POLSKA AKADEMIA NAUK · INSTYTUT MATEMATYCZNY

ROZPRAWY MATEMATYCZNE

XI

W. ŚLEBODZIŃSKI

Sur l'équivalence des formes différentielles extérieures du second degré

WARSZAWA 1956
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — WARSZAWA 1956

Nakład 900+184 egz. Podpisano do druku 6.II. 1956 r.
Ark. wyd. 2, druk. $2^{1}/_{4}$ Druk ukończono w lutym 1956 r.
Pap. dr. sat. kl. III, 80 g, 70x100 Zamówienie nr 1136/55.
Cena zł 4,—

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

Introduction

Le problème de l'équivalence de deux formes différentielles extérieures du second degré n'a pas été, d'après ce que je sais, résolu jusqu'à présent dans le cas général ([5], p. 19). Dans une note intéressante M. Yen Chih Ta [9] en donne une solution dans le cas d'une forme Ω à quatre variables, en montrant qu'avec Ω peut être lié intrinsèquement un système de quatre formes différentielles linéaires. La méthode employée dans cette note étant basée sur la relation $d\Omega=[\Theta\Omega]$, qui ne se réalise pas dans le cas d'une forme générale à un nombre quelconque de variables, ne peut évidemment pas être étendue aux cas des formes à un nombre de variables supérieur à quatre. J'étais en possession de la solution du problème dont il est question avant la guerre; malheureusement le manuscrit de mon travail a été détruit par les hitleriens ainsi que mes autres notices scientifiques. J'ai repris et j'ai résolu ce problème d'une autre manière il y a quelques années et je présente ici la solution.

Ce Mémoire est divisé en trois chapitres. Dans le premier je détermine le système complet des invariants et des formes différentielles linéaires covariantes d'un système (S) composé de deux formes différentielles extérieures du second degré, ce qui permet de résoudre le problème de l'équivalence de deux systèmes (S). Je me borne ici au cas assez général où les invariants du degré zéro de (S) (invariants principaux) sont indépendants, en remarquant que la méthode dont je me sers peut être appliquée à d'autres cas. Je montre encore qu'avec le système (S) peut être lié invariablement un espace à connexion affine sans courbure.

Dans le second Chapitre je montre d'abord qu'avec une forme quadratique donnée Ω est liée une forme covariante du même degré formant avec Ω un système (S). En appliquant à ce système les résultats obtenus précédemment je résous ainsi le problème de l'équivalence et je détermine en même temps le groupe admis par Ω. La méthode dont je me sers dans le cas appelé cas général peut être appliquée de même dans certains cas speciaux, mais il faut remarquer qu'il y a des cas qui échappent complètement à la méthode suivie dans les deux premiers chapitres.

Je reprends le problème de l'équivalence de deux formes quadratiques dans le troisième Chapitre en présentant une autre méthode qui donnera une solution du problème dans tous les cas. Je montre qu'avec une forme différentielle extérieure du second degré peut être lié d'une manière invariable un espace à connexion symplectique sans courbure. Pour ce but j'expose d'abord les principales propriétés de la connexion basée sur le groupe symplectique et j'établis les formules concernant sa structure. Je détermine ensuite l'espace associé invariablement à une forme quadratique en me servant de la théorie des systèmes pfaffiens en involution, créée par E. Cartan.

I. Invariants du système de deux formes différentielles extérieures du second degré

1. Soient données deux formes

$$
(1)\qquad \begin{gathered}
\Phi = \tfrac{1}{2} a_{\varkappa\lambda} [dx^\varkappa dx^\lambda], \qquad \Psi = \tfrac{1}{2} b_{\varkappa\lambda} [dx^\varkappa dx^\lambda], \\
a_{\varkappa\lambda} + a_{\lambda\varkappa} = 0, \qquad b_{\varkappa\lambda} + b_{\lambda\varkappa} = 0
\end{gathered}
$$

à $n = 2r$ variables $x^\varkappa$ [1]. Nous supposons que les coefficients de Φ et de Ψ soient des fonctions analytiques holomorphes dans un domaine (D), par exemple dans un voisinage du point nul; nous admettons de plus que les deux formes soient de rang n d'où il suit que la classe de chacune d'elles est aussi égale à n ([7], p. 135). Nous désignerons dans la suite le système composé des formes (1) par (S).

Les expressions

$$
(2)\qquad [\Phi^r], \quad [\Phi^{r-1}\Psi], \quad \ldots, \quad [\Phi\Psi^{r-1}], \quad [\Psi^r]
$$

sont des formes extérieures de degré n; on peut donc poser

$$
[\Phi^r] = \mathfrak{A}_0 \Xi, \quad [\Phi^{r-1}\Psi] = \mathfrak{A}_1 \Xi, \quad \ldots, \quad [\Psi^r] = \mathfrak{A}_r \Xi,
$$

Ξ étant défini par la formule

$$
\Xi = [dx^1 dx^2 \ldots dx^n].
$$

Les produits (2) étant liés d'une manière invariante au système (S), il s'ensuit que les coefficients $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r$ sont des densités scalaires; Φ étant par hypothèse de rang n, on a $\mathfrak{A}_0 \neq 0$ ([2], p. 56).

Posons

$$
(3)\qquad I_1 = \mathfrak{A}_1/\mathfrak{A}_0, \quad I_2 = \mathfrak{A}_2/\mathfrak{A}_0, \quad \ldots, \quad I_r = \mathfrak{A}_r/\mathfrak{A}_0;
$$

nous obtenons ainsi r *invariants d'ordre zéro* du système (S). Nous nous bornons dans la suite au cas assez général en supposant que *ces inva-*

[1] Dans tout le travail, sauf avis contraire, les indices grecs parcourent les valeurs de 1 à $n = 2r$ et les indices latins les valeurs de 1 à r; nous adoptons la convention de supprimer le signe de sommation par rapport à un indice placé en *bas* et en *haut*.

riants soient des fonctions indépendantes et nous les appellerons *invariants principaux* de (S).

Considérons maintenant la forme $\Psi - s\Phi$, s désignant une fonction des variables $x^\varkappa$; pour que cette forme soit de rang inférieur à $n=2r$, il faut et il suffit qu'il soit ([2], p. 56 ou [8], p. 33)

$$[(\Psi - s\Phi)^r] = 0. \tag{4}$$

En développant le premier membre de cette égalité et en tenant compte des formules (2) et (3), on en déduit l'équation

$$\mathfrak{A}_0 s^r - \binom{r}{1}\mathfrak{A}_1 s^{r-1} + \ldots + (-1)^r \binom{r}{r}\mathfrak{A}_r = 0$$

ou

$$s^r - \binom{r}{1} I_1 s^{r-1} + \ldots + (-1)^r \binom{r}{r} I_r = 0. \tag{5}$$

Les coefficients de cette équation étant par hypothèse indépendants, il en est de même pour ses racines; celles-ci sont donc aussi des invariants indépendants de (S).

2. L'expression Φ, étant de rang $n=2r$, peut être présentée sous la forme

$$\Phi = \sum_{i=1}^{r} [\omega^i \omega^{r+i}], \tag{6}$$

$\omega^\varkappa$ désignant des formes différentielles linéaires indépendantes; si l'on exprime la seconde forme de (S) au moyen des $\omega^\varkappa$, on aura

$$\Psi = \tfrac{1}{2} B_{\varkappa\lambda} [\omega^\varkappa \omega^\lambda]. \tag{7}$$

L'expression (6) sera conservée, si l'on assujettit les formes $\omega^\varkappa$ à une substitution arbitraire du groupe symplectique $Sp(n)$; les coefficients de la substitution la plus générale de cette espèce sont des fonctions des variables $x^\varkappa$ et des paramètres arbitraires dont le nombre $r(2r+1)$ est égal à l'ordre du groupe $Sp(n)$ ([2], p. 54). En se servant des substitutions du groupe $Sp(n)$ on peut ramener l'expression (7) à une forme réduite ([8], p. 129). Il est facile de voir que l'équation (5) ne changera pas, si dans la relation (4) on remplace Φ et Ψ par les expressions (6) et (7) au lieu de se servir des formules (1); cette équation joue donc le rôle de l'équation caractéristique de la forme (7) si on l'envisage comme une forme extérieure algébrique aux variables $\omega^\varkappa$. Les racines de l'équation (5), étant des fonctions indépendantes, sont par conséquent *distinctes*; si on les désigne par S^h, la forme réduite de Ψ pourra alors s'écrire comme il suit:

$$\Psi = \sum_{h=1}^{r} S^h [\omega^h \omega^{r+h}]. \tag{8}$$

Comme les coefficients S^h sont distincts, les expressions (6) et (8) ne sont conservées que par celles des substitutions du groupe $Sp(n)$ qui laissent invariants chacun des produits $[\omega^h \omega^{r+h}]$; celles-ci ayant la forme

$$(9) \qquad \omega^h = \alpha^h \bar{\omega}^h + \beta^h \bar{\omega}^{r+h}, \qquad \omega^{r+h} = \gamma^h \bar{\omega}^h + \delta^h \bar{\omega}^{r+h}, \qquad \alpha^h \delta^h - \beta^h \gamma^h = 1,$$

on voit que *le groupe $Sp(n)$ est ainsi réduit à un sous-groupe à $3r$ paramètres.*

3. Notre but étant de réduire $Sp(n)$ de nouveau à un sous-groupe du groupe (9), nous allons calculer les différentielles des invariants principaux I_h. Les formes $\omega^\varkappa$ étant linéairement indépendantes, on peut poser

$$(10) \qquad dI_h = I_{h\varrho}\, \omega^\varrho.$$

Comme les invariants I_h sont par hypothèse indépendants, la matrice

$$M = \begin{Vmatrix} I_{11} & I_{12} & \dots & I_{1r} & I_{1,r+1} & \dots & I_{1,2r} \\ I_{21} & I_{22} & \dots & I_{2r} & I_{2,r+1} & \dots & I_{2,2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ I_{r1} & I_{r2} & \dots & I_{rr} & I_{r,r+1} & \dots & I_{r,2r} \end{Vmatrix}$$

est de rang r. On peut supposer qu'il soit $|I_{hi}| \neq 0$. Admettons en effet que le déterminant qui est formé de r premières colonnes de M soit nul et désignons par D l'un quelconque des déterminants de la matrice M qui soit différent de zéro; D doit par suite contenir des colonnes de la matrice M de numéros supérieurs à r. En effectuant sur les expressions $\omega^\varkappa$ une ou plusieurs substitutions de la forme

$$\omega^h = \bar{\omega}^{r+h}, \qquad \omega^{r+h} = -\bar{\omega}^h,$$

qui appartiennent bien au groupe (9), on peut s'arranger de manière que D soit formé de r premières colonnes de la matrice M, ce qui justifie notre remarque.

