

POLSKA AKADEMIA NAUK, INSTYTUT MATEMATYCZNY

5.7133  
[220]

# DISSERTATIONES MATHEMATICAE

(ROZPRAWY MATEMATYCZNE)

KOMITET REDAKCYJNY

**KAROL BORSUK** redaktor

ANDRZEJ BIAŁYNICKI-BIRULA, BOGDAN BOJARSKI,  
ZBIGNIEW CIESIELSKI, JERZY ŁOŚ, WIKTOR MAREK,  
ZBIGNIEW SEMADENI

**CCXX**

**HANS JOACHIM SCHMID**

**Interpolatorische Kubaturformeln**

Biblioteka Uniwersytecka  
w Warszawie



1000543609

WARSZAWA 1983

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

5.7133



© Copyright by PWN – Polish Scientific Publishers, Warszawa 1983

PRINTED IN POLAND

ISBN 83-01-04085-8

ISSN 0012-3862

---

W R O C Ł A W S K A D R U K A R N I A N A U K O W A

# INHALT

1. Einführung . . . . .	5
2. Allgemeine Darstellungssätze . . . . .	9
2.1. Der Tschëbyscheff-Rang endlicher Systeme . . . . .	9
2.2. Darstellungssätze . . . . .	14
2.3. Anwendungen . . . . .	18
3. Polynomiale Theorie . . . . .	26
3.1. Problemstellung. . . . .	28
3.2. Notwendige Eigenschaften interpolatorischer Kubaturformeln . . . . .	33
3.3. Reelle Ideale . . . . .	37
3.4. Ein Charakterisierungssatz für interpolatorische Formeln . . . . .	40
4. Zweidimensionale Kubaturformeln . . . . .	44
4.1. Konstruktion reeller Ideale . . . . .	45
4.2. Eine verbesserte Schranke für die Knotenanzahl . . . . .	54
4.3. Konstruktion von Formeln für Produktintegrale . . . . .	59
5. Mehrdimensionale Kubaturformeln . . . . .	71
5.1. Konstruktion reeller Ideale . . . . .	72
5.2. Ein weiterer Charakterisierungssatz . . . . .	78
6. Beispiele . . . . .	79
6.1. Minimale Formeln bis zum Grad 9 für Produktintegrale . . . . .	81
6.2. Integrale, für die minimale Formeln jedes Genauigkeitsgrades bekannt sind . . . . .	87
6.3. Nicht-minimale Formeln . . . . .	89
6.4. Formeln für Integrale über dem Dreieck und dem Kreis . . . . .	91
6.5. Numerische Ergebnisse . . . . .	94
Literaturverzeichnis . . . . .	120



## 1. Einführung

In der vorliegenden Arbeit wird eine Theorie interpolatorischer Kubaturformeln entwickelt. Ausgangspunkt der Problemstellung ist die approximative Berechnung eines Integrals

$$(1.1) \quad \int_X f(x) dx, \quad X \subset \mathbb{R}^n, X \text{ kompakt}, f \in \mathcal{C}(X),$$

durch Punktauswertungsfunktionale in der Form

$$(1.2) \quad \sum_{i=1}^N C_i f(x_i), \quad C_i > 0, x_i \in X.$$

Die Approximationsgüte von (1.2) wird durch den maximalen Grad des Polynomraumes bestimmt, für den die Darstellung exakt ist.

Die Einschränkung des Ringes  $P = \mathbb{R}[x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}]$  der reellen Polynome in  $n$  Variablen auf die Menge  $X$  bezeichnen wir mit  $P(X)$ . Der Raum der Polynome aus  $P$  vom Grad  $\leq m$  wird mit  $P_m$  bezeichnet.

Das Problem lässt sich in der folgenden allgemeinen Form fassen. Gegeben sei eine abgeschlossene Teilmenge  $X$  des  $\mathbb{R}^n$  und ein positives lineares Funktional

$$(1.3) \quad I: P(X) \rightarrow \mathbb{R}: P \rightarrow I(P), \quad I(1) = 1.$$

Gesucht sind Darstellungen von (1.3) als positive Linearkombinationen von Punktauswertungsfunktionalen auf den Räumen  $P_m$ , d.h., Darstellungen der Gestalt

$$(1.4) \quad I(P) = \sum_{i=1}^N C_i P(x_i), \quad C_i > 0, x_i \in \mathbb{R}^n, P \in P_m.$$

Wir merken noch an, dass in den interessanten Fällen  $I$  sogar *strikt positiv* ist, d.h., es gilt  $I(P) > 0$ , falls  $P(x) \geq 0$  für alle  $x \in X$  und  $0 \neq P \in P(X)$ .

Wir nennen Darstellungen (1.4) im Hinblick auf den Hauptanwendungsbereich ebenfalls Kubaturformeln. Dabei heissen die Punkte  $x_i$  *Knoten* und die Zahlen  $C_i$  *Koeffizienten* der Formel. Die Zahl  $m$  gibt den *Exaktheitsgrad*

der Formel an, wenn es ein Polynom  $Q \in P_{m+1}$  gibt, für das (1.4) nicht mehr gültig ist. Wir sprechen dann von Formeln des Grades  $m$ . Die Menge  $X$  nennen wir auch Integrationsbereich.

Die Forderung positiver Koeffizienten ist für die Stabilität der Formeln ebenso von Bedeutung wie die Forderung nach einer möglichst geringen Knotenanzahl  $N$ . Wir sprechen von *minimalen Formeln*, wenn die Knotenanzahl für fest vorgegebenen Genauigkeitsgrad minimal ist. Ein weiterer wichtiger Gesichtspunkt ist die Lage der Knoten. Man wird für die Anwendungen fordern, dass die Punktauswertungen innerhalb von  $X$  vorgenommen werden.

Im Eindimensionalen gibt es zu jedem Genauigkeitsgrad eine minimale Formel, deren Knoten in der konvexen Hülle des Integrationsgebietes liegen. Solche Formeln heißen *Gauss-Quadraturformeln*. Es ist nicht klar, wie man diesen Begriff sinnvoll ins Mehrdimensionale übertragen soll. Schon für ein so einfaches Gebiet wie das Einheitsquadrat gibt es Gewichtsfunktionen und Genauigkeitsgrade, bei denen es keine minimalen Formeln gibt, deren Knoten sämtlich im Integrationsgebiet liegen. Man wird somit eine „konvexe Hülle höherer Art“ des Integrationsbereichs für die Knoten zulassen müssen. Es ist offen, wie man hier vorgehen muss. Wir stellen deshalb keine Forderungen an die Lage der Knoten, werden aber bei den Anwendungen die Formeln besonders berücksichtigen, deren Knoten sämtlich in  $X$  liegen.

Die wichtige Klasse der *interpolatorischen Kubaturformeln* ist dadurch gekennzeichnet, dass die Koeffizienten der Formeln eindeutig durch die Knoten bestimmt werden. Insbesondere gehören alle minimalen Formeln zu dieser Klasse. Die interpolatorischen Kubaturformeln bilden den wesentlichen Kern aller Kubaturformeln überhaupt, denn jede nicht interpolatorische Formel kann durch Streichen einiger Knoten auf eine interpolatorische Gestalt gebracht werden.

Unser Ziel ist es, interpolatorische Formeln so zu kennzeichnen, dass einerseits ihr Zusammenhang mit bestimmten orthogonalen Polynomen deutlich wird, andererseits aber auch Möglichkeiten fassbar werden, solche Formeln zu berechnen. Untersuchungen in dieser Richtung wurden vor allem von I. P. Mysovskikh und einigen seiner Schüler durchgeführt. Ebenso hat sich H. M. Möller mit diesen Fragen beschäftigt. Durch die Verwendung *reeller Idealtheorie* kann man zu weiterführenden Ergebnissen gelangen. Dabei ergeben sich die bisher bekannten Resultate als Spezialfälle einer allgemeinen Theorie.

Unser Hauptergebnis charakterisiert die Knoten interpolatorischer Formeln als Nullstellengebilde eines *reellen Ideals*, das von bestimmten orthogonalen Polynomen erzeugt wird. Diese Polynome besitzen nur einfache reelle gemeinsame Nullstellen.

Diese Kennzeichnung trägt noch viel von dem in sich, was im Eindimensionalen wohlbekannt ist. Gleichzeitig wird damit eine Lücke in der

Theorie interpolatorischer Kubaturformeln geschlossen, denn Aussagen über die gemeinsamen reellen Nullstellen orthogonaler Polynome bereiten grosse Schwierigkeiten, die nicht mit Hilfe der klassischen (komplexen) Idealtheorie gelöst werden konnten.

Diese mehr theoretisch interessante Charakterisierung ist äquivalent zu einer konstruktiven Kennzeichnung, mit der das reelle Ideal bestimmt werden kann. Zumindest für einige Funktionale lässt sich dadurch das Problem der minimalen Formeln für alle Genauigkeitsgrade lösen. Im allgemeinen stösst man jedoch schon bald auf rechnerische Probleme, die sehr umfangreich werden. Hier müssen neue Methoden entwickelt werden, ein geschlossenes Ergebnis wie im Eindimensionalen ist jedoch nicht zu erwarten.

Die Anwendungen des Hauptsatzes werden anhand von zweidimensionalen Produktintegralen aufgezeigt. Bereits in diesem Bereich lassen sich Beispiele angeben, die verdeutlichen, in welchen Punkten sich die mehrdimensionale Theorie von dem aus dem Eindimensionalen Bekannten abhebt.

Viele für die Theorie der Kubatur wichtige Aspekte werden wir überhaupt nicht behandeln, z.B. Fehlerabschätzungen, Produkt-Formeln, Monte-Carlo Methoden u.a.m. Hierzu sei auf die klassischen Lehrbücher über mehrdimensionale Integration von P. J. Davis und P. Rabinowitz [67], V. I. Krylov [67], A. H. Stroud [71] und H. Engels [80] verwiesen, ebenso auf die Übersichtsartikel von S. Haber [70] und I. P. Mysovskikh [73], [80].

In Kapitel 2 wird kurz allgemein umrissen, welche Ergebnisse man bei der Darstellung linearer Funktionale erwarten kann, wenn der Definitionsbereich dieser Funktionale ein endlich-dimensionaler Teilraum von  $\mathcal{C}(X)$  ist. Hier werden wir mit der natürlichen Verallgemeinerung des Begriffs des Tschebyscheff-Systems arbeiten und so ein Analogon zum Interpolationssatz von S. I. Zuhovickii [62] mit Hilfe von Tschebyscheff-Rang Eigenschaften herleiten. Einige Beispiele werden zeigen, dass der Zugang hierüber zu allgemein ist, um starke Aussagen erwarten zu können.

In der polynomialen Theorie wird im wesentlichen die Ringstruktur der Polynome ausgenutzt, die in der Betrachtung von Idealen, die von orthogonalen Polynomen erzeugt werden, sehr wirksam ausgenutzt werden kann. Diese Theorie wird allgemein in Kapitel 3 behandelt. Zuerst wird die Problemstellung aufgezeigt und es werden einige wichtige Begriffe erläutert. Eine Erweiterung des Satzes von Tschakaloff, die auf I. P. Mysovskikh [75] zurückgeht, wird bewiesen. In 3.2 werden notwendige Bedingungen für die Existenz interpolatorischer Kubaturformeln hergeleitet. Insbesondere ergibt sich dabei, dass spezielle Ideale notwendigerweise mit interpolatorischen Kubaturformeln verbunden sind, nämlich die *reellen Ideale*. Eine Diskussion der Begriffe und Sätze aus der Theorie reeller Ideale, die im folgenden benötigt werden, schliesst sich in 3.3 an. Hierbei ist der Satz von D. W. Dubois und G. Efrogmson [70] und J. J. Risler [70] hervorzuheben, der

reelle Ideale charakterisiert. Das Hauptergebnis dieses Kapitels besteht in dem Beweis, dass die notwendigen Bedingungen auch hinreichend sind.

Auf dieser Charakterisierung beruhen die im folgenden hergeleiteten Konstruktionsmethoden. In Kapitel 4 beschränken wir uns auf den zweidimensionalen Fall, der allgemeine Fall ist im wesentlichen ein technisches Problem, er wird in Kapitel 5 behandelt. In 4.1 wird die Konstruktion reeller Ideale mit Hilfe des Charakterisierungssatzes untersucht, dabei werden weitere notwendige und hinreichende Bedingungen hergeleitet. Daran schliesst sich in 4.2 eine verbesserte Abschätzung für die Knotenanzahl in Kubaturformeln. Diese Resultate geben uns die Möglichkeit, interpolatorische Kubaturformeln mit vorgeschriebener Knotenzahl zu charakterisieren. Die Existenz solcher Formeln wird z. B. durch die Lösbarkeit eines nichtlinearen Gleichungssystems gekennzeichnet. Mit jeder reellen Lösung dieses Systems wird das zur Formel gehörige Ideal festgelegt. In speziellen Fällen können diese Systeme allgemein für jeden Genauigkeitsgrad gelöst werden. Dadurch werden Ergebnisse von I. P. Mysovskikh [70], [76], H. M. Möller [76] und C. R. Morrow und T. N. L. Patterson [78] verallgemeinert und erweitert.

Für eine Klasse von Produktintegralen werden die Resultate von 4.1 und 4.2 im Detail untersucht. Wir stellen in 4.3 Konstruktionsmethoden vor, um das zu einer Kubaturformel gehörige Ideal zu bestimmen.

Die Ausweitung der Untersuchungen aus Kapitel 4 auf den allgemeinen mehrdimensionalen Fall ist kein prinzipielles Problem. Schwierigkeiten ergeben sich jedoch durch das starke Anwachsen des Rechenaufwandes und das Fehlen einfacher Bezeichnungsweisen. Wir geben in Kapitel 5 einen Einblick in die mehrdimensionale Theorie.

In einem abschliessenden Kapitel werden zweidimensionale interpolatorische Formeln zusammengestellt. Der Schwerpunkt liegt dabei auf einer Anwendung der Konstruktionsmethoden aus 4.3. Dabei zeigt sich bereits in diesem eng gesteckten Bereich ein sehr unterschiedliches Verhalten. Die bisher bekannten unteren Schranken für die Knotenanzahl können für Integrale über dem Einheitsquadrat mit speziellen Gewichtsfunktionen zwar immer erreicht werden, doch scheint das nicht allgemein der Fall zu sein. Wir geben ein Beispiel an, das zeigt, dass die bisher bekannten unteren Schranken nicht immer scharf sind.

Diese Arbeit baut auf Ergebnissen des Autors auf, die hier in verallgemeinerter und erweiterter Form einheitlich dargestellt werden.

Mein Dank gilt Herrn Professor Dr. H. Berens, in dem ich immer einen aufgeschlossenen und kritischen Diskussionspartner hatte und durch den ich viele wertvolle Anregungen erhielt, Herrn Dr. K. Donner, der mich auf funktionalanalytische Aspekte der Kubatur aufmerksam gemacht hat, sowie dem Sonderforschungsbereich 72, insbesondere Herrn Professor Dr. K. Scherer, der mir durch eine Einladung nach Bonn die Möglichkeit gab, praktische und theoretische Kubaturprobleme zu untersuchen.

## 2. Allgemeine Darstellungssätze

In diesem Kapitel soll das Problem aus der Einleitung in einer anderen abstrakten Form untersucht werden. Die Approximationsgüte wird jetzt durch einen beliebigen endlich-dimensionalen Teilraum  $\mathcal{G}$  von  $\mathcal{C}(X)$  bestimmt. Wir gehen von einem endlichen, linear unabhängigen System  $G = \{g_0, g_1, \dots, g_m\}$  in  $\mathcal{C}(X)$  aus; dabei sei  $X$  eine kompakte Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  mit wenigstens  $m+1$  Punkten und  $\mathcal{C}(X)$  bezeichne den Raum der stetigen reellwertigen Funktionen auf  $X$ , versehen mit der Supremumsnorm  $\|\cdot\|_x$ . Der von  $G$  erzeugte Raum wird mit  $\mathcal{G}$  bezeichnet.

Ein lineares Funktional

$$(2.1) \quad L: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}: g \rightarrow L(g), \quad L(g_0) = 1,$$

soll in der Form

$$(2.2) \quad L(g) = \sum_{i=1}^N C_i g(x_i), \quad C_i \in \mathbb{R}, C_i \neq 0, x_i \in X, g \in \mathcal{G},$$

dargestellt werden. Die Existenz solcher Darstellungen ist durch den Interpolationssatz von S. I. Zuhovickii [62] gesichert. S. Karlin und W. J. Studden [66] haben eine vollständige Theorie minimaler Darstellungen (2.2) mit positiven Koeffizienten für den Fall entwickelt, dass  $G$  ein Tschebyscheff-System ist. Ist  $G$  kein Tschebyscheff-System, so liegt es nahe, mit natürlichen Verallgemeinerungen der Eigenschaften eines Tschebyscheff-Systems zu arbeiten. Diese Tschebyscheff-Rang (kurz:  $T$ -Rang) Eigenschaften erlauben es, Darstellungen zu gewinnen, deren Knoten die gemeinsamen Nullstellen in  $X$  von Funktionen aus  $\mathcal{G}$  sind. Im allgemeinen sind jedoch  $T$ -Rang Eigenschaften allein zu schwach, um konkrete Darstellungen zu charakterisieren.

In 2.1 werden  $T$ -Rang Eigenschaften endlicher Systeme zusammengestellt, mit denen wir später arbeiten werden. In 2.2 diskutieren wir verschiedene Darstellungssätze. In einem abschliessenden Paragraphen werden einige Anwendungen aufgezeigt.

### 2.1. Der Tschebyscheff-Rang endlicher Systeme

Sei  $G = \{g_0, g_1, \dots, g_m\}$  ein endliches, linear unabhängiges System in  $\mathcal{C}(X)$ , wobei  $X$  eine kompakte Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  mit wenigstens  $m+1$  Punkten sei. Wir führen folgende Bezeichnung ein,

$$T \begin{bmatrix} g_0, g_1, \dots, g_m \\ x_0, x_1, \dots, x_r \end{bmatrix} = \text{rg} \begin{bmatrix} g_0(x_0) & g_1(x_0) & \cdots & g_m(x_0) \\ g_0(x_1) & g_1(x_1) & \cdots & g_m(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_0(x_r) & g_1(x_r) & \cdots & g_m(x_r) \end{bmatrix}.$$

Hier und im folgenden bezeichne  $\text{rg} B$  den Rang der Matrix  $B$ .

Das System  $G$  besitzt einem  $T$ -Rang  $\leq r$ ,  $0 \leq r \leq m+1$ , wenn für jede Wahl von  $m-r+1$  paarweise verschiedenen Punkten  $x_0, x_1, \dots, x_{m-r}$  aus  $X$  die folgende Bedingung gilt,

$$(2.3) \quad T \begin{bmatrix} g_0, g_1, \dots, g_m \\ x_0, x_1, \dots, x_{m-r} \end{bmatrix} = m-r+1.$$

Das System  $G$  besitzt einen  $T$ -Rang  $\geq r$ , wenn  $G$  kein System mit  $T$ -Rang  $\leq r-1$  ist.

Der  $T$ -Rang von  $G$  wird mit  $\tau(G)$  bezeichnet. Es ist klar, dass die Bedingung (2.3) für  $r = m+1$  stets erfüllt ist, somit gilt für jedes  $G$  die Beziehung  $\tau(G) \leq m+1$ . Ein Tschebyscheff-System ist durch den  $T$ -Rang 0 gekennzeichnet, so dass  $0 \leq \tau(G) \leq m+1$  gilt. Wenn  $\tau(G) = r$ , dann ist auch  $\tau(G^*) = r$ , wenn  $G^*$  eine Basis des von  $G$  erzeugten Raumes  $\mathcal{G}$  ist. Deshalb kann der  $T$ -Rang  $\tau(\mathcal{G})$  eines endlich-dimensionalen Raumes  $\mathcal{G}$  über den  $T$ -Rang irgendeiner Basis von  $\mathcal{G}$  erklärt werden.

Der Begriff des  $T$ -Ranges wurde von G. S. Rubinstein eingeführt, um die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Haar zu erhalten. Wir bezeichnen hierbei mit  $P_{\mathcal{G}}(f)$  die Menge der besten Approximationen in  $\mathcal{G}$  an  $f$  bezüglich der Supremumsnorm  $\|\cdot\|_{\infty}$ . Die Menge  $P_{\mathcal{G}}(f)$  ist nicht leer und konvex, so dass die Dimension von  $P_{\mathcal{G}}(f)$  als Dimension des kleinsten affinen Raumes erklärt werden kann, der  $P_{\mathcal{G}}(f)$  enthält.

**2.1.1. SATZ VON RUBINSTEIN.** Für alle  $f \in \mathcal{C}(X) \setminus \mathcal{G}$  und alle  $r$ ,  $0 \leq r \leq m$ , sind die folgenden Aussagen äquivalent,

- (i)  $\dim P_{\mathcal{G}}(f) \leq r$ ,
- (ii)  $\tau(\mathcal{G}) \leq r$ .

Beweis. G. S. Rubinstein [55]. ■

Die beiden folgenden Hilfssätze geben äquivalente Formulierungen der Definition des  $T$ -Ranges an. Ihr Beweis ist elementar.

**2.1.2. LEMMA.** Sei  $0 \leq r \leq m$ . Die nachfolgenden Bedingungen sind äquivalent.

- (i)  $\tau(G) \leq r$ ,
- (ii) für jede Wahl von  $m-r+1$  paarweise verschiedenen Punkten  $x_0, x_1, \dots, x_{m-r}$  aus  $X$  besitzt das lineare Gleichungssystem  $\sum_{i=0}^m a_i g_i(x_j) = 0$ ,  $j = 0, 1, \dots, m-r$ , genau  $r$  linear unabhängige Lösungen,

(iii) jede Menge von  $r+1$  linear unabhängigen Funktionen aus  $\mathcal{G}$  hat höchstens  $m-r$  gemeinsame paarweise verschiedene Nullstellen in  $X$ ,

- (iv) für jede Wahl von  $m-r+1$  paarweise verschiedenen Punkten

$x_0, x_1, \dots, x_{m-r}$  aus  $X$  spannen die Vektoren  $(g_0(x_j), g_1(x_j), \dots, g_m(x_j))^T$ ,  $j = 0, 1, \dots, m-r$ , einen Unterraum des  $\mathbb{R}^{m+1}$  der Dimension  $m-r+1$  auf.

Die Bedingung (iii) ist eine natürliche Verallgemeinerung des Begriffs des Tschebyscheff-Systems, Eigenschaft (iv) gibt eine geometrische Interpretation des  $T$ -Ranges.

**2.1.3. LEMMA.** Sei  $0 \leq r \leq m+1$ . Die folgenden Bedingungen sind äquivalent.

(i)  $\tau(G) \geq r$ ,

(ii) es gibt  $m-r+2$  paarweise verschiedene Punkte  $x_0, x_1, \dots, x_{m-r+1}$  in  $X$ , so dass gilt,

$$(2.4) \quad T \begin{bmatrix} g_0, g_1, \dots, g_m \\ x_0, x_1, \dots, x_{m-r+1} \end{bmatrix} < m-r+2,$$

(iii) es gibt wenigstens  $r$  linear unabhängige Funktionen aus  $\mathcal{G}$ , die  $m-r+2$  paarweise verschiedene Nullstellen in  $X$  besitzen,

(iv) es gibt  $m-r+2$  paarweise verschiedene Punkte  $x_0, x_1, \dots, x_{m-r+1}$  aus  $X$ , so dass die Vektoren  $(g_0(x_j), g_1(x_j), \dots, g_m(x_j))^T$ ,  $j = 0, 1, \dots, m-r+1$ , einen Unterraum des  $\mathbb{R}^{m+1}$  der Dimension  $< m-r+2$  aufspannen.

Für Systeme, deren  $T$ -Rang bekannt ist, gewinnen wir damit folgende Nullstellenaussagen.

**2.1.4. LEMMA.** Sei  $\tau(\mathcal{G}) = r \geq 1$ . Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Je  $m-r+1$  paarweise verschiedene Punkte aus  $X$  sind die gemeinsamen Nullstellen von genau  $r$  linear unabhängigen Funktionen aus  $\mathcal{G}$ ,

(ii) es gibt  $m-r+2$  paarweise verschiedene Punkte aus  $X$ , die die Nullstellen von genau  $r$  linear unabhängigen Funktionen aus  $\mathcal{G}$  sind,

(iii) es gibt  $m-r+2$  paarweise verschiedene Punkte aus  $X$ , die die Nullstellen von genau  $r-1$  linear unabhängigen Funktionen aus  $\mathcal{G}$  sind.

**Beweis.** Um (iii) zu zeigen, nehmen wir an, dass für je  $m-r+2$  paarweise verschiedene Punkte aus  $X$  die Beziehung

$$T \begin{bmatrix} g_0, g_1, \dots, g_m \\ x_0, x_1, \dots, x_{m-r+1} \end{bmatrix} = m-r+1$$

gilt. Dann gibt es linear unabhängige Funktionen  $q_1, q_2, \dots, q_r$  in  $\mathcal{G}$ , die in den Punkten  $x_0, x_1, \dots, x_{m-r+1}$  verschwinden. Ebenso können wir linear unabhängige Funktionen  $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_r$  in  $\mathcal{G}$  finden, die in  $x_0, x_1, \dots, x_{m-r}, y$  verschwinden. Jedes  $\bar{q}_i$  muss Linearkombination der  $q_j$  sein, denn andernfalls gäbe es  $r+1$  linear unabhängige Funktionen in  $\mathcal{G}$  mit  $m-r+1$  gemeinsamen Nullstellen in  $X$ , im Widerspruch zu Lemma 2.1.2, (iii). Damit verschwinden die  $q_j$  in den Punkten  $x_0, x_1, \dots, x_{m-r}, y$ , wobei  $y$  ein beliebiger von

$x_0, x_1, \dots, x_{m-r}$  verschiedener Punkt ist. Das führt auf einen erneuten Widerspruch. ■

Wir werden später mit Systemen arbeiten, die aus  $G$  durch Fortlassen eines Elementes entstehen. Die folgende Überlegungen zeigen, wie  $\tau(G)$  mit  $\tau(G \setminus \{g_0\})$  verknüpft ist.

**2.1.5. LEMMA.** *Wenn  $\tau(G) \geq r$ , dann gilt  $\tau(G \setminus \{g_0\}) \geq r - 1$ .*

**Beweis.** Da  $\tau(G) \geq r$ , gibt es  $m - r + 2$  paarweise verschiedene Punkte  $x_0, x_1, \dots, x_{m-r+1}$  in  $X$ , so dass (2.4) gilt. Wenn die erste Spalte in der Matrix  $(g_i(x_j))$  gestrichen wird, so besitzt die Restmatrix einen Rang, der ebenfalls echt kleiner als  $m - r + 2$  ist. Nach Lemma 2.1.3, (ii) folgt damit die Behauptung. ■

Weitere Eigenschaften des  $T$ -Ranges endlicher Systeme findet man z.B. bei V. G. Boltjanskii, S. S. Ryskov und Ju. A. Saskin [63]. Wir schliessen diesen Paragraphen ab mit Bemerkungen zum  $T$ -Rang einiger wichtiger Systeme, eine ausführliche Diskussion hierzu findet man bei H. J. Schmid [78].

Wir beginnen mit Räumen von Spline-Funktionen. Bekanntlich ist  $S_{m,k} = \{1, x, x^2, \dots, x^m, (x - \bar{x}_1)_+^m, (x - \bar{x}_2)_+^m, \dots, (x - \bar{x}_k)_+^m\}$  eine Basis von  $\mathcal{S}_{m,k}$ , des Splineräume vom Grad  $\leq m$  mit  $k$  festen Knoten  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$ . Alle Funktionen sind auf  $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$  erklärt und es ist  $a < \bar{x}_1 < \dots < \bar{x}_k < b$ , sowie

$$(x - \bar{x}_j)_+^m = \begin{cases} (x - \bar{x}_j)^m, & \text{falls } x \geq \bar{x}_j, \\ 0, & \text{falls } x < \bar{x}_j, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Es gilt

$$(2.5) \quad \tau(\mathcal{S}_{m,k}) = k.$$

Sei  $P_m$  der Raum der reellen Polynome in  $n$  Variablen vom Grad  $\leq m$  und  $P_m(X)$  die Einschränkung von  $P_m$  auf eine abgeschlossene Teilmenge  $X$  des  $\mathbb{R}^n$  mit nicht-leerem Inneren. Dann gilt

$$(2.6) \quad \tau(P_m(X)) = \dim P_m - (m + 1).$$

Für  $n = 1$  ergibt sich in (2.6) der  $T$ -Rang 0 für den Raum der Polynome vom Grad  $\leq m$  in einer Variablen, eingeschränkt auf ein Intervall.

Wir geben abschliessend noch den  $T$ -Rang der Räume harmonischer Polynome an. Sei

$$\mathcal{S}_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} (x^{(i)})^2 = 1 \right\}$$

die Sphäre der  $(n+1)$ -dimensionalen Einheitskugel  $\mathcal{X}_{n+1}$  des  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Einen Punkt  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  können wir in der Form  $\sigma = (\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \dots, \sigma^{(n+1)})^T$  als Punkt des  $\mathbb{R}^{n+1}$  darstellen, aber auch mit Hilfe von Polarkoordinaten in der Form

$\sigma = (\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(n)})^T$ . Wenn  $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$  ein orthonormales System des  $\mathbb{R}^{n+1}$  bildet, so kann man  $\sigma$  in der Form

$$\sigma = t e_{n+1} + \sqrt{1-t^2} e, \quad t \in [-1, 1], \quad t = e_{n+1} \sigma^T,$$

schreiben, wobei  $e$  ein von  $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$  erzeugter Einheitsvektor ist. Damit lassen sich die  $\sigma^{(i)}$  wie folgt durch die Koordinaten  $\varphi^{(i)}$  ausdrücken,

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)} &= \sin \varphi^{(n)} \sin \varphi^{(n-1)} \dots \sin \varphi^{(2)} \sin \varphi^{(1)}, \\ \sigma^{(i)} &= \sin \varphi^{(n)} \sin \varphi^{(n-1)} \dots \sin \varphi^{(i-2)} \cos \varphi^{(i-1)}, \quad i = 2, 3, \dots, n, \\ \sigma^{(n+1)} &= \cos \varphi^{(n)}, \end{aligned}$$

wobei  $\varphi^{(1)} \in [0, 2\pi)$  und  $\varphi^{(i)} \in [0, \pi]$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ .

Wir betrachten die Polynome  $P$  vom Grad  $\leq m$  in  $n+1$  Variablen, die der Laplace Gleichung

$$\Delta_{n+1} P = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial^2}{\partial (x^{(i)})^2} P(x) = 0, \quad x \in \mathcal{X}_{n+1} \setminus \mathcal{S}_n,$$

genügen. Diese Polynome, eingeschränkt auf  $\mathcal{S}_n$ , heissen *harmonische Polynome* vom Grad  $\leq m$ . Man kann diese Polynome in den Variablen  $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(n)}$  ausdrücken, so dass sie einen linearen Raum  $H_m$  in  $n$  Variablen bilden. Wir versehen  $H_m$  mit einem Index  $k$ , wenn  $H_m^k$  den Raum der harmonischen Polynome vom Grad  $\leq m$  in  $k$  Variablen bezeichnet. Wenn  $k = n$  gilt, so lassen wir den Index – wie auch sonst – fort.

Eine umfangreiche Untersuchung der harmonischen Polynome hat C. Müller [62] gegeben, dort findet man auch eine systematische Darstellung einer Basis von  $H_m$ , die sich zur Bestimmung des  $T$ -Ranges eignet. Ohne auf Details einzugehen, geben wir diese Basis in der folgenden Form an,

$$H_m = \{ T_{k,j}(\varphi) : \varphi = (\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(n)})^T \in \mathcal{S}_n, \\ k = 0, 1, \dots, m, j = 1, 2, \dots, N(n, k) \},$$

wobei

$$N(n, 0) = 1, \quad N(n, i) = \frac{(2i+n-1)(n+i-2)!}{(n-1)!i!}$$

und

$$N(n, m) = \sum_{i=0}^m N(n-1, i), \quad m \geq 1,$$

gilt. Damit erhalten wir

$$\dim H_m = \sum_{i=0}^m N(n, i).$$

C. Müller hat  $H_m$  rekursiv bestimmt, für unsere Zwecke reicht die folgende Form aus,

$$H_m = \{1, \sin^\mu \varphi^{(n)} T_{\mu,j}(n-1, e), \cos^\mu \varphi^{(n)}, \mu = 1, 2, \dots, m, \\ j = 1, 2, \dots, N(n-1, \mu), \\ \cos^{k-i} \varphi^{(n)} \sin^i \varphi^{(n)} T_{i,j}(n-1, e), k = 2, 3, \dots, m, i = 1, 2, \dots, k-1, \\ j = 1, 2, \dots, N(n-1, i): \varphi^{(n)} \in [0, \pi), e \in \mathcal{S}_{n-1}\},$$

hierbei bilden die  $T_{\mu,j}(n-1, e)$  eine Basis von  $H_m^{n-1}$  und es gilt

$$H_m^1 = \{1, \sin^\mu \varphi^{(1)}, \cos^\mu \varphi^{(1)}, \mu = 1, 2, \dots, m: \varphi^{(1)} \in [0, 2\pi)\}.$$

Mit Hilfe dieser Basis lässt sich induktiv der  $T$ -Rang von  $H_m$  berechnen, man erhält

$$(2.7) \quad \tau(H_m) = \dim H_m - (2m+1).$$

Für  $n = 1$  erhält man in (2.7) den  $T$ -Rang 0, die harmonischen Polynome stimmen in diesem Fall mit den trigonometrischen Polynomen vom Grad  $\leq m$  auf  $[0, 2\pi)$  überein.

## 2.2. Darstellungssätze

In diesem Paragraphen wird die Existenz von Darstellungen (2.2) des Funktionals (2.1) untersucht. Solche Darstellungssätze lassen sich auf unterschiedliche Weise gewinnen, ihre wesentliche Aussage betrifft eine obere Schranke für die Knotenanzahl  $N$ .

Wir werden mit folgender Norm von  $L$  arbeiten,

$$\|L\| = \sup \{L(g): g \in \mathcal{G}, \|g\|_\infty = 1\}.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir eine Basis  $G$  von  $\mathcal{G}$  in orthogonaler Form annehmen, d.h., es ist  $L(g_0) = 1$  und  $L(g_i) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Somit ist  $G^0 = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$  eine Basis von  $\mathcal{G}^0 = \{g \in \mathcal{G}: L(g) = 0\}$ .

Die Existenz von Darstellungen (2.2) ist durch den Interpolationssatz von S. I. Zuhovickii [62] gesichert. Dieser Satz wurde von mehreren Autoren untersucht, z.B. auch von V. Ptak und T. C. Rivlin und H. S. Shapiro.

**2.2.1. INTERPOLATIONSSATZ.** *Seien  $X$ ,  $\mathcal{G}$  und  $L$  wie oben definiert. Dann kann  $L$  in der Form (2.2) dargestellt werden, wobei die Knotenanzahl  $N$  durch  $0 \leq N \leq m+1$  begrenzt wird und die Koeffizienten  $C_i$  der Beziehung*

$$(2.8) \quad \sum_{i=1}^N |C_i| = \|L\|$$

genügen.

Einen einfachen Beweis dieses Satzes findet man bei H. S. Shapiro [71].

