^* - b^*$ (b^* désigne l'élément du modèle $\mathfrak{H}_n^*$ correspondant à l'élément b). Nous avons donc



d'où il s'ensuit que $a^* - c^*$.

2.2. Supposons $b = B$. L'hypersphère $\varkappa_2$ n'étant tangente ni au couple α_2, ni au couple γ_2, et l'élément a ne touchant pas c', nous avons $(a, c', \bar{k})_{\neq}$. Nous en concluons, en nous basant sur les contacts $(a, c', \bar{k}) - b$ (b est égal à B), que $(a, c', \bar{k})$ est un simplexe. Il existe donc un élément d différent de $b = B$ et touchant $(a, c', \bar{k})$ (fig. 102c). Les couples α_2 et γ_2 n'ayant qu'un seul point commun B, l'élément d n'est pas un point, donc il est un côté d'un couple conjugué δ_2. Le couple δ_2 étant tangent à $\varkappa_2$, nous concluons que si $d \approx d^*$, $a \approx a^*$, $c' \approx c'^*$, alors on a le contact $d^* - (a^*, c'^*, \bar{k}^*)$. Les couples α_2^* et γ_2^* étant tangents, il y a deux cas possibles: $a^* - c^*$ et $a^* - c'^*$. Mais le second mène à une contradiction, car les contacts



et $a^* \neq \bar{k}^*$ entraînent l'équivalence $d^* = B^*$, d'où $d = B$, contrairement à la définition de l'élément d. Il ne reste donc que la possibilité $a^* - c^*$, et le théorème est ainsi démontré.

Nous avons donc démontré que pour deux modèles quelconques, $\mathfrak{H}_n$ et $\mathfrak{H}_n^*$ (de la théorie basée sur deux notions primitives: K-sphère et

contact, vérifiant les axiomes I-V), il existe un isomorphisme des relations de contact sur les ensembles de K-sphères de ces deux modèles. Par conséquent on peut énoncer le théorème

M. 9. *Le système d'axiomes* A *est catégorique.*

En tenant compte du théorème M. 3 (du chapitre 1), nous en déduisons le théorème suivant:

M. 10. *Le système d'axiomes* A *est un système d'axiomes de la géométrie de Lie à n dimensions.*

Nous avons ainsi établi le théorème qui était le but de ce travail. De plus, nous avons démontré quelques théorèmes concernant le système d'axiomes admis, prouvant qu'il est non-contradictoire (M. 4) et catégorique (M. 9), enfin nous avons donné un développement synthétique de la géométrie de Lie (chapitres 2-6).

D'autres considérations et développements concernant la géométrie de Lie, ainsi que le problème de l'indépendance de ses axiomes feront l'objet de travaux que nous sommes en train de préparer.

PUBLICATIONS CITÉES

[1] G. Birkhoff, *Lattice theory*, New York 1948.

[2] W. Blaschke, *Differentialgeometrie III*, Berlin 1929.

[3] M. L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur, R. Croisot, *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques*, Paris 1953.

[4] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig 1930.

[5] Izumi Shin-ichi, *Lattice theoretic foundation of circle geometry*, Proc. Imp. Acad. Tokyo 16 (1940), p. 515-517.

[6] Н. В. Ефимов, *Высшая геометрия*, Москва 1945.

[7] F. Klein, *Vorlesungen über höhere Geometrie*, Berlin 1926.

[8] K. Kuratowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości*, Monografie Matemamatyczne 27, Warszawa 1952.

[9] S. Lie, *Über komplexe insbesondere Linien- und Kugel-Komplexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen*, Math. Ann. 5 (1872), p. 145-256.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION 3
CHAPITRE 1. Vérification des axiomes par le modèle fondamental de la géométrie de Lie 7
CHAPITRE 2. Axiomes et théorèmes généraux de la géométrie de Lie . . 24
CHAPITRE 3. Système de référence. Points, hyperplans et hypersphères . 43
CHAPITRE 4. Variétés. Axiomes d'incidence de la géométrie affine . . . 70
CHAPITRE 5. Axiomes d'ordre, de parallélisme et de continuité de la géométrie affine à n dimensions 84
CHAPITRE 6. Métrique 91
CHAPITRE 7. Catégoricité de l'axiomatique A 100
PUBLICATIONS CITÉES 111