On peut de même supposer que tous les termes de la diagonale principale de la matrice $\|I_{hi}\|$, formée de r premières colonnes de M, soient différents de zéro. Supposons en effet qu'il en soit autrement; le déterminant $|I_{hi}|$ étant différent de zéro, il existe au moins un produit de la forme $I_{1i_1} I_{2i_2} \dots I_{ri_r}$, où les indices i sont tous différents, qui est différent de zéro. Or, on peut changer les numéros des formes $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r$ et en même temps, d'une manière analogue, ceux des formes $\omega^{r+1}, \omega^{r+2}, \dots, \omega^{2r}$ de façon que ce produit prenne la forme $I_{11} I_{22} \dots I_{rr}$; celui-ci étant différent de zéro, il s'ensuit que tous les coefficients I_{hh} jouissent de la même propriété.

Ceci établi, effectuons maintenant sur les deux formes ω^h et ω^{r+h} une substitution du groupe (9); on peut la choisir de telle manière que les coefficients de $\bar{\omega}^h$ et $\bar{\omega}^{r+h}$ dans la formule (10) deviennent respectivement égaux à 1 et à 0. Il suffit pour cela d'attribuer aux coefficients de la substitution (9) les valeurs suivantes:

$$\alpha^h = 1/I_{hh}, \qquad \beta^h = -I_{h,r+h}, \qquad \gamma^h = 0, \qquad \delta^h = I_{hh}.$$

On peut donc supposer que les coefficients de la formule (10) satisfont aux relations

(11) $$I_{hh} = 1, \qquad I_{h,r+h} = 0.$$

Les substitutions du groupe $Sp(n)$ qui conservent les expressions (6) et (8) et la propriété de la formule (10), exprimée par les égalités ci-dessus, ont la forme

(12) $$\omega^h = \bar{\omega}^h, \qquad \omega^{r+h} = \bar{\omega}^{r+h} + \gamma^h \bar{\omega}^h,$$

γ^h étant un paramètre arbitraire. Nous voyons donc que *le groupe* (9) *se trouve ainsi réduit à son sous-groupe* (12) à r paramètres. On voit de plus que *les formes linéaires*

(13) $$\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^r$$

sont invariablement liées au système (S) et que les coefficients $I_{h,r+i}$ $(h \neq i)$ dans la formule (10) sont des invariants différentiels du premier ordre de (S), qui peuvent d'ailleurs se réduire à des constantes.

Or, considérons l'un des invariants $I_{h,r+i}$ $(h \neq i)$ qui ne soit pas nul. Supposons, pour fixer les idées, que ce soit le coefficient $I_{2,r+1}$ et effectuons sur les formes ω^1 et ω^{r+1} la substitution

$$\omega^1 = \bar{\omega}^1, \qquad \omega^{r+1} = \bar{\omega}^{r+1} + \gamma^1 \bar{\omega}^1$$

appartenant au groupe (12). Si l'on pose $h = 2$ dans la formule (10) et que l'on y effectue la substitution ci-dessus, le coefficient de $\bar{\omega}^1$ sera

$$I_{21} + \gamma^1 I_{2,r+1}.$$

Il suffit donc de poser $\gamma^1 = -I_{21}/I_{2,r+1}$ pour que ce coefficient s'annule. Par conséquent, si l'on tient compte des égalités (11), on aura

$$dI_2 = \omega^2 + I_{23}\omega^3 + \ldots + I_{2r}\omega^r + I_{2,r+1}\omega^{r+1} + I_{2,r+3}\omega^{r+3} + \ldots + I_{2,2r}\omega^{2r}.$$

Pour que la forme de cette expression soit conservée par les substitutions du groupe (12), il faut et il suffit qu'il soit $\gamma^1 = 0$. Le groupe (12) est ainsi réduit à son sous-groupe à $r-1$ paramètres:

$$\omega^h = \bar{\omega}^h, \qquad \omega^{r+1} = \bar{\omega}^{r+1}, \qquad \omega^{r+2} = \bar{\omega}^{r+2} + \gamma^2 \omega^2, \qquad \ldots, \qquad \omega^{2r} = \bar{\omega}^{2r} + \gamma^r \bar{\omega}^r,$$

et la forme ω^{r+1} est maintenant liée invariablement au système (S).

En procédant de cette manière on trouve de nouvelles formes invariantes; en changeant au besoin les numéros des produits $[\omega^h \omega^{r+h}]$ on peut supposer que ces formes font la suite

$$\omega^{r+1}, \omega^{r+2}, \ldots, \omega^{r+p}, \tag{14}$$

que l'on doit regarder comme le prolongement de la suite (13). En même temps le groupe (12) se réduit aux substitutions suivantes:

$$\begin{gathered} \omega^1 = \bar{\omega}^1, \quad \omega^2 = \bar{\omega}^2, \quad \ldots, \quad \omega^{r+p} = \bar{\omega}^{r+p}, \\ \omega^{r+p+1} = \bar{\omega}^{r+p+1} + \gamma^{p+1} \bar{\omega}^{p+1}, \quad \ldots, \quad \omega^{2r} = \bar{\omega}^{2r} + \gamma^r \bar{\omega}^r. \end{gathered} \tag{15}$$

Si tous les coefficients $I_{h,r+i}$ sont nuls, la méthode développée plus haut ne nous permet pas de trouver des formes invariantes $\omega^\varkappa$ où $\varkappa$ est supérieur à r. Dans ce cas, au lieu des formules (10), on aura

$$dI_h = I_{hi} \omega^i.$$

Les formes ω^i et les différentielles dI_h étant invariantes, il s'ensuit que les coefficients I_{hi} sont des invariants différentiels du premier ordre ou des constantes.

4. Nous avons vu au numéro précédent que les invariants principaux I_h nous permettent, en général, de trouver un certain nombre d'invariants différentiels du premier ordre et une suite de formes linéaires invariantes. Notre but étant de résoudre le problème d'équivalence de deux systèmes de forme (1), nous devons trouver le système complet d'invariants différentiels de (S) et réduire en même temps le groupe (15) de telle sorte que le nombre maximum de formes linéaires invariantes soit atteint. Pour accomplir cette tâche nous nous servirons des invariants différentiels du premier ordre et des formes (13) et (14) en montrant que chacune de ces grandeurs donne naissance à de nouveaux objets invariants.

Envisageons d'abord l'un quelconque des invariants différentiels du premier ordre que nous désignerons par J. Posons

$$dJ = J_\varkappa \omega^\varkappa.$$

Le groupe $Sp(n)$ étant par hypothèse réduit aux substitutions (15), on voit que les coefficients $J_1, J_2, \ldots, J_p, J_{r+1}, J_{r+2}, \ldots, J_{2r}$ sont des invariants différentiels du second ordre du système (S). Si l'un des coefficients $J_{r+p+1}, J_{r+p+2}, \ldots, J_{2r}$, par exemple le coefficient J_{r+p+1}, est différent de zéro, on peut, au moyen de la substitution

$$\omega^{p+1} = \bar{\omega}^{p+1}, \quad \omega^{r+p+1} = \bar{\omega}^{r+p+1} + \gamma^{p+1} \bar{\omega}^{p+1}$$

réduire le coefficient de $\bar{\omega}^{p+1}$ à zéro et la forme $\bar{\omega}^{r+p+1}$ deviendra par conséquent invariante. Le même procédé peut être appliqué aux invariants du second ordre que nous avons obtenu et ainsi de suite.

Considérons maintenant l'une quelconque des formes invariantes appartenant à la suite (13) ou (14). Plaçons nous, par exemple, dans le cas mentionné à la fin du numéro précédent, où il n'y a pas de formes invariantes $\omega^\varkappa$ dont le numéro soit supérieur à r, l'autre cas pouvant être traité de la même manière.

En désignant par ω une forme arbitrairement choisie dans la suite (13) posons

$$d\omega = \tfrac{1}{2} A_{ij} [\omega^i \omega^j] + B_{ij} [\omega^i \omega^{r+j}] + \tfrac{1}{2} C_{ij} [\omega^{r+i} \omega^{r+j}]. \tag{16}$$

Le groupe $Sp(n)$ étant dans le cas envisagé ici réduit au sous-groupe (12), il est clair que les coefficients C_{ij} sont des invariants du système (S). Supposons que l'un de ces coefficients, par exemple le coefficient C_{12}, est différent de zéro et effectuons sur les formes ω^2 et ω^{r+2} la substitution

$$\omega^2 = \bar{\omega}^2, \qquad \omega^{r+2} = \bar{\omega}^{r+2} + \gamma^2 \bar{\omega}^2, \qquad \omega^{\varkappa'} = \bar{\omega}^{\varkappa'} \qquad (\varkappa' \neq 2, r+2).$$

Si l'on assujettit l'expression (16) à cette substitution, le coefficient du produit $[\bar{\omega}^2 \bar{\omega}^{r+1}]$ sera égal à $B_{21} - C_{12}\gamma^2$. Donc, si l'on pose $\gamma^2 = B_{21}/C_{12}$, il deviendra nul. La forme $\bar{\omega}^{r+2}$ sera maintenant invariante et le groupe (12) se réduira à son sous-groupe que l'on obtiendra en posant $\gamma^2 = 0$. Si tous les coefficients C_{ij} sont nuls, les coefficients B_{ij} seront des invariants différentiels et si l'un d'eux n'est pas égal à une constante, on peut s'en servir pour obtenir de nouvelles formes invariantes et de nouveaux invariants différentiels.

5. Nous voyons ainsi que de tout invariant différentiel et de toute forme linéaire invariante on peut déduire, en général, de nouveaux objets invariants de cette espèce. En appliquant ces procédés, on aboutit à obtenir un ensemble (F) composé d'invariants différentiels indépendants et de formes linéaires invariantes qui ne se laisse plus étendre au moyen de la méthode employée plus haut. Remarquons que (F) contient au moins r invariants (invariants principaux) et r formes invariantes, notamment les formes de la suite (13), et que le groupe $Sp(n)$ se réduit au groupe (12) ou à l'un des sous-groupes de celui-ci. Les formes linéaires appartenant à (F) forment donc dans tous les cas une suite

$$\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{r+p} \tag{17}$$

où $0 \leqslant p \leqslant r$.

Trois cas peuvent alors se présenter:

A. (F) est composé de n invariants indépendants et de n formes invariantes $\omega^\varkappa$; il est d'ailleurs évident que, si le nombre d'invariants est égal à n, le nombre de formes invariantes ne peut être inférieur à n, car autrement l'ensemble (F) pourrait être prolongé au moyen des différentielles des invariants.

B. La suite (17) contient n termes, le nombre d'invariants différentiels indépendants faisant partie de (F) étant inférieur à n.

C. Le nombre d'invariants indépendants et celui de formes invariantes qui font partie de (F) sont tous les deux inférieurs à n.

Ajoutons que dans les premiers deux cas le groupe $Sp(n)$ est réduit à l'identité et que dans le troisième cas il se réduit au groupe (12) ou (15) suivant que le nombre de formes linéaires invariantes est égal ou supérieur à r.