Wir werden die Abschätzung der Knotenanzahl schärfer fassen und nachweisen, dass es Darstellungen mit einer Knotenanzahl gibt, die von dem  $T$ -Rang von  $\mathcal{G}^0$  abhängt. Wir verlieren jedoch Eigenschaft (2.8). In 2.3 werden wir sehen, dass diese Eigenschaft bei minimalen Formeln nicht notwendigerweise vorliegen muss. Der  $T$ -Rang von  $\mathcal{G}^0$  beschreibt die Anzahl der Knoten, die für eine Darstellung (2.2) mindestens notwendig ist. Falls  $\tau(\mathcal{G}) \leq \tau(\mathcal{G}^0)$  gilt, so gibt es eine minimale Darstellung von  $L$  mit  $N = \dim \mathcal{G} - \tau(\mathcal{G}^0)$  Knoten. Im Fall  $\tau(\mathcal{G}^0) < \tau(\mathcal{G})$  kann die Existenz von Darstellungen mit höchstens  $m+1$  Knoten nachgewiesen werden. Genauere Aussagen sind unter unseren allgemeinen Voraussetzungen nicht möglich.

**2.2.2. LEMMA.** *Seien  $X$ ,  $\mathcal{G}$  und  $L$  wie oben gegeben. Wenn  $L$  in der Form (2.2) dargestellt werden kann, dann gilt*

$$\tau(\mathcal{G}^0) \geq m - N + 1.$$

**Beweis.** Wenn (2.2) gegeben ist, so gilt insbesondere

$$0 = L(g_j) = \sum_{i=1}^N C_i g_j(x_i), \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Damit ergibt sich

$$N - T \begin{bmatrix} g_1, g_2, \dots, g_m \\ x_1, x_2, \dots, x_N \end{bmatrix} > 0,$$

so dass sich die Behauptung aus Lemma 2.1.3, (ii) ergibt. ■

Über den  $T$ -Rang von  $\mathcal{G}^0$  erhalten wir somit die folgende Abschätzung für die Knotenanzahl  $N$  in einer Darstellung (2.2),

$$(2.9) \quad N \geq \dim \mathcal{G} - \tau(\mathcal{G}^0).$$

Wir werden jetzt  $T$ -Rang Eigenschaften von  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{G}^0$  verknüpfen, um Bedingungen zu erhalten, die Darstellungen von  $L$  garantieren. Dabei wird das Darstellungsproblem auf eine einfache klassische Rangbeziehung reduziert.

**2.2.3. SATZ.** *Wenn es  $N$  paarweise verschiedene Punkte  $x_1, x_2, \dots, x_N$  aus  $X$  gibt, so dass*

$$T \begin{bmatrix} g_0, g_1, \dots, g_m \\ x_1, x_2, \dots, x_N \end{bmatrix} = N \quad \text{und} \quad T \begin{bmatrix} g_1, g_2, \dots, g_m \\ x_1, x_2, \dots, x_N \end{bmatrix} < N$$

*gilt, so gibt es eine Darstellung (2.2) von  $L$  mit den Knoten  $x_1, x_2, \dots, x_N$ . Diese Rangbeziehung ist insbesondere erfüllt, wenn  $\tau(\mathcal{G}) \leq m - N + 1 \leq \tau(\mathcal{G}^0)$  gilt.*

**Beweis.** Auf Grund der Voraussetzung besitzt das System

$$\begin{bmatrix} g_1(x_1) & g_1(x_2) & \cdots & g_1(x_N) \\ g_2(x_1) & g_2(x_2) & \cdots & g_2(x_N) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_m(x_1) & g_m(x_2) & \cdots & g_m(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = 0$$

mindestens eine nicht-triviale Lösung  $(b_1, b_2, \dots, b_N)^T$ . Somit gilt für alle  $g \in \mathcal{G}^0$  die Beziehung

$$0 = \sum_{i=1}^N b_i g(x_i).$$

Für ein beliebiges  $g \in \mathcal{G}$  bilden wir die Funktionen  $h = L(g)g_0 - L(g_0)g$ . Da  $h$  in  $\mathcal{G}^0$  liegt, folgt für jedes  $g \in \mathcal{G}$

$$L(g) = \sum_{i=1}^N b_i g_0(x_i) = L(g_0) \sum_{i=1}^N b_i g(x_i).$$

Die erste Rangaussage in den Voraussetzungen garantiert, dass  $\sum_{i=1}^N b_i g_0(x_i) \neq 0$  ist. Damit erhalten wir

$$L(g) = \left[ \sum_{i=1}^N b_i L(g_0)g(x_i) \right] \left[ \sum_{i=1}^N b_i g_0(x_i) \right]^{-1}$$

für jedes  $g \in \mathcal{G}$ . In der Darstellung (2.2) haben wir damit die folgenden Koeffizienten,

$$C_i = b_i L(g_0) \left[ \sum_{j=1}^N b_j g_0(x_j) \right]^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Der zweite Teil des Satzes ergibt sich direkt aus der Definition des  $T$ -Ranges. ■

Wenn wir zusätzlich wissen, dass  $\tau(\mathcal{G}^0) > 0$  ist, dann können wir die Knoten als gemeinsame Nullstellen von Funktionen aus  $\mathcal{G}^0$  charakterisieren. Wir benutzen hierzu folgendes wohlbekanntes Lemma über die lineare Abhängigkeit linearer Funktionale, vgl. etwa J. L. Kelley, I. Namioka *et al.* [63], Theorem 1.3.

**2.24. LEMMA.** Seien  $L_0, L_1, \dots, L_\nu$  lineare Funktionale auf einem linearen Raum  $E$ . Sei  $g \in E$ . Dann ist  $L_0$  eine Linearkombination der  $L_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, \nu$ , wenn  $L_0(g) = 0$  gilt, sofern  $L_i(g) = 0$  für  $i = 1, 2, \dots, \nu$  erfüllt ist.

**2.25. SATZ.** Seien  $X, \mathcal{G}$  und  $L$  wie oben gegeben. Für jedes  $r$  mit  $\tau(\mathcal{G}) \leq r \leq \tau(\mathcal{G}^0)$  gibt es eine Darstellung (2.2) von  $L$  mit  $N = m - r + 1$  Knoten. In jeder solchen Darstellung sind die Knoten wie folgt charakterisiert.

(i) Wenn  $r = 0$ , so kann jede Auswahl von  $m + 1$  paarweise verschiedenen Punkten aus  $X$  als Knotenmenge benutzt werden,

(ii) wenn  $r > 0$ , so sind die Knoten  $x_1, x_2, \dots, x_{m-r+1}$  die gemeinsamen Nullstellen von  $r$  linear unabhängigen Funktionen aus  $\mathcal{G}^0$ .

Minimale Darstellungen erhält man für  $r = \tau(\mathcal{G}^0)$ .

Beweis. Sei  $r > 0$ . In  $\mathcal{G}^0$  gibt es  $r$  linear unabhängige Funktionen  $q_1, q_2, \dots, q_r$  mit  $m-r+1$  paarweise verschiedenen gemeinsamen Nullstellen  $x_1, x_2, \dots, x_{m-r+1}$  in  $X$  (Lemma 2.1.3, (iii)). Wenn  $g \in \mathcal{G}$  in diesen Nullstellen verschwindet, dann folgt  $L(g) = 0$ . Denn wenn  $g$  und  $q_1, q_2, \dots, q_r$  in  $m-r+1$  Punkten verschwinden und  $L(g) \neq 0$  wäre, so erhielten wir  $r+1$  linear unabhängige Funktionen aus  $\mathcal{G}$  mit  $m-r+1$  paarweise verschiedenen Nullstellen in  $X$ , im Widerspruch zu Lemma 2.1.2, (iii).

Lemma 2.2.4 liefert die Behauptung, wenn wir die Funktionale in der Form

$$L_i: \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{R}: g \rightarrow L_i(g) = g(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, m-r+1,$$

erklären. Jetzt gilt  $L(g) = L_0(g) = 0$ , wenn  $L_i(g) = 0$  für alle  $i = 1, 2, \dots, m-r+1$  gilt.

Im Fall  $r = 0$  verbleibt zu zeigen, dass jede Auswahl von  $m+1$  paarweise verschiedenen Punkten aus  $X$  als Knotenmenge zulässig ist. Das ist jedoch klar, weil es nur  $m$  linear unabhängige Funktionen in  $\mathcal{G}^0$  gibt. Die Minimalität im Fall  $r = \tau(\mathcal{G}^0)$  ergibt sich aus Lemma 2.2.2. ■

Es verbleiben somit noch die Fälle zur Untersuchung, bei denen  $\tau(\mathcal{G}^0) < \tau(\mathcal{G})$  gilt.

**2.2.6. SATZ.** Seien  $X$ ,  $\mathcal{G}$  und  $L$  wie oben gegeben. Wenn  $\tau(\mathcal{G}^0) < \tau(\mathcal{G}) = r$  gilt, dann gibt es eine Darstellung (2.2) von  $L$  mit  $N$  Knoten, wobei  $m-r+2 \leq N \leq m+1$  gilt.

Beweis. Da  $\tau(\mathcal{G}) = r > 0$  vorausgesetzt ist, folgt aus Lemma 2.1.5, dass  $\tau(\mathcal{G}^0) \geq r-1$  ist. Damit ergibt sich wegen Lemma 2.2.2 die Beziehung  $N \geq m-r+2$ .

Wir weisen nun schrittweise nach, dass es eine Darstellung (2.2) geben muss, wobei höchstens  $m+1$  Knoten verwendet werden. Nach Lemma 2.1.4, (iii) gibt es  $m-r+2$  paarweise verschiedene Punkte  $x_1, x_2, \dots, x_{m-r+2}$  in  $X$ , die die Nullstellen von genau  $r-1$  linear unabhängigen Funktionen aus  $\mathcal{G}$  sind. D.h., es ist

$$T \begin{bmatrix} g_0, g_1, \dots, g_m \\ x_1, x_2, \dots, x_{m-r+2} \end{bmatrix} = m-r+2.$$

Jetzt kann

$$(2.10) \quad T \begin{bmatrix} g_1, g_2, \dots, g_m \\ x_1, x_2, \dots, x_{m-r+2} \end{bmatrix} < m-r+2$$

gelten. Dann gibt es nach Satz 2.2.3 eine Darstellung von  $L$  mit  $m-r+2$

Knoten. Ist (2.10) nicht erfüllt, dann muss es wegen der linearen Unabhängigkeit von  $g_0, g_1, \dots, g_m$  einen weiteren, von  $x_1, x_2, \dots, x_{m-r+2}$  verschiedenen Punkt  $x_{m-r+3}$  geben, so dass

$$T \begin{bmatrix} g_0, g_1, \dots, g_m \\ x_1, x_2, \dots, x_{m-r+3} \end{bmatrix} = m-r+3$$

erfüllt ist. Dieses Vorgehen lässt sich solange wiederholen, bis entweder eine Darstellung auf Grund von Satz 2.2.3 gefunden worden ist, oder aber  $m+1$  paarweise verschiedene Punkte aus  $X$  vorliegen, so dass

$$T \begin{bmatrix} g_0, g_1, \dots, g_m \\ x_1, x_2, \dots, x_{m+1} \end{bmatrix} = m+1$$

gilt. Dann gibt es trivialerweise eine Darstellung von  $L$ . ■

Anwendungsmöglichkeiten und Grenzen dieser Darstellungssätze werden im folgenden Paragraphen diskutiert. Wir verweisen zuvor noch auf ein Ergebnis von V. Tschakaloff [57], das besagt, dass im Falle von  $\mathcal{G} = \mathcal{P}_m$  zusätzlich die Positivität der Koeffizienten  $C_i$  garantiert werden kann. Dieses Resultat wird in allgemeinerer Form in 3.1 hergeleitet.

### 2.3. Anwendungen

In diesem Paragraphen werden die Ergebnisse aus 2.2 anhand einiger Beispiele illustriert. Insbesondere wird untersucht, wann der  $T$ -Rang von  $\mathcal{G}^0$  tatsächlich ausreicht, um das Darstellungsproblem mit minimaler Knotenzahl zu lösen.

Es ist klar, dass die Situation von Satz 2.2.6 immer dann vorliegt, wenn die untere Schranke (2.9) von der Knotenanzahl nicht angenommen wird. In diesen Fällen werden minimale Darstellungen nicht mehr allein von  $T$ -Rang Eigenschaften bestimmt; denn die Voraussetzungen von Satz 2.2.3 sind nicht a priori gegeben. Zur Bestimmung von Darstellungen muss man jetzt versuchen, die Voraussetzungen mit einem  $N$  zu erfüllen, das echt grösser als die untere Schranke aus (2.9) ist.

Das läuft letztlich darauf hinaus, das System  $G$  nicht auf der ursprünglichen Menge  $X$  zu betrachten, sondern auf einer Teilmenge  $X^*$ . Dabei muss  $X^*$  so gewählt werden, dass  $\tau(G^0(X^*)) > \tau(G^0)$  und  $\tau(G(X^*)) \leq \tau(G)$  gilt. Dann sind die Voraussetzungen von Satz 2.2.5 erfüllt und man hat eine Kennzeichnung erreicht. Für die Bestimmung von  $X^*$  sind aber kaum Anhaltspunkte gegeben, so dass dieses Vorgehen nicht als konstruktiv bezeichnet werden kann. Von Interesse sind demnach allein die Fälle, in denen die Voraussetzungen von Satz 2.2.5 direkt erfüllt sind. Wie die nachfolgenden Beispiele zeigen werden, ist das im Mehrdimensionalen nur in Spezialfällen zu erwarten.

Beginnen wir mit positiven Ergebnissen. Wenn das System  $G = \{g_0, g_1, \dots, g_m\}$  ein Tschebyscheff-System auf  $X$  ist, so gilt  $0 = \tau(G) \leq \tau(G^0)$  und Satz 2.2.5 lässt sich anwenden. In diesem Fall liegt bereits eine weit ausgebaute Theorie minimaler Darstellungen vor, die bei S. Karlin und W. J. Studden [66] dargestellt ist. Das wesentliche Ergebnis dieser Theorie lässt sich als  $T$ -Rang Beziehung wie folgt ausdrücken.

**2.3.1. SATZ.** Sei  $G = \{g_0, g_1, \dots, g_m\}$  ein Tschebyscheff-System auf  $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$  und  $L$  ein strikt positives lineares Funktional auf  $\mathcal{G}$ , so dass  $G^0 = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$  eine Basis von  $\mathcal{G}^0$  ist. Dann gilt  $\tau(G^0) = m - [m/2]$ .

Näheres hierzu findet man bei H. J. Schmid [78], wo man auch Details zu den anderen Sätzen dieses Paragraphen findet. Der Beweis des Satzes wird entweder mit Dualitätsargumenten wie bei S. Karlin und W. J. Studden [66] geführt, oder aber mit Hilfe von Sätzen über beste einseitige Approximation, mit denen R. A. DeVore [68] einen neuen Zugang zu Darstellungsproblemen für Tschebyscheff-Systeme aufgezeigt hat.

Wenn  $\mathcal{G}$  zusätzlich algebraische Struktur hat, so vereinfacht sich die Herleitung wie die beiden nächsten Beispiele zeigen.

**2.3.2. Gauss-Quadratur.** Sei  $P^1(X)$  der reelle Polynomring in einer Variablen, eingeschränkt auf das Intervall  $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$  und  $P_m^1(X)$  der Raum der Polynome aus  $P^1(X)$  vom Grad  $\leq m$ . Gegeben sei ein strikt positives lineares Funktional

$$(2.11) \quad L: P^1(X) \rightarrow \mathbb{R}: p \rightarrow L(p).$$

Gesucht sind minimale Darstellungen von  $L$  auf den Teilräumen  $P_m^1$ . Da  $L$  strikt positiv ist, können wir eine orthogonalisierte Basis von  $P_m^1$  in monomisierter Form annehmen. Wir bezeichnen sie in der Form  $G = \{1, p_1, p_2, \dots, p_m\}$ . Es gilt somit  $L(p_i p_j) = 0$ , falls  $i \neq j$ . Als Basis von  $(P_m^1)^0$  können wir somit die Menge  $G^0 = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$  wählen. Der  $T$ -Rang von  $G^0$  muss bestimmt werden.

Wir setzen im folgenden  $k = [m/2]$  und zeigen zuerst die Beziehung  $\tau(G^0) \leq m - k$ . Auf Grund von Lemma 2.1.2, (ii) genügt es zu zeigen, dass je  $m - k + 1$  linear unabhängige Polynome aus  $(P_m^1)^0$  höchstens  $k - 1$  gemeinsame Nullstellen in  $X$  haben können. Wenn wir annehmen, dass diese  $m - k + 1$  Polynome  $k$  gemeinsame verschiedene Nullstellen haben, so müssen die Polynome von der Form

$$\bar{g}_k, \bar{g}_1 \bar{g}_k, \bar{g}_2 \bar{g}_k, \dots, \bar{g}_{m-k} \bar{g}_k$$

sein, wobei der Index von  $\bar{g}_i$  den Grad des Polynoms angibt. Gleichzeitig muss aber  $\bar{g}_k$  zu  $P_{m-k}^1$  orthogonal sein, das führt aber auf einen Widerspruch.

Wir zeigen nun, dass  $\tau((P_m^1(X))^0) \geq m - k$  gilt. Dazu müssen wir  $m - k$  linear unabhängige Polynome in  $(P_m^1)^0$  finden, die in  $k + 1$  verschiedenen

Punkten aus  $X$  gemeinsam verschwinden. Diese Polynome können nur die folgende Form haben,

$$q_{k+1}, q_1 q_{k+1}, q_2 q_{k+1}, \dots, q_{m-k-1} q_{k+1},$$

wobei der Grad von  $q_i$  wieder durch den Index angegeben ist. Das Polynom  $q_{k+1}$  muss somit zu  $P_{m-k-1}^1$  orthogonal sein. Damit folgt

$$(2.12) \quad q_{k+1} = p_{k+1} + \gamma(m-1-2k)p_k, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Aus der Theorie orthogonaler Polynome, siehe z.B. G. Freud [69], ist bekannt, dass  $q_{k+1}$  genau  $k+1$  verschiedene reelle Nullstellen besitzt. Für  $\gamma(m-1-2k) = 0$  liegen diese Nullstellen in  $(a, b)$ . Damit ist der Fall  $m = 2k+1$  geklärt.

Wenn  $m = 2k$ , so sind alle die Polynome aus (2.12) zulässig, deren Nullstellen in  $X$  liegen. Aus der Eigenschaft, dass sich die Nullstellen von  $p_{k+1}$  und  $p_k$  trennen, berechnet man, dass die Nullstellen von  $q_{k+1} = p_{k+1} + \bar{\gamma}p_k$  genau dann in  $X$  liegen, wenn

$$\frac{p_{k+1}(a)}{p_k(a)} \leq \bar{\gamma} \leq \frac{p_{k+1}(b)}{p_k(b)}$$

gilt. Damit ist das Gauss-Quadraturproblem mit Hilfe von Satz 2.2.5 gelöst.

Für  $m = 2k+1$  gibt es genau eine minimale Darstellung von (2.11); die Knoten sind die Nullstellen von  $p_{k+1}$ . Für  $m = 2k$  gibt es unendlich viele minimale Darstellungen. Die Knoten sind die Nullstellen von

$$p_{k+1} + \bar{\gamma}p_k, \quad \text{wobei} \quad \frac{p_{k+1}(a)}{p_k(a)} \leq \bar{\gamma} \leq \frac{p_{k+1}(b)}{p_k(b)}.$$

Für  $\bar{\gamma} = 0$  erhält man eine Darstellung, die nicht nur für  $P_{2k}^1$ , sondern sogar für  $P_{2k+1}^1$  exakt ist.

Die Positivität der Koeffizienten lässt sich in beiden Fällen direkt aus der Interpolationseigenschaft von  $P_k^1$  und der strikten Positivität von  $L$  gewinnen.

**2.3.3. Harmonische Interpolation.** Sei  $\mathcal{S}_1$  die Einheitssphäre der Einheitskugel  $\mathcal{X}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Gegeben sei ein fester Punkt  $x^* \in \mathcal{X}_2 \setminus \mathcal{S}_1$ . Für Funktionen  $f \in \mathcal{C}(\mathcal{S}_1)$  soll die harmonische Fortsetzung von  $f$  auf  $\mathcal{X}_2$  an der Stelle  $x^*$  approximiert werden. Wir bezeichnen diesen Wert mit  $L(f)$ .

Gesucht sind Näherungen an  $L(f)$  durch Linearkombinationen von Punktauswertungen von  $f$  auf der Sphäre  $\mathcal{S}_1$ . Die Approximationsgüte soll dabei durch den Raum  $H_m^1$  der harmonischen Polynome vom Grad  $\leq m$ , eingeschränkt auf  $\mathcal{S}_1$ , bestimmt werden. Es geht also um Darstellungen des Funktionals

$$L: H_m^1 \rightarrow \mathbb{R}: h \rightarrow L(h)$$

in der Form

$$L(h) = \sum_{i=1}^N C_i h(x_i), \quad C_i \in \mathbf{R}, C_i \neq 0, x_i \in \mathcal{S}_1, h \in H_m^1.$$

Um eine einfache Notation zu erhalten, führen wir Polarkoordinaten ein. Die harmonischen Polynome vom Grad  $\leq m$  auf  $\mathcal{X}_2$  besitzen eine Basis der Gestalt

$$1, r^i \sin i\varphi, r^i \cos i\varphi, \quad r \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi), i = 1, 2, \dots, m.$$

Wenn wir diese Basis auf  $\mathcal{S}_1$  einschränken, so erhalten wir den Raum der trigonometrischen Polynome vom Grad  $\leq m$  mit Definitionsbereich  $[0, 2\pi)$ . Wir bezeichnen diesen Raum wie in 2.1 mit  $H_m^1$ .

Wir können uns auf einen Punkt  $x^*$  mit Polarkoordinaten  $(a, 0)$  beschränken, wobei  $a \in [0, 1)$  gilt. Somit ist  $L$  durch

$$L(\cos i\varphi) = a^i, \quad L(\sin i\varphi) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

definiert. Auf Grund des Maximumprinzips ist  $L$  strikt positiv. Es lässt sich deshalb eine bezüglich  $L$  orthogonalisierte Basis von  $H_m^1$  berechnen. Wir geben sie in der Form

$$H_m = \{1, \sin i\varphi - a \sin(i-1)\varphi, \cos i\varphi - a \cos(i-1)\varphi : \\ \varphi \in [0, 2\pi), i = 0, 1, \dots, m\}$$

an. Damit liegt auch  $H_m^0 = H_m \setminus \{1\}$  als Basis von  $(H_m^1)^0$  fest. Es ist  $\tau(H_m) = 0$ . Man weist analog zu 2.3.2 nach, dass  $\tau(H_m^0) \leq m$  ist. Wir zeigen nun, dass auch  $\tau(H_m^0) \geq m$  gilt. Nach Lemma 2.1.2, (iii) müssen wir  $m$  linear unabhängige Polynome aus  $(H_m^1)^0$  bestimmen, die in  $m+1$  paarweise verschiedenen Punkten aus  $[0, 2\pi)$  verschwinden. Hierzu definieren wir das Polynom

$$(2.13) \quad h = \gamma_1 \left( \sin \frac{m+1}{2} \varphi - a \sin \frac{m-1}{2} \varphi \right) + \gamma_2 \left( \cos \frac{m+1}{2} \varphi - a \cos \frac{m-1}{2} \varphi \right), \\ (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Dieses Polynom besitzt für jede zulässige Wahl von  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  in  $[0, 2\pi)$  gerade  $m+1$  verschiedene Nullstellen. Falls  $m$  ungerade ist, so verschwinden die folgenden linear unabhängigen Polynome aus  $(H_m^1)^0$  in den Nullstellen von  $h$ , nämlich

$$h, h \cos \varphi, h \sin \varphi, h \cos 2\varphi, h \sin 2\varphi, \dots, h \cos \frac{m-1}{2} \varphi, h \sin \frac{m-1}{2} \varphi.$$

Wenn  $m$  gerade ist, so verschwinden die folgenden linear unabhängigen Polynome aus  $(H_m^1)^0$  in den Nullstellen von  $h$ , nämlich

$$h \cos \frac{1}{2}\varphi, h \sin \frac{1}{2}\varphi, h \cos \frac{3}{2}\varphi, h \sin \frac{3}{2}\varphi, \dots, h \cos \frac{1}{2}(m-1)\varphi, h \sin \frac{1}{2}(m-1)\varphi.$$

Damit folgt  $\tau(H_m^0) = m$  und mit Hilfe von Satz 2.2.5 ist das Problem der minimalen harmonischen Interpolation gelöst. Da wir  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  in (2.13) so wählen können, dass  $h$  in einem vorgegebenen Punkt  $\varphi^* \in [0, 2\pi)$  verschwindet, erhalten wir folgendes Ergebnis.

*Zu jedem  $\varphi^* \in [0, 2\pi)$  gibt es eine eindeutig bestimmte minimale Darstellung von  $L$ , deren Knoten die Nullstellen des Polynoms  $h$  aus (2.13) sind. Hierbei sind  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  so bestimmt, dass  $h$  in  $\varphi^*$  verschwindet.*

Die Positivität der Koeffizienten kann wie in 2.3.2 gefolgert werden.

Für  $a = 0$  wurden solche minimalen Darstellungen bereits von V. I. Krylov [67] bestimmt. Der Fall  $0 \leq a < 1$  kann aus der Darstellung von S. Karlin und W. J. Studden [66] gefolgert werden, durch diesen direkten Zugang hier können die Knoten als Nullstellen eines orthogonalen Polynoms gekennzeichnet werden.

Die Untersuchung von Darstellungsproblemen mit Hilfe von  $T$ -Rang Eigenschaften liefert zumindest in den Fällen, in denen  $G$  ein Tschebyscheff-System ist, zufriedenstellende Ergebnisse. Es stellt sich die Frage, für welche kompakten  $X \subset \mathbb{R}^n$  mit wenigstens  $m+1$  Punkten man erwarten kann, dass ein auf  $X$  definiertes System  $G = \{g_0, g_1, \dots, g_m\} \subset \mathcal{C}(X)$  den  $T$ -Rang 0 hat. Nach dem Satz von J. C. Mairhuber [56] ist  $G$  genau dann ein Tschebyscheff-System, wenn  $X$  homöomorph zu einer abgeschlossenen Teilmenge von  $\mathcal{S}_1$  ist, für ungerades  $m$  das homöomorphe Bild einer echten Teilmenge von  $\mathcal{S}_1$ . Damit besteht keine Hoffnung, echte höherdimensionale Probleme zu finden, bei denen der zugrundeliegende Raum  $\mathcal{S}$  einen  $T$ -Rang 0 hat.

Die Beispiele in 2.3.2 und 2.3.3 besitzen wichtige mehrdimensionale Erweiterungen, bei denen die zugrundeliegenden Systeme keine Tschebyscheff-Systeme mehr sind, nämlich die Kubaturprobleme und das Problem der höherdimensionalen harmonischen Interpolation. Bevor wir Anwendungsmöglichkeiten der Ergebnisse aus 2.2 auf diese Probleme betrachten, weisen wir noch auf ein weiteres eindimensionales Problem hin, bei dem ein strikt positives lineares Funktional auf einem Raum mit einem  $T$ -Rang  $> 0$  definiert ist.

Bei Quadraturaufgaben, deren Approximationsgüte durch Räume von Splinefunktionen mit festen Knoten bestimmt wird, geht es um die Darstellung eines strikt positiven linearen Funktionals

$$L: \mathcal{S}_{m,k} \rightarrow \mathbb{R}: s \rightarrow L(s),$$

wobei  $\mathcal{S}_{m,k}$  der Raum der Splinefunktionen vom Grad  $\leq m$  mit  $k$  festen Knoten aus  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  ist. Der  $T$ -Rang von  $\mathcal{S}_{m,k}$  ist in (2.5) angegeben. Durch

das Funktional  $L$  ist der Raum  $\mathcal{S}_{m,k}^0$  festgelegt. Im Hinblick auf die Sätze aus 2.2 ist der  $T$ -Rang von  $\mathcal{S}_{m,k}^0$  von Bedeutung. Hier ergibt sich folgende Aussage.

**2.3.4. SATZ.** *Seien  $\mathcal{S}_{m,k}$  und  $L$  wie oben definiert. Dann erhält man für den  $T$ -Rang von  $\mathcal{S}_{m,k}^0$*

- (i)  $\tau(\mathcal{S}_{m,k}^0) = k \leq \tau(\mathcal{S}_{m,k})$ , falls  $k \leq m+1$ ,
- (ii)  $\tau(\mathcal{S}_{m,k}^0) = k-1 = \tau(\mathcal{S}_{m,k})-1$ , falls  $k \geq m+2$ .

Im Fall  $k \leq m+1$  ist damit Satz 2.2.5 anwendbar. Minimale Darstellungen werden durch den  $T$ -Rang von  $\mathcal{S}_{m,k}^0$  charakterisiert. Anders im Fall  $k \geq m+2$ , hier reichen  $T$ -Rang Eigenschaften nur noch zur allgemeinen Aussage von Satz 2.2.6 aus. In diesem Fall liefert (2.9) eine Schranke, die in keinem Fall angenommen wird.

Hier zeigt sich, dass man mit anderen Methoden weitaus bessere Ergebnisse erzielen kann. Eine vollständige Lösung des Quadraturproblems auf Splineräumen findet man ebenfalls bei S. Karlin und W. J. Studden [66].

Ein ähnliches Verhalten des  $T$ -Ranges von  $\mathcal{G}^0$  stellt man auch bei mehrdimensionalen Problemen fest. Für ein strikt positives lineares Funktional auf  $P_m(X)$ ,  $X$  kompakte Teilmenge des  $R^n$  mit nicht-leerem Inneren, stellt sich die Frage nach dem  $T$ -Rang von  $P_m^0(X)$ . Insbesondere ist es von grundsätzlichem Interesse, ob auch für  $n > 1$  die Voraussetzungen von Satz 2.2.5 eintreten. Wir erhalten jedoch folgende Aussage.

**2.3.5. SATZ.** *Wenn  $m+1 < \dim P_k$ , wobei  $k = [m/2]$ , erfüllt ist, so gilt  $\tau(P_m^0(X)) = \tau(P_m(X)) - 1$ .*

**Beweis.** Nach (2.6) gilt  $\tau(P_m(X)) \leq \dim P_m - (m+1)$ , d.h., zu je  $m+1$  paarweise verschiedenen Punkten  $x_0, x_1, \dots, x_m$  aus  $X$  gibt es genau  $t = \dim P_m - (m+1)$  linear unabhängige Polynome  $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$  aus  $P_m$ , die in diesen Punkten verschwinden. Auf Grund der Voraussetzung gibt es ein  $Q$  aus  $P_k$ ,  $Q \neq 0$ , das in den Punkten  $x_0, x_1, \dots, x_m$  verschwindet. Da  $Q^2 \in P_m$ , muss  $Q^2$  in dem von den Polynomen  $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$  erzeugten Raum liegen. Das besagt aber, dass wenigstens eines der Polynome  $Q_i$  von  $L$  nicht annulliert wird, denn  $L$  ist strikt positiv. Damit können wir aber zu beliebigen, paarweise verschiedenen Punkten  $x_0, x_1, \dots, x_m$  aus  $X$  genau  $\dim P_m - (m+2)$  linear unabhängige Polynome aus  $P_m^0$  finden, die in diesen Punkten verschwinden. Somit folgt  $\tau(P_m^0(X)) \leq \dim P_m - (m+2) = \tau(P_m(X)) - 1$ . Aus Lemma 2.1.5 folgt  $\tau(P_m^0(X)) \geq \tau(P_m(X)) - 1$ , so dass sich die Behauptung ergibt. ■

Mit diesem Satz liegt für den Grossteil der Fälle bereits die Situation von Satz 2.2.6 vor, denn es gilt  $\dim P_m = \binom{m+n}{m}$ . Für  $m \geq 2$  und  $n \geq 4$ , sowie  $n = 2, 3$  und  $m \geq 6$  ist damit der  $T$ -Rang von  $P_m^0(X)$  durch Satz 2.3.5 bestimmt und es zeigt sich, dass  $T$ -Rang Eigenschaften in diesen Fällen nicht mehr ausreichen, um das Darstellungsproblem zu kennzeichnen. Nur in den

wenigen verbleibenden Fällen kann überhaupt ein ähnliches Verhalten wie im Eindimensionalen erwartet werden. Es zeigt sich, dass hier für  $n = 2$  und bestimmte Funktionale die Voraussetzungen von Satz 2.2.5 tatsächlich eintreten können. Ein einheitliches Bild wie für  $n = 1$  ist dabei jedoch nicht fest zu stellen.

Insgesamt gewinnt man den Eindruck, dass Kubaturformeln in niederen Dimensionen und mit kleinen Genauigkeitsgraden nicht typisch für das Gesamtverhalten von Kubaturformeln sind. Insbesondere wird klar, dass die aus dem Eindimensionalen gewohnten Argumente allein in mehreren Dimensionen nicht mehr ausreichen, um das Problem selbst für ein festes  $L$  vollständig zu beschreiben.

Im Fall der harmonischen Interpolation liegt ein ähnliches Verhalten vor. Das Problem lässt sich wie folgt stellen. Sei  $f \in \mathcal{C}(\mathcal{S}_n)$  vorgegeben. Die Lösung  $f^*$  des  $(n+1)$ -dimensionalen Dirichlet-Problems

$$\Delta_{n+1} f^* = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial^2}{\partial (x^{(i)})^2} f^*(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathcal{X}_{n+1} \setminus \mathcal{S}_n$$

mit  $f^*(x) = f(x)$  für  $x \in \mathcal{S}_n$

an der Stelle  $x^* \in \mathcal{X}_{n+1} \setminus \mathcal{S}_n$  wird durch

$$f^*(x^*) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(n+1))}{2 \cdot \pi^{(n+1)/2}} \int_{\mathcal{S}_n} f(u) \omega(u, x^*) d\sigma_n$$

beschrieben. Hierbei ist  $\omega(u, x^*)$  der Poisson-Kern.

Das Funktional

$$L^\circ: \mathcal{C}(\mathcal{S}_n) \rightarrow \mathbf{R}: f \rightarrow L^\circ(f) = f^*(x^*)$$

lässt sich durch Punktauswertungen auf  $\mathcal{S}_n$  approximieren. Die Approximationsgüte wird dabei durch die Räume  $H_m$ , der harmonischen Polynome vom Grad  $\leq m$ , eingeschränkt auf  $\mathcal{S}_n$ , festgelegt. Damit liegt ein Darstellungsproblem für das strikt positive Funktional

$$L: H_m \rightarrow \mathbf{R}: h \rightarrow L(h) = L^\circ(h) = h(x^*)$$

vor. Eine Darstellung von  $L$  der Gestalt

$$L(h) = \sum_{i=1}^N C_i h(x_i), \quad C_i \in \mathbf{R}, C_i \neq 0, x_i \in \mathcal{S}_n, h \in H_m,$$

heißt harmonische Interpolationsformel vom Grad  $m$ . Der Begriff der harmonischen Interpolation wurde von A. H. Stroud, Kwan-Wei Chen, Peng-Lei Wang und Zunkwang Mao [71] eingeführt. Dort und bei H. J. Schmid [77] findet man Näheres hierzu.

Da Rotationen die harmonischen Polynome invariant lassen, kann man

sich auf einen Punkt  $x^* = (0, 0, \dots, 0, a)^T$  mit  $a \in [0, 1)$  beschränken. Für  $a = 0$  folgt  $\omega(u, 0) \equiv 1$  und die harmonische Interpolationsformel ist zu einer Kubaturformel für das Integral über der Einheitskugel  $\mathcal{S}_n$  äquivalent.

Wenn wir die Definition der Basis für  $\mathcal{H}_m$  aus 2.1 benutzen, so ist  $L$  durch

$$L(T_{k,j}(n, \cdot)) = a^m T_{k,j}(n, 0), \quad k = 0, 1, \dots, m, j = 1, 2, \dots, N(n, k),$$

festgelegt. Auf Grund des Maximumprinzips ist  $L$  strikt positiv.

Analog zu Satz 2.3.5 beweist man die folgende Aussage über den  $T$ -Rang von  $H_m^0$ .