Il est évident que dans le cas A l'ensemble (F) est complet; cela veut dire que tout invariant différentiel du système (S) s'exprime au moyen des invariants appartenant à (F) et que toute forme différentielle linéaire invariablement liée à (S) peut être représentée par une expression $A_\varkappa \omega^\varkappa$ dont les coefficients sont des invariants ou des constantes. Nous montrerons dans la suite que (F) jouit de la même propriété dans les deux autres cas.

Nous allons étudier séparément chacun de ces trois cas.

6. Supposons en premier lieu que (F) contient n invariants différentiels indépendants; nous les désignerons par $I_\varkappa$. Les r premiers de ces invariants sont, bien entendu, identiques avec les invariants principaux, qui ont été désignés par les mêmes symboles. Posons

$$dI_\varkappa = I_{\varkappa\lambda}\,\omega^\lambda. \tag{18}$$

Les différentielles $dI_\varkappa$ et les formes $\omega^\varkappa$ étant invariantes, il s'ensuit que tous les coefficients dans la formule (18) sont des invariants différentiels. Comme les $I_\varkappa$ sont indépendants, on peut exprimer à leur aide tous les coefficients $I_{\varkappa\lambda}$. Posons

$$I_{\varkappa\lambda} = I_{\varkappa\lambda}(I_1, I_2, \ldots, I_n). \tag{19}$$

Nous donnerons à ces équations le nom *d'équations naturelles du système* (S) dans le cas envisagé ici. Les formules (18) permettent d'exprimer les formes $\omega^\varkappa$ au moyen des variables $I_\varkappa$ et de leurs différentielles $dI_\varkappa$. Par suite, si deux systèmes (S) et $(\bar{S})$, l'un aux variables $x^\varkappa$ et l'autre aux variables $\bar{x}^\varkappa$, ont les mêmes équations naturelles de forme (19), ils sont équivalents et l'on obtient les équations de transformation de l'un de ces systèmes dans l'autre, en égalant les invariants correspondants.

Remarquons que les fonctions qui figurent dans les seconds membres des équations (19) ne peuvent être choisies arbitrairement, mais qu'elles doivent satisfaire à certaines relations que l'on peut obtenir de la façon suivante. On différentie extérieurement les équations (18), ce qui nous donne les relations

$$I_{\varkappa\lambda} d\omega^\lambda + \frac{\partial I_{\varkappa\lambda}}{\partial I_\mu} [dI_\mu \omega^\lambda] = 0 .$$

Si l'on y remplace les différentielles dI_μ par leurs expressions tirées de (18), on trouve

$$I_{\varkappa\lambda} d\omega^\lambda + I_{\mu\nu} \frac{\partial I_{\varkappa\lambda}}{\partial I_\mu} [\omega^\nu \omega^\lambda] = 0 .$$

Si l'on résout ces équations par rapport à $d\omega^\lambda$, ce qui est toujours possible, le déterminant $|I_{\varkappa\lambda}|$ étant différent de zéro dans le cas considéré ici, on arrive aux formules de la forme suivante:

$$d\omega^\lambda = G^\lambda_{\varrho\sigma}(I_{\varkappa\lambda}, \partial I_{\mu\nu}/\partial I_\tau)[\omega^\varrho \omega^\sigma] .$$

En les différentiant extérieurement et en tenant compte des équations mêmes, on obtient une forme différentielle extérieure du troisième degré qui doit s'annuler identiquement. En égalant à zéro les coefficients des produits $[\omega^\varkappa \omega^\lambda \omega^\mu]$ dans cette forme, on obtient des équations aux dérivées partielles du second ordre des fonctions $I_{\varkappa\lambda}$. Celles-ci expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations (19) soient des équations naturelles d'un système de deux formes différentielles extérieures.

7. Nous allons traiter ici le cas B, où le nombre d'invariants différentiels indépendants appartenant à (F) est inférieur à n, toutes les formes $\omega^\varkappa$ étant invariantes. Désignons les invariants par $I_1, I_2, \ldots, I_{r+p}$ $(0 \leqslant p < r)$ et considérons les équations

$$(20) \qquad \tilde{I}_1 = I_1, \quad \tilde{I}_2 = I_2, \quad \ldots, \quad \tilde{I}_{r+p} = I_{r+p}, \quad \tilde{\omega}^\varkappa = \omega^\varkappa$$

où les premiers membres désignent ce que deviennent respectivement les fonctions $I_1, I_2, \ldots, I_{r+p}$ et les formes $\omega^\varkappa$, si l'on y remplace les variables $x^\varkappa$ par $\tilde{x}^\varkappa$. Nous regardons les $\tilde{x}^\varkappa$ dans les équations (20) comme les variables dépendantes, les $x^\varkappa$ jouant le rôle des variables indépendantes. Les formes $\omega^\varkappa$ étant par hypothèse invariantes, tous les coefficients dans les formules

$$d\omega^\varkappa = \tfrac{1}{2} A^\varkappa_{\varrho\sigma} [\omega^\varrho \omega^\sigma], \qquad A^\varkappa_{\varrho\sigma} + A^\varkappa_{\sigma\varrho} = 0$$

sont des invariants différentiels du système (S); la même remarque s'applique aux coefficients dans les expressions des différentielles

$$dI_s = I_{s\varrho} \omega^\varrho \qquad (s = 1, 2, \ldots, r+p).$$

Tous les invariants $A^{\varkappa}_{\varrho\sigma}$ et $I_{s\varrho}$ doivent s'exprimer au moyen de $I_1, I_2, \ldots, I_{r+p}$, car autrement la suite $I_1, I_2, \ldots, I_{r+p}$ pourrait être prolongée contrairement à l'hypothèse faite ici sur l'ensemble (F). Il en résulte que, si l'on ferme le système différentiel (20), en lui adjoignant les équations qui en proviennent au moyen de la différentiation extérieure

$$d\tilde{I}_1 = dI_1, \quad d\tilde{I}_2 = dI_2, \quad \ldots, \quad d\tilde{I}_{r+p} = dI_{r+p}, \quad d\tilde{\omega}^{\varkappa} = d\omega^{\varkappa},$$

celles-ci seront des conséquences des équations (20). Ceci montre que le système (20) est complètement intégrable, son intégrale générale dépendant de $r-p$ constantes arbitraires. Nous avons ainsi démontré que dans le cas B le système (S) admet un groupe continu fini (intransitif) à $r-p$ paramètres.

Il en résulte que l'ensemble (F) est complet (voir la fin du nº 5), car s'il en était autrement, c'est-à-dire s'il existait un invariant ou une forme différentielle invariante n'appartenant pas à (F), le système (S) ne pourrait admettre le groupe de transformations définies par les équations (20).

Les équations naturelles du système (S) peuvent s'écrire dans le cas B comme il suit:

$$A^{\varkappa}_{\varrho\sigma} = A^{\varkappa}_{\varrho\sigma}(I_1, I_2, \ldots, I_{r+p}), \qquad I_{s\varrho} = I_{s\varrho}(I_1, I_2, \ldots, I_{r+p})$$

et on peut énoncer sur ces équations et sur le problème de l'équivalence de deux systèmes de forme (1) des remarques analogues à celles qui ont été faites dans le numéro précédent.

8. Passons enfin au cas C en supposant que le nombre des invariants différentiels et celui des formes invariantes faisant partie de l'ensemble (F) sont tous les deux inférieurs à n. Désignons ces grandeurs respectivement par

$$I_1, I_2, \ldots, I_{r+p} \qquad (0 \leqq p < r)$$

et

$$\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{r+q} \qquad (0 \leqq q < r).$$

Le sous-groupe de $Sp(n)$ qui intervient dans ce cas se compose des substitutions que l'on obtient en posant dans les formules (12) $\gamma^1 = \gamma^2 = \ldots = \gamma^q = 0$,

$$\begin{gathered} \omega^1 = \bar{\omega}^1, \quad \omega^2 = \bar{\omega}^2, \quad \ldots, \quad \omega^{r+q} = \bar{\omega}^{r+q}, \\ \omega^{r+q+1} = \bar{\omega}^{r+q+1} + \gamma^{q+1}\bar{\omega}^{q+1}, \quad \ldots, \quad \omega^{2r} = \bar{\omega}^{2r} + \gamma^r \bar{\omega}^r. \end{gathered} \tag{21}$$

Remarquons que le nombre p ne peut être supérieur à q. En effet, calculons les différentielles des invariants I; on aura

$$dI_t = I_{t\varrho}\omega^{\varrho} \qquad (t = 1, 2, \ldots, r+p). \tag{22}$$

Les coefficients des formes $\omega^{r+q+1}, \omega^{r+q+2}, \ldots, \omega^{2r}$ dans les formules ci-dessus ne peuvent être différents de zéro, car s'il en était autrement, on pourrait réduire le sous-groupe (21) et augmenter le nombre de formes invariantes, en se servant du raisonnement appliqué à plusieurs reprises dans ce qui précède (voir par exemple p. 9). Par conséquent les seconds membres des formules (22) ne contiennent que les formes $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{r+q}$ et comme les invariants I_t sont, par hypothèse, indépendants, il s'ensuit qu'il doit être $q \geqslant p$.

Le système (F) ne pouvant, d'après sa définition, être prolongé au moyen des méthodes dont nous avons fait usage plus haut, il est bien naturel de présumer que le système (S) admet, comme dans le cas B, un groupe de transformations. Ces transformations, s'il en existe, sont définies par les équations

$$(23) \qquad \begin{array}{llll} \tilde{I}_1 = I_1, & \tilde{I}_2 = I_2, & \ldots. & \tilde{I}_{r+p} = I_{r+p}, \\ \tilde{\omega}^1 = \omega^1, & \tilde{\omega}^2 = \omega^2, & \ldots. & \tilde{\omega}^{r+q} = \omega^{r+q}, \\ \multicolumn{2}{l}{\tilde{\omega}^{r+q+1} = \omega^{r+q+1} + y^1 \omega^{q+1},} & \ldots. & \tilde{\omega}^{2r} = \omega^{2r} + y^{r-q} \omega^r, \end{array}$$

où les premiers membres désignent ce que deviennent respectivement les fonctions I et les formes ω, si l'on y remplace $x^\varkappa$ par $\tilde{x}^\varkappa$. Nous considérons dans ces équations $x^\varkappa$ comme des variables indépendantes, $\tilde{x}^\varkappa$ et $y^1, y^2, \ldots, y^{r-q}$ comme des inconnues. Pour justifier notre conjecture il faut démontrer que le système (23) est en involution relativement aux variables $x^\varkappa$ ou, ce qui est la même chose, relativement aux formes $\omega^\varkappa$. On doit dans ce but fermer le système en différentiant extérieurement ses équations.

Montrons d'abord que les équations qui figurent dans les deux premières lignes des égalités (23) forment un système complètement intégrable. En effet, nous avons vu plus haut que dans les formules (22) n'interviennent que les formes $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{r+q}$; par conséquent les coefficients de ces formes sont des invariants du système (S) s'exprimant au moyen des invariants I_t $(t=1,2,\ldots,r+p)$. Donc les équations que l'on obtient en différentiant extérieurement les équations $\tilde{I}_t = I_t$ $(t= =1,2,\ldots,r+p)$ sont des conséquences des équations de deux premières lignes de (23).

Considérons maintenant l'une quelconque des formes ω^Q $(Q=1,2, \ldots, r+q)$. En la différentiant, on obtient

$$d\omega^Q = \tfrac{1}{2} A^Q_{PR} [\omega^P \omega^R] + B^Q_{PP'} [\omega^P \omega^{P'}] + \tfrac{1}{2} C^Q_{P'R'} [\omega^{P'} \omega^{R'}],$$

$$C^Q_{P'R'} + C^Q_{R'P'} = 0, \qquad A^Q_{PR} + A^Q_{RP} = 0$$

$$(P, Q, R = 1,2,\ldots, r+q; \qquad P', R' = r+q+1, r+q+2, \ldots, 2r).$$

Supposons que l'un des coefficients C, par exemple le coefficient $C^Q_{r+q+1,r+q+2}$ est différent de zéro et faisons sur les $\omega^\varkappa$ la substitution suivante du groupe (21):

$$\omega^{r+q+2} = \bar{\omega}^{r+q+2} + \gamma^{q+2}\,\bar{\omega}^{q+2}, \qquad \omega^{\varkappa'} = \bar{\omega}^{\varkappa'} \qquad (\varkappa' \neq r+q+2);$$

il est facile de voir que l'on peut choisir le paramètre γ^{q+2} de manière que le coefficient de $[\bar{\omega}^{q+2}\bar{\omega}^{r+q+2}]$ devienne nul. Cette propriété ne reste invariante que par celles des substitutions (21) qui laissent inaltérée la forme ω^{r+q+2}. Ceci étant en contradiction avec l'hypothèse faite sur le système (F), nous en concluons que tous les coefficients C sont nuls. Un raisonnement semblable montre que les coefficients B dans la dernière formule doivent aussi être égaux à zéro. On a donc

$$d\omega^Q = \tfrac{1}{2} A^Q_{PR}[\omega^P\omega^R] \qquad (P, Q, R = 1, 2, \ldots, r+q).$$

Toutes les formes qui y figurent étant invariantes, il s'ensuit que les coefficients A sont des invariants, ils sont par suite des fonctions des invariants I_t $(t=1,2,\ldots,r+p)$. En résumant les résultats obtenus nous pouvons dire qu'en fermant le système d'équations

$$\begin{array}{llll} \tilde{I}_1 = I_1, & \tilde{I}_2 = I_2, & \ldots, & \tilde{I}_{r+p} = I_{r+p}, \\ \tilde{\omega}^1 = \omega^1, & \tilde{\omega}^2 = \omega^2 & \ldots, & \tilde{\omega}^{r+q} = \omega^{r+q}, \end{array}$$

on obtient des relations qui sont des conséquences des équations du système. Ce système est par conséquent complètement intégrable, son intégrale générale dépendant de $q-p$ constantes arbitraires.

Revenons maintenant au système (23); pour le fermer il suffit, d'après ce qui précède, de lui adjoindre les relations que l'on obtient en différentiant extérieurement les équations de la troisième ligne. Les voici:

$$d\tilde{\omega}^{r+q+1} = d\omega^{r+q+1} + y^1 d\omega^{q+1} + [dy^1\omega^{q+1}], \ldots, d\tilde{\omega}^{2r} = d\omega^{2r} + y^{r-q} d\omega^r + [dy^{r-q}\omega^r].$$

Si l'on y exprime les différentielles au moyen des formes $\omega^\varkappa$ et $\tilde{\omega}^\varkappa$ et que l'on tient compte des équations du système (23), on sera conduit aux relations de la forme

$$\begin{array}{ll} & M^{r+q+1}_{\varrho\sigma}[\omega^\varrho\omega^\sigma] + [dy^1\omega^{q+1}] = 0, \\ (24) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & M^{2r}_{\varrho\sigma}[\omega^\varrho\omega^\sigma] + [dy^{r-q}\omega^r] = 0, \end{array}$$

où les coefficients M sont des fonctions des variables $x^\varkappa, \tilde{x}^\varkappa$ et $y^1, y^2, \ldots, y^{r-q}$. Pour démontrer que le système (23) est en involution, nous allons appliquer le critère de Cartan ([4], p. 96).

Soient

$$dy^1 = a^1_\varrho \omega^\varrho, \qquad dy^2 = a^2_\varrho \omega^\varrho, \qquad \ldots, \qquad dy^{r-q} = a^{r-q}_\varrho \omega^\varrho$$

les équations d'un élément plan à n dimensions; il dépend de $n(r-q)$ paramètres arbitraires. Pour qu'il soit un élément intégral du système (23), il faut que ces paramètres satisfassent à $(n-1)(r-q)$ relations indépendantes que l'on obtient en substituant dans les équations (24) aux différentielles des variables y les expressions ci-dessus. D'autre part les caractères réduits du système (24) ont les valeurs suivantes:

$$\sigma_0 = 0, \qquad \sigma_1 = r-q, \qquad \sigma_2 = \sigma_3 = \ldots = \sigma_{n-1} = 0.$$

Par suite l'expression

$$n\sigma_0 + (n-1)\sigma_1 + (n-2)\sigma_2 + \ldots + \sigma_{n-1}$$

prend la valeur $(n-1)(r-q)$ qui est égale au nombre des équations qui doivent être vérifiées par les paramètres d'un élément intégral à n dimensions, dont les équations n'impliquent aucune relation entre les différentielles des variables $x^\varkappa$. Il en résulte, d'après le critère de Cartan, que le système (23) est en involution et que son intégrale générale dépend de $r-q$ fonctions arbitraires d'un argument et de $q-p$ constantes arbitraires.

Notre conjecture que le système (S) admet dans le cas C un groupe de transformations est ainsi justifiée.

Les équations (23) qui peuvent être écrites d'une manière plus symétrique

$$d\tilde{\omega}^{r+q+1} + \tilde{y}^1 d\tilde{\omega}^{q+1} + [d\tilde{y}^1 \tilde{\omega}^{q+1}] = d\omega^{r+q+1} + y^1 d\omega^{q+1} + [dy^1 \omega^{q+1}]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d\tilde{\omega}^{2r} + \tilde{y}^{r-q} d\tilde{\omega}^r + [d\tilde{y}^{r-q} \tilde{\omega}^r] = d\omega^{2r} + y^{r-q} d\omega^r + [dy^{r-q} \omega^r],$$

sont les équations de définition ([1], p. 223) de ce groupe qui est infini.

Exemple. Considérons le système composé des formes

$$\Phi = \sum_{h=1}^{r} [dx^h dx^{r+h}], \qquad \Psi = \sum_{h=1}^{r} x^h x^{r+h} [dx^h dx^{r+h}].$$

Les invariants principaux de ce système sont donnés par les formules $I_h = x^h x^{r+h}$; si l'on pose encore $\omega^\varkappa = dx^\varkappa$, Φ et Ψ prendront respectivement la forme

$$\Phi = \sum_{h=1}^{r} [\omega^h \omega^{r+h}], \qquad \Psi = \sum_{h=1}^{r} I_h [\omega^r \omega^{r+h}].$$

Cette forme sera conservée, si l'on assujettit $\omega^\varkappa$ à la transformation (9) du n° 2. En suivant la marche adoptée dans ce numéro calculons la différentielle dI_h; on aura

$$dI_h = x^{r+h} \omega^h + x^h \omega^{r+h}.$$

Si l'on fait sur les $\omega^\varkappa$ la substitution

$$\omega^h = \frac{1}{x^{r+h}}\,\bar{\omega}^h - x^h\bar{\omega}^{r+h}, \qquad \omega^{r+h} = x^{r+h}\bar{\omega}^{r+h}, \tag{25}$$

appartenant au groupe (9), on obtient $dI_h = \bar{\omega}^h$. Le système (F) (voir p. 10) se compose donc dans le cas considéré ici de r formes ω^h et de r invariants I_h. Le système des formes Φ et Ψ appartient donc à la classe que nous avons désignée par C. Il admet un groupe infini dont les équations de définition peuvent être écrites comme il suit:

$$\tilde{x}^h\tilde{x}^{r+h} = x^h x^{r+h}, \qquad \tilde{\omega}^h = \bar{\omega}^h, \qquad \tilde{\omega}^{r+h} = \bar{\omega}^{r+h} + y^h\bar{\omega}^h.$$

Des équations (25) on déduit les formules

$$\bar{\omega}^h = d(x^h x^{r+h}), \qquad \bar{\omega}^{r+h} = d\log x^{r+h}.$$

Les équations du groupe ont donc la forme

$$\tilde{x}^h\tilde{x}^{r+h} = x^h x^{r+h}, \qquad d\log\tilde{x}^{r+h} = d\log x^{r+h} + y^h d(x^h x^{r+h}).$$

En fermant ce système, on obtient les relations

$$[dy^h d(x^h x^{r+h})] = 0,$$

d'où il suit que y^h doit être une fonction arbitraire du produit $x^h x^{r+h}$; $y^h = \varphi^h(x^h x^{r+h})$. On en déduit facilement que le système envisagé admet le groupe infini des transformations

$$\tilde{x}^h = x^h e^{-\varphi^h(x^h x^{r+h})}, \qquad \tilde{x}^{r+h} = x^{r+h} e^{\varphi^h(x^h x^{r+h})}.$$

9. Dans les cas que nous avons désignés par A et B (n° 5) il y a n formes différentielles linéaires $\omega^\varkappa$, liées invariablement au système (S). En nous plaçant dans l'un quelconque de ces cas posons

$$d\omega^\varkappa = \tfrac{1}{2} S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}[\omega^\lambda\omega^\mu], \qquad S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} + S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} = 0 \tag{26}$$

et attachons à un point arbitraire $M(x^\varkappa)$ du domaine (D) (cf. n° 1) un repère affine R_n composé de M comme origine et de n vecteurs indépendants I_α. Le déplacement infinitésimal qui fait passer le repère R_n en celui attaché au point infiniment voisin $M'(x^\varkappa + dx^\varkappa)$ soit déterminé par les formules

$$dM = \omega^\varkappa I_\varkappa, \qquad dI_\varkappa = 0. \tag{27}$$

On a ainsi doué le domaine (D) d'une connexion affine $\mathfrak{A}_n$ de courbure nulle et de torsion de composantes $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$. Dans le cas B l'espace de connexion $\mathfrak{A}_n$ admet un groupe fini d'ordre $n-q$, où q désigne, comme au n° 7, le nombre d'invariants différentiels faisant partie de la famille (F): nous rappelons que les composantes $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$ sont ici des invariants de (S).