**2.3.6. SATZ.** Sei  $k = [m/2]$ . Wenn  $2m+1 < \dim H_k + \delta_m$ , wobei

$$\delta_m = \begin{cases} 1, & \text{falls } m \text{ ungerade,} \\ 0, & \text{falls } m \text{ gerade,} \end{cases}$$

so gilt

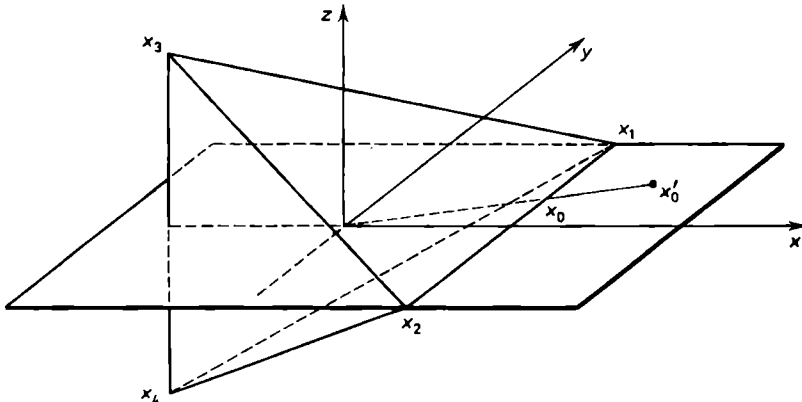
$$\tau(H_m^0) = \tau(H_m) - 1.$$

Die Dimension von  $H_k$  ist in 2.1 angegeben. Man stellt fest, dass auch hier der Grossteil der Fälle durch Satz 2.3.6 beschrieben wird. Die grundsätzlichen Folgerungen für das harmonische Interpolationsproblem sind also ähnlich wie die beim allgemeinen Kubaturproblem.

Wir beschliessen diesen Paragraphen mit einem einfachen Beispiel, das jedoch weiteren Aufschluss über minimale Darstellungen und Darstellungen mit positiven Koeffizienten gibt.

**2.3.7. BEISPIEL.** Sei  $X = \{x_i, i = 0, 1, 2, 3, 4\} \subset \mathbb{R}^3$  gegeben, wobei die Punkte als  $x_0 = (\lambda, \lambda/2, 0)^T$ ,  $x_1 = (1, 1, 0)^T$ ,  $x_2 = (1, -1, 0)^T$ ,  $x_3 = (-1, 0, 1)^T$ ,  $x_4 = (-1, 0, -1)^T$  gegeben sind, wobei  $\lambda > 0$  beliebig, aber fest gewählt ist.

Wir definieren  $G = \{1, x, y, z\}$  auf  $X$  und untersuchen minimale Darstellungen eines Funktionals  $L$ , das auf dem von  $G$  erzeugten Raum  $\mathcal{G}$  so definiert ist, dass  $L(1) = 1$  und  $G^0 = \{x, y, z\}$  gilt. Da keine Funktion aus dem von  $G^0$  erzeugten Raum  $\mathcal{G}^0$  nichtnegativ ist, ist  $L$  wegen  $L(1) = 1$  ein strikt positives lineares Funktional.



Der  $T$ -Rang von  $\mathcal{G}$  lässt sich mit den Hilfssätzen aus 2.1 leicht berechnen. Da die  $x_i$  paarweise verschieden sind, erhält man nach Lemma 2.1.2, (ii), dass  $\tau(\mathcal{G}) \leq 2$  sein muss.

Für  $\lambda = 1$  spannen die Punkte  $x_0, x_1, x_2$  eine Gerade auf, nach Lemma 2.1.3, (iv) kann  $\tau(\mathcal{G}) \geq 2$  gefolgert werden. Im Fall von  $\lambda \neq 1$  sind je 4 Punkte aus  $X$  die Ecken eines Tetraeders, damit folgt  $\tau(\mathcal{G}) = 0$  nach Lemma 2.1.2, (iv).

Für beliebiges  $\lambda$  liegen die Punkte  $x_0, x_1, x_2$  in einer Ebene, es folgt daher  $\tau(\mathcal{G}^0) \geq 1$  nach Lemma 2.1.3, (ii). Da je zwei Punkte aus  $X$  verschieden sind, ergibt sich  $\tau(\mathcal{G}^0) \leq 1$ . Für  $\lambda \neq 1$  gilt damit  $0 = \tau(\mathcal{G}) \leq \tau(\mathcal{G}^0) = 1$ . Nach Satz 2.2.5 besitzt  $L$  eine eindeutig bestimmte minimale Darstellung

$$(2.14) \quad L(g) = \frac{1}{\lambda - 1} (-g(x_0) + \frac{3}{4}\lambda g(x_1) + \frac{1}{4}\lambda g(x_2)), \quad g \in \mathcal{G}.$$

Für  $\lambda = 1$  gilt  $1 = \tau(\mathcal{G}^0) < \tau(\mathcal{G}) = 2$ . Nach Satz 2.2.6 besitzt  $L$  damit minimale Darstellungen mit 4 Knoten, z.B.

$$L(g) = \frac{1}{4}(g(x_1) + g(x_2) + g(x_3) + g(x_4)), \quad g \in \mathcal{G}.$$

Der Fall  $\lambda = 1$  zeigt, dass die obere Schranke für die Knotenanzahl aus Satz 2.2.6 angenommen wird, was jedoch für diskretes  $X$  zu erwarten ist. Für  $\lambda \neq 1$  hat die minimale Darstellung (2.14) nicht die Eigenschaft (2.8) des Interpolationssatzes 2.2.1. Das besagt, dass im Fall von  $\tau(\mathcal{G}) \leq \tau(\mathcal{G}^0)$  minimale Darstellungen durch den  $T$ -Rang von  $\mathcal{G}^0$  gekennzeichnet werden und nicht durch geometrische Eigenschaften, wie sie beim Beweis des Interpolationssatzes benutzt werden.

Wir bemerken abschliessend, dass in der minimalen Darstellung (2.14) nicht alle Koeffizienten positiv sind, obwohl  $L$  selbst strikt positiv ist.

### 3. Polynomiale Theorie

Die Folgerungen aus den Sätzen 2.3.5 und 2.3.6 für die zugehörigen Probleme zeigen, dass  $T$ -Rang Eigenschaften nicht ausreichen, um Darstellungsprobleme in höheren Dimensionen allgemein zu beschreiben. Die Anzahl der Punkte, die mit  $T$ -Rang Eigenschaften noch als gemeinsame Nullstellen von bestimmten Funktionen gekennzeichnet werden können, wächst in beiden Fällen linear mit dem Grad  $m$ . Die Anzahl der Knoten, die zur Darstellung benötigt werden, steigt aber mit dem Grad  $m$  zumindest in der Potenz der Dimension, die dem Problem zugrunde liegt. Dadurch erklärt sich das glatte eindimensionale Ergebnis und die Tatsache, dass man für kleine Grade und kleine Dimensionen noch Satz 2.2.5 anwenden kann.

Man wird deshalb nach anderen Methoden suchen, um Darstellungen

zu charakterisieren. In den angeführten Beispielen lässt sich der Raum, der die Approximationsgüte festlegt, in einen Ring einbetten. Um gemeinsame Nullstellen zu kennzeichnen, bieten sich daher Ideale und Nullstellengebilde an. Wir werden diese Möglichkeit im folgenden aufgreifen. Eine solche Verknüpfung von Idealtheorie und der Darstellung linearer Funktionale wurde zum ersten Male konsequent von H. M. Möller [73] untersucht. Wir werden die Untersuchung allerdings in einem strengeren Sinn führen, indem wir nur Ideale mit einer speziellen Eigenschaft betrachten. Diese Eigenschaft ergibt sich aus der Existenz von Darstellungen als notwendige Bedingung und ist somit fest mit dem Darstellungsproblem verbunden. Gleichzeitig können diese Ideale nur Nullstellen im  $\mathbb{R}^n$  besitzen, womit eine grundsätzliche Schwierigkeit gemeistert werden kann. Es ist jedoch offen, wie man garantieren kann, dass diese Nullstellen in einem bestimmten Gebiet, z.B. in  $X$ , liegen.

Wir beschränken uns hier allein auf die rein polynomiale Theorie, analoge Ansätze für die Räume harmonischer Polynome oder anderer Teilräume von Ringen sind möglich. In diesem Kapitel behandeln wir einen Schwerpunkt dieser Arbeit, die grundsätzliche Kennzeichnung von Darstellungen auf Polynomräumen durch reelle Ideale. Wir müssen uns dabei allerdings von einigen Voraussetzungen des vorherigen Kapitels lösen. Einerseits wird der zulässige Bereich für die Knoten auf den  $\mathbb{R}^n$  ausgedehnt, zum anderen untersuchen wir nur Darstellungen mit positiven Koeffizienten. Auswertungen ausserhalb von  $X$  sind für Polynome problemlos, da man jedoch Funktionen aus  $\mathcal{C}(X)$  in den Anwendungen auswerten möchte, können hierdurch Schwierigkeiten entstehen. Die Beschränkung auf positive Koeffizienten dagegen hat einen sehr guten Effekt auf die Stabilität der Formeln. Schliesslich beschränken wir uns allein auf interpolatorische Formeln, dadurch erfassen wir einen interessanten und wesentlichen Teil aller Darstellungen.

Die Ergebnisse werden für positive lineare Funktionale hergeleitet. Wir merken aber bereits hier an, dass die Anwendungen im Bereich strikt positiver Funktionale liegen. Diese Form der Darstellung wurde nicht gewählt, um den Eindruck einer besonders allgemeinen Theorie zu erwecken, sondern um den Punkt deutlich heraus zu arbeiten, an dem die strikte Positivität entscheidend wirksam wird.

Die polynomiale Problemstellung wird in 3.1 aufgegriffen. Einige wichtige Klassen von Kubaturformeln werden vorgestellt und die Bedeutung der interpolatorischen Formeln wird hervorgehoben. Schliesslich wird ein allgemeiner Darstellungssatz hergeleitet, der die Existenz interpolatorischer Kubaturformeln mit einer oberen Schranke für die Knotenanzahl garantiert.

In 3.2 werden notwendige Bedingungen für die Existenz interpolatori-

scher Kubaturformeln hergeleitet. Es wird ausserdem gezeigt, dass die Knoten einer solchen Formel das reelle Nullstellengebilde eines von orthogonalen Polynomen erzeugten Ideals sind. Dieses Ideal ist dadurch gekennzeichnet, dass jedes Polynom, das in den reellen Nullstellen des Ideals verschwindet, bereits im Ideal liegen muss. Diese wichtige Eigenschaft führt uns auf den Begriff des reellen Ideals.

Dieser Idealtyp wird in 3.3 vom Blickpunkt der algebraischen Geometrie aus näher untersucht. Neben einem Charakterisierungssatz reeller Ideale geben wir noch Abschätzungen der Mächtigkeit von Nullstellengebilden spezieller Ideale an.

Mit Hilfe dieser Ergebnisse lässt sich zeigen, dass die notwendigen Bedingungen aus 3.2 auch hinreichend sind. Der dadurch gewonnene Charakterisierungssatz wird durch weitere zusätzliche Eigenschaften ergänzt, die einige der wesentlichen Merkmale der eindimensionalen Theorie auch in höheren Dimensionen widerspiegeln.

### 3.1. Problemstellung

In diesem Paragraphen wird in den Problemkreis der interpolatorischen Kubaturformeln eingeführt. Die Existenzfrage wird durch eine allgemeine Form des Satzes von Tschakaloff beantwortet. Schliesslich wird dargestellt, warum man mit interpolatorischen Formeln den wesentlichen Kern aller Kubaturformeln überhaupt behandelt.

Sei  $n$  die Dimension des Kubaturproblems. Wir nehmen  $n$  beliebig, aber fest an. Mit  $P = R[x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}]$  bezeichnen wir den Ring der reellen Polynome in  $n$  Variablen. Die Einschränkung von  $P$  auf eine Teilmenge  $X$  des  $R^n$  wird durch  $P(X)$  ausgedrückt. Den Raum der stetigen reellwertigen Funktionen auf  $X$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{C}(X)$ . Einen Punkt  $x_i \in R^n$  schreiben wir auch koordinatenweise in der Form  $x_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(n)})^T$ . Den Raum der Polynome aus  $P$  vom Grad  $\leq m$  bezeichnen wir mit  $P_m$ .

Sei  $X$  eine abgeschlossene Teilmenge des  $R^n$  und

$$(3.1) \quad I: P(X) \rightarrow R: P \rightarrow I(P), \quad I(1) = 1,$$

ein positives lineares Funktional. Auf Grund des Darstellungssatzes positiver linearer Funktionale auf adaptierten Räumen in  $\mathcal{C}(X)$ , siehe z.B. G. Choquet [69], Band II, Seite 276, gibt es zu  $I$  ein positives Radon-Mass  $\mu$  auf  $X$ , so dass jedes  $P \in P(X)$  bzgl.  $\mu$  integrierbar ist und so, dass  $I(P) = \mu(P)$  gilt. Wir können deshalb annehmen, dass (3.1) durch ein positives Radon-Mass  $\mu$  erzeugt wird. Somit gilt

$$(3.2) \quad I(P) = \int_X P(x) d\mu(x) \quad \text{für } P \in P.$$

Wir können also die Integrale, zu deren Berechnung numerische Methoden angewandt werden sollen, in der Form (3.1) und (3.2) annehmen. Bei den interessanten Anwendungen wird  $I$  sogar *strikt positiv* sein, d.h., es gilt für  $P \in \mathcal{P}(X)$

$$I(P) > 0, \text{ falls } P(x) \geq 0 \text{ und } P(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in X.$$

In diesem Fall vereinfachen sich die Ergebnisse dieses Kapitels in einigen Punkten, wir werden darauf später im Detail eingehen.

**3.1.1. KUBATURPROBLEM.** *Zu einer abgeschlossenen Menge  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  sei ein positives lineares Funktional (3.1) gegeben. Man charakterisiere und bestimme Darstellungen von  $I$  auf den Räumen  $\mathcal{P}_m$  der Form*

$$(3.3) \quad K(P) = \sum_{i=1}^N C_i P(x_i), \quad C_i > 0, \quad x_i \in \mathbb{R}^n,$$

wobei

$$(3.4) \quad N \leq \dim \mathcal{P}_m$$

und die Bedingungen

$$(3.5) \quad \begin{cases} K(P) = I(P) & \text{für alle } P \in \mathcal{P}_m, \\ K(Q) \neq I(Q) & \text{für mindestens ein } Q \in \mathcal{P}_{m+1} \end{cases}$$

erfüllt sein mögen.

Wir nennen (3.3) mit den Eigenschaften (3.4) und (3.5) eine *Kubaturformel vom Grad  $m$* . Die Bedingungen in (3.5) dienen dazu, den maximalen Polynomraum zu bestimmen, für den die Formel noch exakt ist. Die folgenden Überlegungen zeigen, dass durch die Bedingung (3.4) nur die Formeln ausgeschlossen werden, die sich durch Streichen von Knoten auf eine einfachere Form bringen lassen.

**3.1.2. LEMMA.** *Wenn*

$$(3.6) \quad I(P) = \sum_{i=1}^{\bar{N}} \bar{C}_i P(x_i), \quad \bar{C}_i > 0, \quad x_i \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{N} > \dim \mathcal{P}_m, \quad P \in \mathcal{P}_m,$$

*gilt, so lässt sich durch Streichen einiger Knoten und Bestimmen neuer Koeffizienten  $C_i > 0$  eine Kubaturformel der Gestalt*

$$(3.7) \quad I(P) = \sum_{i=1}^N C_i P(\bar{x}_i), \quad C_i > 0, \quad N \leq \dim \mathcal{P}_m, \quad P \in \mathcal{P}_m,$$

*gewinnen, deren Knoten  $\bar{x}_i$  eine echte Teilmenge der Knoten von (3.6) sind.*

**Beweis.** Wir betrachten (3.6) als lineares Gleichungssystem mit  $\bar{C}_i$  als Unbekannten. Hierzu nehmen wir  $P_1, P_2, \dots, P_\lambda$ ,  $\lambda = \dim P_m$ , als eine Basis von  $P_m$  an. Es gilt somit

$$\sum_{i=1}^{\bar{N}} \bar{C}_i \begin{bmatrix} P_1(x_i) \\ P_2(x_i) \\ \vdots \\ P_\lambda(x_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I(P_1) \\ I(P_2) \\ \vdots \\ I(P_\lambda) \end{bmatrix}.$$

Da  $\dim P_m = \lambda < \bar{N}$  gilt, muss es Koeffizienten  $D_i$  geben, mit mindestens einem positiven  $D_j$ , so dass

$$\sum_{i=1}^{\bar{N}} D_i \begin{bmatrix} P_1(x_i) \\ P_2(x_i) \\ \vdots \\ P_\lambda(x_i) \end{bmatrix} = 0$$

gilt. Wenn wir

$$(3.8) \quad D = \max \{D_i/\bar{C}_i : i = 1, 2, \dots, \bar{N}\}$$

setzen, so ist  $D > 0$  und es folgt

$$\sum_{i=1}^{\bar{N}} \frac{D\bar{C}_i - D_i}{D} \begin{bmatrix} P_1(x_i) \\ P_2(x_i) \\ \vdots \\ P_\lambda(x_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I(P_1) \\ I(P_2) \\ \vdots \\ I(P_\lambda) \end{bmatrix}.$$

Die Koeffizienten  $(D\bar{C}_i - D_i)/D$  sind nicht-negativ und verschwinden für die Indizes  $j$ , in denen in (3.8) das Maximum angenommen wird. Die positiven Werte unter den Koeffizienten bezeichnen wir mit  $C_i^*$  und ordnen ihnen die jeweils zugehörigen Knoten mit der Bezeichnung  $x_i^*$  zu. Damit folgt

$$I(P) = \sum_{i=1}^{N^*} C_i^* P(x_i^*) \quad \text{für alle } P \in P_m,$$

wobei  $C_i^* > 0$  und  $N^* < \bar{N}$  gilt. Somit werden höchstens  $\bar{N} - \dim P_m$  solcher Reduktionen benötigt, um auf die Form (3.7) zu gelangen. ■

Dieses Lemma wurde von P. J. Davis [67] benutzt, um einen konstruktiven Beweis des Satzes von Tschakaloff für kompakte Integrationsgebiete  $X$  zu geben. M. W. Wilson [69] hat das Lemma zur Konstruktion von Kubaturformeln verwendet.

Wie im Eindimensionalen haben auch in höheren Dimensionen die Formeln eine ausgezeichnete Bedeutung, deren Knoten die Koeffizienten  $C_i$

eindeutig festlegen. Solche Formeln heissen *interpolatorisch*. Eine Kubaturformel (3.3) vom Grad  $m$  ist somit interpolatorisch, wenn es zu den Knoten  $x_1, x_2, \dots, x_N$  linear unabhängige Polynome  $U_1, U_2, \dots, U_N$  in  $P_m$  gibt, so dass

$$(3.9) \quad \det \begin{bmatrix} U_1(x_1) & U_1(x_2) & \dots & U_1(x_N) \\ U_2(x_1) & U_2(x_2) & \dots & U_2(x_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_N(x_1) & U_N(x_2) & \dots & U_N(x_N) \end{bmatrix} \neq 0$$

gilt.

Interpolatorische Formeln bilden den wesentlichen Kern aller Kubaturformeln, denn jede nicht interpolatorische Formel kann durch Streichen von Knoten auf eine interpolatorische Gestalt gebracht werden. Hierzu wende man die im Beweis von Lemma 3.1.2 angegebene Reduktion so lange an, bis eine interpolatorische Gestalt vorliegt. Man verliert hierbei allerdings im allgemeinen vorgegebene reguläre Beziehungen der Koeffizienten und Knoten. Formeln, die sich durch solche Beziehungen auszeichnen, werden deshalb nicht unbedingt durch interpolatorische Formeln erfasst.

Wir gewinnen aber im Falle interpolatorischer Formeln neben der geringeren Knotenanzahl noch einen grossen technischen Vorteil. Der durch die Polynome  $U_1, U_2, \dots, U_N$  erzeugte Raum ist ein (nicht eindeutig bestimmter) maximaler Teilraum von  $P_m$ , dessen Elemente – bis auf die 0 – nicht in allen Knoten gleichzeitig verschwinden können. Umgekehrt haben wir damit auch den Raum der Polynome aus  $P_m$  festgelegt, dessen Elemente in allen Knoten verschwinden. Dieses Prinzip liegt der Charakterisierung interpolatorischer Formeln zugrunde, es wird im folgenden verfeinert werden.

Der nächste Satz sichert die Existenz von Kubaturformeln eines vorgegebenen Genauigkeitsgrades, mit Hilfe der Reduktion aus Lemma 3.1.2 auch die Existenz interpolatorischer Kubaturformeln. Zusätzlich wird noch garantiert, dass alle Knoten in  $X$  liegen.

Für kompakte Mengen geht dieses Ergebnis auf verschiedene Autoren zurück, siehe etwa S. Karlin und W. J. Studden [66]. V. Tschakaloff [57] veröffentlichte seinen Beweis zu einer dem Kubaturproblem angepassten Version des Satzes. Hierin liegt der Grund, warum ihm dieser Satz zugeschrieben wird. Wir verweisen noch auf den konstruktiven Beweis von P. J. Davis [67] und eine Verallgemeinerung von P. J. Davis und M. W. Wilson [68], die sich vom polynomialen Fall löst und die wesentlichen Dualitätsargumente darlegt.

Die hier angegebene verallgemeinerte Form des Satzes geht auf I. P. Mysovskikh [75] zurück.

**3.1.3. SATZ VON TSCHAKALOFF.** *Sei  $X$  eine abgeschlossene Teilmenge des*

$\mathbb{R}^n$  und  $I$  ein positives lineares Funktional der Form (3.1). Dann gibt es zu jedem  $m \in \mathbb{N}$  eine Kubaturformel der Gestalt

$$I(P) = \sum_{i=1}^N C_i P(x_i), \quad C_i > 0, \quad x_i \in X, \quad P \in \mathcal{P}_m,$$

wobei  $N \leq \dim \mathcal{P}_m$  gilt.

**Beweis.** Sei  $X$  kompakt. Die Punktauswertungsfunktionale auf dem Raum  $\mathcal{P}_m$  für  $x_i \in X$  bezeichnen wir mit  $\varepsilon_{x_i}$ . Die Punkte  $x_i \in X$  lassen sich bijektiv und stetig auf die Vektoren

$$(P_1(x_i), P_2(x_i), \dots, P_\lambda(x_i))^T$$

abbilden, wobei  $P_1, P_2, \dots, P_\lambda, \lambda = \dim \mathcal{P}_m$ , eine Basis von  $\mathcal{P}_m$  sei. Das Bild  $\bar{X}$  dieser Abbildung ist wieder kompakt, insbesondere liegen die Extrempunkte der konvexen Hülle von  $\bar{X}$  wieder in  $\bar{X}$ . Mit Hilfe des Trennungssatzes unter Berücksichtigung von  $I(1) = 1$  folgt weiter, dass der Vektor

$$(I(P_1), I(P_2), \dots, I(P_\lambda))^T \in \mathbb{R}^\lambda$$

in der konvexen Hülle von  $\bar{X}$  liegen muss. Nach dem Satz von Carathéodory lässt sich somit das Funktional  $I$  durch  $\lambda + 1$  Punktauswertungen konvex darstellen. Mit Hilfe von Lemma 3.1.2 folgt dann schliesslich, dass man bereits mit  $N \leq \dim \mathcal{P}_m$  Punktauswertungen das Funktional  $I$  darstellen kann.

Sei nun  $X$  nicht beschränkt. Wir bezeichnen mit  $\hat{X}$  die Ein-Punkt kompaktifizierung von  $X$ ,  $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ . Es gibt ein Polynom  $P_0$  in  $\mathcal{P}(X)$ , das positiv ist und stärker im Unendlichen wächst als alle  $P \in \mathcal{P}_m$ . Wir können  $P_0$  z.B. als Summe aller Quadrate der Basis  $P_1, P_2, \dots, P_\lambda$  wählen. Sei  $V$  der von diesen Polynomen und von  $P_0$  erzeugte lineare Raum und

$$F_V = \text{span} \{f_p : P \in V\},$$

wobei  $f_p$  auf  $\hat{X}$  durch

$$f_p(x) = \begin{cases} \frac{P(x)}{P_0(x)} & \text{für } x \in X, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(t)}{P_0(t)} & \text{für } x = \infty \end{cases}$$

definiert ist. Man erkennt, dass  $f_{P_0} = 1 \in F_V$  gilt und dass alle  $f_p \in F_V$  auf  $\hat{X}$  beschränkt sind. Das lineare Funktional

$$\hat{I}: F_V \rightarrow \mathbb{R}: f_p \rightarrow \hat{I}(f_p) = I(P), \quad \hat{I}(1) = 1,$$

ist positiv und auf einem adaptierten Raum definiert. Damit gibt es (wie bei

I) ein positives Radon-Mass  $\hat{\mu}$ , durch das  $\hat{I}$  erzeugt wird. Wir können den Beweis für den kompakten Fall direkt übertragen und erhalten

$$I(P) = \hat{I}(f_p) = \sum_{i=1}^N C_i f_p(x_i), \quad N \leq \lambda + 1, C_i > 0, f_p \in F_V.$$

Dies gilt insbesondere für alle  $f_p \in F_V$  mit  $P \in P_m$ . Sollte in einer solchen Darstellung ein Knoten  $x_j = \infty$  vorliegen, so verschwinden alle  $f_p$ ,  $P \in P_m$ , in diesem Punkt, so dass wir  $x_i \in X$  annehmen dürfen. Damit haben wir aber auch eine Darstellung von  $I$  für  $P_m$  gewonnen. ■

Diesen eleganten Beweis verdanke ich Herrn Dr. K. Donner, der mich auch auf die in diesem Paragraphen benutzte Darstellung aufmerksam gemacht hat.

### 3.2. Notwendige Eigenschaften interpolatorischer Kubaturformeln

Es ist unser Ziel, die Knoten interpolatorischer Kubaturformeln als gemeinsame Nullstellen bestimmter Polynome zu kennzeichnen. Diese Kennzeichnung wird in diesem Paragraphen vorbereitet. Es werden Begriffe vorgestellt, die sich für interpolatorische Kubaturformeln als notwendig erweisen. Dabei zeigt sich, dass die Polynome, die in den Knoten einer interpolatorischen Formel verschwinden, ein Ideal bilden, das durch seine reellen Nullstellen bereits vollständig beschrieben wird. Diese Bedingung führt uns dann auf die Untersuchung reeller Ideale in 3.3.

Wir gehen wieder von dem positiven linearen Funktional (3.1) aus. Um eine möglichst einfache Darstellung zu ermöglichen, benutzen wir die folgenden Bezeichnungen.

Um Monome und später auch orthogonale Polynome einfach bezeichnen zu können, führen wir neben dem Variablenvektor  $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$  Indexvektoren ein, etwa

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_i \in N \cup \{0\}.$$

Weiter sei

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Um Aufzählungen aller Indexvektoren  $\alpha$  mit  $|\alpha| = j$  zu bezeichnen, schreiben wir kurz  $|\alpha| = j$ .

Sämtliche Monome vom Grad  $i$  lassen sich jetzt in der Form

$$x^\alpha = \prod_{j=1}^n (x^{(j)})^{\alpha_j}, \quad |\alpha| = i,$$

angeben. Hieraus ergibt sich insbesondere, dass es genau  $\binom{n+i-1}{i}$  linear unabhängige Monome vom Grad  $i$  in  $n$  Variablen gibt. Weiter folgt

$$(3.10) \quad \dim P_m = \sum_{i=0}^m \binom{n+i-1}{i} = \binom{n+m}{m}.$$

Mit Hilfe von  $I$  können wir in  $P(X)$  eine Orthogonalitätsrelation einführen. Ein Polynom  $P \in P(X)$  heisst *m-orthogonal*, wenn für alle  $Q \in P_m$  mit  $P \cdot Q \in P_m$  die Beziehung  $I(P \cdot Q) = 0$  gilt. Polynome  $R_1, R_2, \dots, R_s$  aus  $P(X)$ , die einen linearen Raum  $\mathcal{R}$  erzeugen, heissen *strikt m-orthogonal*, wenn jedes  $R \in \mathcal{R}$  *m-orthogonal*, aber zumindest ein  $R \in \mathcal{R}$  nicht  $(m+1)$ -orthogonal ist.

Seien  $R_1, R_2, \dots, R_s$  Polynome aus  $P_m$ . Wir sagen, dass diese Polynome *fundamental vom Grad m* sind, wenn die monomialen Terme vom Grad  $m$  der  $R_i$  (soweit sie existieren) alle Monome vom Grad  $m$  aufspannen. Wenn wir den von  $R_1, R_2, \dots, R_s$  erzeugten linearen Raum mit  $\mathcal{R}$  bezeichnen, so bewirkt die Fundamentalität vom Grad  $m$ , dass wir in  $\mathcal{R}$  gerade  $\binom{n+m-1}{m}$

Polynome der Gestalt

$$x^\alpha + Q_\alpha, \quad Q_\alpha \in P_{m-1}, |\alpha| = m,$$

bestimmen können.

Wir nehmen jetzt an, dass eine interpolatorische Formel (3.3) vom Grad  $m$  mit  $N$  Knoten gegeben ist. Die interpolatorische Eigenschaft bewirkt, dass es  $N$  linear unabhängige Polynome  $U_1, U_2, \dots, U_N$  in  $P_m$  gibt, so dass (3.9) gilt. Wir bezeichnen den von  $U_1, U_2, \dots, U_N$  erzeugten Raum mit  $\mathcal{U}$ . Wenn (3.3) als lineares Gleichungssystem in den Unbekannten  $C_i$  betrachtet wird, so kann man folgern, dass es genau  $s = \dim P_m - N$  linear unabhängige Polynome  $R_1, R_2, \dots, R_s$  aus  $P_m$  gibt, die in den Knoten verschwinden. Zu jedem  $\alpha$  mit  $|\alpha| = m+1$  gibt es wegen (3.9) ein  $U_\alpha \in \mathcal{U}$ , so dass die Polynome

$$(3.11) \quad x^\alpha + U_\alpha, \quad |\alpha| = m+1,$$

in den Knoten verschwinden. Damit haben wir folgende Situation. Es gibt einem Unterraum  $\mathcal{U}$  von  $P_m$ , dessen Elemente bis auf das Nullpolynom nicht in sämtlichen Knoten der Kubaturformel verschwinden. Ausserdem gibt es einen eindeutig bestimmten Raum  $\mathcal{R}$  in  $P_{m+1}$ , dessen Elemente in den Knoten verschwinden. Weiter gilt  $P_{m+1} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{U}$ . Eine Basis von  $\mathcal{R}$  erhalten wir mit den Polynomen  $R_1, R_2, \dots, R_s$  und den Polynomen aus (3.11). Wir fassen diese Basis in der Form  $R_1, R_2, \dots, R_t$ ,  $t = \dim P_{m+1} - N$ , zusammen. Der Raum  $\mathcal{R}$  ist eindeutig bestimmt, während  $\mathcal{U}$  von der Wahl der  $U_1, U_2, \dots, U_N$  abhängt. Aus (3.3) ergibt sich direkt, dass die Polynome  $R_i$

strikt  $m$ -orthogonal sind, aus (3.11) folgt, dass die  $R_i$  fundamental vom Grad  $m+1$  sind.

Die Beschreibung der Knoten als gemeinsame Nullstellen aller Polynome aus  $\mathcal{R}$  lässt sich schärfer fassen, wenn man statt mit linearen Teilräumen mit Idealen arbeitet. Idealtheorietische Überlegungen hat vor allem H. M. Möller [73] in die Theorie der Kubaturformeln eingeführt und damit eine rasche Entwicklung dieser Theorie eingeleitet.

Wir werden kurz entwickeln, warum man sich für unsere Problemstellung auf sehr spezielle Ideale beschränken kann. Dieser Idealtyp wird dann im nächsten Paragraphen näher untersucht.

Zuerst geben wir den oben hergeleiteten notwendigen Bedingungen eine idealtheorietische Schreibweise.

Bekanntlich heisst eine Teilmenge  $\mathcal{U}$  von  $\mathcal{P}$  *Ideal*, wenn mit  $R_1, R_2 \in \mathcal{U}$  auch  $Q_1 R_1 + Q_2 R_2$  in  $\mathcal{U}$  liegt, wobei  $Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}$ . Das von den Polynomen  $R_1, R_2, \dots, R_t$  erzeugte Ideal schreiben wir als  $\mathcal{U} = (R_1, R_2, \dots, R_t)$ . Es gilt somit

$$\mathcal{U} = \{Q: Q = \sum_{i=1}^t Q_i R_i, Q_i \in \mathcal{P}\}.$$

Das (reelle) *Nullstellengebilde* von  $\mathcal{U}$  ist die Menge

$$\text{NG}(\mathcal{U}) = \{x_j \in \mathbb{R}^n: R_i(x_j) = 0, i = 1, 2, \dots, t\}.$$

Offensichtlich verschwindet jedes  $Q \in \mathcal{U}$  in  $\text{NG}(\mathcal{U})$ . Die Umkehrung ist im allgemeinen falsch. Wir merken noch an, dass das von dem Nullpolynom erzeugte Ideal mit (0) bezeichnet wird.

Die notwendigen Bedingungen können wir somit in folgender Weise zusammenfassen.

**3.2.1. LEMMA.** Sei (3.3) eine interpolatorische Kubaturformel vom Grad  $m$  mit  $N$  Knoten. Diese Knoten liegen im Nullstellengebilde des Ideals  $\mathcal{U} = (R_1, R_2, \dots, R_t)$ ,  $t = \dim \mathcal{P}_{m+1} - N$ , das von strikt  $m$ -orthogonalen linear unabhängigen Polynomen aus  $\mathcal{P}_{m+1}$  erzeugt wird, die fundamental vom Grad  $m+1$  sind.

Damit ist mit jeder interpolatorischen Formel ein eindeutig bestimmtes Ideal verbunden, das zur Formel gehörige Ideal. Wir werden spezielle Eigenschaften dieses Ideals mit dem Ziel herleiten, eine Kennzeichnung so zu gewinnen, dass man das Ideal für vorgegebenes  $m$  und  $N$  konstruieren kann.

**3.2.2. LEMMA.** Sei  $\mathcal{U} = (R_1, R_2, \dots, R_t)$ ,  $t = \dim \mathcal{P}_{m+1} - N$ , das zu einer interpolatorischer Formel (3.3) vom Grad  $m$  gehörige Ideal und sei  $\mathcal{R} = \mathcal{U} \cap \mathcal{P}_{m+1}$  der von den  $R_i$  erzeugte lineare Raum. Für jedes Komplement  $\mathcal{U}$  von  $\mathcal{R}$  in  $\mathcal{P}_{m+1}$  gelten die folgenden Beziehungen.

(i)  $\mathcal{U} \cap \mathcal{U} = (0)$ ,

(ii) für jedes  $U \in \mathcal{U}$ ,  $U \neq 0$ , gibt es ein  $R^* \in \mathcal{U}$ , so dass  $U^2 - R^* \in P_m$  und  $I(U^2 - R^*) > 0$  gilt.