Considérons maintenant le cas C en adoptant les conventions et les notations du n° 8. Il n'y a ici que $r+q<n$ formes $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{r+q}$ complètement déterminées, qui sont liées invariablement au système (S), toutes les autres n'étant définies qu'à la substitution (20) près. Posons

$$\Omega^2 = \omega^1, \qquad \Omega^2 = \omega^2, \qquad \ldots, \qquad \Omega^{r+q} = \omega^{r+q},$$
$$(28) \qquad \Omega^{r+q+1} = \omega^{r+q+1} + y^1 \omega^{q+1}, \qquad \ldots, \qquad \Omega^{2r} = \omega^{2r} + y^{r-q}\omega^r,$$

$y^1, y^2, \ldots, y^{r-q}$ désignant des fonctions arbitraires des variables $x^\varkappa$. En écrivant

$$dM = \Omega^\varkappa I_\varkappa, \qquad dI_\varkappa = 0,$$

on définit dans (D) toute une famille de connexions affines sans courbure dépendantes du choix des fonctions y. Si l'on se sert des égalités (28) et si l'on tient compte des résultats obtenus au n° 8, on trouve au moyen de la différentiation extérieure des formules de la forme suivante:

$$(29) \quad d\Omega^Q = \tfrac{1}{2} S_{PR}^{\cdot\cdot Q}[\Omega^P \Omega^R], \qquad S_{PR}^{\cdot\cdot Q} + S_{RP}^{\cdot\cdot Q} = 0, \qquad (P, Q, R = 1, 2, \ldots, r+q)$$

et

$$d\Omega^{r+q+1} = \tfrac{1}{2} A_{\varrho\sigma}^{r+q+1}[\Omega^\varrho \Omega^\sigma] + [dy^1 \Omega^{q+1}], \ldots, d\Omega^{2r} = \tfrac{1}{2} A_{\varrho\sigma}^{2r}[\Omega^\varrho \Omega^\sigma] + [dy^{r-q}\Omega^r],$$
$$(30) \qquad A_{\varrho\sigma}^{r+q+1} + A_{\sigma\varrho}^{r+q+1} = 0, \ldots, A_{\varrho\sigma}^{2r} + A_{\sigma\varrho}^{2r} = 0.$$

En égalant à zéro les seconds membres des formules (30) on obtient un système de $r-q$ équations aux inconnues $y^1, y^2, \ldots, y^{r-q}$; le voici:

$$\tfrac{1}{2} A_{\varrho\sigma}^{r+q+1}[\Omega^\varrho \Omega^\sigma] + [dy^1 \Omega^{q+1}] = 0, \ldots, \tfrac{1}{2} A_{\varrho\sigma}^{2r}[\Omega^\varrho \Omega^\sigma] + [dy^{r-q}\Omega^r] = 0.$$

Si l'on différentie ses équations extérieurement, on obtient des identités, vu le mode au moyen duquel elles ont été obtenues. Il en résulte que ce système est complètement intégrable, on peut par suite déterminer les fonctions y de manière que les équations (29) et (30) se réduisent aux suivantes:

$$d\Omega^Q = \tfrac{1}{2} S_{PR}^{\cdot\cdot Q}[\Omega^P \Omega^R], \qquad d\Omega^{Q'} = 0$$
$$(31) \qquad (P, Q, R = 1, 2, \ldots, r+q;\ Q' = r+q+1,\ r+q+2, \ldots, 2r).$$

Rappelons que les composantes $S_{PR}^{\cdot\cdot Q}$ sont des invariants de (S).

Nous pouvons donc constater que dans tous les trois cas A, B et C on peut associer au système (S) une connexion affine sans courbure qui y est liée intrinsèquement.

10. Dans les numéros précédents nous avons traité le problème d'équivalence dans le cas général où les invariants principaux du système (S) sont des fonctions indépendantes. Si cette condition n'est pas remplie, si, en particulier, les racines de l'équation (5) ne sont pas différentes, on peut néanmoins se servir de la même méthode dont nous avons fait usage dans le cas général. On devrait maintenant remplacer la formule (8) par une autre, dont la forme dépend du nombre des racines égales de l'équation (5) ([8], p. 131). La discussion des divers cas possibles pour n arbitraire exigerait des raisonnements assez longs et pénibles. Nous nous bornerons à quelques indications dans un cas spécial de deux formes qui interviennent dans la théorie de l'électromagnétisme.

En désignant respectivement par $\boldsymbol{B}(B_1,B_2,B_3)$, $\boldsymbol{D}(D_1,D_2,D_3)$, $\boldsymbol{E}(E_1,E_2,E_3)$ et $\boldsymbol{H}(H_1,H_2,H_3)$ induction magnétique, induction électrique, vecteur électrique, et vecteur magnétique, posons

$$\begin{matrix} F_{i4}=E_i, & F_{23}=B_1, & F_{31}=B_2, & F_{12}=B_3, \\ M_{i4}=H_i, & M_{23}=-D_1, & M_{31}=-D_2, & M_{12}=-D_3 \end{matrix} \qquad (i=1,2,3)$$

Les équations de Maxwell s'écrivent alors sous la forme suivante ([3], p. 17; [6]):

$$d\Phi=0, \qquad d\Psi=I,$$

où l'on a posé

$$\Phi=\tfrac{1}{2}F_{\varkappa\lambda}[dx^\varkappa dx^\lambda], \qquad \Psi=\tfrac{1}{2}M_{\varkappa\lambda}[dx^\varkappa dx^\lambda],$$

$$I=J_1[dx^2dx^3dx^4]-J_2[dx^1dx^3dx^4]+J_3[dx^1dx^2dx^4]-\varrho[dx^1dx^2dx^3],$$

ϱ étant la densité électrique et $\boldsymbol{J}(J_1,J_2,J_3)$ le courant électrique. Un calcul facile montre que les densités $\mathfrak{A}_h$ définies au n° 1 prennent pour le système composé de Φ et Ψ la forme

$$\mathfrak{A}_0=2\boldsymbol{EB}, \qquad \mathfrak{A}_1=\boldsymbol{BH}-\boldsymbol{ED}, \qquad \mathfrak{A}_2=-2\boldsymbol{HD}.$$

En supposant qu'il soit $\boldsymbol{EB}\neq 0$, posons

$$I_1=\frac{\boldsymbol{BH}-\boldsymbol{ED}}{\boldsymbol{EB}}, \qquad I_2=\frac{\boldsymbol{HD}}{\boldsymbol{EB}};$$

l'équation (5) du n° 1 devient maintenant

(32) $$s^2-2I_1s+I_2=0.$$

Si les racines de cette équation sont distinctes, Φ et Ψ peuvent être réduits à la forme

(33) $$\Phi=[\omega^1\omega^3]+[\omega^2\omega^4], \qquad \Psi=S^1[\omega^1\omega^3]+S^2[\omega^2\omega^4]$$

et au champ électromagnétique peut être liée intrinsèquement une connexion affine sans courbure (cf. n° 9). Si les racines de l'équation (32) étant différentes ne sont pas réelles, Φ et Ψ peuvent être réduits à la forme ([8], p. 132):

$$\Phi=[\omega^1\omega^3]+[\omega^2\omega^4], \qquad \Psi=a\{[\omega^1\omega^3]+[\omega^2\omega^4]\}+b\{[\omega^1\omega^2]-[\omega^3\omega^4]\},$$

$\omega^\varkappa$ étant liés invariablement avec le champ électromagnétique; on peut donc aussi construire une connexion affine sans courbure associée intrinsèquement au champ. Si enfin les racines sont égales, Φ et Ψ peuvent être ramenés aux expressions suivantes:

$$\Phi=[\omega^1\omega^3]+[\omega^2\omega^4], \qquad \Psi=S\{[\omega^1\omega^3]+[\omega^2\omega^4]\}+A[\omega^2\omega^3].$$

Les formes linéaires $\omega^\varkappa$ ne sont pas dans ce cas liées invariablement avec le système composé de Φ et Ψ; pour résoudre le problème de l'équivalence on devrait appliquer aux grandeurs S et A la méthode suivie au n° 3.

II. Invariants d'une forme différentielle extérieure du second degré

11. Soit donnée la forme

$$\Phi = \tfrac{1}{2} a_{\varkappa\lambda} [dx^\varkappa dx^\lambda], \qquad a_{\varkappa\lambda} + a_{\lambda\varkappa} = 0 \tag{1}$$

dont les coefficients sont des fonctions analytiques holomorphes dans un domaine (D) de l'espace numérique $x^\varkappa$. Nous supposons que le rang et, par suite, la classe de Φ sont égaux à $n = 2r$. Le déterminant $a = |a_{\varkappa\lambda}|$ étant différent de zéro, posons

$$a^{\varkappa\lambda} = \partial \log a / \partial a_{\varkappa\lambda}.$$

Nous obtenons ainsi la grandeur $\{a^{\varkappa\lambda}\}$ qui est un bivecteur contrevariant. Les composantes des bivecteurs $\{a_{\varkappa\lambda}\}$ et $\{a^{\varkappa\lambda}\}$ permettent d'abbaisser et d'élever les indices d'un tenseur quelconque du domaine (D); dans le cas des vecteurs on a les formules

$$u_\varkappa = a_{\varrho\varkappa} u^\varrho, \qquad v^\varkappa = a^{\varkappa\varrho} v_\varrho$$

qui s'étendent facilement aux tenseurs d'ordres supérieurs. Les composantes $a_{\varkappa\lambda}$ et $a^{\varkappa\lambda}$ étant antisymétriques il faut observer l'ordre des indices de sommation; nous convenons d'abbaisser au moyen du premier indice de $a_{\varkappa\lambda}$ et d'élever au moyen du second indice de $a^{\varkappa\lambda}$ ([8], p. 75).

En différentiant Φ extérieurement on obtient l'expression de la forme

$$d\Phi = S_{\varkappa\lambda\mu} [dx^\varkappa dx^\lambda dx^\mu]/3!,$$

$S_{\varkappa\lambda\mu}$ désignant des grandeurs antisymétriques en leurs indices; ces coefficients sont donc des composantes d'un trivecteur covariant. En se servant des règles du jeu d'indices données plus haut on déduit successivement du trivecteur $\{S_{\varkappa\lambda\mu}\}$ le tenseur mixte $\{S_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu}\}$ et le vecteur $\{S_\varkappa\}$ de composantes $S_\varkappa = S_{\varkappa\varrho}^{\cdot\cdot\varrho}$. La forme linéaire

$$\sigma = S_\varkappa dx^\varkappa \tag{2}$$

et sa différentielle extérieure sont donc invariablement liées à la forme Φ. En désignant cette différentielle par Ψ on aura

$$\Psi = \tfrac{1}{2} S_{\varkappa\lambda} [dx^\varkappa dx^\lambda], \tag{3}$$

où

$$S_{\varkappa\lambda} = \frac{\partial S_\lambda}{\partial x^\varkappa} - \frac{\partial S_\varkappa}{\partial x^\lambda}. \tag{4}$$

Au système (S) formé de deux formes Φ et Ψ peuvent être appliqués tous les raisonnements du Chapitre I. On construit d'abord pour ce but le système d'invariants principaux de (S) (n° 1) qui sont des invariants différentiels du premier ordre de Φ. Si ces invariants sont indépendants, la méthode présentée dans ce Chapitre permet de résoudre complètement le problème de l'équivalence de deux formes différentielles extérieures du second degré. On peut aussi dans ce cas construire une connexion affine sans courbure liée invariablement à Φ et déterminer le groupe de transformations admises par Φ. Si les invariants principaux ne sont pas indépendants, on peut s'appuyer sur les remarques indiquées au n° 10 pour résoudre le problème d'équivalence. On doit pourtant remarquer qu'il y a des cas qui échappent à la méthode, c'est ce qui arrive, par exemple, si la forme linéaire σ est fermée ou si les formes Φ et Ψ ne diffèrent que par un facteur constant.

III. Connexion symplectique

12. Soient $x^\varkappa$ les coordonnées d'un point arbitraire M de l'espace numérique à $n=2r$ dimensions. Attachons à M l'espace symplectique G_n rapporté à un repère symplectique R_n composé du point M comme origine et de n vecteurs indépendants I_α. La forme fondamentale ([8], p. 75) de G_n peut s'écrire comme il suit:

$$\Omega = \tfrac{1}{2} I_{\varkappa\lambda} [u^\varkappa u^\lambda] \tag{1}$$

où l'on a désigné par $I_{\varkappa\lambda}$ les composantes covariantes du bivecteur fondamental. Celles-ci et les composantes contrevariantes $I^{\varkappa\lambda}$ de ce bivecteur sont définies par les relations

$$I_{\varkappa\lambda} + I_{\lambda\varkappa} = 0, \qquad I^{\varkappa\lambda} + I^{\lambda\varkappa} = 0, \qquad I_{\varkappa\lambda}, I^{\varkappa\lambda} = \begin{cases} 1 \text{ pour } \lambda - \varkappa = r, \\ 0 \text{ pour } |\lambda - \varkappa| \neq r. \end{cases} \tag{2}$$

Les vecteurs I_α du repère R_n satisfont donc aux relations

$$\Omega [I_\alpha, I_\beta] = I_{\alpha\beta} \tag{3}$$

dont le premier membre désigne la valeur de Ω pour la paire ordonnée de vecteurs I_α, I_β.

Au moyen des composantes covariantes et contrevariantes du bivecteur fondamental on peut abbaisser et élever les indices des tenseurs de l'espace G_n en se servant des formules (cf. n° 11):

$$A_\varkappa = I_{\varrho\varkappa} A^\varrho, \qquad B^\varkappa = I^{\varkappa\varrho} B_\varrho. \tag{4}$$

Le mouvement infinitésimal du repère R_n soit défini par les formules

$$dM = \omega^\varrho I_\varrho, \qquad dI_\alpha = \omega_\alpha^\varrho I_\varrho, \tag{5}$$

ω^ϱ et ω_α^ϱ étant des formes différentielles linéaires aux variables $x^\varkappa$; on suppose, bien entendu, que les formes ω^ϱ sont linéairement indépendantes par rapport aux différentielles $dx^\varkappa$. Les vecteurs I_α étant assujettis aux relations (3), on a

$$\Omega [dI_\alpha, I_\beta] + \Omega [I_\alpha, dI_\beta] = 0.$$

En y remplaçant les différentielles des vecteurs par leurs expressions tirées des formules (5) on trouve la relation

$$\omega_\alpha^\varrho \Omega [I_\varrho, I_\beta] + \omega_\beta^\varrho \Omega [I_\alpha, I_\varrho] = 0.$$

Si l'on y tient compte des équations (3), on en déduit la relation

$$I_{\varrho\beta}\,\omega^{\varrho}_{\alpha} + I_{\alpha\varrho}\,\omega^{\varrho}_{\beta} = 0$$

ou, si l'on se sert encore des formules (4),

(6) $$\omega_{\alpha\beta} = \omega_{\beta\alpha}.$$

Au moyen des expressions (5) nous avons défini une connexion affine basée sur le groupe symplectique $Sp(n)$; nous l'appellerons *connexion symplectique* et l'espace doué de cette connexion sera dit *espace symplectique non holonome* et sera désigné par G^*_n. Le bivecteur dont les composantes par rapport au repère symplectique local R_n sont égales, en tout point de G^*_n, aux nombres $I_{\varkappa\lambda}$ sera appelé *bivecteur fondamental* de cet espace; à la forme différentielle extérieure

$$\Omega^* = \tfrac{1}{2}\, I_{\varkappa\lambda}[\omega^{\varkappa}\omega^{\lambda}]$$

nous donnerons le nom de *forme fondamentale* de G^*_n. Il est évident que le bivecteur fondamental et la forme fondamentale sont liés d'une manière invariante à la connexion définie au moyen des formules (5). Pour calculer les composantes du bivecteur fondamental par rapport au repère naturel de l'espace, posons

$$\omega^{\varkappa} = h^{\varkappa}_{\varrho}\, dx^{\varrho}.$$

Si l'on porte ces expressions dans la forme Ω^*, il viendra

$$\Omega^* = \tfrac{1}{2}\, a_{\varrho\sigma}[dx^{\varrho} dx^{\sigma}].$$

Les coefficients $a_{\varrho\sigma}$ ainsi obtenus sont donc les composantes du bivecteur fondamental de G^*_n par rapport au repère naturel. Si l'on désigne par J_{α} les vecteurs-unités de ce repère, on aura la relation

$$\Omega[J_{\alpha}, J_{\beta}] = a_{\alpha\beta}.$$

Pour obtenir les *équations de structure* de G^*_n on doit différentier extérieurement les équations (5); il viendra ainsi

(7) $$d\omega^{\alpha} + [\omega^{\alpha}_{\varrho}\,\omega^{\varrho}] = \Omega^{\alpha}, \qquad d\omega^{\alpha}_{\beta} + [\omega^{\alpha}_{\varrho}\,\omega^{\varrho}_{\beta}] = \Omega^{\alpha}_{\beta},$$

Ω^{α} et Ω^{α}_{β} désignant des formes différentielles extérieures du second degré

(8) $$\Omega^{\alpha} = \tfrac{1}{2}\, S_{\varrho\sigma}^{\cdot\cdot\alpha}[\omega^{\varrho}\omega^{\sigma}], \qquad \Omega^{\alpha}_{\beta} = \tfrac{1}{2}\, R_{\varrho\sigma\beta}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}[\omega^{\varrho}\omega^{\sigma}],$$
$$S_{\varrho\sigma}^{\cdot\cdot\alpha} + S_{\sigma\varrho}^{\cdot\cdot\alpha} = 0, \qquad R_{\varrho\sigma\beta}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} + R_{\sigma\varrho\beta}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} = 0.$$

Les coefficients $S_{\varrho\sigma}^{\cdot\cdot\alpha}$ et $R_{\varrho\sigma\beta}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}$ sont respectivement les composantes des tenseurs de torsion et de courbure de l'espace G^*_n.

Si l'on abbaisse les indices α et ϱ dans la deuxième des équations (7), en se servant des formules (4), on trouve facilement

(9) $$d\omega_{\beta\alpha} + I^{\varrho\sigma}[\omega_{\varrho\alpha}\,\omega_{\beta\sigma}] = \Omega_{\beta\alpha}.$$

En y changeant le rôle des indices α et β, on aura

$$d\omega_{\alpha\beta} + I^{\varrho\sigma}[\omega_{\varrho\beta}\,\omega_{\alpha\sigma}] = \Omega_{\alpha\beta}$$

ou

$$d\omega_{\alpha\beta} - I^{\varrho\sigma}[\omega_{\alpha\sigma}\,\omega_{\varrho\beta}] = \Omega_{\alpha\beta}.$$

Si l'on tient compte des relations (6) et des égalités $I^{\varrho\sigma} = -I^{\sigma\varrho}$, en changeant en même temps le rôle des indices ϱ et σ, la dernière relation s'écrit comme il suit:

$$d\omega_{\beta\alpha} + I_{\varrho\sigma}[\omega_{\varrho\alpha}\,\omega_{\beta\sigma}] = \Omega_{\alpha\beta}.$$

La comparaison avec la formule (9) conduit à l'égalité

$$\Omega_{\alpha\beta} = \Omega_{\beta\alpha}. \tag{10}$$

En la rapprochant de la deuxième des formules (8), il viendra

$$R_{\varrho\sigma\alpha\beta} = R_{\varrho\sigma\beta\alpha}. \tag{11}$$

Posons maintenant

$$\omega_\alpha^\beta = \Gamma_{\alpha\varrho}^\beta\,\omega^\varrho; \tag{12}$$

en abbaissant les indices on en déduit les égalités

$$\omega_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\varrho\beta}\,\omega^\varrho$$

d'où il suit

$$\Gamma_{\alpha\varrho\beta} = \Gamma_{\beta\varrho\alpha}. \tag{13}$$

Les formes ω_α^β et $\omega_{\alpha\beta}$ étant liées par les relations

$$\omega_\alpha^\beta = I^{\beta\varrho}\,\omega_{\alpha\varrho},$$

il en résulte

$$\omega_\alpha^\alpha = I^{\alpha\varrho}\omega_{\alpha\varrho};$$

$\omega_{\alpha\varrho}$ étant symétriques et les quantités $I^{\alpha\varrho}$ étant antisymétriques en leurs indices, la dernière égalité conduit à la relation

$$\omega_\alpha^\alpha = 0 \tag{14}$$

qui est équivalente, d'après (12), aux équations

$$\Gamma_{\alpha\varrho}^\alpha = 0.$$

Celles-ci expriment que la connexion admet une unité de volume. Ce fait était d'ailleurs à prévoir, les transformations du groupe symplectique conservant les volumes.

13. Imaginons maintenant dans G_n^* deux champs des vecteurs $\{u^\varkappa\}$ et $\{v_\varkappa\}$ dont les composantes sont prises par rapport au repère symplectique R_n. Les différentielles absolues de ces vecteurs sont données par les expressions

(15) $$Du^\varkappa = du^\varkappa + \omega_\varrho^\varkappa u^\varrho, \qquad Dv_\varkappa = dv_\varkappa - \omega_\varkappa^\varrho v_\varrho .$$

En faisant usage des formules (12), on trouve que les dérivées covariantes peuvent s'exprimer sous la forme

$$\nabla_\lambda u^\varkappa = \partial_\lambda u^\varkappa + \Gamma_{\varrho\lambda}^\varkappa u^\varrho, \qquad \nabla_\lambda v_\varkappa = \partial_\lambda v_\varkappa - \Gamma_{\varkappa\lambda}^\varrho v_\varrho ;$$

on a désigné ici par ∂_λ l'opération définie au moyen de la formule

$$df = \omega^\lambda \partial_\lambda f,$$

où f est une fonction arbitraire des variables $x^\varkappa$.