**Beweis.** Sei  $\mathcal{U}$  ein beliebiges Komplement von  $\mathcal{R}$  in  $P_{m+1}$ . Für eine Basis  $U_1, U_2, \dots, U_N$  von  $\mathcal{U}$  gilt (3.9), damit folgt (i). In  $\mathcal{R}$  liegen die Polynome (3.11). Produkte dieser Polynome mit Elementen aus  $P$  liegen in  $\mathcal{U}$ . Sei  $Q \in P$  gegeben,  $Q \notin P_m$ . Zu allen monomialen Termen  $x^\alpha$  vom Grad  $k = |\alpha| \geq m+1$  von  $Q$  kann man daher Idealelemente finden, die  $x^\alpha$  als einzigen Höchsterm vom Grad  $k$  enthalten. Es gibt somit ein  $R^* \in \mathcal{U}$ , so dass  $Q - R^*$  in  $P_m$  liegt. Wenn  $Q \in P_m$ , so können wir  $R^* = 0$  wählen. Diese Reduktion lässt sich insbesondere auf die Quadrate von Elementen aus  $\mathcal{U}$  anwenden. Das Polynom  $U^2 - R^*$  liegt dann in  $P_m$  und es gilt  $I(U^2 - R^*) = K(U^2 - R^*)$ . Da  $R^*$  in den Knoten der Formel verschwindet, folgt

$$I(U^2 - R^*) = \sum_{i=1}^N C_i U^2(x_i) > 0,$$

weil die Koeffizienten  $C_i$  positiv sind und  $U$  nicht in allen Knoten gleichzeitig verschwinden kann. Damit ist (ii) gezeigt. ■

Wenn die Bedingungen (i) und (ii) für ein  $\mathcal{U}$  erfüllt sind, so gelten sie für jedes Komplement von  $\mathcal{R}$  in  $P_{m+1}$ . Denn eine Basis eines Komplementes  $\bar{\mathcal{U}}$  lässt sich aus  $U_1, U_2, \dots, U_N$  durch Abziehen geeigneter Elemente aus  $\mathcal{R}$  gewinnen.

Die Herleitung dieser notwendigen Bedingungen war elementar, um so überraschender ist es, dass diese Bedingungen bereits hinreichend für die Existenz interpolatorischer Kubaturformeln sind. Das wird in 3.4 gezeigt. Zuvor soll noch eine weitere notwendige Bedingung gezeigt werden, die uns auf den Begriff des reellen Ideals führen wird.

**3.2.3. LEMMA.** Sei (3.3) eine interpolatorische Kubaturformel vom Grad  $m$  mit den Knoten  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , die im Nullstellengebilde von  $\mathcal{U} = (R_1, R_2, \dots, R_t)$ ,  $t = \dim P_{m+1} - N$ , liegen. Ein Polynom  $Q \in P$  verschwindet genau dann in  $\text{NG}(\mathcal{U})$ , wenn es bereits in  $\mathcal{U}$  liegt.

**Beweis.** Wenn  $Q \in P$  in  $\text{NG}(\mathcal{U})$  verschwindet, so auch das Polynom  $\bar{Q} = Q - R$ , wobei  $R \in \mathcal{U}$  so gewählt wird, dass  $Q - R$  in  $P_m$  liegt. Das ist auf Grund der Fundamentalität, wie im Beweis von Lemma 3.2.2 gezeigt, stets möglich. Damit folgt  $\bar{Q} \in \mathcal{R} = \mathcal{U} \cap P_m$  und somit  $Q \in \mathcal{U}$ . ■

Die Ideale, die notwendigerweise mit interpolatorischen Kubaturformeln verbunden sind, sind somit bereits vollständig durch ihr reelles Nullstellengebilde beschrieben. Solche Ideale sind wohlbekannt, sie heissen *reelle Ideale*. Die zu interpolatorischen Formeln vom Grad  $m$  gehörigen reellen Ideale haben ausserdem die spezielle Eigenschaft, dass sie ein fundamentales System vom Grad  $m+1$  enthalten, das man z.B. in der Form (3.11) annehmen darf. Daraus ergeben sich weitere nützliche Folgerungen, die in 3.3 untersucht werden.

Wir schliessen diesen Paragraphen mit einer klassischen Abschätzung der Knotenanzahl ab.

**3.2.4. SATZ.** Sei  $V = \text{span}\{Q \in P_k: I(Q^2) = 0\}$ ,  $k = [m/2]$ . Dann gilt für jede Kubaturformel vom Grad  $m$  die folgende Abschätzung für die Knotenanzahl  $N$ ,

$$(3.12) \quad N \geq \dim P_k - \dim V.$$

**Beweis.** Wir bemerken zuerst, dass jedes Element  $Q$  aus  $V$  die Eigenschaft  $I(Q^2) = 0$  hat. Jedes  $\bar{Q} \in P_k$ , das nicht zu  $V$  gehört, erfüllt damit  $I(\bar{Q}^2) > 0$ . Somit kann  $\bar{Q}$  nicht in sämtlichen Knoten der Formel verschwinden.  $\bar{Q}$  liegt daher in einem Komplement  $\mathcal{U}$  von  $V$  in  $P_{m+1}$  und es folgt  $N = \dim \mathcal{U} \geq \dim P_k - \dim V$ . ■

Dieser Satz ist vor allem dann von Interesse, wenn  $I$  strikt positiv ist. Dann ist nämlich  $\dim V = 0$  und die Abschätzung hat die Form

$$(3.13) \quad N \geq \dim P_k.$$

Im Eindimensionalen besagt das bekannte Ergebnis der Gauss-Quadratur, dass diese untere Schranke bei kompaktem Integrationsbereich stets angenommen wird, wenn  $I$  strikt positiv ist. Das ist für  $n > 1$  nicht mehr der Fall. Hier liegt einer der wesentlichen Unterschiede zwischen Quadratur und Kubatur.

### 3.3. Reelle Ideale

Dieser kurze Abstecher in das Gebiet der reellen Ideale ist notwendig, um einige Sätze vorzustellen, mit denen wir später arbeiten wollen.

Der Begriff der reellen algebraischen Varietät wurde seit 1951 von verschiedenen Autoren untersucht. So studierte z.B. H. Whitney [57] einige Eigenschaften von Punktfolgen des  $R^n$ , die als gemeinsame Nullstellen einer Polynommenge definiert sind. In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage nach einer Charakterisierung der Ideale, deren Nullstellen sämtlich im  $R^n$  liegen. Hierauf gibt der Charakterisierungssatz 3.3.1 eine Antwort. Dieser Satz kann als reelle Version des Hilbertschen Nullstellensatzes gesehen werden. Der Satz selbst ist schon vor seiner Publikation bekannt gewesen, wir verweisen z.B. auf einen Vortrag von W.-D. Geyer [67] in Oberwolfach.

Wir benötigen noch einige Begriffe aus der Idealtheorie. Ein Ideal heisst *Primideal*, wenn mit jedem Produkt, das in dem Ideal liegt, mindestens ein Faktor zum Ideal gehört. Für ein Ideal  $\mathcal{U}$  ist das *Radikal* von  $\mathcal{U}$  durch

$$\text{Rad } \mathcal{U} = \{Q \in P: Q^\chi \in \mathcal{U} \text{ für ein } \chi \in N\}$$

definiert.  $\text{Rad } \mathcal{U}$  ist wieder ein Ideal in  $P$ , es umfasst  $\mathcal{U}$ . Ein Ideal  $\mathcal{U}$  heisst *reelles Ideal*, wenn jedes  $Q \in P$ , das in  $\text{NG}(\mathcal{U})$  verschwindet, bereits in  $\mathcal{U}$  liegt. Reelle Ideale werden durch den folgenden Satz näher beschrieben. Weitere

Eigenschaften reeller Ideale werden von D. W. Dubois und G. Efrogmson [70] untersucht.

**3.3.1. SATZ** (D. W. Dubois, G. Efrogmson, J. J. Risler). *Sei  $\mathfrak{U}$  ein Ideal in  $\mathbf{P}$ . Folgende Aussagen sind äquivalent.*

- (i)  $\mathfrak{U}$  ist ein reelles Ideal,
- (ii) es gilt  $\text{Rad } \mathfrak{U} = \mathfrak{U}$  und  $\mathfrak{U}$  ist endlicher Durchschnitt von reellen Primidealen,

(iii) für  $Q_1, Q_2, \dots, Q_M$  aus  $\mathbf{P}$ ,  $M \in \mathbf{N}$ , gilt

$$\sum_{i=1}^M Q_i^2 \in \mathfrak{U} \quad \text{impliziert} \quad Q_i \in \mathfrak{U}, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Die Aussagen (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii) sind elementar. Zum Nachweis von (iii)  $\Rightarrow$  (i) benötigt man jedoch tiefer liegende Resultate aus der Algebra. Für einen Beweis verweisen wir auf die Arbeiten von D. W. Dubois und G. Efrogmson [70], J. J. Risler [70], [74], sowie auf den kurzen Beweis von G. Efrogmson [74], der mit Hilfe des Satzes von Tarski-Seidenberg geführt wird.

Eine Nullstelle  $\bar{x} = (\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \dots, \bar{x}^{(n)})^T \in \mathbf{R}^n$  eines Ideals  $\mathfrak{U}$  in  $\mathbf{P}$  heisst *einfach*, wenn es  $n$  linear unabhängige Polynome  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  in  $\mathfrak{U}$  gibt, so dass

$$\det \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} Q_i(\bar{x}) \right)_{i,j=1,2,\dots,n} \right] \neq 0$$

gilt.

Die notwendigen Bedingungen aus 3.2 führten uns auf reelle Ideale und auf Ideale, die ein fundamentales System enthalten. Dieser letzte Idealtyp besitzt nur endlich viele Nullstellen. Die maximal mögliche Anzahl von Nullstellen wird genau dann angenommen, wenn das Ideal reell ist. Dieses Ergebnis verallgemeinert die Abschätzung von I. P. Mysovskikh [70] für die maximale Anzahl von gemeinsamen Nullstellen spezieller Polynomengen.

**3.3.2. SATZ.** *Seien  $R_1, R_2, \dots, R_t$  linear unabhängige Polynome aus  $\mathbf{P}_{m+1}$ . Sie mögen fundamental vom Grad  $m+1$  sein und das Ideal  $\mathfrak{U}$  sowie den linearen Raum  $\mathcal{R}$  erzeugen. Mit  $\mathcal{U}$  bezeichnen wir ein beliebiges, aber festes Komplement von  $\mathcal{R}$  in  $\mathbf{P}_{m+1}$ . Wir erhalten die folgenden Aussagen.*

(i)  $|\text{NG}(\mathfrak{U})| \leq N = \dim \mathbf{P}_{m+1} - t = \dim \mathcal{U}$ ,

(ii) sei  $\mathcal{R} = \mathfrak{U} \cap \mathbf{P}_{m+1}$ ,  $\mathfrak{U}$  ist reelles Ideal, genau dann, wenn

$$|\text{NG}(\mathfrak{U})| = N.$$

**Beweis.** Wegen der Fundamentalität der  $R_i$  muss  $\mathcal{U}$  ein Unterraum von  $\mathbf{P}_m$  sein. Wir beweisen zuerst die folgende Aussage. Wenn  $|\text{NG}(\mathfrak{U})| = N$ , so verschwindet kein  $Q \in \mathcal{U}$  in  $\text{NG}(\mathfrak{U})$ . Nehmen wir das Gegenteil an. Ein  $Q \in \mathcal{U}$  und die  $R_i$  mögen in den paarweise verschiedenen Punkten

$$x_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(n)})^T, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

verschwinden. Für eine Basis  $U_1, U_2, \dots, U_N$  von  $\mathcal{U}$  folgt damit

$$T \begin{bmatrix} U_1, U_2, \dots, U_N \\ x_1, x_2, \dots, x_N \end{bmatrix} < N.$$

Damit sind die Zeilen  $Z_i = (U_1(x_i), U_2(x_i), \dots, U_N(x_i))$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , linear abhängig. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass  $Z_1, Z_2, \dots, Z_s$ ,  $s < N$ , linear unabhängig sind und dass

$$(3.14) \quad Z_N = \sum_{i=1}^s \delta_i Z_i \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^s \delta_i^2 > 0$$

gilt. Wenn wir  $U_1, U_2, \dots, U_N$  mit  $R_1, R_2, \dots, R_t$  zu einer Basis von  $P_{m+1}$  ergänzen, so erhalten wir für alle  $P \in P_{m+1}$  die Beziehung

$$P(x_N) = \sum_{i=1}^s \delta_i P(x_i),$$

weil die  $R_i$  in den Punkten  $x_j$  verschwinden. Für alle  $Q \in P_m$  gilt insbesondere

$$x_N^{(j)} Q(x_N) = \sum_{i=1}^s \delta_i x_i^{(j)} Q(x_i), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Da  $\mathcal{U}$  ein Unterraum von  $P_m$  ist, folgt für die Zeilen  $Z_i$

$$x_N^{(j)} Z_N = \sum_{i=1}^s \delta_i x_i^{(j)} Z_i, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Mit Hilfe von (3.14) erhält man damit

$$\sum_{i=1}^s \delta_i Z_i (x_i^{(j)} - x_N^{(j)}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Da die Zeilen  $Z_1, Z_2, \dots, Z_s$  linear unabhängig sind, folgt zumindest für ein  $i_0$ , dass  $x_{i_0}^{(j)} = x_N^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , gilt. Das ist aber ein Widerspruch zu der Annahme, dass die  $x_i$  paarweise verschieden sind.

Um zu zeigen, dass  $\text{NG}(\mathcal{U})$  höchstens  $N$  paarweise verschiedene Punkte enthalten kann, führt man einen analogen Beweis. Wir nehmen jetzt an, dass  $R_1, R_2, \dots, R_t$ , in  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N+1$ , alle Punkte paarweise verschieden, verschwinden. In diesem Fall muss die Zeile  $Z_{N+1} = (U_1(x_{N+1}), U_2(x_{N+1}), \dots, U_N(x_{N+1}))$  lineare Kombination der Zeilen  $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$  sein. Man erhält dann wie oben einen Widerspruch dadurch, dass der Punkt  $x_{N+1}$  mit einem der Punkte  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , übereinstimmen muss. Damit ist (i) gezeigt.

Um (ii) herzuleiten, nehmen wir zuerst an, dass  $\mathcal{U}$  ein reelles Ideal ist und führen  $|\text{NG}(\mathcal{U})| < N$  zu einem Widerspruch. Diese Beziehung besagt, dass es ein  $U \in \mathcal{U}$ ,  $U \neq 0$ , gibt, das in  $\text{NG}(\mathcal{U})$  verschwindet. Damit folgt aber  $U \in \mathcal{N}$  und es folgt  $U = 0$ , im Widerspruch zur Annahme. Sei nun  $|\text{NG}(\mathcal{U})|$

=  $N$ . Wenn ein  $Q \in \mathcal{P}$  in  $\text{NG}(\mathcal{U})$  verschwindet, so auch  $\bar{Q} = Q - R$ , wobei  $R \in \mathcal{U}$  so gewählt wurde, dass  $\bar{Q}$  in  $\mathcal{P}_m$  liegt. Das ist auf Grund der Fundamentalität immer möglich.  $\bar{Q}$  kann aber wegen der Aussage zu Beginn dieses Beweises nicht in  $\mathcal{U}$  liegen, es sei denn  $\bar{Q}$  ist das Nullpolynom. Damit folgt  $\bar{Q} \in \mathcal{R}$  und auch  $Q \in \mathcal{U}$ . ■

Unser letztes Resultat befasst sich mit der Multiplizität der Nullstellen reeller Ideale, die ein fundamentales System enthalten. Dieses Ergebnis ist für die numerische Berechnung gemeinsamer Nullstellen von grosser Bedeutung, weil hierdurch die Stabilität der Verfahren garantiert werden kann.

**3.3.3. LEMMA.** *Die Polynome  $R_1, R_2, \dots, R_t$  aus  $\mathcal{P}_{m+1}$  seien fundamental vom Grad  $m+1$  und sie mögen ein reelles Ideal  $\mathcal{U}$  erzeugen. Dann sind sämtliche Nullstellen von  $\mathcal{U}$  einfach.*

**Beweis.** Seien  $x_j, j = 1, 2, \dots, N$ ,  $N = \dim \mathcal{P}_{m+1} - t$ , die paarweise verschiedenen Nullstellen von  $\mathcal{U}$ , die nach Satz 3.3.2 garantiert sind. Wir müssen linear unabhängige Polynome  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  aus  $\mathcal{U}$  finden, so dass

$$\det \left[ \left( \frac{\hat{c}}{\hat{c}x^{(v)}} Q_i(x_j) \right)_{i,v=1,2,\dots,n} \right] \neq 0$$

für jedes  $x_j$  gilt. Sei  $\mathcal{U}$  wie in Satz 3.3.2 definiert. Wir zeigen, dass  $x_j \in \text{NG}(\mathcal{U})$  eine einfache Nullstelle ist. Es gibt ein  $Q_j \in \mathcal{U}$ , so dass

$$Q_j(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \neq j, \\ 1, & \text{falls } i = j, \end{cases}$$

gilt. Damit verschwinden die Polynome

$$Q_{v,j} = (x^{(v)} - x_j^{(v)}) Q_j(x), \quad v = 1, 2, \dots, n,$$

in  $\text{NG}(\mathcal{U})$ . Da  $\mathcal{U}$  reell ist, liegen die  $Q_{v,j}$  in  $\mathcal{U}$ . Die Matrix der partiellen Ableitungen ist in diesem Fall die Einheitsmatrix, so dass die Behauptung folgt. ■

### 3.4. Ein Charakterisierungssatz für interpolatorische Formeln

Wir schliessen mit dem folgenden Charakterisierungssatz direkt an Lemma 3.2.2 an. Dieser Satz wurde bei H. J. Schmid [80] angegeben.

**3.4.1. CHARAKTERISIERUNGSSATZ.** *Seien  $R_1, R_2, \dots, R_t$  linear unabhängige Polynome aus  $\mathcal{P}_{m+1}$ , die fundamental vom Grad  $m+1$  und strikt  $m$ -orthogonal seien. Das von diesen Polynomen erzeugte Ideal sei  $\mathcal{U}$ , der erzeugte lineare Raum sei  $\mathcal{R} = \mathcal{U} \cap \mathcal{P}_{m+1}$ . Mit  $\mathcal{A}$  bezeichnen wir ein beliebiges, aber festes Komplement von  $\mathcal{R}$  in  $\mathcal{P}_{m+1}$ . Folgende Bedingungen sind hinreichend und notwendig dafür, dass das Ideal  $\mathcal{U}$  zu einer interpolatorischen Kubaturformel (3.3) vom Grad  $m$  mit  $N = \dim \mathcal{P}_{m+1} - t$  Knoten gehörig ist.*

(i) Es ist  $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{U} = (0)$ ,

(ii) für jedes  $U \in \mathfrak{U}$ ,  $U \neq 0$ , gilt  $I(U^2 - R^*) > 0$ , wobei  $R^* \in \mathfrak{U}$  so gewählt ist, dass  $U^2 - R^*$  in  $\mathbf{P}_m$  liegt.

Darüber hinaus gelten folgende Aussagen, wenn (i) und (ii) erfüllt sind.

(iii)  $\mathfrak{U}$  ist ein reelles Ideal mit  $|\text{NG}(\mathfrak{U})| = N$ ,

(iv) alle Nullstellen von  $\mathfrak{U}$  sind einfach und reell.

**Beweis.** Wegen Lemma 3.2.2 muss nur noch gezeigt werden, dass die Bedingungen (i) und (ii) die Existenz interpolatorischer Formeln garantieren. Wir gehen folgendermassen vor. Aus (i) und (ii) wird gefolgert, dass  $\mathfrak{U}$  ein reelles Ideal ist. Damit folgen aus Satz 3.3.2 und aus Lemma 3.3.3 die Eigenschaften (iii) und (iv). Für ein reelles Ideal  $\mathfrak{U}$  mit  $|\text{NG}(\mathfrak{U})| = N$  können wir dann die Existenz einer Formel vom Typ (3.3) nachweisen.

Um zu zeigen, dass  $\mathfrak{U}$  reell ist, weisen wir die Bedingung (ii) aus Satz 3.3.1 nach. Seien  $Q_1, Q_2, \dots, Q_M$ ,  $M \in N$ , beliebige Polynome aus  $\mathbf{P}$ , so dass

$$(3.15) \quad \sum_{i=1}^M Q_i^2 \in \mathfrak{U}$$

gilt. Es ist zu zeigen, dass dann bereits jedes  $Q_i$  aus  $\mathfrak{U}$  stammt. Wegen der Fundamentalität vom Grad  $m+1$  der Polynome  $R_i$  können wir jedes  $Q_i$  in der Form

$$(3.16) \quad Q_i = \sum_{j=1}^t Q_{ij} R_j + U_i^+, \quad Q_{ij} \in \mathbf{P}, \quad U_i^+ \in \mathfrak{U},$$

schreiben. Setzt man (3.16) in (3.15) ein und quadriert aus, so ergibt sich aus (3.15), dass auch das Polynom

$$Q = \sum_{i=1}^M (U_i^+)^2$$

in  $\mathfrak{U}$  liegen muss. Wenn wir hieraus folgern können, dass jedes  $U_i^+$  das Nullpolynom ist, so folgt  $Q_i \in \mathfrak{U}$ . Da  $Q$  in  $\mathfrak{U}$  liegt, so folgt

$$(3.17) \quad \bar{Q} = \sum_{i=1}^M [(U_i^+)^2 - R_i^*] \in \mathfrak{U} \cap \mathbf{P}_m,$$

wobei die  $R_i^*$  wie in Bedingung (ii) so gewählt werden, dass  $(U_i^+)^2 - R_i^* \in \mathbf{P}_m$  gilt. Wegen der Fundamentalität der  $R_i$  ist das immer möglich. Wenn wir annehmen, dass zumindest ein  $U_j$  nicht identisch verschwindet, so folgt aus (3.17) wegen Bedingung (ii) die Beziehung  $I(\bar{Q}) > 0$ . Wegen (i) folgt damit  $\bar{Q} = 0$ , falls  $\bar{Q}$  in  $\mathfrak{U}$  liegt, und damit gilt  $I(\bar{Q}) = 0$ . Wir erhalten aber auch einen

Widerspruch zur Bedingung (ii), wenn  $\bar{Q}$  in  $\mathcal{U} \cap P_m$  liegt. Dann lässt sich nämlich  $\bar{Q}$  als

$$\bar{Q} = \sum_{i=1}^t \lambda_i R_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R},$$

schreiben. Wegen der  $m$ -Orthogonalität der  $R_i$  folgt  $I(\bar{Q}) = 0$ . Damit ist das Ideal  $\mathcal{U}$  reell und nach Satz 3.3.2 besitzt  $\text{NG}(\mathcal{U})$  genau  $N = \dim P_{m+1} - t$  verschiedene Punkte. Wir wenden Lemma 2.2.4 an, um zu zeigen, dass  $I$  Linearkombination aller Punktauswertungen  $\varepsilon_{x_i}$  mit  $x_i \in \text{NG}(\mathcal{U})$  ist. Dazu muss nachgewiesen werden, dass für ein beliebiges  $Q \in P_m$ , das in  $\text{NG}(\mathcal{U})$  verschwindet, die Beziehung  $I(Q) = 0$  gilt. Da  $\mathcal{U}$  reell ist, gehört jedes  $Q \in P_m$ , das in  $\text{NG}(\mathcal{U})$  verschwindet, zu  $\mathcal{U} \cap P_m$ . Aus der  $m$ -Orthogonalität folgt damit  $I(Q) = 0$ .

Die hergeleitete Darstellung ist wegen der strikten  $m$ -Orthogonalität nicht mehr für  $P_{m+1}$  exakt. Es muss noch gezeigt werden, dass die Koeffizienten positiv sind. Zu jedem  $x_i \in \text{NG}(\mathcal{U})$  gibt es ein  $Q_i \in \mathcal{U}$  mit

$$Q_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \neq x_i, \\ 1, & \text{falls } x = x_i, \end{cases} \quad x \in \text{NG}(\mathcal{U}).$$

Somit folgt

$$I(Q_i^2 - R_i^*) = \sum_{i=1}^N C_i Q_i^2(x_i) = C_i,$$

wenn wir  $R_i^* \in \mathcal{U}$  so wählen, dass  $Q_i^2 - R_i^*$  in  $P_m$  liegt. Aus Bedingung (ii) ergibt sich damit  $C_i > 0$ . ■

Wir haben in Bedingung (ii) das  $R^* \in \mathcal{U}$  nicht näher spezifiziert. Seine Existenz ist klar und reicht für den Beweis des Satzes aus. Die folgende Bemerkung zeigt, dass die Bedingung (ii) für jedes beliebige  $R^*$  mit der Eigenschaft  $U^2 - R^* \in P_m$  erfüllt ist, wenn sie für ein  $R_i^* \in \mathcal{U}$  gilt.

**3.4.2. Bemerkung.** Seien die Voraussetzungen von Satz 3.4.1 und die Bedingung (i) gegeben. Für  $Q \in P_m$  und  $R_1^*, R_2^* \in \mathcal{U}$ ,  $R_1^* \neq R_2^*$ , mit  $Q^2 - R_1^*, Q^2 - R_2^* \in P_m$  gilt  $I(Q^2 - R_1^*) = I(Q^2 - R_2^*)$ .

Da das Polynom  $R_2^* - R_1^*$  in  $\mathcal{U} \cap P_m$  liegt, folgt wie im Beweis von 3.4.1 wegen der  $m$ -Orthogonalität und wegen Bedingung (i) die Beziehung  $I(R_2^* - R_1^*) = 0$ .

Wir geben noch eine wichtige Ergänzung zum Charakterisierungssatz an, eine Formel zum Berechnen der Koeffizienten einer interpolatorischen Kubaturformel. Sei eine solche Formel vom Grad  $m$  mit  $N$  Knoten gegeben. Jedes Komplement  $\mathcal{U}$  von  $\mathcal{R}$  in  $P_{m+1}$  besitzt die Eigenschaft (ii). Wenn  $\mathcal{U}$  fest gewählt ist, so wird deshalb durch

$$(3.18) \quad \langle P_i, P_j \rangle = I(P_i P_j - R_{ij}), \quad R_{ij} \in \mathcal{U}, \text{ so dass } P_i P_j - R_{ij} \in \mathcal{U},$$

ein Skalarprodukt auf  $\mathcal{U}$  definiert. Hierbei kann das Idealelement  $R_{ij}$  wegen 3.4.2 beliebig gewählt werden. Falls  $P_i P_j$  bereits in  $P_m$  liegt, so kann man  $R_{ij} = 0$  wählen und die übliche Orthogonalitätsrelation liegt vor.

Seien  $U_1, U_2, \dots, U_N$  Erzeuger von  $\mathcal{U}$ , die bezüglich des Skalarproduktes (3.18) voll durchorthogonalisiert seien. Wir können jetzt eine Idee von I. P. Mysovskikh [68] verallgemeinern und die Koeffizienten der Formel durch Auswertungen der  $U_i$  angeben. Wir definieren dazu die Matrix

$$B = \begin{bmatrix} U_1(x_1) & U_1(x_2) & \dots & U_1(x_N) \\ U_2(x_1) & U_2(x_2) & \dots & U_2(x_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_N(x_1) & U_N(x_2) & \dots & U_N(x_N) \end{bmatrix},$$

die auf Grund der interpolatorischer Eigenschaft den vollen Rang  $N$  besitzt. Die Existenz der Kubaturformel liefert uns

$$B \begin{bmatrix} C_1 & & & 0 \\ & C_2 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & C_N \end{bmatrix} B^T = \begin{bmatrix} I(U_1^2 - R_{11}) & & & 0 \\ & I(U_2^2 - R_{22}) & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & I(U_N^2 - R_{NN}) \end{bmatrix}.$$

Eigenschaft (ii) garantiert uns den vollen Rang der Matrix auf der rechten Seite, die wir  $D$  nennen wollen. Es ergibt sich

$$\begin{bmatrix} C_1 & & & 0 \\ & C_2 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & C_N \end{bmatrix}^{-1} = B^T D^{-1} B.$$

Wir erhalten somit die folgende Formel zur Berechnung der Koeffizienten,

$$(3.19) \quad \frac{1}{C_i} = \sum_{j=1}^N \frac{U_j^2(x_i)}{I(U_j^2 - R_{jj})}.$$

Als theoretische Charakterisierung interpolatorischer Kubaturformeln vermittelt Satz 3.4.1 einige wichtige neue Aspekte zum Kubaturproblem. Die im Eindimensionalen wohlbekannten Eigenschaften der orthogonalen Polynome, deren Nullstellen die Knoten bilden, bleiben auch in höheren Dimensionen erhalten. Das zur Kubaturformel gehörige reelle Ideal besitzt nur einfache reelle Nullstellen. Die zu einem solchen Ideal gehörige Kubaturformel hat positive Koeffizienten, die sich gemäss (3.19) berechnen lassen. Auch hier konnte das eindimensionale Analogon verallgemeinert werden.

Offen bleibt jedoch die Lage von  $NG(\mathcal{U})$ . Mit einer zufriedenstellenden Charakterisierung hierzu wäre eine theoretische Behandlung des Problems der interpolatorischen Kubatur vollständig durchgeführt.

Was ist neu gegenüber den bisher bekannten Darstellungssätzen? Mit

den Bedingungen (i) und (ii) wird die Positivität der Koeffizienten und die Existenz genügend vieler reeller Nullstellen garantiert. Beide Bedingungen mussten bisher gefordert werden, so dass man diese Kennzeichnungen nicht konstruktiv nennen kann. Mit (3.19) steht ausserdem eine direkte Methode zur Berechnung der Koeffizienten zur Verfügung.

Aber wie konstruktiv sind die Bedingungen (i) und (ii) tatsächlich? Man stellt zuerst fest, dass im Falle nicht strikt positiver linearer Funktionale kaum klar ist, wie man die Räume  $\mathcal{R}$  und  $\mathcal{U}$  bestimmen soll. Wie wir in Satz 3.2.4 gesehen haben, bereitet schon die Bestimmung des Unterraumes  $V$  Schwierigkeiten. Die Anzahl der Knoten lässt sich nicht durch eine vernünftige einheitliche Schranke abschätzen. Auch jetzt ist somit eine konstruktive Anwendung des Charakterisierungssatzes überaus schwierig, weil man keinerlei Information über den Raum  $\mathcal{U}$  hat.

Anders jedoch im Fall strikt positiver linearer Funktionale. Hier liegt mit (3.13) eine untere Schranke für die Knotenanzahl vor, aus der sich ausserdem ergibt, dass  $P_k$ ,  $k = \lfloor m/2 \rfloor$ , in  $\mathcal{U}$  enthalten sein muss, wenn eine Kubaturformel vom Grad  $m$  konstruiert werden soll. Es liegen somit greifbare Ansatzpunkte vor, um  $\mathcal{R}$  und  $\mathcal{U}$  mit Hilfe der Bedingungen (i) und (ii) zu beschreiben.

Dieses unterschiedliche Verhalten lässt sich dadurch erklären, dass die strikt positiven linearen Funktionale im Inneren des abgeschlossenen konvexen Kegels aller positiven linearen Funktionale liegen. Das Verhalten der Funktionale auf dem Rand des Kegels kann sehr pathologisch werden.

Wir beschränken uns im folgenden allein auf strikt positive Funktionale. Das ist auch deshalb sinnvoll, weil bei allen relevanten Anwendungen solche Funktionale vorliegen.

In dem folgenden Teil der Arbeit soll der konstruktive Teil des Charakterisierungssatzes herausgearbeitet werden. Es zeigt sich, dass ein grosser technischer Aufwand notwendig ist, der erst zu einem sehr kleinen Teil so organisiert werden konnte, dass griffige Ergebnisse vorliegen. Obwohl sicherlich keine optimalen Konstruktionsmethoden angegeben werden, tritt der prinzipielle Charakter klar heraus. Einige offene Fragen der Kubatur können so beantwortet werden, es eröffnen sich gleichzeitig aber auch neue Fragestellungen. Schliesslich zeigt sich aber auch, wo augenblicklich die Grenzen eines konstruktiven Einsatzes des Charakterisierungssatzes liegen.

## 4. Zweidimensionale Kubaturformeln

Der konstruktive Aspekt des Charakterisierungssatzes wird in diesem Kapitel untersucht, wobei wir uns auf strikt positive lineare Funktionale über zweidimensionalen Gebieten beschränken. Wir beginnen mit der Konstruk-

tion reeller Ideale, die ein fundamentales System enthalten und die zu einer Kubaturformel gehörig sind. Dabei werden weitere notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben, die zu denen aus Satz 3.3.1 äquivalent sind. In 4.2 wird eine verschärfte untere Schranke für die Knotenzahl hergeleitet. Es werden Formeln gekennzeichnet, die diese Schranke annehmen. In 4.3 betrachten wir diese Ergebnisse für Produktintegrale. Hier lassen sich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen in besonders prägnanter Form zusammenfassen.

Wir untersuchen die Anwendungen des Charakterisierungssatzes bewusst zuerst im Zweidimensionalen. Hier ist es noch sinnvoll, die Variablen getrennt zu bezeichnen. Dadurch lässt sich das zugrundeliegende Prinzip der benutzten Technik deutlich herausarbeiten. Die Ausweitung ins Mehrdimensionale allgemein, die in Kapitel 5 vorgenommen wird, ist damit vorgezeichnet. Die dort notwendige kompliziertere Bezeichnungsweise wird durch die Kenntnis des zweidimensionalen Falles weitaus verständlicher. Gleichzeitig wird aber auch klarer, in welchem Ausmass der Aufwand gegenüber dem Zweidimensionalen steigen wird.

In diesem Kapitel nehmen wir stets  $n = 2$  an. Wir übernehmen die allgemeinen Bezeichnungsweisen, setzen aber  $x^{(1)} = x$  und  $x^{(2)} = y$ . Die Bezeichnungsweise der orthogonalen Polynome passen wir dem Zweidimensionalen an. Ausserdem setzen wir  $I$  immer als strikt positives lineares Funktional voraus.

#### 4.1. Konstruktion reeller Ideale

Dadurch, dass wir mit einem strikt positiven linearen Funktional  $I$  arbeiten, ist es möglich, eine monomisierte und orthogonalisierte Basis von  $P_m$  über das Verfahren von Gram-Schmidt zu berechnen. Wir bezeichnen diese Basis in der Form

$$P_j^i(x, y), \quad j = 0, 1, \dots, i, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Hierbei gilt

$$P_j^i(x, y) = x^{i-j}y^j + Q_{ij}(x, y), \quad Q_{ij} \in P_{i-1},$$

wobei die  $Q_{ij}$  dadurch eindeutig festgelegt sind, dass

$$I(P_j^i Q) = 0 \quad \text{für alle } Q \in P_{i-1}$$

gilt. Es erweist sich als nützlich, neben dieser monomisierten Basis eine weitere Basis zur Verfügung zu haben. Wir bezeichnen sie mit  $T_j^i$ ,  $j = 0, 1, \dots, i$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ . Für festes  $i$  werden dabei die  $T_j^i$  als Linearkombinationen der  $P_x^i$ ,  $x = 1, 2, \dots, i$ , gewonnen, wobei die Koeffizienten dadurch festgelegt werden, dass

$$(4.1) \quad I(T_j^i P_v^i) = \begin{cases} 0, & \text{falls } j \neq v, \\ M_j^i, & \text{falls } j = v, \end{cases}$$

gilt. Gleichzeitig erhalten wir

$$(4.2) \quad I(T_j^i T_v^i) = A_{jv}^i, \quad v, j = 0, 1, \dots, i, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Ein weiterer Vorteil, der sich aus der strikten Positivität von  $I$  ergibt, ist die Abschätzung (3.13). Eine Kubaturformel vom Grad  $m$  besitzt demnach  $N$  Knoten, wobei

$$(4.3) \quad N \geq \dim P_{[m/2]} = \frac{1}{2}([m/2] + 1)([m/2] + 2)$$

gilt. Darüber hinaus kann  $P_{[m/2]}$  als Unterraum von  $\mathcal{U}$  aus dem Charakterisierungssatz angenommen werden. Falls die untere Schranke angenommen wird, so können wir sogar  $\mathcal{U} = P_{[m/2]}$  wählen.