Les formules données précédemment se généralisent d'une manière bien connue pour les tenseurs d'ordres supérieurs. Elles peuvent aussi être étendues aux formes différentielles tensorielles ([8], p. 75). Soit donné, par exemple, un vecteur infinitésimal $\{\tau^\varkappa\}$ dont les composantes par rapport à R_n sont des formes différentielles extérieures de degré p; ses différentielles absolues sont définies par les formules

(16) $$D\tau^\varkappa = d\tau^\varkappa + [\omega_\varrho^\varkappa \tau^\varrho].$$

$d\tau^\varkappa$ désignant comme d'habitude la différentielle extérieure de la forme $\tau^\varkappa$. La différentielle absolue d'une forme extérieure scalaire Φ est, bien entendu, identique avec sa différentielle extérieure: $D\Phi = d\Phi$. Les règles du calcul sur les différentielles absolues des formes différentielles tensorielles restent les mêmes que pour les différentielles absolues des tenseurs finis.

En faisant usage de la formule (16), la première des équations (8) peut s'écrire comme il suit:

(17) $$D\omega^\alpha = \Omega^\alpha.$$

Si l'on différentie extérieurement les équations (8), on trouve au moyen d'un calcul facile les relations suivantes (les identités de Bianchi généralisées):

(18) $$D\Omega^\alpha = 0, \qquad D\Omega_\beta^\alpha = 0.$$

On démontre aussi facilement que la seconde différentielle absolue du vecteur $\{\tau^\varkappa\}$ est donnée par la formule

$$D^{(2)}\tau^\varkappa = [\Omega_\varrho^\varkappa \tau^\varrho].$$

Donc, si la courbure de l'espace est nulle, on a

$$D^{(2)}\tau^\varkappa = 0 .$$

14. Ceci posé, appliquons l'opération D au bivecteur fondamental dont les composantes par rapport à R_n sont égales aux nombres $I_{\varkappa\lambda}$. On trouve

$$DI_{\varkappa\lambda}=dI_{\varkappa\lambda}-\omega_{\varkappa}^{\varrho}I_{\varrho\lambda}-\omega_{\lambda}^{\varrho}I_{\varkappa\varrho}$$

ou, si l'on tient compte du fait que les $I_{\varkappa\lambda}$ ont des valeurs constantes et que l'on abbaisse les indices (voir l'équation (4)),

$$DI_{\varkappa\lambda}=-\omega_{\varkappa\lambda}+\omega_{\lambda\varkappa}.$$

En vertu de la relation (6), on obtient donc finalement

$$DI_{\varkappa\lambda}=0. \tag{19}$$

Si l'on remplace le repère symplectique R_n par le repère naturel (cf. n° 12), ces équations prendront la forme

$$Da_{k\lambda}=0. \tag{19'}$$

Nous avons ainsi démontré le suivant

THÉORÈME 1. *La différentielle absolue du bivecteur fondamental de l'espace à connexion symplectique est nulle.*

Calculons maintenant la différentielle absolue ou, ce qui est ici la même chose, la différentielle extérieure de la forme fondamentale

$$\Omega^*=\tfrac{1}{2}I_{\varkappa\lambda}[\omega^{\varkappa}\omega^{\lambda}].$$

On aura

$$d\Omega^*=\tfrac{1}{2}[DI_{\varkappa\lambda}\omega^{\varkappa}\omega^{\lambda}]+\tfrac{1}{2}I_{\varkappa\lambda}[d\omega^{\varkappa}\omega^{\lambda}]-\tfrac{1}{2}I_{\varkappa\lambda}[\omega^{\varkappa}d\omega^{\lambda}].$$

En faisant usage des égalités (17) et (19) on est conduit à la relation suivante:

$$d\Omega^*=\tfrac{1}{2}I_{\varkappa\lambda}[\Omega^{\varkappa}\omega^{\lambda}]-\tfrac{1}{2}I_{\varkappa\lambda}[\omega^{\varkappa}D\omega^{\lambda}].$$

Les formes Ω^{λ} étant du second degré, on a $[\omega^{\varkappa}\Omega^{\lambda}]=[\Omega^{\lambda}\omega^{\varkappa}]$. Donc, si l'on change dans le deuxième terme du second membre le rôle des indices $\varkappa,\lambda$ et que l'on tient compte des égalités (17), on obtient

$$d\Omega^*=I_{\varkappa\lambda}[\Omega^{\varkappa}\omega^{\lambda}].$$

En y remplaçant $\Omega^{\varkappa}$ par son expression déduite de la première des égalités (8), il viendra

$$d\Omega^*=\tfrac{1}{2}I_{\varkappa\lambda}S_{\varrho\sigma}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}[\omega^{\varrho}\omega^{\sigma}\omega^{\lambda}]$$

ou

$$d\Omega^*=\tfrac{1}{2}S_{\varrho\sigma\lambda}[\omega^{\varrho}\omega^{\sigma}\omega^{\lambda}]. \tag{20}$$

De la dernière formule résultent immédiatement les deux théorèmes suivants:

THÉORÈME 2. *Si la torsion de l'espace G_n^* est nulle, sa forme fondamentale est fermée.*

THÉORÈME 3. *Si la forme fondamentale de l'espace G_n^* est fermée, sa torsion satisfait aux relations*

$$S_{\varrho\sigma\lambda} + S_{\sigma\lambda\varrho} + S_{\lambda\varrho\sigma} = 0$$

et réciproquement.

15. Faisons observer qu'il y a une analogie entre les propriétés de l'espace G_n^* et de l'espace riemannien V_n dont la connexion est définie par les équations de la même forme que les égalités (5), si l'on y regarde I_a comme les vecteurs unités du repère euclidien orthogonal attaché au point $M(x^\varkappa)$. Avec V_n est liée la forme différentielle quadratique ordinaire

$$ds^2 = \sum_{\varkappa=1}^{n} (\omega^\varkappa)^2 = g_{\varkappa\lambda}\, dx^\varkappa\, dx^\lambda.$$

L'analogie mentionnée consiste dans l'identité des rôles joués par les deux formes Ω^* et ds^2 et, en particulier, dans les équations (19′) et les relations $\bar{D}g_{\varkappa\lambda} = 0$, $\bar{D}$ désignant la différentiation absolue propre à la connexion de V_n. Or, il faut remarquer qu'il y a aussi une différence entre la connexion symplectique et euclidienne. On sait bien que la forme ds^2 détermine complètement la connexion de V_n, si on la restreint par la condition d'être à torsion nulle. Il n'en est pas de même de la forme Ω^* et de la connexion symplectique; nous allons montrer, en effet, qu'à toute forme différentielle extérieure Ω^* du second degré et de rang $n=2r$ correspond une famille d'espaces G_n^* dont les formes fondamentales sont identiques avec Ω^*. Remarquons à cet effet que l'équation (19′) développée s'écrit de la manière suivante:

$$da_{\varkappa\lambda} - \omega^\varrho_\varkappa a_{\varrho\lambda} - \omega^\varrho_\lambda a_{\varkappa\varrho} = 0$$

ou

$$da_{\varkappa\lambda} = \omega_{\varkappa\lambda} - \omega_{\lambda\varkappa},$$

les formes $\omega_{\varkappa\lambda}$ étant prises ici par rapport au repère naturel. On voit donc bien que seulement la partie antisymétrique des coefficients $\omega_{\varkappa\lambda}$ est déterminée par la condition $Da_{\varkappa\lambda} = 0$. Ajoutons encore qu'en général nous ne pouvons pas imposer à l'espace G_n^* la condition d'être à torsion nulle (cf. Théorème 2).

16. Supposons maintenant que l'on se donne d'une manière arbitraire une forme différentielle extérieure du second degré

$$\Omega^* = \tfrac{1}{2} a_{\varkappa\lambda} [dx^\varkappa dx^\lambda]$$

de rang $n=2r$ et admettons qu'elle soit décomposée d'une façon arbitraire en la somme

$$\Omega^* = \tfrac{1}{2} I_{\varkappa\lambda} [\omega^\varkappa \omega^\lambda]. \tag{21}$$

Pour obtenir un espace G_n^* intrinsèquement lié à la forme Ω^*, ainsi décomposée, nous lui imposons deux conditions: 1° que sa torsion jouisse de la propriété

$$S_{\varkappa\lambda\mu} = S_{\lambda\mu\varkappa} = S_{\mu\varkappa\lambda}, \tag{22}$$

2° que sa courbure soit nulle. Il résulte de la première condition que les composantes $S_{\varkappa\lambda\mu}$ de la torsion sont antisymétriques en tous leurs indices. Dans les formules (5), qui définissent la connexion de G_n^*, les formes ω^ϱ doivent donc être regardées comme connues et les formes ω_α^ϱ comme inconnues que l'on doit déterminer de manière que les deux conditions énoncées plus haut soient satisfaites.

En calculant la différentielle extérieure de Ω^* on trouve l'expression suivante:

$$d\Omega^* = \frac{1}{3!} A_{\varkappa\lambda\mu}[\omega^\varkappa\omega^\lambda\omega^\mu],$$

$A_{\varkappa\lambda\mu}$ étant des quantités bien déterminées antisymétriques en leurs indices. Si l'on rapproche cette formule des égalités (20) et que l'on tient compte des relations (22), on en déduit qu'il doit être

$$S_{\varkappa\lambda\mu} = \tfrac{1}{3} A_{\varkappa\lambda\mu}.$$

On voit ainsi qu'en vertu de la première condition la torsion de G_n^* est complètement déterminée; en particulier, si la forme est fermée ($A_{\varkappa\lambda\mu} = 0$), cette condition entraîne la nullité de la torsion et comme la courbure doit être aussi nulle d'après la deuxième condition, l'espace G_n^* est dans ce cas un espace symplectique holonome.

Abordons maintenant le problème de déterminer un espace G_n^* satisfaisant à deux conditions énoncées ci-dessus dans le cas, où Ω^* n'est pas fermée. La courbure de G_n^* devant être nulle, on aura d'après les égalités (9) et (6)

$$d\omega_{\alpha\beta} + I^{\varrho\sigma}[\omega_{\varrho\alpha}\omega_{\sigma\beta}] = 0.$$

La première des équations (7), si l'on y abbaisse les indices, donne

$$d\omega_\alpha + [\omega_{\alpha\varrho}\omega^\varrho] = \Omega_\alpha,$$

où (équation (8))

$$\Omega_\alpha = \tfrac{1}{2} S_{\varrho\sigma\alpha}[\omega^\varrho\omega^\sigma].$$

Notre problème revient donc à trouver $n(n+1)/2$ formes différentielles linéaires $\omega_{\alpha\beta} = \omega_{\beta\alpha}$ satisfaisant aux relations

$$\begin{aligned} &d\omega_\alpha + [\omega_{\alpha\varrho}\omega^\varrho] = \Omega_\alpha, \\ &d\omega_{\alpha\beta} + I^{\varrho\sigma}[\omega_{\varrho\alpha}\omega_{\sigma\beta}] = 0, \end{aligned} \tag{23}$$

où ω_a et Ω_a sont des formes données. Ces relations forment un système mixte composé d'équations algébriques et différentielles linéaires. Nous allons le fermer en lui adjoignant les équations qui en proviennent au moyen de la différentiation extérieure. Il est facile de voir que les équations de la deuxième ligne de (23), différentiées extérieurement, sont des conséquences de ces équations mêmes. Il ne nous reste donc qu'à différentier les équations de la première ligne, ce qui nous donne

$$[d\omega_{a\varrho}\omega^\varrho]-[\omega_{a\varrho}d\omega^\varrho]=d\Omega_a.$$

Si l'on y remplace les différentielles $d\omega_{a\varrho}$ et $d\omega^\varrho$ par leurs expressions

$$d\omega_{a\varrho}=-I^{\varkappa\lambda}[\omega_{\varkappa a}\omega_{\lambda\varrho}], \qquad d\omega^\varrho=\Omega^\varrho-[\omega^\varrho_\sigma\omega^\sigma],$$

tirées des équations (23), il viendra

$$-I^{\varkappa\lambda}[\omega_{\varkappa a}\omega_{\lambda\varrho}\omega^\varrho]-[\omega_{a\varrho}\Omega^\varrho]+[\omega_{a\varrho}\omega^\varrho_\sigma\omega^\sigma]=d\Omega_a$$

ou

$$-[\omega_{\varkappa a}\omega^\varkappa_\varrho\omega^\varrho]-[\omega_{a\varrho}\Omega^\varrho]+[\omega_{a\varrho}\omega^\varrho_\sigma\omega^\sigma]=d\Omega_a.$$

En changeant convenablement les indices muets dans le premier terme on verra sans peine que celui-ci et le troisième terme se détruisent et que par conséquent on obtient l'égalité

$$d\Omega_a+[\omega_{a\varrho}\Omega^\varrho]=0$$

ce qui peut s'écrire comme suit:

$$D\Omega_a=0.$$

Nous voyons ainsi que le système (23), complété par les relations qui s'en déduisent au moyen de la différentiation extérieure, prend la forme

$$(24)\qquad \begin{gathered} d\omega_a+[\omega_{a\varrho}\omega^\varrho]=\Omega_a, \qquad [\Omega^\varrho\omega_{a\varrho}]=-d\Omega_a, \\ d\omega_{a\beta}+I^{\varrho\sigma}[\omega_{\varrho a}\omega_{\sigma\beta}]=0. \end{gathered}$$

Il se compose de deux systèmes d'équations linéaires par rapport aux inconnues $\omega_{a\beta}$ et d'un système d'équations différentielles.

La solution la plus générale de la dernière des équations (24) est donnée par les formules

$$\omega_{a\beta}=I_{\varrho\sigma}P^\sigma_\beta dP^\varrho_a$$

où les variables auxiliaires P^a_β sont liées par les relations

$$(25)\qquad I_{\varrho\sigma}P^\varrho_\varkappa P^\sigma_\lambda=I_{\varkappa\lambda};$$

ce sont donc les coefficients d'une substitution générale du groupe symplectique ([8], p. 79).

En portant les expressions de $\omega_{\alpha\beta}$ dans les deux premières des équations (24) et en tenant compte de la première des formules (8), on obtient le système suivant:

$$I_{\varrho\sigma}P^{\sigma}_{\tau}[dP^{\varrho}_{\alpha}\omega^{\tau}]=\Omega_{\alpha}-d\omega_{\alpha}, \qquad I_{\varrho\sigma}P^{\sigma}_{\tau}S_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\tau}[dP^{\varrho}_{\alpha}\omega^{\varkappa}\omega^{\lambda}]=-d\Omega_{\alpha}.$$

D'après les hypothèses faites précédemment les seconds membres de ces relations sont des formes données. Nous poserons pour simplifier les raisonnements

$$\Omega_{\alpha}-d\omega_{\alpha}=\frac{1}{2}A_{\alpha\beta\gamma}[\omega^{\beta}\omega^{\gamma}], \qquad -d\Omega_{\alpha}=\frac{1}{3!}B_{\alpha\varkappa\lambda\mu}[\omega^{\varkappa}\omega^{\lambda}\omega^{\mu}],$$

les coefficients A et B étant comme d'habitude antisymétriques respectivement en les indices β,γ et $\varkappa,\lambda,\mu$. Les dernières équations peuvent donc s'écrire comme il suit:

$$(26)\qquad \begin{aligned} &I_{\varrho\sigma}P^{\sigma}_{\gamma}[dP^{\varrho}_{\alpha}\omega^{\gamma}]=\tfrac{1}{2}A_{\alpha\beta\gamma}[\omega^{\beta}\omega^{\gamma}],\\ &I_{\varrho\sigma}P^{\sigma}_{\tau}S_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\tau}[dP^{\varrho}_{\alpha}\omega^{\varkappa}\omega^{\lambda}]=\frac{1}{3!}B_{\alpha\varkappa\lambda\mu}[\omega^{\varkappa}\omega^{\lambda}\omega^{\mu}].\end{aligned}$$

En différentiant les relations (25), on obtient encore les équations

$$(27)\qquad I_{\varrho\sigma}(P^{\varrho}_{\varkappa}dP^{\sigma}_{\lambda}+P^{\sigma}_{\lambda}dP^{\varrho}_{\varkappa})=0\,.$$

Les équations (26) et (27) forment un système de Pfaff généralisé aux inconnues P^{α}_{β}. Remarquons que, d'après ce qui a été dit plus haut sur les équations (24), ce système est fermé. Nous allons montrer qu'il est en involution relativement aux formes $\omega^{\varkappa}$; ceci veut dire que sa solution générale à $2r$ dimensions n'introduit aucune relation entre les variables $x^{\varkappa}$.

Les équations d'un élément intégral à $2r$ dimensions, n'impliquant aucune relation entre les $dx^{\varkappa}$, peuvent être écrites comme il suit:

$$dP^{\alpha}_{\beta}=t^{\alpha}_{\beta\gamma}\,\omega^{\gamma}.$$

Si l'on substitue ces expressions dans les équations (26) et (27) et que l'on égale les coefficients des formes $\omega^{\varkappa}$ et de leurs produits dans les deux membres de chacune d'elles, il viendra

$$(28)\qquad \begin{aligned} &I_{\varrho\sigma}(P^{\varrho}_{\varkappa}t^{\sigma}_{\lambda\gamma}+P^{\sigma}_{\lambda}t^{\varrho}_{\varkappa\gamma})=0,\\ &I_{\varrho\sigma}(P^{\sigma}_{\beta}t^{\varrho}_{\alpha\gamma}-P^{\sigma}_{\gamma}t^{\varrho}_{\alpha\beta})=A_{\alpha\beta\gamma},\\ &I_{\varrho\sigma}P^{\sigma}_{\beta}(S_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\beta}t^{\varrho}_{\alpha\mu}+S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\beta}t^{\varrho}_{\alpha\varkappa}+S_{\mu\varkappa}^{\cdot\cdot\beta}t^{\varrho}_{\alpha\lambda})=B_{\alpha\varkappa\lambda\mu}.\end{aligned}$$

On verra facilement que ces relations entre les coefficients $t^{\alpha}_{\beta\gamma}$ sont linéairement indépendantes. Les nombres des relations dans chacune des trois lignes des égalités (28) étant respectivement égaux à

$$2r^{2}(2r-1), \qquad 2r^{2}(2r-1) \qquad \text{et} \qquad 4r^{2}(2r-1)(2r-3)/3!$$

leur nombre total est égal à

$$4r^2(r+2)(2r-1)/3. \tag{29}$$

Désignons maintenant les caractères réduits ([4], p. 90) du système fermé composé des équations (26) et (27) par $s_0, s_1, \dots, s_{2r-1}$. Ils sont donnés par les formules suivantes:

$$s_0 = r(2r-1), \quad s_1 = 2r, \quad s_2 = 2\cdot 2r, \quad \dots, \quad s_{2r-1} = (2r-1)2r,$$

comme il est facile de voir, en formant les systèmes polaires réduits d'un point intégral, d'un élément intégral à une dimension, d'un élément intégral à deux dimensions et ainsi de suite jusqu'à un élément intégral à $2r-1$ dimensions; il est bien entendu que nous regardons seulement les éléments qui sont contenus dans un des éléments intégraux à $2r$ dimensions définis par les relations (28). Si l'on calcule la valeur de l'expression

$$2rs_0 + (2r-1)s_1 + (2r-2)s_2 + \dots + s_{2r-1},$$

on en obtient un nombre qui est égal au nombre (29), ce qui prouve que le système de Pfaff généralisé formé des équations (26) et (27) est bien en involution. Sa solution générale à $2r$ dimensions a donc la forme

$$P^\alpha_\beta = P^\alpha_\beta(x^1, x^2, \dots, x^{2r}), \tag{30}$$

dont les seconds membres dépendent, outre les fonctions arbitraires, de $s_0 = r(2r-1)$ constantes arbitraires. Or, on peut disposer de ces constantes de manière que les relations

$$I_{\varrho\sigma} P^\varrho_\varkappa P^\sigma_\lambda = I_{\varkappa\lambda},$$

dont le nombre est égal à $r(2r-1)$, soient satisfaites.

Ceci achève la démonstration de la proposition d'après laquelle avec une forme différentielle extérieure du second degré peut être liée une connexion symplectique déterminée à courbure nulle et de torsion satisfaisant aux relations (22).

Travaux cités

[1] E. Cartan, *Sur la structure des groupes infinis de transformations*, Ann. Ecole Norm. 21 (1904), p. 153-206, 22 (1905), p. 219-308.

[2] — *Leçons sur les invariants intégraux*, Paris 1922.

[3] — *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée*, Ann. Ecole Norm. 40 (1923), p. 325-412, 41 (1924), p. 1-25.

[4] — *Les systèmes différentiels extérieurs*, Paris 1945.

[5] S. S. Chern, *Some new viewpoints in differential geometry in the large*, Bull. Am. Math. Soc. 52 (1946), p. 1-30.

[6] R. Debever, *Les espaces de l'électromagnétisme*, Colloque de Géométrie Diff., Louvain 1951, p. 217-233.

[7] E. Goursat, *Leçons sur le problème de Pfaff*, Paris 1922.

[8] W. Ślebodziński, *Formes extérieures et leurs applications*, Warszawa 1954.

[9] Yen Chih Ta, *Sur l'équivalence des formes différentielles extérieures à quatre variables*, C. R. de Paris 227 (1948), p. 817-819.

TABLE DES MATIÈRES