Ausgangspunkt des Charakterisierungssatzes war ein fundamentales System in  $P_{m+1}$  vom Grad  $m+1$ . Im allgemeinen enthält das gesuchte Ideal somit ein  $m$ -orthogonales System in  $P_k$ , das fundamental vom Grad  $k$  ist. Hierbei ist  $[m/2] + 1 \leq k \leq m+1$ , wobei man  $k$  so klein wie möglich annehmen wird, um die Knotenzahl klein zu halten. Wir suchen ein reelles Ideal  $\mathcal{U}$ , das solche Polynome enthält und das zu einer Kubaturformel vom Grad  $m$  gehörig ist. Wenn  $k$  fest vorgegeben ist, so kann man diese Polynome wie folgt ansetzen

$$(4.4) \quad R_i^k = P_i^k + \sum_{v=0}^{k-1} \gamma_{i,v}^{(k-1)} T_v^{k-1} + \sum_{v=0}^{k-2} \gamma_{i,v}^{(k-2)} T_v^{k-2} + \dots + \sum_{v=0}^{m-k+1} \gamma_{i,v}^{(m-k+1)} T_v^{m-k+1},$$

$$i = 0, 1, \dots, k-1,$$

wobei die  $\gamma_{i,v}^{(j)}$ ,  $j = k-1, k-2, \dots, m-k+1$ , vorerst noch beliebig gewählt werden dürfen. Offensichtlich sind die  $R_i^k$  fundamental vom Grad  $k$  und  $m$ -orthogonal. Strikte  $m$ -Orthogonalität liegt vor, wenn nicht alle  $\gamma_{i,v}^{(m-k+1)}$  verschwinden.

Wir leiten jetzt einige Bedingungen an die Parameter her, die notwendigerweise erfüllt sein müssen und die die Parameter stark einschränken. Die Polynome in (4.4) enthalten jeweils genau einen Term vom Grad  $k$ , somit folgt

$$yR_i^k - xR_{i+1}^k \in P_k, \quad i = 0, 1, \dots, k-1.$$

Insbesondere müssen diese Polynome wieder in dem gesuchten Ideal  $\mathcal{U}$  liegen, sie müssen demnach  $m$ -orthogonal sein, wenn sie zu einer Formel vom Grad  $m$  gehörig sein sollen. Damit ist

$$I(yR_i^k P_x^{m-k} - xR_{i+1}^k P_x^{m-k}) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, k-1, \quad \chi = 0, 1, \dots, m-k,$$

zu fordern. Diese Bedingung lässt sich auf die Form

$$0 = \sum_{v=0}^{m-k+1} \gamma_{i,v}^{(m-k+1)} I(y P_x^{m-k} T_v^{m-k+1}) - \gamma_{i+1,v}^{(m-k+1)} I(x P_x^{m-k} T_v^{m-k+1})$$

bringen. Wir können  $y P_x^{m-k}$  als  $P_{x+1}^{m-k+1} + Q_1$  und  $x P_x^{m-k}$  als  $P_x^{m-k+1} + Q_2$  mit  $Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}_{m-k}$  schreiben, so dass mit Hilfe von (4.1) folgende Bedingung folgt,

$$(4.5) \quad \gamma_{i,x+1}^{(m-k+1)} M_{x+1}^{m-k+1} = \gamma_{i+1,x}^{(m-k+1)} M_x^{m-k+1}, \\ i = 0, 1, \dots, k-1, \chi = 0, 1, \dots, m-k.$$

Man erkennt, dass alle die  $\gamma_{i,v}^{(m-k+1)}$  durch  $\gamma_{0,x}^{(m-k+1)}$  ausgedrückt werden können, für die  $i+v = \chi$  gilt. Somit lassen sich die Parameter wie folgt ausdrücken,

$$(4.6) \quad \gamma_{i,\chi}^{(m-k+1)} = \frac{\gamma_{i+\chi}}{M_x^{m-k+1}}, \quad i = 0, 1, \dots, k, \chi = 0, 1, \dots, m-k+1,$$

wobei  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m$  freie Parameter sind.

Wegen der Fundamentalität der  $R_i^k$  lassen sich reelle Zahlen  $\lambda_{ij}$  finden, so dass die Polynome

$$(4.7) \quad R_i = y R_i^k - x R_{i+1}^k - \sum_{j=0}^k \lambda_{ij} R_j^k, \quad i = 0, 1, \dots, k-1,$$

in  $\mathcal{P}_{k-1}$  liegen. Wir berechnen die  $\lambda_{ij}$  dadurch, dass wir (4.7) auf beiden Seiten mit  $T_x^k$  multiplizieren und anschliessend  $I$  anwenden. Es ergibt sich

$$I(y P_i^k T_x^k) - I(x P_{i+1}^k T_x^k) + \sum_{v=0}^{k-1} \gamma_{i,v}^{(1)} I(y T_v^{k-1} T_x^k) - \gamma_{i+1,v}^{(1)} I(x T_v^{k-1} T_x^k) \\ = \sum_{j=0}^k \lambda_{ij} I(P_j^k T_x^k).$$

Hieraus folgt

$$(4.8) \quad \lambda_{i\chi} = (I(y P_i^k T_x^k) - I(x P_{i+1}^k T_x^k)) / M_x^k + \\ + \frac{1}{M_x^k} \sum_{v=0}^{k-1} \gamma_{i,v}^{(1)} I(y T_v^{k-1} T_x^k) - \gamma_{i+1,v}^{(1)} I(x T_v^{k-1} T_x^k),$$

$$i = 0, 1, \dots, k-1, \chi = 0, 1, \dots, k.$$

Da die  $R_i$  aus (4.7) wieder in dem gesuchten Ideal  $\mathfrak{U}$  liegen, müssen sie orthogonal zu  $P_{m-k+1}$  sein. Das führt auf

$$\begin{aligned}
 (4.9) \quad & I(yP_i^k T_x^{m-k+1}) - I(xP_{i+1}^k T_x^{m-k+1}) + \\
 & + \sum_{v=0}^{m-k+2} \gamma_{i,v}^{(m-k+2)} I(yT_v^{m-k+2} T_x^{m-k+1}) - \gamma_{i+1,v}^{(m-k+2)} I(xT_v^{m-k+2} T_x^{m-k+1}) + \\
 & + \sum_{v=0}^{m-k+1} \gamma_{i,v}^{(m-k+1)} I(yT_v^{m-k+1} T_x^{m-k+1}) - \gamma_{i+1,v}^{(m-k+1)} I(xT_v^{m-k+1} T_x^{m-k+1}) \\
 & = \sum_{j=0}^k \lambda_{ij} \sum_{v=0}^{m-k+1} \gamma_{j,v}^{(m-k+1)} A_{x,v}^{m-k+1}, \\
 & \quad i = 0, 1, \dots, k-1, \chi = 0, 1, \dots, m-k+1,
 \end{aligned}$$

wobei die  $\lambda_{ij}$  mit (4.8) festgelegt sind. Damit sind die Parameter  $\gamma_{i,v}^{(m-k+1)}$ ,  $\gamma_{i,v}^{(m-k+2)}$  und  $\gamma_{i,v}^{(1)}$  durch die Gleichungen (4.6) und (4.9) eingeschränkt. Wir nennen die Parameter  $\gamma_{i,v}^{(j)}$  zulässig, wenn sie diesen Bedingungen genügen und die  $\gamma_i$  aus (4.6) nicht sämtlich verschwinden. Durch die letzte Bedingung wird die strikte  $m$ -Orthogonalität der  $R_i^k$  gewährleistet und somit der Exaktheitsgrad mit  $m$  festgelegt.

Seien die Polynome aus (4.5) mit zulässigen Parametern gegeben. Wenn die Polynome  $R_i$  aus (4.7) identisch verschwinden, so ist die Bedingung (i) von Satz 3.3.1 erfüllt.

**4.1.1. SATZ.** *Es seien die Polynome  $R_i^k$  aus (4.4) mit beliebigen, aber festen Parametern gegeben,  $[m/2] + 1 \leq k \leq m + 1$ . Das von den Polynomen erzeugte Ideal sei  $\mathfrak{U}$ , der erzeugte lineare Raum sei  $\mathfrak{R}$ . Es ist  $\mathfrak{U} \cap P_{k-1} = (0)$  genau dann, wenn*

$$(4.10) \quad yR_i^k - xR_{i+1}^k \in \mathfrak{R}, \quad i = 0, 1, \dots, k-1,$$

erfüllt ist.

**Beweis.** Der eine Teil der Aussage ist klar. Wenn  $yR_j^k - xR_{j+1}^k$  nicht in  $\mathfrak{R}$  liegt, so muss  $R_j$  aus (4.7) von 0 verschieden sein, das ergibt einen Widerspruch.

Wir weisen nach, dass ein Polynom  $Q \in P_{k-1}$  in der Form

$$(4.11) \quad Q = \sum_{i=0}^k Q_i R_i^k, \quad Q_i \in P_N,$$

immer auf die Gestalt

$$(4.12) \quad Q = \sum_{i=0}^k Q_i R_i^k, \quad Q_i \in P_{N-1},$$

gebracht werden kann, wenn

$$(4.13) \quad yR_i^k - xR_{i+1}^k = \sum_{j=0}^k \lambda_{ij}R_j^k, \quad \lambda_{ij} \in \mathbf{R}, \quad i = 0, 1, \dots, k-1,$$

gilt. Hieraus ergibt sich dann die Behauptung wegen der Fundamentalität der  $R_i^k$ . Sei (4.11) gegeben. Wir können  $Q_0$  wie folgt schreiben,

$$Q_0 = \sum_{v=0}^N a_v^{(0)}x^v + y\bar{Q}_0, \quad \bar{Q}_0 \in \mathbf{P}_{N-1}, \quad a_v^{(0)} \in \mathbf{R}.$$

Damit folgt

$$Q = R_0^k \sum_{v=0}^N a_v^{(0)}x^v + yR_0^k\bar{Q}_0 + \sum_{i=1}^k Q_i R_i^k.$$

Mit Hilfe von (4.13) für  $i = 0$  erhalten wir

$$Q = R_0^k \sum_{v=0}^N a_v^{(0)}x^v + \sum_{i=0}^k \bar{Q}_i^{(0)}R_i^k + \sum_{i=1}^k Q_i^{(0)}R_i^k,$$

wobei  $\bar{Q}_i^{(0)} \in \mathbf{P}_{N-1}$  und  $Q_i^{(0)} \in \mathbf{P}_N$  gilt. Ebenso verfahren wir mit  $Q_1^{(0)}$  in dieser Darstellung, indem wir  $Q_1^{(0)}$  in der Form

$$Q_1^{(0)} = \sum_{v=0}^N a_v^{(1)}x^v + y\bar{Q}_1, \quad \bar{Q}_1 \in \mathbf{P}_{N-1}, \quad a_v^{(1)} \in \mathbf{R},$$

ansetzen. Erneutes Einsetzen von (4.13), dieses Mal für  $i = 1$  ergibt

$$Q = R_0^k \sum_{v=0}^N a_v^{(0)}x^v + R_1^k \sum_{v=0}^N a_v^{(1)}x^v + \sum_{i=0}^k \bar{Q}_i^{(1)}R_i^k + \sum_{i=2}^k Q_i^{(1)}R_i^k,$$

wobei  $\bar{Q}_i^{(1)} \in \mathbf{P}_{N-1}$  und  $Q_i^{(1)} \in \mathbf{P}_N$  gilt. Wir können diese Reduktion solange fortsetzen, bis wir eine Darstellung der Gestalt

$$Q = \sum_{i=0}^k R_i^k \left[ \sum_{v=0}^N a_v^{(i)}x^v \right] + \sum_{i=0}^k \bar{Q}_i^{(k-1)}R_i^k, \quad \bar{Q}_i^{(k-1)} \in \mathbf{P}_{N-1}, \quad a_v^{(i)} \in \mathbf{R},$$

erreicht haben. Da  $Q \in \mathbf{P}_{k-1}$  vorausgesetzt ist, müssen zumindest die Terme vom Grad  $N+k$  in dieser Darstellung verschwinden. Auf Grund der Konstruktion tauchen Monome vom Grad  $N+k$  höchstens einmal auf. Damit folgt  $a_N^{(i)} = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ , und wir haben die gesuchte Darstellung (4.12) gefunden. ■

Der Beweis dieses Satzes zeigt, dass wir unter der Bedingung (4.10) jedes  $Q \in \mathcal{U}$  in der Form

$$Q = \sum_{j=0}^k Q_j R_j^k$$

schreiben können, wobei der Grad von  $Q_j R_j^k$  nie den Grad von  $Q$  übersteigt. Damit bilden die  $R_i^k$  eine  $H$ -Basis (homogene Basis) des Ideals  $\mathcal{U}$ . Diesen Begriff, der von F. S. Macaulay [16] eingeführt wurde, hat H. M. Möller [73] unter der Bezeichnung *kanonische Basis* in Zusammenhang mit verallgemeinerten Kubaturformeln untersucht. Wir verweisen auf diese Arbeit und merken an, dass sich Satz 4.1.1 als Ergänzung zu diesen Ergebnissen verstehen lässt. Die Bedingung (4.10) ist äquivalent dazu, dass das Ideal  $\mathcal{U}$  zu einer in Möllers Sinne verallgemeinerten Kubaturformel gehörig ist.

Um zu zeigen, dass  $\mathcal{U}$  reell ist, muss nach Satz 3.4.1 noch zusätzlich die Bedingung (ii) nachgewiesen werden. Wir erhalten damit folgenden Satz.

**4.1.2. SATZ.** *Seien  $k$  mit  $[m/2]+1 \leq k \leq m+1$  und beliebige, aber feste Parameter für die  $R_i^k$  aus (4.4) vorgegeben. Das von diesen Polynomen erzeugte Ideal sei  $\mathcal{U}$ , der erzeugte lineare Raum sei  $\mathcal{H}$ . Das Ideal  $\mathcal{U}$  ist genau dann zu einer Kubaturformel vom Grad  $m$  mit  $N = \dim P_{k-1}$  Knoten gehörig, wenn*

$$(i) \quad yR_i^k - xR_{i+1}^k \in \mathcal{H}, \quad i = 0, 1, \dots, k-1,$$

und

(ii)  $I(Q^2 - R^*) > 0$  für alle  $Q \in P_{k-1}$  mit  $R^* \in \mathcal{U}$  und  $Q^2 - R^* \in P_m$  erfüllt sind.

Die Bedingung (i) kann dadurch überprüft werden, dass man fordert, dass die  $R_i$  in (4.7) zu  $P_{k-1}$  orthogonal sind. Man erhält damit zu den Bedingungen, die die Zulässigkeit der Parameter garantieren, noch die Forderungen

$$I(R_i T_\chi^j) = 0, \quad \chi = 0, 1, \dots, j, \quad j = m-k+1, m-k+2, \dots, k-1,$$

die weitere Bedingungen an die  $\gamma_{i,v}^{(j)}$  bewirken.

Die Überprüfung von Bedingung (ii) kann man auf den linearen Raum beschränken, der von den Polynomen  $T_\chi^j$ ,  $\chi = 0, 1, \dots, j$ ,  $j = [m/2]+1, [m/2]+2, \dots, k-1$  erzeugt wird. Für  $k = [m/2]+1$  ist die Bedingung (ii) somit immer erfüllt.

Falls  $m = 2k-1$ , so haben die  $R_i^k$  die einfache Gestalt  $R_i^k = P_i^k$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ . Aus Satz 4.1.2 erhalten wir damit ein Ergebnis von I. P. Mysovskikh [76].

**4.1.3. KOROLLAR.** *Der von  $P_i^k$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ , erzeugte lineare Raum werde mit  $\dot{P}_k$  bezeichnet. Es gibt genau dann eine Kubaturformel vom Grad  $m = 2k-1$  mit  $N = \dim P_{k-1} = k(k+1)/2$  Knoten, wenn*

$$(4.14) \quad yP_i^k - xP_{i+1}^k \in \dot{P}_k, \quad i = 0, 1, \dots, k-1,$$

gilt. Die Knoten dieser Formel sind die gemeinsamen Nullstellen der Polynome  $P_i^k$ .

Wenn wir (4.14) mit  $P_x^{k-1}$ ,  $\chi = 0, 1, \dots, k-1$ , multiplizieren und anschließend  $I$  anwenden, erhalten wir die folgende zu (4.14) äquivalente Bedingung,

$$I(yP_i^*P_x^{k-1}) - I(xP_{i+1}^*P_x^{k-1}) = 0, \quad i, \chi = 0, 1, \dots, k-1.$$

Sie lässt sich auf die folgende Form bringen,

$$I(P_i^*P_{x+1}^*) = I(P_{i+1}^*P_x^*), \quad i, \chi = 0, 1, \dots, k-1.$$

Man stellt schnell fest, dass die klassischen Integrale diese Bedingung nicht erfüllen. Es gibt jedoch Funktionale  $I$ , die dieser Bedingung genügen. Dieses wichtige und interessante Ergebnis wurde für spezielle  $m$  von F. N. Fritsch [70], I. P. Mysovskikh und V. Ja. Cernicina [71] und V. Ja. Cernicina [73] gezeigt. Die Existenz solcher Funktionale, die (4.14) für beliebiges  $k$  zulassen, wurde von V. A. Kuzmenkov [76], [78] nachgewiesen.

Betrachten wir nun den Fall  $m = 2k - 2$  und die zugehörigen Polynome  $R_i^k$ , die zu  $P_{k-2}$  orthogonal sein müssen. Nach (4.4) haben sie die Form

$$R_i^k = P_i^k + \sum_{v=0}^{k-1} \gamma_{i,v}^{(k-1)} T_v^{(k-1)}, \quad i = 0, 1, \dots, k.$$

Wegen (4.6) besitzen die Koeffizienten  $\gamma_{i,v}^{(k-1)}$  eine spezielle Struktur, die sich mit den neuen Parametern  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2k-1}$  wie folgt ausdrücken lässt,

$$\gamma_{i,v}^{(k-1)} = \gamma_{i+v} / M_v^{k-1}, \quad i = 0, 1, \dots, k, \quad v = 0, 1, \dots, k-1.$$

Als weitere notwendige Einschränkung der  $\gamma_i$  ergibt sich die Bedingung (4.9), sie hat jetzt die Form

$$\begin{aligned} I(yP_i^*T_x^{k-1}) - I(xP_{i+1}^*T_x^{k-1}) - \sum_{j=0}^k \lambda_{ij} \sum_{v=0}^{k-1} A_{x,v}^{k-1} \gamma_{j+v} / M_v^{k-1} + \\ + \sum_{v=0}^{k-1} [\gamma_{i+v} I(yT_v^{k-1}T_x^{k-1}) - \gamma_{i+v+1} I(xT_v^{k-1}T_x^{k-1})] / M_v^{k-1} = 0, \end{aligned}$$

wobei die  $\lambda_{ij}$  aus (4.8) berechnet werden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} (4.15) \quad \lambda_{ij} = & (I(yP_i^*T_j^*) - I(xP_{i+1}^*T_j^*)) / M_j^{k-1} + \\ & + \frac{1}{M_j^k} \sum_{v=0}^{k-1} [\gamma_{i+v} I(yT_v^{k-1}T_j^*) - \gamma_{i+v+1} I(xT_v^{k-1}T_j^*)] / M_v^{k-1}, \\ & i = 0, 1, \dots, k-1, \quad j = 0, 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Um Bedingung (4.9) zu überprüfen, ist somit das folgende Gleichungssystem in den Unbekannten  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2k-1}$  zu lösen,

$$(4.16) \quad Z_{ix} = I(yP_i^k T_x^{k-1}) - I(xP_{i+1}^k T_x^{k-1}) + \\ + \sum_{v=0}^{k-1} [\gamma_{i+v} I(yT_v^{k-1} T_x^{k-1}) - \gamma_{i+v+1} I(xT_v^{k-1} T_x^{k-1})] / M_v^{k-1} - \\ - \sum_{j=0}^k \lambda_{ij} \sum_{v=0}^{k-1} A_{x,v}^{k-1} \gamma_{j+v} / M_v^{k-1}, \quad i, \chi = 0, 1, \dots, k-s,$$

wobei (4.15) einzusetzen ist. Hierbei werden die linken Seiten mit  $Z_{ix}$  bezeichnet.

Wenn (4.16) gelöst werden kann, dann sind die Polynome  $R_i$  aus (4.7) zu  $P_{k-1}$  orthogonal. Da die  $R_i$  in  $P_{k-1}$  liegen, müssen sie somit verschwinden. Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 4.1.2 erfüllt, und es ergibt sich folgendes Korollar.

**4.1.4. KOROLLAR.** *Es gibt genau dann eine Kubaturformel vom Grad  $m = 2k-2$  mit  $N = \dim P_{k-1} = k(k+1)/2$  Knoten, wenn es reelle Zahlen  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2k-1}$  gibt, die (4.16) erfüllen. Mit jeder reellen Lösung von (4.16) sind die gemeinsamen Nullstellen von*

$$R_i^k = P_i^k + \sum_{v=0}^{k-1} \frac{1}{M_v^{k-1}} \gamma_{i+v} T_v^{k-1}, \quad i = 0, 1, \dots, k,$$

die Knoten der Kubaturformel.

Wir merken noch an, dass sowohl im Fall von Korollar 4.1.3 wie auch bei 4.1.4 die Koeffizienten sich besonders einfach darstellen lassen. Wenn wir mit  $\bar{T}_j^i, j = 0, 1, \dots, i, i = 1, 2, \dots, k-1$ , die voll durchorthogonalisierte Basis von  $P_{k-1}$  bezeichnen, so dass  $I(\bar{T}_j^i \bar{T}_\nu^i) = \delta_{j\nu}$  gilt, so folgt nach (3.19)

$$C_\chi^{-1} = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i (\bar{T}_j^i(x_\chi, y_\chi))^2, \quad \chi = 1, 2, \dots, N.$$

Die Kennzeichnung in Korollar 4.1.4 wurde von H. J. Schmid [78]<sub>2</sub> nachgewiesen. Auch C. R. Morrow und T. N. L. Patterson [78] geben diese Kennzeichnung an, ihr Beweis garantiert jedoch nur eine schwächere Aussage.

Für  $k \geq [m/2] + 2$  lassen sich ähnliche Charakterisierungen mit Hilfe von Satz 4.1.2 aufstellen. Dabei lässt sich die Bedingung (i) immer auf quadratische Beziehungen zwischen den Koeffizienten  $\gamma_{i,v}^{(j)}$  der Polynome aus (4.4) zurückspielen, während die Bedingung (ii) durch lineare Ungleichungen für die  $\gamma_{i,v}^{(j)}$  ausgedrückt werden kann.

Als nächstes stellt sich die Frage, wie man vorgehen soll, wenn für vorgegebene Polynome  $R_i^k$  in der Form (4.4), mit  $[m/2] + 1 \leq k \leq m+1$ , nicht alle Polynome  $R_i$  aus (4.7) verschwinden. Die Bedingungen, die die Zu-

lässigkeit der Parameter  $\gamma_{i,v}^{(j)}$  garantieren, müssen erfüllt sein. Mit Hilfe des Charakterisierungssatzes lässt sich ausserdem entscheiden, welche  $Q \in P_{k-1}$  weiterhin zum gesuchten Ideal gehören müssen.

**4.1.5. SATZ.** Seien die Polynome  $R_i^k$  aus (4.4) mit beliebigen, aber festen zulässigen Parametern gegeben, wobei  $[m/2] + 1 \leq k$  und  $k \leq m+1$  gelten soll. Sei  $\mathcal{U}^\circ$  das von den  $R_i^k$  erzeugte Ideal. Es gibt genau dann ein Ideal  $\mathcal{U}$ , das  $\mathcal{U}^\circ$  enthält und zu einer Kubaturformel vom Grad  $m$  gehörig ist, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(i) Für jedes  $Q \in P_{k-1}$  gilt  $I(Q^2 - R^*) \geq 0$ , wenn  $R^* \in \mathcal{U}^\circ$  so gewählt wird, dass  $Q^2 - R^*$  in  $P_{k-1}$  liegt.

(ii) Die Menge

$$\mathcal{J} = \{S \in P_{k-1} : I(S^2 - R^*) = 0 \text{ für } R^* \in \mathcal{U}^\circ, \text{ so dass } S^2 - R^* \in P_{k-1} \text{ gilt}\}$$

ist ein linearer Raum mit der Eigenschaft, dass man zu jedem  $Q \in \mathcal{J}$  reelle Zahlen  $\alpha_i^1, \alpha_i^2$  finden kann, so dass

$$xQ - \sum_{i=0}^k \alpha_i^1 R_i^k \in \mathcal{J}, \quad yQ - \sum_{i=0}^k \alpha_i^2 R_i^k \in \mathcal{J},$$

erfüllt ist.

**Beweis.** Seien die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt und sei  $\{S_1, S_2, \dots, S_s\}$  eine Basis des linearen Raumes  $\mathcal{J}$ . Wir zeigen, dass das von den  $S_i$  und  $R_i^k$  erzeugte Ideal  $\mathcal{U}$  zu einer Kubaturformel vom Grad  $m$  gehörig ist. Auf Grund der Eigenschaft (ii) lässt sich ein Polynom

$$Q = \sum_{i=1}^s \bar{Q}_i S_i, \quad \bar{Q}_i \in P_N,$$

auch in der Form

$$Q = \sum_{i=0}^k \bar{Q}_i^+ R_i^k + \sum_{i=1}^s \alpha_i S_i, \quad \alpha_i \in \mathbf{R}, \bar{Q}_i^+ \in P_{N-1},$$

schreiben. Damit können wir ein  $Q \in \mathcal{U} \cap P_{k-1}$  stets in der Form

$$(4.17) \quad Q = \sum_{i=0}^k Q_i R_i^k + \sum_{i=1}^s \lambda_i S_i, \quad \lambda_i \in \mathbf{R}, Q_i \in P_N, N \in \mathbf{N},$$

annehmen. Wir weisen nach, dass es dann auch eine Darstellung

$$(4.18) \quad Q = \sum_{i=0}^k Q_i^+ R_i^k + \sum_{i=1}^s \lambda_i^+ S_i, \quad Q_i^+ \in P_{N-1}, \lambda_i \in \mathbf{R},$$

geben muss. Die Polynome  $R_i$  aus (4.7) gehören offensichtlich zu  $\mathcal{J}$ , denn ihre Quadrate liegen in  $\mathcal{U}^\circ$ . Damit lässt sich eine Reduktion wie im Beweis von 4.1.1 vornehmen, wobei jedoch noch zusätzliche Terme in den  $R_i$

auftreten. Wir erhalten, da  $Q$  in  $\mathcal{U} \cap P_{k-1}$  liegt, aus (4.17) die Beziehung

$$Q = \sum_{i=0}^k \tilde{Q}_i R_i^k + \sum_{i=0}^{k-1} Q_i R_i + \sum_{i=1}^s \tilde{\lambda}_i S_i, \quad Q_i, \tilde{Q}_i \in P_{N-1}, \tilde{\lambda}_i \in R.$$

Dies kann man jedoch auf die Form (4.18) umschreiben. Wir können somit jedes  $Q \in \mathcal{U} \cap P_{k-1}$  als Linearkombination der  $S_i$  darstellen. Sei  $\mathcal{U}$  ein beliebiges, aber festes Komplement zu  $\mathcal{S}$  in  $P_{k-1}$ . Dann gilt für jedes  $U \in \mathcal{U}$ ,  $U \neq 0$ , die Beziehung  $I(U^2 - R^*) > 0$ , wenn  $R^* \in \mathcal{U}^\circ$  so gewählt wird, dass  $U^2 - R^*$  in  $P_{k-1}$  liegt. Sei nun  $U \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}$ . Da  $U$  als Element von  $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}$  eine Linearkombination der  $S_i$  und  $\mathcal{S}$  ein linearer Raum ist, folgt  $I(U^2 - R^*) = 0$ . Damit liegt aber ein Widerspruch vor, die Bedingungen (i) und (ii) des Charakterisierungssatzes 3.4.1 sind nachgewiesen. Das Ideal  $\mathcal{U}$  ist zu einer Kubaturformel vom Grad  $m$  gehörig. Dass der maximale Exaktheitsgrad vorliegt, folgt aus der strikten  $m$ -Orthogonalität der  $R_i^k$ , die sich aus der Wahl der zulässigen Parameter  $\gamma_{i,v}^{(m-k+1)}$  ergibt.

Die Umkehrung mit Hilfe von Satz 3.4.1 ist klar. ■

Mit diesem Satz ist die Möglichkeit gegeben, ein vorgegebenes  $m$ -orthogonales und fundamentales System daraufhin zu untersuchen, ob es sich zu einem Ideal ergänzen lässt, das eine Kubaturformel vom Grad  $m$  erzeugt. Einen direkten Ansatz haben wir damit allerdings nicht. Zur Untersuchung symmetrischer Kubaturformeln erscheint dieses Vorgehen jedoch geeignet, denn die symmetrische Lage der Knoten bewirkt eine symmetrische Beziehung unter den Koeffizienten  $\gamma_{i,v}^{(j)}$ , wodurch die Freiheitsgrade stark eingeschränkt werden. Hier liegen Ansatzpunkte, mit denen sich die Berechnung symmetrischer Formeln, wie sie z.B. A. Haegemans und R. Piessens [76], [77] mit anderen Methoden durchgeführt haben, weiterführen lässt.

Man kann die Korollare 4.1.3 und 4.1.4 als Spezialfälle dieses Satzes betrachten. Dass man unter den Voraussetzungen der Korollare vernünftige Kennzeichnungen erhält, liegt daran, dass die Knotenanzahl vorgeschrieben ist. Diese zusätzliche Bedingung schränkt die Möglichkeiten für das Ideal  $\mathcal{U}$  und den Raum  $\mathcal{S}$  stark ein. Aus diesem Grunde wird man Satz 4.1.5 im Zusammenhang mit einer vorgeschriebenen Knotenanzahl betrachten.

## 4.2. Eine verbesserte untere Schranke für die Knotenanzahl

Lange Zeit war nur (4.3) als untere Schranke für die Knotenanzahl bekannt, obwohl zu vermuten war, dass diese Schranke für ungerades  $m$  im allgemeinen nicht angenommen wird. H. M. Möller [76] ist es gelungen, eine Verschärfung von (4.3) zu gewinnen. Wir leiten diese Abschätzung her und charakterisieren dann die Formeln, deren Knotenanzahl diese untere Schranke annimmt.

Sei eine Kubaturformel vom Grad  $m = 2k - 1$  mit  $N$  Knoten für ein

strikt positives lineares Funktional  $I$  gegeben. Hier und im folgenden dient  $k$  nur dazu, ungerade oder gerade Exaktheitsgrade auszudrücken. Das zum Ideal gehörige fundamentale System besitzt im allgemeinen einen Grad, der grösser als  $k$  ist. Das zu dieser Kubaturformel gehörige Ideal sei  $\mathcal{U}$ . Wir bezeichnen wieder den von  $P_i^*$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ , erzeugten Raum mit  $\dot{P}_k$ . Da  $\mathcal{U} \cap P_{k-1}$  nur die Null enthalten darf, gehören  $s$  linear unabhängige Polynome aus  $\dot{P}_k$  zum Ideal. Damit muss die Knotenanzahl gegenüber der Abschätzung (4.3) mindestens um  $k+1-s$  steigen. Seien  $Q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ , diese Polynome und sei  $V$  der von ihnen erzeugte Raum sowie  $W$  der von  $V$ ,  $xV$ ,  $yV$  erzeugte Raum. Dann gilt

$$(4.19) \quad 3s - \eta = \dim W \leq s + k + 2,$$

wobei  $\eta$  die Anzahl der linearen Abhängigkeiten unter den  $Q_i$ ,  $xQ_i$  und  $yQ_i$  bezeichne. Die rechte Ungleichung ergibt sich, weil  $xV$  und  $yV$  höchstens ein fundamentales System vom Grad  $k+1$  bilden können und weil kein nicht-triviales Polynom aus  $P_{k-1}$  im Ideal liegen darf. Mit diesem Ansatz und einer Abschätzung für  $\eta$  konnte H. M. Möller [76] die Schranke (4.3) im Fall  $m = 2k - 1$  wesentlich verbessern.

Die Zahl der linearen Abhängigkeiten in  $W$  kann nicht die Zahl der linear unabhängigen Vektoren  $(a_0, a_1, \dots, a_{k-1})^T$  übersteigen, die der Gleichung

$$\sum_{i=0}^{k-1} a_i (yP_i^* - xP_{i+1}^*) \in \dot{P}_k$$

genügen. Durch Multiplikation mit  $P_\chi^{*-1}$ ,  $\chi = 0, 1, \dots, k-1$ , und anschließender Anwendung von  $I$  erhalten wir das Gleichungssystem

$$\sum_{i=0}^{k-1} a_i I(P_i^* P_{\chi+1}^* - P_{i+1}^* P_\chi^*) = 0, \quad \chi = 0, 1, \dots, k-1.$$

Somit kann  $\eta$  über den Rang der Matrix

$$(4.20) \quad M_k = (I(P_i^* P_{j+1}^* - P_{i+1}^* P_j^*))_{i,j=0,1,\dots,k-1}$$

abgeschätzt werden. Die Matrix  $M_k$  ist schiefsymmetrisch, somit können wir ihren Rang in der Form  $2\eta_k$  angeben. Es gilt  $k - 2\eta_k \geq \eta$ . Insgesamt erhalten wir damit aus (4.19)  $s \leq k + 1 - \eta_k$  und es folgt

$$(4.21) \quad N \geq \dim P_{k-1} + \eta_k$$

als Abschätzung für die Knotenanzahl in einer Kubaturformel vom Grad  $m = 2k - 1$ .

Wie wir in der Bemerkung nach Korollar 4.1.3 gesehen haben, verschwinden sämtliche Elemente der Matrix (4.20), wenn die Bedingung (4.14) gilt. Wir erhalten  $\eta_k = 0$ , und Korollar 4.1.3 beschreibt die Kubaturformeln,

die die untere Schranke in (4.21) für dieses  $\eta_k$  annehmen. Im allgemeinen ist  $\eta_k > 0$  zu erwarten. Für die Klassen der zentralsymmetrischen Integrale und der Produktintegrale hat H. M. Möller [76] gezeigt, dass

$$\eta_k = [k/2]$$

gilt. Wir werden später ein Beispiel kennen lernen, das zeigt, dass die untere Schranke (4.21) nicht immer angenommen wird. Eine weitere Verbesserung der unteren Schranke ist ausgesprochen schwierig. Für spezielle Integraltypen gibt es Untersuchungen in diese Richtung, einige dieser Ergebnisse werden bei H. M. Möller [78] und I. P. Mysovskikh [80] zusammengestellt.

Diese Abschätzung lässt sich in analoger Weise auf den Fall  $m = 2k - 2$  übertragen, wenn man statt  $\dot{P}_k$  den von den Polynomen

$$R_i^k = P_i^k + \sum_{v=0}^{k-1} \frac{\gamma_{i+v}}{M_v^{k-1}} T_v^{k-1}, \quad i = 0, 1, \dots, k,$$

erzeugten Raum  $\mathcal{R}$  betrachtet. Dabei seien  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2k-1}$  beliebige reelle Zahlen. Jetzt wird  $\eta$  durch die Zahl der linear unabhängigen Vektoren  $(a_0, a_1, \dots, a_{k-1})^T$  abgeschätzt, die der Gleichung

$$(4.22) \quad \sum_{i=0}^{k-1} a_i (yR_i^k - xR_{i+1}^k) \in \mathcal{R}$$

genügen. Da wir nach 4.1 die Beziehungen

$$yR_i^k - xR_{i+1}^k = \sum_{j=0}^k \lambda_{ij} R_j^k + R_i, \quad R_i \in P_{k-1},$$

mit  $\lambda_{ij}$  aus (4.15) haben, entspricht (4.22) den Lösungen von

$$\tilde{M}_k(a_0, a_1, \dots, a_{k-1})^T = 0,$$

wobei die Matrix  $\tilde{M}_k$  die Gestalt

$$\tilde{M}_k = (Z_{i\chi})_{i,\chi=0,1,\dots,k-1}$$

hat. Die  $Z_{i\chi}$  sind dabei die Gleichungen aus (4.16), die allerdings hier nicht 0 gesetzt werden. Wir erhalten somit

$$(4.23) \quad N \geq \dim P_{k-1} + \text{rg } \tilde{M}_k/2$$

als Abschätzung der Knotenanzahl einer Kubaturformel vom Grad  $m = 2k - 2$ . Hierbei ergibt sich  $\text{rg } \tilde{M}_k = 0$  genau dann, wenn das Gleichungssystem (4.16) lösbar ist. In diesem Fall ist  $\tilde{M}_k$  die Nullmatrix und in (4.23) wird die Gleichheit angenommen.

Während man  $\eta_k$  ohne grosse Schwierigkeiten berechnen kann, ergeben sich bei der Berechnung von  $\text{rg } \tilde{M}_k$  deshalb Probleme, weil die Abschätzung für jede beliebige Wahl der  $\gamma_i$  gelten muss. Wenn wir in  $\tilde{M}_k$  alle  $\gamma_i$  Null

setzen, so folgt  $\text{rg } \tilde{M}_k = 0$  und wir haben die Abschätzung (4.21), denn jetzt sind die  $R_i^k$  zu  $P_{k-1}$  orthogonal und somit steigt der Exaktheitsgrad auf  $m = 2k - 1$ .

Abschliessend charakterisieren wir die Formeln vom Grad  $m = 2k - 1$ , deren Knotenanzahl die untere Schranke in (4.21) annimmt. Diese Charakterisierung geht in den wesentlichen Grundzügen auf H. M. Möller [76] zurück, durch die Verwendung reeller Ideale lässt sie sich in eine besonders einfache Form bringen.

**4.2.1. SATZ.** Sei  $m = 2k - 1$ . Es gibt genau dann eine Kubaturformel vom Grad  $m$  mit  $N = \dim P_{k-1} + \eta_k$  Knoten, wenn das zur Formel gehörige Ideal  $\mathfrak{U}$  von linear unabhängigen Polynomen  $R_1, R_2, \dots, R_s$ ,  $s = k + 1 - \eta_k$ , aus  $\dot{P}_k$  erzeugt wird, die die nachfolgenden Bedingungen erfüllen. Hierbei bezeichnen wir mit  $\mathcal{R}$  den von den  $R_i$  erzeugten Raum und mit  $\mathcal{U}$  ein beliebiges, aber festes Komplement von  $\mathcal{R}$  in  $\dot{P}_k$  mit einer Basis  $U_1, U_2, \dots, U_{\eta_k}$ , die wir orthogonal zu  $P_{k-1}$  annehmen.

(i) Die Polynome  $xR_i, yR_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ , bilden ein fundamentales System vom Grad  $k + 1$ .

(ii) Wenn  $\bar{Q}_0 = y\bar{Q}_1 - x\bar{Q}_2 \in P_k$  mit  $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2 \in \dot{P}_k$ , so folgt  $\bar{Q}_i \in \mathcal{R}$ .

(iii) Wenn  $Q_0 = x^2Q_1 + xyQ_2 + y^2Q_3 + xQ_4 + yQ_5 \in P_k$  und  $Q_i \in \mathcal{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$ , dann liegt auch  $Q_0$  in  $\mathcal{R}$ .

(iv) Die Matrix

$$K = (\kappa_{ij})_{i,j=1,2,\dots,\eta_k}$$

ist positiv definit d.h., alle  $\eta_k$  Abschnittsdeterminanten von  $K$  sind positiv. Hierbei gilt

$$\kappa_{ij} = \kappa_{ji} = I(U_i U_j - R_{ij}),$$

und die  $R_{ij}$  werden so in  $\mathfrak{U}$  gewählt, dass  $U_i U_j - R_{ij} \in P_m$ .

**Beweis.** Beginnen wir damit die Notwendigkeit der Bedingungen zu überprüfen. Die vorgeschriebene Knotenanzahl bewirkt, dass in (4.21) Gleichheit eintritt. Da  $\eta = k - 2\eta_k$  gilt, ergibt sich auch in (4.19) jeweils die Gleichheit. Aus der Existenz der Formel folgen damit die Bedingungen (i) und (ii). Die restlichen Bedingungen erhält man ohne Mühe aus dem Charakterisierungssatz.

Seien nun die Bedingungen (i) bis (iv) gegeben. Aus (i) folgt, dass in dem Ideal  $\mathfrak{U}$  ein fundamentales System vom Grad  $k + 1$  liegen muss. Wir bezeichnen dieses System mit  $R_i^{k+1}$ ,  $i = 0, 1, \dots, k + 1$ . Aus Bedingung (iii) erhalten wir somit die Beziehungen

$$(4.24) \quad yR_i^{k+1} - xR_{i+1}^{k+1} - \sum_{j=0}^{k+1} \lambda_{ij} R_j^{k+1} \in \mathcal{R}, \quad i = 0, 1, \dots, k,$$

wobei die  $\lambda_{ij} \in \mathbf{R}$  so gewählt werden, dass die Polynome in  $\mathbf{P}_k$  liegen. Sei  $\mathcal{U}$  ein beliebiges, aber festes Komplement zu  $\mathcal{R}$  in  $\mathbf{P}_k$ , wobei  $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$  gelten möge. Jedes  $Q \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}$  lässt sich in der Form

$$Q = \sum_{j=0}^{k+1} Q_j R_j^k + \sum_{j=1}^s \lambda_j R_j, \quad Q_j \in \mathbf{P}_N, \lambda_j \in \mathbf{R},$$

schreiben. Durch (4.24) und Bedingung (ii) folgt wie beim Beweis von Satz 4.1.1, dass es auch eine Darstellung der Gestalt

$$Q = \sum_{j=0}^{k+1} Q_j^+ R_j^k + \sum_{j=1}^s \lambda_j^+ R_j, \quad Q_j^+ \in \mathbf{P}_{N-1}, \lambda_j^+ \in \mathbf{R}$$

geben muss. Daraus folgt  $\mathcal{U} \cap \mathcal{U} = (0)$ . Um Satz 3.4.1 anwenden zu können, muss noch gezeigt werden, dass für jedes  $U \in \mathcal{U}$  und ein  $R^+ \in \mathcal{U}$  mit  $U^2 - R^+ \in \mathbf{P}_m$  die Beziehung  $I(U^2 - R^+) > 0$  folgt. Die Bedingung wird in (iv) auf eine Basis von  $\mathcal{U}$  zurückgespielt. Wir zeigen, dass beide Bedingungen äquivalent sind. Jedes  $U \in \mathcal{U}$  können wir als

$$U = \sum_{i=1}^{\eta_k} \lambda_i U_i + U^+, \quad \lambda_i \in \mathbf{R}, U^+ \in \mathbf{P}_{k-1},$$

schreiben. Wenn wir die Bezeichnungen aus (iv) übernehmen, so folgt

$$I(U^2 - R^+) = \sum_{i=1}^{\eta_k} \lambda_i^2 \kappa_{ii} + 2 \sum_{i=1}^{\eta_k-1} \sum_{j=i+1}^{\eta_k} \lambda_i \lambda_j \kappa_{ij} + I((U^+)^2).$$

Es sind die  $\kappa_{ij}$  so zu kennzeichnen, dass die quadratische Form für alle  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\eta_k}) \neq 0$  stets positiv ist. Das besagt aber, dass die symmetrische Matrix  $K$  positiv definit sein muss.

Die positive Definitheit von  $K$  ist äquivalent dazu, dass alle  $\eta_k$  Hauptunterdeterminanten von  $K$  positiv sind. Es ist somit zu fordern,

$$(4.25) \quad \kappa_{11} > 0, \det \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{12} & \kappa_{22} \end{bmatrix} > 0, \det \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13} \\ \kappa_{12} & \kappa_{22} & \kappa_{23} \\ \kappa_{13} & \kappa_{23} & \kappa_{33} \end{bmatrix} > 0, \dots, \det(K) > 0.$$

Hiermit ist die Äquivalenz von (iv) zur Bedingung  $I(U^2 - R^+) > 0$  für alle  $U \in \mathcal{U}$  gezeigt.

Mit Hilfe von Satz 3.4.1 ergibt sich somit die Existenz der gesuchten Formel aus den Bedingungen (i) bis (iv). ■

Diesen Satz findet man bei H. J. Schmid [79]<sub>2</sub>. Die bei H. M. Möller erhobene Forderung nach der Existenz von  $N = \dim \mathbf{P}_{k-1} + \eta_k$  paarweise verschiedenen reellen Nullstellen der Polynome  $R_1, R_2, \dots, R_s$  wird hier durch die einfach zu überprüfende Bedingung (iv) ersetzt. Zusätzlich erhalten

wir dadurch noch die Positivität der Koeffizienten. Ihre Berechnung kann über (3.19) erfolgen.

Weitere Möglichkeiten, um mit Hilfe der dargestellten Theorie Kubaturformeln zu konstruieren, werden am Beispiel von Produktintegralen aufgezeigt.

### 4.3. Konstruktion von Formeln für Produktintegrale

Die bisher behandelten Konstruktionsmethoden werden in diesem Paragraphen für eine Klasse von Integralen näher studiert. Wir beschränken uns auf spezielle Produktintegrale, weil hier der Rechenaufwand relativ gering ist und die Charakterisierungen aus 4.1 und 4.2 eine knappe und übersichtliche Form annehmen. Die betrachtete Klasse von Produktintegralen liefert uns jedoch trotz ihrer speziellen Form recht unterschiedliche Beispiele, aus denen wir einige interessante Rückschlüsse auf die allgemeine Theorie ziehen können. Diese Beispiele werden in Kapitel 6 zusammengestellt.

Wir betrachten im folgenden Produktintegrale über dem Quadrat  $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in [-1, 1]\}$ . Das erzeugende eindimensionale Integral habe die Gestalt

$$(4.26) \quad I_u: P^1([-1, 1]) \rightarrow \mathbb{R}: p \rightarrow I_u(p) = \int_{-1}^1 p(x)\omega(x)dx,$$

wobei  $\omega(u)$  eine gerade Gewichtsfunktion auf  $[-1, 1]$  sei, so dass  $I_u$  strikt positiv mit  $I_u(1) = 1$  ist. Sei  $\{p_0, p_1, \dots\}$  die bezüglich  $I_u$  orthogonale Basis von  $P^1$  in monomisierter Form. Die Momente bezeichnen wir mit

$$G_i = I_u(p_i p_i), \quad i = 0, 1, \dots$$

Die wohlbekanntete Rekursionsformel für die orthogonalen Polynome nimmt die einfache Form

$$(4.27) \quad p_i(u) = up_{i-1}(u) - G_{i-1}p_{i-2}(u)/G_{i-2}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

an. Somit besitzen die Polynome  $p_{2i}$  nur gerade, die Polynome  $p_{2i-1}$  nur ungerade Terme. Aus (4.27) ergibt sich insbesondere

$$(4.28) \quad I_u(up_i p_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots,$$

und

$$(4.29) \quad I_u(u^2 p_i p_i) = G_{i+1} + G_i G_i / G_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Wir werden häufig mit den Quotienten zweier aufeinanderfolgender Momente arbeiten, deshalb definieren wir

$$(4.30) \quad A_0 = 0, \quad A_i = G_i / G_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Die Klasse der hier untersuchten zweidimensionalen Produktintegrale besteht aus den strikt positiven linearen Funktionalen

$$I: P(C_2) \rightarrow R: P \rightarrow I(P) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P(x, y) \omega(x) \omega(y) dx dy,$$

wobei  $\omega$  wie oben definiert ist. Die bezüglich  $I$  orthogonalen Polynome in monomisierter Form haben die Produkt-Gestalt

$$P_j^i(x, y) = p_{i-j}(x) p_j(y), \quad j = 0, 1, \dots, i, \quad i = 0, 1, \dots$$

Die Produktstruktur bewirkt, dass  $I(P_j^i P_v^i) = \delta_{jv}$  gilt. Somit fallen die Polynome  $P_j^i$  und  $T_j^i$  zusammen. Weiter folgt

$$A_{jv}^i = \begin{cases} 0, & \text{falls } v \neq j, \\ M_j^i = G_{i-j} G_j, & \text{falls } v = j. \end{cases}$$

Die Beziehungen (4.28) und (4.29) übertragen sich wie folgt,

$$(4.31) \quad I(y P_j^i P_j^i) = I(x P_j^i P_j^i) = 0$$

und

$$(4.32) \quad \begin{aligned} I(xy P_j^i P_j^i) &= 0, \\ I(x^2 P_j^i P_j^i) &= G_j (G_{i-j+1} + G_{i-j} G_{i-j} / G_{i-j-1}) = M_j^i (A_{i-j+1} + A_{i-j}), \\ I(y^2 P_j^i P_j^i) &= M_j^i (A_{j+1} + A_j). \end{aligned}$$

**4.3.1. Minimale Formeln vom Grad  $2k-2$ .** Formeln vom Grad  $m = 2k-2$ , die  $k(k+1)/2$  Knoten besitzen, wurden in Korollar 4.1.4 über die Lösbarkeit des Systems (4.16) charakterisiert. Dieses System hat wegen (4.31) und wegen des Zusammenfallens von  $P_j^i$  und  $T_j^i$  die folgende Gestalt

$$I(y P_i^k P_x^{k-1}) - I(x P_{i+1}^k P_x^{k-1}) = \sum_{v=0}^{k-1} (\gamma_{i+v} \gamma_{\chi+v+1} - \gamma_{\chi+v} \gamma_{i+v+1}) / M_v^{k-1},$$

$$i = 0, 1, \dots, k-1, \quad \chi = 0, 1, \dots, k-1.$$

Wir setzen

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_{k-1} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_k & \gamma_{k+1} & \dots & \gamma_{2k-1} \end{bmatrix}$$

und bezeichnen mit  $\Gamma_u$  bzw.  $\Gamma_0$  die aus  $\Gamma$  gewonnene Matrix, wenn wir die



Damit sind die Knoten der Kubaturformel die gemeinsamen Nullstellen der Polynome

$$R_i^k = P_i^k + \sum_{v=0}^{k-1} \frac{\gamma_{i+v}}{M_v^{k-1}} P_v^{k-1}, \quad i = 0, 1, \dots, k.$$

Die Polynome  $H_i = P_i^{k-1} R_i^k$ ,  $i = 0, 1, \dots, k-1$ , können auch in der Form  $H_i = x P_i^{k-1} P_i^{k-1} + Q_i$ ,  $Q_i \in P_{2k-2}$  geschrieben werden. Wenn wir das Funktional, das durch die Kubaturformel definiert wird, mit  $K$  bezeichnen, so folgt  $I(H_i) - K(H_i) = \gamma_{2i}$ , da  $H_i$  in den Knoten verschwindet und  $I(P_i^{k-1} R_i^k) = \gamma_{2i}$  gilt. Benutzen wir die zweite Darstellung, so folgt  $I(H_i) - K(H_i) = -K(x P_i^{k-1} P_i^{k-1})$ , weil  $I(Q_i)$  und  $K(Q_i)$  übereinstimmen müssen und  $I(x P_i^{k-1} P_i^{k-1}) = 0$  gilt. Damit folgt

$$\gamma_{2i} = - \sum_{j=1}^N C_j x_j (P_i^{k-1}(x_j, y_j))^2$$

und somit

$$|\gamma_{2i}| \leq M_i^{k-1}, \quad i = 0, 1, \dots, k-1.$$

Ein analoges Argument gilt für die Polynome  $H_i^+ = P_{i-1}^{k-1} R_i^k$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Jetzt können wir die  $H_i^+$  auch in der Form  $y P_{i-1}^{k-1} P_{i-1}^{k-1} + Q_i^+$  mit  $Q_i^+ \in P_{2k-2}$  darstellen und erhalten wie oben die Abschätzung

$$|\gamma_{2i-1}| \leq M_{i-1}^{k-1}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad \blacksquare$$

**4.3.3. Minimale Formeln vom Grad  $2k-1$ .** Wir diskutieren hier die konstruktive Seite von Satz 4.2.1 für Produktintegrale. Für die damit untersuchten Funktionale berechnet sich das  $\eta_k$  aus der Abschätzung (4.21) aus dem Rang der Matrix

$$(I(P_i^k P_{x+1}^k) - I(P_{i+1}^k P_x^k))_{i,x=0,1,\dots,k-1}.$$

Diese Matrix haben wir in (4.33) definiert. Man erkennt unschwer, dass  $\text{rg } M_k = 2\eta_k = k$  gilt. Damit nimmt (4.21) die Form

$$N \geq k(k+1)/2 + [k/2]$$

an. Wir wollen mit Hilfe von Satz 4.2.1 Formeln konstruieren, deren Knotenanzahl dieser unteren Schranke entspricht.

Um Bedingung (ii) von 4.2.1 zu überprüfen, setzen wir

$$\bar{Q}_0 = y \sum_{i=0}^k a_i P_i^k - x \sum_{i=0}^k b_i P_i^k, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}.$$

Das Polynom  $\bar{Q}_0$  liegt nur dann in  $P_k$ , wenn  $a_k = b_0 = 0$  und  $a_i = b_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k-1$ , gilt;  $\bar{Q}_0$  liegt nur dann in  $\dot{P}_k$ , wenn

$$\sum_{i=1}^{k-1} a_i I(y P_i^k P_x^{k-1} - x P_{i+1}^k P_x^{k-1}) = 0, \quad \chi = 0, 1, \dots, k-1,$$

gilt. Das führt auf die Bedingung

$$\sum_{i=1}^{k-1} a_i I(P_i^* P_{\chi+1}^* - P_{i+1}^* P_{\chi}^*) = 0.$$

Daraus ergibt sich  $a_{\chi+1} M_{\chi+1}^k = a_{\chi-1} M_{\chi}^k$ ,  $\chi = 0, 1, \dots, k-1$ , mit  $a_{-1} = a_k = 0$ . Es folgt damit

$$0 = a_1 = a_3 = \dots = a_t, \quad t = 2[(k-1)/2] + 1.$$

Für gerades  $k$  folgt damit auch  $a_0 = a_2 = \dots = a_k = 0$ , d.h., in diesem Fall gibt es nur eine triviale Beziehung für die Bedingung (ii). Wenn  $k$  ungerade ist, dann folgt

$$a_2 = \frac{M_1^k}{M_2^k} a_0, \quad a_4 = \frac{M_1^k M_3^k}{M_2^k M_4^k} a_0, \quad \dots, \quad a_{k-1} = \frac{M_1^k M_2^k \dots M_{k-2}^k}{M_2^k M_4^k \dots M_{k-1}^k} a_0 = a_0.$$

Wir können  $a_0 = 1$  setzen und erhalten somit für ungerades  $k$  zwei Polynome, die zum gesuchten Ideal gehören müssen, wenn eine Formel des hier betrachteten Typs existiert,

$$(4.36) \quad \begin{cases} R_1 = P_0^k + \frac{M_1^k}{M_2^k} P_2^k + \dots + \frac{M_1^k}{M_2^k} P_{k-3}^k + P_{k-1}^k, \\ R_2 = P_1^k + \frac{M_1^k}{M_2^k} P_3^k + \dots + \frac{M_1^k}{M_2^k} P_{k-2}^k + P_k^k, \end{cases} \quad k \text{ ungerade.}$$

Damit gibt es eine Beziehung von der in Bedingung (ii) angegebenen Gestalt, nämlich  $yR_1 - xR_2 = 0$ .

Wir gehen ähnlich vor, um die Bedingung (iii) zu untersuchen. Hierzu setzen wir

$$Q_0 = x^2 \sum_{i=0}^k a_i P_i^* - xy \sum_{i=0}^k b_i P_i^* + y^2 \sum_{i=0}^k c_i P_i^*.$$

Damit  $Q_0$  in  $P_k$  liegt, müssen  $a_0 = c_k = 0$  und  $b_i = a_{i+1} + c_{i-1}$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ ,  $a_{k+1} = c_{-1} = 0$  erfüllt sein. Da ein Polynom aus  $\dot{P}_k$  keine Terme vom Grad  $k-1$  enthält, können wir auf die in Bedingung (iii) angegebenen Terme

$$x \sum_{i=0}^k d_i P_i^*, \quad y \sum_{i=0}^k e_i P_i^*, \quad d_i, e_i \in \mathbb{R},$$

verzichten.  $Q_0$  liegt somit in  $\dot{P}_k$ , wenn

$$Q_0 = \sum_{i=1}^k a_i x^2 P_i^* - \sum_{i=0}^{k-1} a_{i+1} xy P_i^* - \sum_{i=1}^k c_{i-1} xy P_i^* + \sum_{i=0}^{k-1} c_i y^2 P_i^*$$

zu  $P_{k-1}$  orthogonal ist. Diese Bedingung führt auf

$$\sum_{i=1}^k a_i I((x^2 P_i^k - xy P_{i-1}^k) P_x^{k-2}) + \sum_{i=0}^{k-1} c_i I((y^2 P_i^k - xy P_{i+1}^k) P_x^{k-2}) = 0, \\ \chi = 0, 1, \dots, k-2.$$

Damit gilt

$$a_x M_x^k - a_{x+2} M_{x+1}^k + c_{x+2} M_{x+2}^k - c_x M_{x+1}^k = 0, \quad \chi = 0, 1, \dots, k-2.$$

wobei wir  $a_0 = c_k = 0$  setzen müssen. Wenn wir diese Beziehung durch  $M_{x+1}^k$  dividieren und die Definition aus (4.30) berücksichtigen, so erhalten wir

$$(4.37) \quad \frac{\Lambda_{k-x}}{\Lambda_{x+1}} a_x - a_{x+2} + \frac{\Lambda_{x+2}}{\Lambda_{k-x-1}} c_{x+2} - c_x = 0, \quad \chi = 0, 1, \dots, k-2.$$

Wenn  $a_1, c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$  fest vorgegeben sind, so lassen sich aus diesen Gleichungen die restlichen Koeffizienten  $a_i$  bestimmen. Die Parameter  $b_i$  ergeben sich dann als

$$(4.38) \quad b_i = a_{i+1} + c_{i-1}, \quad i = 0, 1, \dots, k,$$

wobei wir  $a_{k+1} = c_{-1} = a_0 = c_k = 0$  setzen müssen.

Durch diese Wahl der Koeffizienten ist gewährleistet, dass  $Q_0$  in  $\dot{P}_k$  liegt. Die explizite Form von  $Q_0$  berechnet man durch den Ansatz

$$Q_0 = \sum_{i=0}^k d_i P_i^k = \sum_{i=1}^k a_i (x^2 P_i^k - xy P_{i-1}^k) + \sum_{i=0}^{k-1} c_i (y^2 P_i^k - xy P_{i+1}^k).$$

Man erhält durch Multiplikation dieser Gleichung mit  $P_x^k$ ,  $\chi = 0, 1, \dots, k$ , und anschließender Anwendung von  $I$

$$d_x M_x^k = \sum_{i=1}^k a_i I(x^2 P_i^k P_x^k - xy P_{i-1}^k P_x^k) + \sum_{i=0}^{k-1} c_i I(y^2 P_i^k P_x^k - xy P_{i+1}^k P_x^k).$$

Mit Hilfe von (4.32) können wir die  $d_i$  berechnen,

$$d_0 = -\frac{M_1^k}{M_0^{k-1}} a_2, \quad d_k = -\frac{M_1^k}{M_0^{k-1}} c_{k-2},$$

$$d_x = \frac{M_x^k}{M_x^{k-1}} a_x + \frac{M_x^k}{M_{x-1}^{k-1}} c_x - \frac{M_{x+1}^k}{M_x^{k-1}} a_{x+2} - \frac{M_{x-1}^k}{M_{x-1}^{k-1}} c_{x-2}, \quad 1 \leq x \leq k-1.$$

Bei Verwendung der  $\Lambda_i$  aus (4.30) ergibt sich

$$(4.39) \quad \begin{cases} d_0 = -\Lambda_1 a_2, & d_1 = \Lambda_{k-1} a_1 + \Lambda_1 c_1 - \Lambda_2 a_3, \\ d_x = \Lambda_{k-x} a_x + \Lambda_x c_x - \Lambda_{x+1} a_{x+2} - \Lambda_{k-x+1} c_{x-2}, & \chi = 1, 2, \dots, k-2, \\ d_{k-1} = \Lambda_1 a_{k-1} + \Lambda_{k-1} c_{k-1} - \Lambda_2 c_{k-3}, & d_k = -\Lambda_1 c_{k-2}. \end{cases}$$

Wir können (4.37) ausnutzen, um zumindest  $d_0, d_1, \dots, d_{k-2}$  allein in Abhängigkeit von den  $c_i$  auszudrücken. Es ergibt sich

$$(4.40) \quad \left\{ \begin{array}{l} d_\chi = -\Lambda_{k-\chi+1}c_{\chi-2} + (\Lambda_\chi + \Lambda_{\chi+1})c_\chi - \frac{\Lambda_{\chi+1}\Lambda_{\chi+2}}{\Lambda_{k-\chi-1}}c_{\chi+2}, \\ \chi = 0, 1, \dots, k-2, \quad c_{-2} = c_{-1} = 0, \\ d_{k-1} = \Lambda_1a_{k-1} + \Lambda_{k-1}c_{k-1} - \Lambda_2c_{k-3}, \quad d_k = -\Lambda_1c_{k-2}. \end{array} \right.$$

Alle Beziehungen aus Bedingung (iii) haben die Form

$$(4.41) \quad \sum_{i=0}^k d_i P_i^k = x^2 \sum_{i=1}^k a_i P_i^k - xy \sum_{i=0}^k b_i P_i^k + y^2 \sum_{i=0}^{k-1} c_i P_i^k.$$

Sei  $q = (a_1, c_0, c_1, \dots, c_{k-1})^T \neq 0$  gegeben. Mit Hilfe von (4.37), (4.38) und (4.39) bzw. (4.40) lässt sich die  $4 \times (k+1)$  Matrix

$$A(q) = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k \\ c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{k-1} & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{k-1} & b_k \\ d_0 & d_1 & d_2 & \dots & d_{k-1} & d_k \end{bmatrix}$$

in Abhängigkeit von  $q$  angeben. Durch  $A(q)$  werden die Koeffizienten einer Beziehung vom Typ (4.41) beschrieben. Der Rang von  $A(q)$  gibt an, wieviele linear unabhängige Polynome aus  $\dot{P}_k$  dabei verwendet werden.

Wenn wir annehmen, dass die linear unabhängigen Polynome  $R_1, R_2, \dots, R_s$ ,  $s = k+1 - [k/2]$ , aus  $\dot{P}_k$  das gesuchte Ideal erzeugen mit

$$R_i = \sum_{j=0}^k g_{ij} P_j^k, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

so muss es  $2k-3[k/2]$  linear unabhängige Vektoren  $q$  geben, so dass die Zeilen der zugehörigen Matrizen  $A(q)$  durch die Zeilen der  $s \times (k+1)$  Matrix  $G = (g_{ij})$  ausgedrückt werden können. Wenn wir den von  $R_i, x^2 R_i, xy R_i, y^2 R_i, i = 1, 2, \dots, s$ , erzeugten linearen Raum betrachten, so hat dieser die Dimension  $s+k+3$  (wegen der Fundamentalität der  $R_i$ , Bedingung (i)). Damit gibt es genau  $4s-s+k+3 = 2k-3[k/2]$  Beziehungen vom Typ (4.41), bei denen die Zeilen der zugehörigen Matrizen  $A(q)$  Linearkombinationen der Zeilen von  $G$  sind. Um Bedingung (iii) zu erfüllen, genügt es somit  $t = 2k-3[k/2]$  linear unabhängige Vektoren  $q^{(i)}$  zu bestimmen, so dass

$$(4.42) \quad \text{rg} \begin{bmatrix} A(q^{(1)}) \\ A(q^{(2)}) \\ \vdots \\ A(q^{(t)}) \end{bmatrix} = k+1 - [k/2] = s$$

gilt. Die linear unabhängigen Zeilen aus der Matrix in (4.42) können wir als

Zeilen der Matrix  $G$  auffassen. Die Überprüfung der Bedingungen (i) und (iv) reduziert sich damit auf einfaches Nachrechnen.

Für die praktische Durchführung erweist es sich als vorteilhaft, zuerst eine maximale Anzahl von  $k+1$  linear unabhängigen Vektoren  $q_i$  mit zugehörigen Matrizen  $A(q_i)$  zu bestimmen. Man wird z.B. die Einheitsvektoren  $e_i \in \mathbb{R}^{k+1}$  wählen. Ausserdem lässt sich bei der Berechnung die Symmetrie der Beziehungen (4.37), (4.38) und (4.39) voll ausnutzen. Der Rechenaufwand wird damit gesenkt. Wenn  $A((a_1, c_0, c_1, \dots, c_{k-1})^T)$  eine Beziehung vom Typ (4.41) beschreibt, dann auch die Matrix  $A((c_{k-1}, a_k, a_{k-1}, \dots, a_1)^T)$ . Wir bezeichnen den zu  $q_i$  gehörigen symmetrischen Vektor mit  $\bar{q}_i$ . Die gesuchten Vektoren  $q^{(i)}$  setzen sich nun in der Form

$$q^{(i)} = \sum_{j=1}^{k+1} \eta_{ij} q_j$$

mit reellen Parametern  $\eta_{ij}$  zusammen. Damit gilt

$$A(q^{(i)}) = \sum_{j=1}^{k+1} \eta_{ij} A(q_j), \quad i = 1, 2, \dots, t.$$

Wenn die  $\eta_{ij}$  so bestimmt werden können, dass (4.42) erfüllt ist, dann ist die Bedingung (iii) erfüllt. Falls  $k$  ungerade ist, so ist zu berücksichtigen, dass mit  $xyR_1 - x^2R_2 = 0$  und  $y^2R_1 - xyR_2 = 0$  bereits zwei Beziehungen vom Typ (4.41) vorgegeben sind.

Wir werden die Matrix in (4.42), aus der alle linear unabhängigen Zeilen gestrichen sind und in der keine Spaltenvertauschungen vorgenommen wurden, mit  $B = (b_{ij})$  bezeichnen. Offensichtlich ist  $B$  eine  $s \times (k+1)$  Matrix, die uns die Koeffizienten der gesuchten Polynome  $R_1, R_2, \dots, R_s$  angibt. Die Matrix  $B$  ist bis auf zeilenweise Umformungen mit der oben definierten Matrix  $G$  identisch. Die Matrixelemente  $b_{ij}$  können dabei noch von den Koeffizienten  $\eta_{ij}$  abhängen.

Zu den Polynomen

$$R_i = \sum_{j=0}^k b_{ij} P_j^k, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

können wir Polynome  $P_\chi^k$ ,  $\chi \in M \subset \{0, 1, \dots, k\}$  finden, so dass die  $R_i$  zusammen mit den  $P_\chi^k$ ,  $\chi \in M$ , den Raum  $\dot{P}_k$  erzeugen. Wenn  $xR_i$  und  $yR_i$  ein fundamentales System von Grad  $k+1$  bilden, so kann man dieses System auf die folgende Form bringen,

$$H_i = P_i^{k+1} + \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_{ij} P_j^{k-1}, \quad i = 0, 1, \dots, k+1.$$

Dass die  $H_i$  keine Terme vom Grad  $k$  besitzen, folgt aus der besonderen Struktur der  $R_i$ . Da Bedingung (iii) bereits garantiert ist, folgt, dass

$yH_i - xH_{i+1}$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ , zu  $P_{k-1}$  orthogonal sein müssen. Damit müssen die  $\gamma_{ij}$  – ähnlich wie in 4.1 – die folgende spezielle Form haben,

$$\gamma_{ij} = \gamma_{i+j}/M_j^{k-1}.$$

Wir haben damit die  $H_i$  in der Gestalt

$$H_i = P_i^{k+1} + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\gamma_{i+j}}{M_j^{k-1}} P_j^{k-1}.$$

Wenn die Matrix  $B$  vorliegt, so ist die Bedingung (i) dann und nur dann erfüllt, wenn die  $\gamma_i$  so gewählt werden können, dass

$$\sum_{j=0}^k b_{ij}(xP_j^k - H_j) = 0, \quad \sum_{j=0}^k b_{ij}(yR_j^k - H_{j+1}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

gilt. Mit der üblichen Technik führen wir diese Bedingung auf die Lösbarkeit des linearen Systems

$$(4.43) \quad b_{i\chi} M_\chi^k = \sum_{j=0}^k b_{ij} \gamma_{j+\chi}, \quad \chi = 0, 1, \dots, k, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

zurück. Wenn es zu gegebenen  $b_{ij}$  eine Lösung von (4.43) gibt, so ist die Bedingung (i) erfüllt.

Sei  $M = \{s_1, s_2, \dots, s_\eta\}$  gegeben. Dann lässt sich die Matrix  $K$  aus der Bedingung (iv) durch die Parameter  $\gamma_i$  ausdrücken. Wir erhalten

$$(4.44) \quad \begin{cases} K = (\kappa_{s_i, s_j})_{i, j=1, 2, \dots, \eta} \text{ ist positiv definit,} \\ \text{wobei } \kappa_{s_i, s_i} = M_{s_i}^k - \gamma_{2s_i}, \quad \kappa_{s_i, s_j} = -\gamma_{s_i+s_j} \text{ gilt.} \end{cases}$$

Die Äquivalenz von (4.44) und der Bedingung (iv) erhält man dadurch, dass man auf die Polynome vom Typ  $P_i^k P_j^k - P_i^{k-1} H_j$  das Funktional  $I$  anwendet. Wir fassen dieses Vorgehen zusammen.

#### 4.3.4. Konstruktionsmethode.

Schritt 1. Mit  $k+1$  linear unabhängigen Vektoren  $q_i$  werden die Matrizen  $A(q_i)$  mit Hilfe der Gleichungen (4.37), (4.38) und (4.39) bestimmt. Es bieten sich  $q_i = e_i$  und deren zugehörige symmetrische Vektoren  $\bar{q}_i$  an.

Schritt 2. Es werden linear unabhängige Vektoren

$$q^{(j)} = (\eta_{0j}, \eta_{1j}, \dots, \eta_{kj})^T, \quad j = 1, 2, \dots, t, \quad t = 2k - 3 \lfloor k/2 \rfloor,$$

bestimmt, so dass (4.42) erfüllt ist. Damit lässt sich dann die Matrix  $B$  und die Indexmenge  $M$  bestimmen.

Schritt 3. Aus (4.43) werden die Parameter  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2k}$  (unter Umständen noch in Abhängigkeit von Elementen der Matrix  $B$ ) berechnet.

Schritt 4. Die  $\gamma_i$  müssen der Bedingung (4.44) genügen. Dadurch werden unter Umständen noch freie Parameter weiter eingeschränkt.

Kann einer der Schritte 2, 3 oder 4 nicht erfüllt werden, so existiert keine Kubaturformel des gesuchten Typs. Lassen sich alle Schritte durchführen, so beschreibt die Matrix  $B$  die Koeffizienten der Polynome  $R_i$ , deren gemeinsame Nullstellen die Knoten der Kubaturformel sind.

**4.3.5. Minimale und nicht-minimale Formeln des Grades  $2k-1$ .** Wir geben jetzt eine Konstruktionsmethode an, die sich an Satz 4.1.5 orientiert. Es sollen interpolatorische Formeln vom Grad  $m = 2k-1$  bestimmt werden, deren zugehöriges Ideal ein spezielles fundamentales System vom Grad  $k+1$  enthält. Durch diesen Ansatz können wir insbesondere alle in 4.3.2 konstruierten Formeln auf eine andere Weise berechnen. Es lassen sich aber auch nicht minimale Formeln bestimmen.

Wir nehmen an, dass die Polynome

$$R_i^{k+1} = P_i^{k+1} + \sum_{v=0}^{k-1} \gamma_{iv} P_v^{k-1}, \quad i = 0, 1, \dots, k+1,$$

in einem Ideal  $\mathcal{U}$  liegen, das zu einer Kubaturformel vom Grad  $m = 2k-1$  gehört. Wie wir aus 4.3.3 wissen, erfassen wir damit zumindest alle die Formeln mit  $N = k(k+1)/2 + [k/2]$  Knoten. Mit den  $R_i^{k+1}$  müssen auch die Polynome

$$Q_i = yR_i^{k+1} - xR_{i+1}^{k+1}, \quad i = 0, 1, \dots, k,$$

in  $\mathcal{U}$  liegen. Da kein  $Q_i \neq 0$  in  $P_{k-1}$  liegen darf, wegen der generellen Abschätzung (4.3), müssen die  $Q_i$  zu  $P_{k-1}$  orthogonal sein. Wie wir in 4.3.3 gesehen haben, folgt daraus die Beziehung

$$\gamma_{iv} = \gamma_{i+v} / M_v^{k-1}, \quad i = 0, 1, \dots, k+1, \quad v = 0, 1, \dots, k-1.$$

Da die  $Q_i$  in  $P_k$  liegen, gibt es reelle Zahlen  $b_{ij}$ , so dass

$$Q_i = \sum_{j=0}^k b_{ij} P_j^k = yR_i^{k+1} - xR_{i+1}^{k+1}, \quad i = 0, 1, \dots, k,$$

gilt. Durch Multiplikation mit  $P_x^k$  und anschließender Anwendung von  $I$  erhalten wir

$$b_{ix} = \frac{I(P_i^{k+1} P_{x+1}^{k+1} - P_{i+1}^{k+1} P_x^{k+1})}{M_x^k} + \frac{\gamma_{i+x-1}}{M_{x-1}^{k-1}} - \frac{\gamma_{i+x+1}}{M_x^{k-1}}, \quad i, x = 0, 1, \dots, k,$$

wobei  $1/M_{-1}^{k-1} = 1/M_k^{k-1} = 0$  zu setzen ist. Diese Beziehungen fassen wir in der Matrixgleichung

$$(4.45) \quad B = A + \Delta N_{k-1} - \Delta N_{k-1}^T$$



so dass in der Gleichung (4.47) Redundanz vorliegt. Nach Streichen dieser Redundanzen erhalten wir folgendes Gleichungssystem für die  $\gamma_i$ ,

$$(4.48) \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{i+\chi-1}(A_\chi - A_i) - \gamma_{i+\chi+1}(A_{k-\chi} - A_{k-1}) \\ \qquad \qquad \qquad = \sum_{v=0}^{k-1} \frac{\gamma_{\chi+v+1}\gamma_{i+v} - \gamma_{\chi+v}\gamma_{i+v+1}}{M_v^{k-1}}, \\ \qquad \qquad \qquad i = 2, 3, \dots, k, \quad \chi = 0, 1, \dots, i-2, \\ \\ M_i^{k+1} + \gamma_{2i-2}(A_{i-1} - A_i) - \gamma_{2i}(A_{k-i+1} - A_{k-i}) \\ \qquad \qquad \qquad = \sum_{v=0}^{k-1} \frac{\gamma_{i+v}^2 - \gamma_{i+v+1}\gamma_{i+v-1}}{M_v^{k-1}}, \\ \qquad \qquad \qquad i = 1, 2, \dots, k. \end{array} \right.$$

Wenn wir annehmen, dass  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2k}$  eine Lösung von (4.48) ist, so stellt sich die Frage nach den Idealelementen, die in  $\dot{P}_k$  liegen. Nach Satz 4.1.5 muss die Menge

$$\mathcal{I} = \{Q \in \dot{P}_k : I(Q^2 - R^+) = 0, \text{ wobei } R^+ \text{ aus dem von den } R_i^{k+1} \text{ erzeugten Ideal so gewählt wird, dass } Q^2 - R^+ \text{ in } P_{2k-1} \text{ liegt}\}$$

betrachtet werden. Alle Elemente aus  $\mathcal{I}$  müssen zum gesuchten Ideal gehören. Sei

$$Q = \sum_{i=0}^k b_i P_i^k, \quad b_i \in \mathbb{R},$$

gegeben. Dann liegt  $Q$  genau dann in  $\mathcal{I}$ , wenn das Polynom

$$\bar{Q} = \sum_{i=0}^k b_i^2 ((P_i^k)^2 - P_i^{k-1} R_i^{k+1}) + 2 \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k b_i b_j (P_i^k P_j^k - P_i^{k-1} R_j^{k+1})$$

die Bedingung  $I(\bar{Q}) = 0$  erfüllt, d.h., wenn

$$(4.49) \quad \sum_{i=0}^k b_i^2 (M_i^k - \gamma_{2i}) = 2 \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k b_i b_j \gamma_{i+j}$$

gilt. Insbesondere liegen die Polynome  $Q_i$  in  $\mathcal{I}$ .

Wir können auf die folgende Art linear unabhängige Lösungen von (4.49) berechnen. Wir bestimmen eine Lösung der Form  $(1, b_1, b_2, \dots, b_k)$  von (4.49), falls das möglich ist. Anschliessend wird eine Lösung der Form  $(0, 1, b_2, \dots, b_k)$  von (4.49) bestimmt und so fort. Dadurch haben wir zumindest einen maximalen Teilraum  $\mathcal{I}^+$  von  $\mathcal{I}$  gefunden. Wenn  $\mathcal{I}^+$  eine echte Teilmenge von  $\mathcal{I}$  ist, so kann das von  $\mathcal{I}^+$  und den  $R_i^{k+1}$  erzeugte Ideal nicht zu einer Kubaturformel gehören. In diesem Fall kann aber auch nicht ein Komplement  $\mathcal{I}^-$  von  $\mathcal{I}^+$  in  $\dot{P}_k$  die Bedingung (ii) des Charakterisierungs-

satzes erfüllen. Es reicht also aus, für ein Komplement  $\mathcal{U}$  von  $\mathcal{S}^+$  in  $\dot{P}_k$  die Bedingung (ii) des Charakterisierungssatzes zu untersuchen. Ist sie erfüllt, so gilt  $\mathcal{S}^+ = \mathcal{S}$  und die  $R_i^{k+1}$  erzeugen zusammen mit  $\mathcal{S}^+$  ein zu einer Kubaturformel gehöriges Ideal. Andernfalls ist das erzeugte Ideal nicht zu einer Kubaturformel gehörig.

Wir können als Basis des Komplementes  $\mathcal{U}$  Polynome  $P_j^k$  wählen, wobei  $j \in M \subset \{0, 1, \dots, k\}$ . Es genügt dann, die Bedingung (4.44) für diese Teilmenge  $M$  und die Parameter  $\gamma_i$ , die (4.48) genügen, nachzuprüfen.

Die Knotenanzahl ist dabei  $N = k(k+1)/2 + (k+1 - \dim \mathcal{S}^+)$ . Sollen Formeln bestimmt werden, deren Knotenanzahl die untere Schranke in (4.21) annehmen, so ist zusätzlich  $\dim \mathcal{S}^+ = k+1 - [k/2]$  zu fordern.

Diese Konstruktionsmethode wurde bei H. J. Schmid [79]<sub>2</sub> beschrieben.

### 4.3.6. Konstruktionsmethode.

Schritt 1. Eine Lösung  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2k}$  von (4.48) wird bestimmt.

Schritt 2. Eine maximale Zahl linear unabhängiger Polynome

$$\bar{Q}_i = \sum_{j=0}^k b_{ij} P_j^k, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

wird bestimmt, so dass  $(b_{i0}, b_{i1}, \dots, b_{ik})$  eine Lösung von (4.49) ist. Damit liegt die Indexmenge  $M$  fest. Falls  $s > k+1 - [k/2]$  gilt, so führt dieser Ansatz auf keine Formel.

Schritt 3. Für die Indexmenge  $M$  wird (4.44) überprüft. Ist diese Bedingung erfüllt, so erzeugen die Polynome  $R_i^{k+1}$  und die Polynome aus  $\mathcal{S}^+$  ein Ideal, das zu einer Kubaturformel vom Grad  $m = 2k-1$  mit  $N = k(k+1)/2 + (k+1-s)$  Knoten gehört. Andernfalls führt dieser Ansatz auf keine Kubaturformel.

Beispiele zu den Konstruktionsmethoden 4.3.1, 4.3.3 und 4.3.6 werden in Kapitel 6 zusammengestellt.

## 5. Mehrdimensionale Kubaturformeln

In diesem Kapitel kehren wir zur Situation aus Kapitel 3 zurück und geben eine allgemeine Version der Sätze, die entscheidend für Kapitel 4 waren. Dabei werden wir uns hier wiederum ausschliesslich mit der Darstellung strikt positiver linearer Funktionale befassen.

In 5.1 werden die Sätze 4.1.1 und 4.1.2 mit den Korollaren 4.1.3 und 4.1.4 allgemein gefasst. Dadurch ist das prinzipielle Vorgehen festgelegt, alle auftauchenden Schwierigkeiten sind rein technischer Natur. Für Produktintegrale leiten wir eine explizite Form von Korollar 4.1.4 in beliebigen Dimensionen her. In 5.2 geben wir eine allgemeine Version von Satz 4.2.1 an.

Dieser Einblick in die mehrdimensionale Theorie macht zweierlei deutlich. Einerseits ist der Unterschied zwischen dem Zweidimensionalen und der allgemeinen Theorie nicht prinzipieller Art. Zum anderen wachsen jedoch die technischen und rechnerischen Probleme, die wir in Kapitel 4 kennengelernt haben, in höheren Dimensionen enorm an. Was die praktische Seite betrifft, so ist eine Anwendung der Resultate ausgesprochen zeitraubend. Es scheint hier sinnvoll, erst einmal die zweidimensionale Technik auf eine zufriedenstellende Form zu bringen.

### 5.1. Konstruktion reeller Ideale

Der konstruktive Aspekt des Charakterisierungssatzes wird in diesem Paragraphen kurz umrissen. Wir setzen dabei ein strikt positives lineares Funktional  $I$  voraus und stellen eine allgemeine Technik vor, mit der ein reelles Ideal konstruiert werden kann, das zu einer Kubaturformel gehört.

Da  $I$  als strikt positiv vorausgesetzt wird, können wir eine Basis von  $P_m$  in orthogonalisierter und monomisierter Form annehmen. Wir bezeichnen die Basiselemente in der Form

$$P_\alpha^i, \quad |\alpha| = i, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

wobei

$$P_\alpha^i = x^\alpha + Q_{\alpha,i}, \quad Q_{\alpha,i} \in P_{i-1},$$

gilt. Das Polynom  $Q_{\alpha,i}$  ist dabei dadurch eindeutig festgelegt, dass  $I(P_\alpha^i Q) = 0$  für alle  $Q \in P_{i-1}$  gilt.

Neben diesem Vorteil einer orthogonalisierten Basis steht im Falle strikt positiver Funktionale auch die Abschätzung (3.13) zur Verfügung. Eine Formel vom Grad  $m$  benötigt  $N$  Knoten, wobei

$$(5.1) \quad N \geq \dim P_{[m/2]}$$

gilt. Aus dieser Abschätzung ergibt sich, dass  $P_{[m/2]} \subseteq \mathcal{U}$  gelten muss. Falls die untere Schranke angenommen wird, so muss  $\mathcal{U} = P_{[m/2]}$  gelten.

Ausgangspunkt des Charakterisierungssatzes war ein fundamentales  $m$ -orthogonales System in  $P_{m+1}$ , das zu dem gesuchten Ideal gehört. Im allgemeinen wird das Ideal aber bereits Polynome aus  $P_k$  enthalten, die fundamental vom Grad  $k$  sind, wobei  $[m/2] + 1 \leq k \leq m+1$  gilt. In diesem Fall wird das Ideal durch dieses fundamentale System und weitere Polynome aus  $P_{k-1}$  bestimmt.

Wir konstruieren deshalb Ideale  $\mathcal{U}$ , die zu einer Kubaturformel gehören und die ein solches System enthalten. Diese Systeme können wir in der Form

$$(5.2) \quad R_\alpha^k = P_\alpha^k + \sum_{\nu=1}^{2k-m-1} \sum_{|\beta|=k-\nu} \gamma_{\alpha,\beta}^{(k-\nu)} P_\beta^{k-\nu}, \quad |\alpha| = k,$$

annehmen, wobei  $\gamma_{\alpha,\beta}^{(k-v)}$  reelle Parameter sind, über die noch verfügt werden kann. Die Fundamentalität vom Grad  $k$  und die  $m$ -Orthogonalität der Polynome aus (5.2) sind offensichtlich.

Jedes  $P_\alpha^k$  enthält genau einen Term vom Grad  $k$ , somit liegen die Polynome

$$(5.3) \quad x^{(j)}R_\alpha^k - x^{(i)}R_{\alpha - e_i + e_j}, \quad |\alpha| = k, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

wieder in dem gesuchten Ideal, wenn sie zu  $P_k$  gehören. Hierbei sei  $e_x$  der  $n$ -dimensionale Einheitsvektor.

Betrachten wir den Fall, in dem kein Element aus dem von  $R_\alpha^k$ ,  $|\alpha| = k$ , erzeugten Ideal  $\mathcal{U}$  in  $P_{k-1}$  liegt. Damit nimmt (5.3) die folgende Form an,

$$(5.4) \quad x^{(j)}R_\alpha^k - x^{(i)}R_{\alpha + e_j - e_i} \in \mathcal{H},$$

wenn diese Differenzen definiert sind. Hierbei ist  $\mathcal{H}$  der von  $R_\alpha^k$ ,  $|\alpha| = k$ , erzeugte lineare Raum. Um (5.4) geschickter formulieren zu können, führen wir die Indexmengen

$$M_j(k) = \{\alpha: |\alpha| = k, \alpha_j \neq 0, \alpha_v = 0 \text{ für } v < j\}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

ein. Diese Mengen sind paarweise disjunkt und ihre Vereinigung enthält alle  $\alpha$  mit  $|\alpha| = k$ . Mit dieser Bezeichnungsweise lässt sich (5.4) auch folgendermassen schreiben,

$$(5.5) \quad x^{(j)}R_\alpha^k - x^{(i)}R_{\alpha + e_j - e_i} \in \mathcal{H}, \quad \alpha \in M_i(k), \\ j = i+1, i+2, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Diese Form von (5.4) vereinfacht den Beweis des folgenden Satzes. Wir zeigen, dass mit (5.5) alle Beziehungen aus (5.4) erfasst werden. Neben (5.5) werden durch (5.4) noch die folgenden Beziehungen ausgedrückt,

$$x^{(\lambda)}R_\beta^k - x^{(\kappa)}R_{\beta + e_\lambda - e_\kappa} \in \mathcal{H}, \quad \beta \in M_\kappa(k), \quad \lambda = 1, 2, \dots, \kappa-1, \quad \kappa = 2, 3, \dots, n.$$

Sei eine Beziehung mit festem  $\kappa$  und  $\lambda = \kappa - s$ ,  $s \geq 1$ , gegeben. Die Gleichung (5.5) ist für  $i = \lambda = \kappa - s$  und  $j = \kappa$  definiert und hat die Form

$$x^{(\kappa)}R_\alpha^k - x^{(\lambda)}R_{\alpha + e_\kappa - e_\lambda} \in \mathcal{H}, \quad \alpha \in M_\lambda(k).$$

Insbesondere liegt  $\alpha^+ = \beta - e_\kappa + e_\lambda$  in  $M_\lambda(k)$ , wenn  $\beta$  aus  $M_\kappa(k)$  stammt. Wir haben damit

$$x^{(\kappa)}R_{\beta - e_\kappa + e_\lambda} - x^{(\lambda)}R_\beta \in \mathcal{H} \quad \text{für} \quad \beta \in M_\kappa(k).$$

Damit ist alles gezeigt.

**5.1.1. SATZ.** *Es seien die Polynome  $R_\alpha^k$  aus (5.2) mit beliebigen, aber festen Parametern  $\gamma_{\alpha,\beta}^{(j)}$  gegeben,  $[m/2] + 1 \leq k \leq m + 1$ . Das von den Polynomen  $R_\alpha^k$  erzeugte Ideal sei  $\mathcal{U}$ , der erzeugte lineare Raum sei  $\mathcal{H}$ . Es ist  $\mathcal{U} \cap P_{k-1} = (0)$  genau dann, wenn (5.5) erfüllt ist.*

**Beweis.** Es verbleibt zu zeigen, dass in  $\mathcal{U} \cap \mathcal{P}_{k-1}$  nur das Nullpolynom liegen kann. Wir nehmen ein  $Q \in \mathcal{U} \cap \mathcal{P}_{k-1}$  an.  $Q$  hat dann die Gestalt

$$(5.6) \quad Q = \sum_{|\alpha|=k} Q_\alpha R_\alpha^k, \quad Q_\alpha \in \mathcal{P}_N, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Falls  $N = 0$ , so ist nur  $Q = 0$  möglich, weil  $Q \in \mathcal{P}_{k-1}$  vorausgesetzt ist und weil die  $R_\alpha^k$  fundamental vom Grad  $k$  sind. Wenn  $N > 0$  ist, so zeigen wir, dass man (5.6) mit Hilfe von (5.5) auch in der Form

$$(5.7) \quad Q = \sum_{|\alpha|=k} Q_\alpha^+ R_\alpha^k, \quad Q_\alpha^+ \in \mathcal{P}_{N-1},$$

schreiben kann.

Wir nehmen die  $\alpha$  mit  $|\alpha| = k$  und die Elemente von  $M_i(k)$  in lexikographischer Ordnung an, wobei wir die Ordnungsrelation mit  $<$  bezeichnen. Sei  $\chi \in M_i(k)$  gegeben. Wir können das Polynom  $Q_\chi$  aus der Darstellung (5.6) wie folgt zerlegen,

$$Q_\chi = \sum_{j=1}^i \sum_{v=0}^N a_{jv}^{(\chi)} (x^{(j)})^v + \sum_{j=i+1}^n x^{(j)} \bar{Q}_j^{(\chi)}, \quad \bar{Q}_j^{(\chi)} \in \mathcal{P}_{N-1}, \quad a_{jv}^{(\chi)} \in \mathbb{R}.$$

Damit ergibt sich

$$Q_\chi R_\chi^k = R_\chi^k \sum_{j=1}^i \sum_{v=0}^N a_{jv}^{(\chi)} (x^{(j)})^v + \sum_{j=i+1}^n \bar{Q}_j^{(\chi)} x^{(j)} R_\chi^k.$$

Mit Hilfe von (5.5) folgt hieraus

$$Q_\chi R_\chi^k = R_\chi^k \sum_{j=1}^i \sum_{v=0}^N a_{jv}^{(\chi)} (x^{(j)})^v + \sum_{j=i+1}^n \bar{Q}_j^{(\chi)} x^{(j)} R_{\chi+e_j-e_i}^k + \sum_{j=i+1}^n \bar{Q}_j^{(\chi)} \sum_{|\alpha|=k} \lambda_\alpha R_\alpha^k,$$

wobei  $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}$  und  $\chi + e_j - e_i < \chi$ . Diesen Ausdruck fassen wir wie folgt zusammen

$$(5.8) \quad Q_\chi R_\chi^k = R_\chi^k \left[ \sum_{j=1}^i \sum_{v=0}^N a_{jv}^{(\chi)} (x^{(j)})^v \right] + \sum_{|\alpha|=k} S_\alpha^{(\chi)} R_\alpha^k + \sum_{\substack{|\alpha|=k \\ \alpha < \chi}} \bar{S}_\alpha^{(\chi)} R_\alpha^k,$$

wobei  $\bar{S}_\alpha^{(\chi)} \in \mathcal{P}_{N-1}$  und  $S_\alpha^{(\chi)} \in \mathcal{P}_N$ .

Diese Reduktion wenden wir sukzessive an, wobei  $\chi$  in lexikographischer Reihenfolge durchlaufen wird. Für das grösste Element  $\chi_0 = (k, 0, \dots, 0)$  von  $M_1(k)$  folgt damit

$$Q = R_{\chi_0}^k \left[ \sum_{v=0}^N a_{1v}^{(\chi_0)} (x^{(1)})^v \right] + \sum_{|\alpha|=k} S_\alpha^{(\chi_0)} R_\alpha^k + \sum_{\substack{|\alpha|=k \\ \alpha < \chi_0}} \bar{S}_\alpha^{(\chi_0)} R_\alpha^k + \sum_{\substack{|\alpha|=k \\ \alpha < \chi_0}} Q_\alpha^{(\chi_0)} R_\alpha^k.$$

Diesen Ausdruck fassen wir als

$$Q = R_{\chi_0}^k \left[ \sum_{\nu=0}^N a_1^{(\chi_0^\nu)} (x^{(1)})^\nu \right] + \sum_{\substack{|\alpha|=k \\ \alpha < \chi_0}} \tilde{Q}_\alpha^{(\chi_0)} R_\alpha^k + \sum_{\substack{|\alpha|=k \\ \alpha < \chi_0}} Q_\alpha^{(\chi_0)} R_\alpha^k$$

zusammen, wobei  $\tilde{Q}_\alpha^{(\chi_0)} \in P_{N-1}$  und  $Q_\alpha^{(\chi_0)} \in P_N$  gilt. Für das auf  $\chi_0$  folgende Element  $\chi_1$  wenden wir die Reduktion (5.8) auf

$$\sum_{\substack{|\alpha|=k \\ \alpha < \chi_0}} Q_\alpha^{(\chi_0)} R_\alpha^k$$

erneut an. Wir erhalten nach geeigneter Zusammenfassung

$$Q = R_{\chi_0}^k \left[ \sum_{\nu=0}^N a_1^{(\chi_0^\nu)} (x^{(1)})^\nu \right] + R_{\chi_1}^k \left[ \sum_{\nu=0}^N a_1^{(\chi_1^\nu)} (x^{(1)})^\nu \right] + \sum_{|\alpha|=k} \tilde{Q}_\alpha^{(\chi_1)} R_\alpha^k + \sum_{\substack{|\alpha|=k \\ \alpha < \chi_1}} Q_\alpha^{(\chi_1)} R_\alpha^k$$

mit  $\tilde{Q}_\alpha^{(\chi_1)} \in P_{N-1}$ ,  $Q_\alpha^{(\chi_1)} \in P_N$ . Die Zahl der  $R_\alpha^k$ , die in der dritten Summe mit Polynomen aus  $P_N$  verbunden sind, sinkt mit jedem Schritt. Wir erhalten schliesslich

$$Q = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\chi \in M_i(k)} R_\chi^k \left[ \sum_{j=1}^i \sum_{\nu=0}^N a_{j\nu}^{(\chi)} (x^{(j)})^\nu \right] + \sum_{|\alpha|=k} Q_\alpha^{++} R_\alpha^k$$

mit  $Q_\alpha^{++} \in P_{N-1}$ . Da  $Q$  in  $P_{k-1}$  liegt, müssen die Terme der Ordnung  $N+k$  in der obigen Darstellung verschwinden. Diese Form von  $Q$  wurde aber gerade so konstruiert, dass in der linken Summe jedes Monom vom Grad  $N+k$  genau einmal auftaucht. Damit müssen aber die Koeffizienten  $a_{jN}^{(\chi)}$  alle verschwinden und die gewünschte Darstellung (5.7) ist gefunden. ■

Wenn die  $R_\alpha^k$  aus (5.2) die Bedingung (5.5) erfüllen, so ergibt sich aus dem Satz, dass jedes Polynom  $Q \in \mathcal{U}$  immer in der Form

$$Q = \sum_{|\alpha|=k} Q_\alpha R_\alpha^k$$

geschrieben werden kann, wobei der Grad von  $Q_\alpha R_\alpha^k$  nie den Grad von  $Q$  übersteigt. Die  $R_\alpha^k$  bilden somit eine  $H$ -Basis des Ideals  $\mathcal{U}$ . Satz 5.5.1 in Verbindung mit Satz 3.4.1 liefert uns die folgende Charakterisierung.

**5.1.2. SATZ.** Seien  $k$  mit  $[m/2]+1 \leq k \leq m+1$  und beliebige, aber feste Parameter für die  $R_\alpha^k$  aus (5.2) gegeben. Das von diesen Polynomen erzeugte Ideal sei  $\mathcal{U}$ , der erzeugte lineare Raum sei  $\mathcal{R}$ . Das Ideal  $\mathcal{U}$  ist genau dann zu einer Kubaturformel vom Grad  $m$  mit  $N = \dim P_{k-1}$  Knoten gehörig, wenn

- (i)  $x^{(j)} R_\alpha^k - x^{(i)} R_{\alpha+e_j-e_i}^k \in \mathcal{R}$ ,  $\alpha \in M_i(k)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $j = i+1, i+2, \dots, n$ ,

und

(ii)  $I(Q^2 - R^*) > 0$  für alle  $Q \in P_{k-1}$  mit  $R^* \in \mathcal{U}$ , so dass  $Q^2 - R^* \in P_m$  gilt, erfüllt sind.

Für  $k = [m/2] + 1$  ist die Bedingung (ii) stets erfüllt. Die Korollare 4.1.3 und 4.1.4 besitzen somit die folgende allgemeine Form.

**5.1.3. KOROLLAR.** Der von  $P_\alpha^k$ ,  $|\alpha| = k$ , erzeugte lineare Raum werde mit  $\dot{P}_k$  bezeichnet. Es gibt genau dann eine Kubaturformel vom Grad  $m = 2k - 1$  mit  $N = \dim P_{k-1}$  Knoten, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist,

$$(5.9) \quad x^{(i)} P_\alpha^k - x^{(i)} P_{\alpha+e_j-e_i}^k \in \dot{P}_k, \quad \alpha \in M_i(k), \\ i = 1, 2, \dots, n-1, j = i+1, i+2, \dots, n.$$

Die Knoten dieser Formel sind die gemeinsamen Nullstellen der Polynome  $P_\alpha^k$ ,  $|\alpha| = k$ .

Wenn wir (5.9) mit  $P_\chi^{k-1}$ ,  $|\chi| = k-1$ , multiplizieren und anschliessend  $I$  anwenden, so erhalten wir die folgende zu (5.9) äquivalente Bedingung,

$$I(x^{(i)} P_\alpha^k P_\chi^{k-1}) = I(x^{(i)} P_{\alpha+e_j-e_i}^k P_\chi^{k-1}),$$

die sich auf die Form

$$(5.10) \quad I(P_\alpha^k P_{\chi+e_j}^k) = I(P_{\alpha+e_j-e_i}^k P_{\chi+e_i}^k), \quad |\chi| = k-1, \alpha \in M_i(k), \\ j = i+1, i+2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, n-1,$$

bringen lässt.

Für klassische Integrale wird diese Bedingung nicht erfüllt sein, es gibt jedoch Funktionale, die (5.10) zulassen. Wir verweisen wiederum auf die Arbeiten von F. N. Fritsch [70] und V. A. Kuzmenkov [76], [78].

Im Fall  $m = 2k - 2$  haben die Polynome aus (5.2) die Gestalt

$$(5.11) \quad R_\alpha^k = P_\alpha^k + \sum_{|\beta|=k-1} \gamma_{\alpha,\beta} P_\beta^{k-1}, \quad |\alpha| = k.$$

Wir verzichten hier, im Gegensatz zum zweidimensionalen Ansatz darauf, die Polynome vom Grad  $k-1$  in der speziellen orthogonalen Form anzusetzen. Beide Ansätze sind, bis auf eine lineare Transformation unter den  $\gamma_{\alpha,\beta}$ , äquivalent.

**5.1.4. KOROLLAR.** Es gibt genau dann eine Kubaturformel vom Grad  $m = 2k - 2$  mit  $N = \dim P_{k-1}$  Knoten, wenn es reelle Zahlen  $\gamma_{\alpha,\beta}$  gibt, so dass (5.5) für die Polynome aus (5.11) gilt. Mit jeder zulässigen Wahl der Parameter  $\gamma_{\alpha,\beta}$  sind die gemeinsamen Nullstellen der Polynome  $R_\alpha^k$  aus (5.11) die Knoten der Kubaturformel.

Wenn  $I$  so gewählt ist, dass  $I(P_\alpha^k P_\beta^k) = 0$  für  $\alpha \neq \beta$  gilt, z.B. bei Produktintegralen, so lässt sich die Bedingung (5.5) stark vereinfachen. Wir untersuchen diesen Fall zum Abschluss.

Damit (5.5) erfüllt wird, müssen die Polynome

$$x^{(j)}R_\alpha^k - x^{(i)}R_{\alpha+e_j-e_i}^k$$

zu  $P_{k-2}$  orthogonal sein. Das liefert uns

$$0 = \sum_{|\beta|=k-1} \gamma_{\alpha,\beta} I(x^{(j)}P_\beta^{k-1}P_\chi^{k-2}) - \sum_{|\beta|=k-1} \gamma_{\alpha+e_j-e_i,\beta} I(x^{(i)}P_\beta^{k-1}P_\chi^{k-2}).$$

Wir erhalten damit

$$\gamma_{\alpha,\chi+e_j}M_{\chi+e_j}^{k-1} = \gamma_{\alpha+e_j-e_i,\chi+e_i}M_{\chi+e_i}^{k-1}, \quad \alpha \in M_i(k), \quad |\chi| = k-2, \\ j = i+1, i+2, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Wenn wir  $\gamma_{\alpha,\beta}^+ = \gamma_{\alpha,\beta}/M_\beta^{k-1}$  setzen, so folgt  $\gamma_{\alpha,\chi+e_j}^+ = \gamma_{\alpha+e_j-e_i,\chi+e_i}^+$ . Das besagt aber, dass alle  $\gamma_{\alpha,\beta}^+$  mit  $\alpha+\beta = \alpha^+$  denselben Wert haben. Jetzt können wir die Parameter in der Form  $\gamma_{\alpha,\beta} = \gamma_{\alpha+\beta}/M_\beta^{k-1}$  ausdrücken, wobei  $\gamma_{\alpha+\beta}$  freie Parameter sind, die durch die folgenden Bedingungen weiter eingeschränkt werden.

Zu den in (5.5) definierten Polynomen muss es reelle Zahlen  $a_{\alpha,\lambda}$  geben, so dass

$$(5.12) \quad x^{(j)}R_\alpha^k - x^{(i)}R_{\alpha+e_j-e_i}^k = \sum_{|\lambda|=k} a_{\alpha,\beta} P_\lambda^k$$

gilt. Durch Multiplikation dieser Gleichung mit  $P_\lambda^k$ ,  $|\lambda| = k$ , und anschliessender Anwendung von  $I$  ergibt sich somit

$$(5.13) \quad a_{\alpha,\lambda} = \gamma_{\alpha+\lambda-e_j}/M_{\lambda-e_j}^{k-1} - \gamma_{\alpha+e_j+\lambda-2e_i}/M_{\lambda-e_i}^{k-1}, \quad |\lambda| = k, \quad |\alpha| = k, \\ j = i+1, i+2, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Hierbei ist  $1/M_{\lambda-e_i}^{k-1}$  Null zu setzen, wenn  $\lambda - e_i$  nicht mehr definiert ist. Bedingung (5.5) ist somit erfüllt, wenn die Polynome in (5.12) zu  $P_{k-1}$  orthogonal sind. Mit Hilfe von (5.13) und der gewohnten Technik ergibt sich

$$I(x^{(j)}P_\alpha^k P_\chi^{k-1}) - I(x^{(i)}P_{\alpha+e_j-e_i}^k P_\chi^{k-1}) \\ = \sum_{|\beta|=k} \gamma_{\alpha+\beta-e_j} \gamma_{\beta+\chi} / M_{\beta-e_j}^{k-1} - \gamma_{\alpha+\beta+e_j-2e_i} \gamma_{\beta+\chi} / M_{\beta-e_i}^{k-1},$$

$$\alpha \in M_i(k), \quad j = i+1, i+2, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad |\chi| = k-1.$$

Wir können dieses Gleichungssystem auch wie folgt schreiben,

$$(5.14) \quad I(P_{\alpha+e_i}^k P_{\chi+e_j}^k) - I(P_{\alpha+e_j}^k P_{\chi+e_i}^k) \\ = \sum_{|\beta|=k-1} (\gamma_{\alpha+e_i+\beta} \gamma_{\beta+e_j+\chi} - \gamma_{\alpha+e_j+\beta} \gamma_{\beta+e_i+\chi}) / M_\beta^{k-1},$$

$$|\alpha| = |\chi| = k-1, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = i+1, i+2, \dots, n.$$

Hierbei bleiben die Gleichungen bei Vertauschung von  $\alpha$  und  $\chi$  invariant, für  $\alpha = \chi$  ergibt sich die Nullgleichung.

Eine Kubaturformel vom Grad  $m = 2k - 2$  mit  $N = \dim P_{k-1}$  Knoten liegt somit für die hier betrachteten Integrale genau dann vor, wenn (5.14) eine reelle Lösung besitzt. Mit jeder reellen Lösung sind die Polynome in (5.11) eindeutig festgelegt. Ihre gemeinsamen Nullstellen sind die Knoten der Formel.

## 5.2. Ein weiterer Charakterisierungssatz

Da wir im allgemeinen nicht erwarten können, dass (5.10) gilt, wird man versuchen, ähnlich wie in 4.2 eine Verbesserung der Schranke zu erreichen. Eine solche Verbesserung hat H. M. Möller [76] gefunden. Wir leiten diese verbesserte Schranke her und kennzeichnen die Formeln, deren Knotenanzahl diese Schranke annimmt.

Sei eine Kubaturformel vom Grad  $m = 2k - 1$  mit  $N$  Knoten für ein strikt positives lineares Funktional  $I$  gegeben. Das zur Formel gehörige Ideal sei  $\mathcal{U}$ . Wir bezeichnen den von  $P_\alpha^*$ ,  $|\alpha| = k$ , erzeugten Raum mit  $\dot{P}_k$ . Da  $\mathcal{U} \cap P_{k-1}$  nur das Nullpolynom enthält, nehmen wir an, dass es zumindest  $s$  linear unabhängige Polynome  $R_1, R_2, \dots, R_s$  aus  $\dot{P}_k$  gibt, die zum Ideal gehören. Damit muss die Knotenanzahl gegenüber (5.1) mindestens um  $\dim \dot{P}_k - s$  steigen. Sei  $V$  der von den  $R_i$  erzeugte lineare Raum. Für beliebige, aber feste  $v, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $v \neq j$ , sei  $W_{vj}$  der von  $V, x^{(v)}V, x^{(j)}V$  erzeugte Raum. Dann gilt

$$(5.15) \quad 3s - \eta = \dim W_{vj} \leq s + \binom{k+n-1}{k} + \binom{k+n-2}{k},$$

wobei  $\eta$  die Anzahl der linearen Abhängigkeiten unter den  $R_i$  und  $x^{(v)}R_i, x^{(j)}R_i$  bezeichne. Die rechte Seite von (5.15) ergibt sich, weil die maximale Anzahl linear unabhängiger Polynome unter den  $x^{(v)}R_i$  und  $x^{(j)}R_i$  nicht die Anzahl der linear unabhängigen Monome vom Grad  $k+1$  übersteigen kann, die durch  $x^{(v)}$  oder  $x^{(j)}$  teilbar sind.

Die Zahl  $\eta$  kann nicht die Zahl der linear unabhängigen Vektoren  $a \in R^\lambda$ ,  $\lambda = |\{\alpha : |\alpha| = k-1\}|$ , übersteigen, für die

$$\sum_{|\beta|=k-1} a_\beta I(P_{\beta+e_j}^* P_{\chi+e_v}^* - P_{\beta+e_v}^* P_{\chi+e_j}^*) = 0, \quad |\chi| = k-1,$$

gilt. Die Koeffizientenmatrix des zugehörigen Gleichungssystems ist schiefsymmetrisch, ihren Rang bezeichnen wir deshalb mit  $2\eta_k^{vj}$ . Das Maximum der  $\eta_k^{vj}$ , wobei  $v$  und  $j$  in ihrem zulässigen Bereich variieren, bezeichnen wir mit  $\eta_k$ . Wie in 4.2 ergibt sich aus  $\eta \leq 2\eta_k$  eine Abschätzung für die Knotenanzahl in einer Kubaturformel vom Grad  $m = 2k - 1$ . Sie hat jetzt ebenfalls die Form

$$(5.16) \quad N \geq \dim P_{k-1} + \eta_k.$$

Eine Charakterisierung der Formeln, deren Knotenzahlen diese untere Schranke annehmen, verläuft analog zu der in 4.2 beschriebenen Technik.

**5.2.1. SATZ.** *Es gibt genau dann eine Kubaturformel vom Grad  $m = 2k - 1$  mit  $N = \dim P_{k-1} - \eta_k$  Knoten, wenn das zur Formel gehörige Ideal  $\mathcal{U}$  von linear unabhängigen Polynomen  $R_1, R_2, \dots, R_s$ ,  $s = \dim \dot{P}_k - \eta_k$ , aus  $\dot{P}_k$  erzeugt wird, die den nachfolgenden Bedingungen genügen. Hierbei bezeichnen wir den von den  $R_i$  erzeugten Raum mit  $\mathcal{R}$  und mit  $\mathcal{U}$  ein beliebiges, aber festes Komplement von  $\mathcal{R}$  mit einer Basis  $U_1, U_2, \dots, U_{\eta_k}$ , die wir orthogonal zu  $P_{k-1}$  annehmen dürfen.*

(i) *Die Polynome  $x^{(j)}R_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , bilden ein fundamentales System vom Grad  $k+1$ .*

(ii) *Wenn  $\bar{Q}_0 = x^{(v)}\bar{Q}_1 - x^{(j)}\bar{Q}_2 \in P_k$  mit  $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2 \in \dot{P}_k$ ,  $v, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $v \neq j$ , dann folgt  $\bar{Q}_0 \in \mathcal{R}$ .*

(iii) *Wenn  $Q_0 = \sum_{\substack{|\beta| \leq 2 \\ \beta \neq 0}} b_\beta x^\beta Q_\beta \in P_k$  mit  $Q_\beta \in \mathcal{R}$ ,  $b_\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \neq 0$ , dann liegt auch  $Q_0$  in  $\mathcal{R}$ .*

(iv) *Es gilt  $I(U^2 - R^*) > 0$  für alle  $U \in \mathcal{U}$ , wobei  $R^* \in \mathcal{U}$  so gewählt ist, dass  $U^2 - R^* \in P_m$  gilt.*

Der Beweis dieses Satzes folgt direkt dem Beweis von Satz 4.2.1, wobei jetzt der Beweis von Satz 5.1.1 benutzt wird, um  $\mathcal{U} \cap \mathcal{U} = (0)$  aus den Bedingungen (i) bis (iii) zu folgern.

Wir merken noch an, dass sich eine allgemeine Version von Satz 4.1.5 ohne Schwierigkeiten geben lässt. In wie weit sich diese allgemeinen Charakterisierungssätze zur tatsächlichen Konstruktion verwenden lassen, ist offen. Fest steht, dass ein grosser technischer Aufwand notwendig ist. Die wenigen bisher durchgeführten praktischen Versuche haben gezeigt, dass es sehr fraglich ist, ob die wenigen glatten zweidimensionalen Resultate, wie sie in 6.2 angegeben werden, auch in beliebigen Dimensionen gelten.

## 6. Beispiele

In diesem letzten Kapitel stellen wir Anwendungen der Charakterisierungs- und Konstruktionsmethoden zusammen. Die angeführten Beispiele sind relativ einfacher Natur. Das bewirkt, dass sie mit nicht zu grossem Arbeitsaufwand behandelt werden können. Es möge jedoch berücksichtigt werden, dass selbst bei diesen Beispielen kein systematischer Zugang bekannt war und dass neue Resultate hergeleitet werden können.

Obwohl wir uns in erster Linie auf zweidimensionale Produktintegrale beschränken, können wir einige überraschende Beispiele präsentieren, die

neuen Aufschluss über die komplizierte Struktur des gesamten Kubaturproblems geben, insbesondere über das unangenehme Problem der unteren Schranken. Auch zum Problem der Lage der Knoten kann ein interessantes Beispiel gegeben werden.

Wir begnügen uns im allgemeinen damit, die Existenz bestimmter Formeln nachzuweisen und die Polynome anzugeben, die das zur Formel gehörige reelle Ideal erzeugen. Eine Berechnung der Knoten kann mit Standardmethoden der numerischen Mathematik erfolgen, ebenso die Bestimmung der Koeffizienten. Hier lässt sich aber auch die Formel (3.19) benutzen, die sich allerdings numerisch als nicht so stabil erwiesen hat, wie eine numerische Lösung des zugehörigen linearen Gleichungssystems.

In 6.1 werden Ergebnisse zusammengestellt, die N. Kroll, J. Linden und H. J. Schmid [80] für klassische Produktintegrale bis zum Grad 9 im Detail durchgeführt haben. Dort findet man auch für einige der charakterisierten Formeln die zugehörigen Knoten und Gewichte. Der Grad 9 ist besonders hervorzuheben. Hier können wir Beispiele angeben, bei denen die untere Schranke (4.21) nicht mehr angenommen wird. Gleichzeitig lässt sich in diesem Fall für bestimmte Gewichtsfunktionen zeigen, dass es genau eine minimale Formel vom Grad 9 gibt, deren Knoten allerdings nicht alle in der konvexen Hülle des Integrationsbereiches liegen. Ähnliches Verhalten scheint auch beim Grad 8 vorzuliegen, hier können wir uns jedoch nur auf numerische Erfahrungen stützen.

Hieran schliesst sich in 6.2 die Behandlung eines speziellen Integrals, für das die Existenz minimaler Formeln, deren Knotenanzahl der unteren Schranke in (4.3) bzw. in (4.21) entspricht, für jeden Genauigkeitsgrad garantiert werden kann. Hierdurch wird ein Beispiel von C. R. Morrow und T. N. L. Patterson [78] vervollständigt, das jetzt zeigt, dass die Schranken (4.3) und (4.21) in dem Sinne scharf sind, dass sie für ein bestimmtes klassisches Integral tatsächlich angenommen werden.

In 6.3 zeigen wir, wie die Methode 4.3.6 zu Konstruktion nicht-minimaler Formeln benutzt werden kann. Diese Beispiele sind deshalb besonders interessant, weil man bei höheren Genauigkeitsgraden hierdurch unter Umständen minimale Formeln erhalten kann, selbst wenn die Schranke (4.21) nicht mehr angenommen wird.

Wir fügen in 6.4 Beispiele an, bei denen die betrachteten Integrale keine Produkt-Gestalt haben. Hierdurch wird deutlich, wo augenblicklich die Grenzen einer Anwendung der hier behandelten Theorie liegen. Die komplizierte Gestalt der orthogonalen Polynome, über die man viel zu wenig weiss, und die grosse Zahl algebraischer Umformungen setzen hier Grenzen, die aber sicherlich durch eine Verfeinerung der Rechentechnik und durch neue Ideen überwunden werden können.

In 6.5 stellen wir einige Zeichnungen der Nullstellengebilde der zu Kubaturformeln gehörigen Ideale zusammen, sowie einige der durchgerechnete-

ten Werte für Knoten und Gewichte. Wir beschränken uns auf die für die Theorie wichtigen Beispiele und auf Standardbeispiele zu den charakterisierten Formeln.

Ein Grossteil der numerischen Berechnungen, die hier nur teilweise diskutiert werden, wurde zusammen mit N. Kroll und J. Linden aus Bonn durchgeführt. Der Autor bedankt sich für die gute und effektive Zusammenarbeit, ebenso bei Herrn G. Teufel aus Erlangen, der weitere Zeichnungen angefertigt hat. Die numerischen Beispiele wurden zum Teil in Bonn mit Hilfe einer IBM 370/168 in vierfacher Genauigkeit, sowie in doppelter Genauigkeit mit Hilfe der Cyber 173 des Regionalen Rechenzentrums in Erlangen gerechnet.

### 6.1. Minimale Formeln bis zum Grad 9 für Produktintegrale

Wir schliessen mit diesen Beispielen direkt an die Konstruktionsmethoden 4.3.1 und 4.3.4 an, wobei wir die Bezeichnungen aus 4.3 übernehmen. Die Integrale, die hier untersucht werden, haben die klassische Form

$$(6.1) \quad I: P(C_2) \rightarrow R: P \rightarrow \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P(x, y) \omega(x) \omega(y) dx dy$$

mit  $I(1) = 1$  und einer geraden Gewichtsfunktion  $\omega(u)$  auf  $[-1, 1]$ . Insbesondere wird man hier an die Gewichtsfunktionen

$$(6.2) \quad \omega_\alpha(u) = \frac{\Gamma(2\alpha + 2)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)2^{2\alpha + 1}} (1 - u^2)^\alpha, \quad \alpha > -1,$$

denken. In diesem Fall versehen wir die orthogonalen Polynome und ihre Momente mit dem Index  $\alpha$ . Ansonsten benutzen wir die üblichen Bezeichnungen. Wenn wir die Gewichtsfunktion in der Form (6.2) wählen, so sind die orthogonalen Polynome die ultrasphärischen Polynome, ihre Gestalt und ihre Momente sind wohlbekannt. Für die Charakterisierungen sind nicht so sehr die Momente  $M_j^{\alpha, i}$  von Bedeutung, sondern deren Quotienten. Die Quotienten  $A_i^\alpha$ , die wir in (4.30) eingeführt haben, ergeben sich jetzt als

$$(6.3) \quad A_0^\alpha = 0, \quad A_1^\alpha = \frac{1}{2\alpha + 3}, \quad A_i^\alpha = \frac{i(2\alpha + i)}{(2\alpha + 2i + 1)(2\alpha + 2i - 1)}, \quad i = 2, 3, \dots$$

Die Momente lassen sich durch

$$M_j^{\alpha, i} = G_{i-j}^\alpha G_j^\alpha = \prod_{v=1}^{i-j} A_v^\alpha \sum_{v=1}^j A_v^\alpha$$

ausdrücken. Die eindimensionalen orthogonalen Polynome  $p_j^\alpha$  geben wir soweit an, wie sie im folgenden benötigt werden,

$$\begin{aligned} p_0^\alpha &= 1, & p_1^\alpha &= x, & p_2^\alpha &= x^2 - A_1, & p_3^\alpha &= x^3 - (A_1 + A_2)x, \\ p_4^\alpha &= x^4 - (A_1 + A_2 + A_3)x^2 + A_1 A_3, \\ p_5^\alpha &= x^5 - (A_1 + A_2 + A_3 + A_4)x^3 + (A_1 A_3 + A_4(A_1 + A_2))x. \end{aligned}$$

Die zweidimensionalen orthogonalen Polynome ergeben sich als Produkt in der Form

$$P_j^{\alpha, i}(x, y) = p_{i-j}^\alpha(x) p_j^\alpha(y), \quad j = 0, 1, \dots, i, \quad i = 1, 2, \dots$$

N. Kroll, J. Linden und H. J. Schmid [80] haben die Konstruktionsmethoden 4.3.1 und 4.3.4 im Detail für Integrale vom Typ (6.1) durchgeführt, wobei insbesondere die Gewichtsfunktionen (6.2) für  $\alpha = -1/2$ ,  $\alpha = 0$  und  $\alpha = 1/2$  genauer untersucht wurden. Bei der Methode 4.3.1 für gerade Exaktheitsgrade konnte die Existenz einer Lösung des System (4.34) für diese Spezialfälle bis zum Grad 6 immer-gesichert werden. Beim Grad 8 konnte nur eine Lösung mit numerischen Methoden gefunden werden. Hier ergaben sich einige numerische Probleme, die jedoch mit einer speziellen Variante des Broyden-Verfahrens, siehe H. J. Schmid [80]<sub>2</sub>, gelöst werden konnten, wobei Lemma 4.3.2 berücksichtigt wurde. Das System (4.34), das zum Grad 10 gehört, konnte, ausser für  $\alpha = 1/2$ , nicht gelöst werden. Es ist zu vermuten, dass hier keine Lösungen vorliegen.

Im ungeraden Fall ist die Existenz der Kubaturformeln gesichert, wenn man die Methode 4.3.4 benutzt. Somit ist es möglich, das Verhalten, das die numerischen Experimente beim Grad 10 zeigten, für bestimmte Gewichtsfunktionen beim Grad 9 zu beweisen, nämlich, dass die unteren Schranken nicht immer angenommen werden. Ausserdem lässt sich hier auch ein weiteres Phänomen beweisen, das man bereits beim Grad 8 numerisch feststellen konnte. Für  $\alpha = 0$  wurde (bis auf Symmetrie) eine minimale Formel gefunden, bei der jedoch ein Knoten nicht in  $C_2$  liegt. Dieses Verhalten können wir auch beim Grad 9 feststellen. Es gibt Gewichtsfunktionen, zu denen es genau eine minimale Formel gibt, deren Knoten jedoch nicht alle im Integrationsgebiet liegen.

**6.1.1. Minimale Formeln vom Grad 2.** *Alle minimalen Formeln vom Grad 2 für Integrale vom Typ (6.1) sind dadurch charakterisiert, dass ihre Knoten die 3 gemeinsamen Nullstellen der Polynome*

$$\begin{aligned} R_0 &= P_0^2 + (\gamma_0 P_0^1 + \gamma_1 P_1^1) / M_0^1, & R_1 &= P_1^2 + (\gamma_1 P_0^1 + \gamma_2 P_1^1) / M_0^1, \\ R_2 &= P_2^2 + (\gamma_2 P_0^1 + \gamma_3 P_1^1) / M_0^1 \end{aligned}$$

sind, wobei die  $\gamma_i$  der Gleichung

$$M_1^2 M_0 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 - \gamma_0 \gamma_2 - \gamma_1 \gamma_3$$

genügen müssen.

Lösungen dieser Gleichung lassen sich ohne Schwierigkeiten finden.

**6.1.2. Minimale Formeln vom Grad 3.** Alle minimalen Formeln vom Grad 3 für Integrale vom Typ (6.1) sind (bis auf Symmetrie) dadurch gekennzeichnet, dass ihre Knoten die 4 gemeinsamen Nullstellen der folgenden Polynome sind,

$$(i) R_1 = P_0^2 + cP_2^2, R_2 = P_1^2 - bP_2^2 \text{ mit } b^2 + c > 0, b, c \in \mathbb{R},$$

oder

$$(ii) R_1 = P_0^2, R_2 = P_2^2.$$

Im letzten Fall liegt eine Produktformel vor.

**6.1.3. Minimale Formeln des Grades 4.** Alle minimalen Formeln des Grades 4 für Integrale vom Typ (6.1) sind dadurch gekennzeichnet, dass ihre Knoten die 6 gemeinsamen Nullstellen der Polynome

$$R_i = P_i^3 + \sum_{j=0}^2 \gamma_{i+j} P_j^2 / M_j^2, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

sind. Dabei genügen die  $\gamma_i$  den Gleichungen

$$M_1^3 = (\gamma_1^2 - \gamma_0 \gamma_2 + \gamma_3^2 - \gamma_2 \gamma_4) / M_0^2 + (\gamma_2^2 - \gamma_1 \gamma_3) / M_1^2,$$

$$M_2^3 = (\gamma_2^2 - \gamma_1 \gamma_3 + \gamma_4^2 - \gamma_3 \gamma_5) / M_0^2 + (\gamma_3^2 - \gamma_2 \gamma_4) / M_1^2,$$

$$0 = (\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_0 \gamma_3 + \gamma_3 \gamma_4 - \gamma_2 \gamma_5) M_1^2 + (\gamma_2 \gamma_3 - \gamma_1 \gamma_4) M_0^2.$$

Auch hier können ohne Schwierigkeiten Lösungen des Gleichungssystems angegeben werden. So kann z.B.  $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_4$  Null gesetzt werden, oder etwa  $\gamma_0 = \gamma_5, \gamma_2 = \gamma_3$  und  $\gamma_1 = \gamma_4 = 0$  angesetzt werden. In beiden Fällen gewinnen wir minimale Formeln des Grades 4. Minimale Formeln des Grades 4 für  $\omega_\alpha, \alpha = 0$ , die  $(0, 0)$  als Knoten besitzen, konnte I. P. Mysovskikh [68] auf andere Art herleiten.

**6.1.4. Minimale Formeln des Grades 5.** Alle minimalen Formeln des Grades 5 für Integrale vom Typ (6.1) sind (bis auf Symmetrie) dadurch gekennzeichnet, dass ihre Knoten die 7 gemeinsamen Nullstellen der folgenden Polynome sind,

$$R_1 = P_0^3 + P_2^3, \quad R_2 = P_1^3 + P_3^3, \quad R_3 = aP_1^3 + bP_2^3, \quad a^2 + b^2 \neq 0, a, b \in \mathbb{R}.$$

Man erkennt, dass sechs der Knoten auf einem Kreis mit Radius  $2A_1 + A_2$  um den siebten Knoten  $(0, 0)$  liegen. Für  $2A_1 + A_2 \leq 1$  ist somit gewährleistet, dass alle Knoten in  $C_2$  liegen. Für Integrale mit einer Gewichtsfunktion  $\omega_\alpha, \alpha > -1$ , ist das z.B. immer der Fall. Spezialfälle für  $\omega_\alpha$ ,

$\alpha = 0$ , wurden bereits von J. Radon [48] und J. Albrecht und L. Collatz [58] hergeleitet.

**6.1.5. Minimale Formeln vom Grad 6.** Es gibt genau dann eine minimale Formel vom Grad 6 mit 10 Knoten, wenn das folgende Gleichungssystem eine Lösung besitzt,

$$\begin{aligned} M_1^4 &= (\gamma_1^2 - \gamma_0\gamma_2 + \gamma_4^2 - \gamma_3\gamma_5)/M_0^3 + (\gamma_2^2 - \gamma_1\gamma_3 + \gamma_3^2 - \gamma_2\gamma_4)/M_1^3, \\ M_2^4 &= (\gamma_2^2 - \gamma_1\gamma_3 + \gamma_5^2 - \gamma_4\gamma_6)/M_0^3 + (\gamma_3^2 - \gamma_2\gamma_4 + \gamma_4^2 - \gamma_3\gamma_5)/M_1^3, \\ M_3^4 &= (\gamma_3^2 - \gamma_2\gamma_4 + \gamma_6^2 - \gamma_5\gamma_7)/M_0^3 + (\gamma_4^2 - \gamma_3\gamma_5 + \gamma_5^2 - \gamma_4\gamma_6)/M_1^3, \\ 0 &= M_1^3(\gamma_1\gamma_2 - \gamma_0\gamma_3 + \gamma_4\gamma_5 - \gamma_3\gamma_6) + (\gamma_2\gamma_3 - \gamma_1\gamma_4 + \gamma_3\gamma_4 - \gamma_2\gamma_5)M_0^3, \\ 0 &= M_2^3(\gamma_1\gamma_3 - \gamma_0\gamma_4 + \gamma_4\gamma_6 - \gamma_3\gamma_7) + (\gamma_2\gamma_4 - \gamma_1\gamma_5 + \gamma_3\gamma_5 - \gamma_2\gamma_6)M_0^3, \\ 0 &= M_3^3(\gamma_2\gamma_3 - \gamma_1\gamma_4 + \gamma_5\gamma_6 - \gamma_4\gamma_7) + (\gamma_3\gamma_4 - \gamma_2\gamma_5 + \gamma_4\gamma_5 - \gamma_3\gamma_6)M_0^3. \end{aligned}$$

Mit jeder reellen Lösung dieses Systems sind die 10 gemeinsamen Nullstellen der Polynome

$$R_i = P_i^4 + \sum_{j=0}^3 \gamma_{i+j} P_j^3 / M_j^3, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4,$$

die Knoten der Kubaturformel.

Für  $\omega_\alpha$ ,  $\alpha = -1/2, 0, 1/2$ , besitzt das Gleichungssystem z.B. reelle Lösungen. So kann man das System durch den Ansatz  $\gamma_0 = \gamma_7$ ,  $\gamma_1 = \gamma_6$ ,  $\gamma_2 = \gamma_5$  und  $\gamma_3 = \gamma_4$  auf vier Gleichungen in vier Unbekannten reduzieren. Diesen Fall geben wir in 6.5.2 für  $\omega_\alpha$ ,  $\alpha = 0$ , an, siehe auch H. J. Schmid [78]<sub>2</sub>.

**6.1.6. Minimale Formeln vom Grad 7.** Sämtliche minimalen Formeln vom Grad 7 für Integrale vom Typ (6.1) werden durch die folgenden 5 Typenklassen (bis auf Symmetrie) charakterisiert.

(i) Die Knoten sind die 12 gemeinsamen Nullstellen der Polynome

$$R_1 = P_0^4 - P_4^4, \quad R_2 = P_1^4 - P_3^4, \quad R_3 = P_2^4 - aP_3^4 + (\Lambda_2/\Lambda_3 + 1)P_4^4,$$

wobei  $|a| < \Lambda_2/\Lambda_3 + 2$ ,  $a \in \mathbf{R}$ , gelten muss.

(ii) Die Knoten sind die gemeinsamen Nullstellen der Polynome

$$\begin{aligned} R_1 &= a(1 + \Lambda_2 a/\Lambda_3)P_0^4 + (a^2 - 1)P_2^4 - (\Lambda_2/\Lambda_3 + a)P_4^4, \\ R_2 &= -aP_1^4 + P_3^4, \quad R_3 = P_2^4 + bP_3^4 + (\Lambda_2/\Lambda_3 + a)P_4^4, \end{aligned}$$

hierbei ist  $a = -\kappa/2 - \sqrt{\kappa^2 - 4}/2$  und  $\kappa = (\Lambda_1 + \Lambda_2)/\Lambda_3 + (\Lambda_3 - \Lambda_1)/\Lambda_2$ . Die Gewichtsfunktion muss so gewählt sein, dass

$$\kappa^2 > 4, \quad (1 + \Lambda_2 a/\Lambda_3)(\Lambda_2/\Lambda_3 + a) > 0 \quad \text{und} \quad (\Lambda_2/\Lambda_3 - \kappa)a > 0$$

gilt. Der freie Parameter  $b$  muss der Bedingung

$$b^2 a < (\Lambda_2/\Lambda_3 - \kappa)^2 a^2$$

genügen.

(iii) Die Knoten sind die gemeinsamen Nullstellen der Polynome

$$R_1 = P_0^4 + 2P_2^4 + P_4^4, \quad R_2 = P_1^4 + P_3^4, \quad R_3 = P_2^4 - aP_3^4,$$

wobei die Gewichtsfunktion so gewählt sein muss, dass  $\Lambda_2 = \Lambda_3$  gilt. Der freie Parameter  $a$  darf beliebig in  $\mathbb{R}$  gewählt werden.

(iv) Die Knoten sind die gemeinsamen Nullstellen der Polynome

$$R_1 = P_0^4 + \Lambda_3(a+1)P_2^4/\Lambda_2 + aP_4^4, \quad R_2 = P_1^4, \quad R_3 = P_3^4,$$

wobei  $a > 0$  gelten muss.

(v) Die Knoten sind die 12 gemeinsamen Nullstellen der Polynome

$$\begin{aligned} R_1 &= aP_0^4 + \Lambda_3(a+b)P_2^4/\Lambda_2 + P_3^4 + bP_4^4, \\ R_2 &= cP_0^4 - P_1^4 + \Lambda_3(c+d)P_2^4/\Lambda_2 + dP_4^4, \\ R_3 &= \Lambda_2cP_1^4/\Lambda_3 + (c - \Lambda_2b/\Lambda_3 + d)P_3^4 + P_4^4, \end{aligned}$$

wobei  $1 = cb - ad$  und  $\Lambda_3(a-d)/(\Lambda_1 + \Lambda_2) = c - b$  so erfüllt werden muss, dass die Polynome  $H_i$  aus 4.3.3 berechnet werden können und deren Koeffizienten der Bedingung (4.44) genügen.

Die Typenklassen (i) und (iv) wurden für  $\omega_\alpha$ ,  $\alpha = 0$ , bereits vollständig von H. M. Möller [76] behandelt. Spezialfälle dieser beiden Typenklassen gehen auf G. W. Tyler [53], I. P. Mysovskikh [64], H. Engels [66] und G. M. Phillips [67] zurück. Es kann gezeigt werden, dass die Typenklasse (v) nicht leer ist. Zu allen Typen geben wir in 6.5.3 bis 6.5.7 je ein Beispiel an.

**6.1.7. Minimale Formeln vom Grad 8.** Es gibt genau dann Kubaturformeln vom Grad 8 mit 15 Knoten für Integrale vom Typ (6.1), wenn das Gleichungssystem (4.34) für  $k = 5$  in  $\mathbb{R}$  lösbar ist. Mit jeder reellen Lösung sind die 15 gemeinsamen Nullstellen der Polynome

$$R_i = P_i^5 + \sum_{j=0}^4 \gamma_{i+j} P_j^4 / M_j^4, \quad i = 0, 1, \dots, 5,$$

die Knoten der Formel.

Für  $\omega_\alpha$ ,  $\alpha = -1/2, 0$ , konnten nur numerische Lösungen von (4.34) für  $k = 5$  gefunden werden, siehe 6.5.9 und 6.5.10. Es ergaben sich dabei anfangs Schwierigkeiten. Für  $\omega_\alpha$ ,  $\alpha = 0$ , erwies sich das System als besonders unangenehm. Das Fehlen geeigneter Startwerte und das schlechte Verhalten der Jacobi-Matrix führten bei Varianten des Newton-Verfahrens immer auf einen Abbruch des Verfahrens. Durch eine zyklische Form des Broyden-Verfahrens,

bei der die Startwerte zufällig in dem durch (4.35) beschriebenen Intervallen gesucht wurden, liessen sich schliesslich Lösungen finden. Im Fall von  $\alpha = -1/2$  führte jede Anwendung dieser Prozedur auf eine Lösung, unter 20 berechneten zugehörigen Kubaturformeln war keine, deren Knoten sämtlich in  $C_2$  lagen. Im Fall  $\alpha = 0$  konnte bis auf Symmetrie nur eine Lösung bestimmt werden. Die zufällige Auswahl der Startwerte führte dabei jedoch auf alle symmetrischen Formen dieser Lösung. Die zugehörige Kubaturformel wurde von C. R. Morrow und T. N. L. Patterson [78] veröffentlicht.

Das System (4.34) wurde auch für  $k = 6$  numerisch untersucht. In diesem Fall liegen 12 Unbekannte und 15 Gleichungen vor. Es konnten jedoch in keinem der hier betrachteten Fälle Lösungen bestimmt werden.

**6.1.8. Minimale Formeln vom Grad 9.** *Alle minimalen Formeln vom Grad 9 für Integrale vom Typ (6.1) mit 17 Knoten werden (bis auf Symmetrie) durch die folgenden Typenklassen charakterisiert.*

(i) *Wenn  $\Lambda_2 = \Lambda_4$ , so sind die Knoten die 17 gemeinsamen Nullstellen der Polynome*

$$R_1 = P_0^5 + P_2^5 + P_4^5, \quad R_2 = P_1^5 + P_3^5 + P_5^5, \quad R_3 = P_1^5 + P_4^5, \quad R_4 = P_2^5 + P_3^5.$$

(ii) *Wenn  $\Lambda_2 = \Lambda_4$ , so sind die Knoten die gemeinsamen Nullstellen der Polynome*

$$R_1 = P_0^5 + P_2^5 + P_4^5, \quad R_2 = P_1^5 + P_3^5 + P_5^5, \\ R_3 = (a-1)P_1^5 - P_3^5 + bP_4^5, \quad R_4 = bP_1^5 + P_2^5 + aP_4^5,$$

wobei  $a^2 - a - b^2 = (\Lambda_2 - \Lambda_1)/\Lambda_3$ ,  $a^2 + b^2 + 1 > b^2a + a$  und  $|2ab - b| < a^2 + b^2 + 1 - (b^2a + a)$  erfüllt sein müssen.

(iii) *Wenn  $2(\Lambda_2 + \Lambda_4)(\Lambda_1 - \Lambda_4) - \Lambda_3\Lambda_4 > 0$  und  $2\Lambda_4(\Lambda_1 - \Lambda_4) > \Lambda_3(\Lambda_4 - \Lambda_2)$  gilt, so sind die Knoten die 17 gemeinsamen Nullstellen der Polynome*

$$R_1 = P_0^5 + \Lambda_4 P_2^5 / \Lambda_2 + P_4^5, \quad R_2 = P_1^5 + \Lambda_4 P_3^5 / \Lambda_2 + P_5^5, \\ R_3 = \Lambda_2 c P_1^5 / \Lambda_4 - P_2^5 - \Lambda_2 P_4^5 / (\Lambda_2 + \Lambda_4), \\ R_4 = -\Lambda_2 P_1^5 / (\Lambda_2 + \Lambda_4) - P_3^5 - \Lambda_2 c P_4^5 / \Lambda_4,$$

wobei

$$c = \sqrt{\Lambda_4 (\Lambda_3 (\Lambda_2 + \Lambda_4)^2)^{-1} (2(\Lambda_2 + \Lambda_4)(\Lambda_1 - \Lambda_4) - \Lambda_3 \Lambda_4)} \in \mathbb{R}$$

zu wählen ist.

Für  $\omega_a$ ,  $\alpha = 0$ , existiert eine Formel vom Typ (iii), sie wurde von H. M. Möller [76] angegeben, siehe 6.4.16. Wir werden die Typenklasse (iii) etwas näher untersuchen, denn hier lassen sich interessante Beispiele finden.

Die Typenklassen (i) und (ii) können nur für Gewichtsfunktionen erreicht werden, bei denen  $A_2 = A_4$  gilt. Exemplarische Beispiele geben wir in 6.5.11 und 6.5.12. Unter den Gewichtsfunktionen aus (6.2) kommen damit nur diejenigen  $\omega_\alpha$  mit  $\alpha = 1/2$  bzw.  $\alpha = -1/2$  infrage. Bei den restlichen  $\alpha > -1$  kann es somit bis auf Symmetrie höchstens eine Formel vom Typ (iii) geben, die 17 Knoten besitzt. Da der Parameter  $c$  reell sein muss, genügt es, die Gewichtsfunktion so zu wählen, dass  $A_1^\alpha < A_4^\alpha$  gilt, um Beispiele zu finden, bei denen die Knotenanzahl echt grösser als 17 sein muss.

*Integrale vom Typ (6.1) mit einer Gewichtsfunktion (6.2), bei der  $\alpha > 1/2$  gewählt wird, besitzen damit keine Kubaturformeln vom Grad 9 mit 17 Knoten. Die untere Schranke (4.21) wird in diesen Fällen nicht angenommen.*

Eine genauere Untersuchung zeigt, dass  $2(A_2^\alpha + A_4^\alpha)(A_1^\alpha - A_4^\alpha) - A_3^\alpha A_4^\alpha$  für einen Wert  $\alpha$  verschwindet, der bei 0.0799 liegt, so dass es zu Gewichtsfunktionen (6.2) mit  $\alpha > 0.08$ ,  $\alpha \neq 1/2$ , keine Kubaturformeln vom Grad 9 mit 17 Knoten gibt.

Man stellt ausserdem fest, dass für  $-1 < \alpha < -0.3$ ,  $\alpha \neq -1/2$ , bis auf Symmetrie genau eine minimale Formel vom Grad 9 existiert, die dann vom Typ (iii) sein muss. Für diese Werte von  $\alpha$  liegen aber stets vier Knoten ausserhalb von  $C_2$ .

*Es gibt somit in diesen Fällen keine minimale Formel, deren Knoten sämtlich in der konvexen Hülle des Integrationsbereiches liegen.*

Dieses Verhalten wird in 6.5.13 bis 6.5.15 anhand von Zeichnungen demonstriert.

## 6.2. Integrale, für die minimale Formeln jedes Genauigkeitsgrades bekannt sind

Das Gegenbeispiel aus 6.1, das uns gezeigt hat, dass (4.21) in der augenblicklichen Form nicht ausreichend ist, wird durch das folgende Beispiel ergänzt. Für das Integral (6.1) mit der Gewichtsfunktion  $\omega_\alpha$ ,  $\alpha = 1/2$ , aus (6.2) nehmen die minimalen Kubaturformeln die untere Schranke in (4.21) für ungeraden und die Schranke (4.3) für geraden Exaktheitsgrad an.

Dieses Beispiel geht auf C. R. Morrow und T. N. L. Patterson [78] zurück, die die zugehörigen Formeln durch eine geschickte Mischung von Lobatto- und Gauss-Quadraturformeln für  $m = 2k - 2$  und  $m = 2k - 1$ ,  $k$  gerade, konstruiert haben. Unser systematischer Zugang erlaubt es, das Beispiel zu vervollständigen und geschlossen zu behandeln. Damit ist ein klassisches Integral gefunden, für das die minimalen Formeln die bekannten unteren Schranken annehmen.

Wir bezeichnen die zum Integral (6.1) mit der Gewichtsfunktion  $\omega(u) = 2\sqrt{1-u^2}/\pi$  gehörigen orthogonalen Polynome mit  $U_j^i$ . Diese Polynome

lassen sich aus den monomisierten eindimensionalen Tschebyscheff-Polynomen zweiter Art durch Produktbildung gewinnen, es gilt

$$U_j^i(x, y) = \frac{\sin((i-j+1)\arcsin x)\sin((j+1)\arcsin y)}{2^i \sin \arcsin x \sin \arcsin y},$$

$$j = 0, 1, \dots, i, \quad i = 0, 1, \dots$$

Die Momente, die zu diesen Polynomen gehören, haben eine einfache Form nämlich

$$M_j^{\alpha, i} = 2^{-2i}, \quad j = 0, 1, \dots, i, \quad i = 0, 1, \dots, \quad \alpha = 1/2.$$

Da die Momente in den Gleichungssystemen, die wir zur Konstruktion und Kennzeichnung verwendet haben, eine entscheidende Rolle spielen, ist sofort klar, dass sich diese einfache Gestalt der Momente stark auswirken muss. Überhaupt zeigt sich immer deutlicher, dass die Momente eine weitaus grössere Rolle spielen als die Integrationsgebiete. In dieser Richtung sind interessante Ergebnisse zu erwarten, vor allem in Zusammenhang mit der passenden Erweiterung des Begriffes der Gauss-Quadratur.

Wir beginnen mit Formeln vom Grad  $m = 2k - 2$ ,  $k \in N$ . Bei aufmerksamer Betrachtung des Gleichungssystems (4.34), das durch die speziellen Momente stark vereinfacht wurde, erkennt man, dass in den inhomogenen Gleichungen die Unbekannte  $\gamma_k$  in der Form  $\gamma_k^2$  genau einmal vorkommt. Damit ist aber auch bereits eine Lösung von (4.34) gefunden, denn jetzt reduzieren sich alle Gleichungen zu  $2^{-2k} = 2^{2k-2}\gamma_k^2$ , wenn wir  $\gamma_i = 0$  für  $i \neq k$  setzen. Wir erhalten damit  $\gamma_k = 2^{1-2k}$ . Auf Grund von Korollar 4.1.4 ist damit die Existenz einer minimalen Formel vom Grad  $m = 2k - 2$  gesichert. Wir erhalten die Knoten dieser Formel als gemeinsame Nullstellen der Polynome

$$R_0 = U_0^k, \quad R_i = U_i^k + U_{k-i}^{-1}/2, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Die gemeinsamen Nullstellen dieser Polynome lassen sich direkt berechnen, wir geben sie in 6.5.17 an. Die Koeffizienten lassen sich über die Formel (3.19) bestimmen.

Im Fall  $m = 2k - 1$  müssen wir zwischen geradem und ungeradem  $k$  unterscheiden. Wir gehen jetzt mit der Methode vor, die in 4.3.5 beschrieben wurde. Das System (4.48) nimmt ebenfalls eine überschaubare Form an, hierbei ist  $A_0^\alpha = 0$ ,  $A_i^\alpha = 1/4$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , mit  $\alpha = 1/2$  einzusetzen.

Wenn  $k$  gerade ist, so liefert der Ansatz  $\gamma_k = 2^{-2k}$ ,  $\gamma_i = 0$ , falls  $i \neq k$ , eine Lösung von (4.48). Um die Polynome aus  $P_k$  zu bestimmen, die zum Ideal gehören, müssen alle Lösungen von (4.49) bestimmt werden. Da bis auf  $\gamma_k$  alle  $\gamma_i$  verschwinden, lässt sich mit dem beschriebenen Ansatz leicht eine Lösungsmenge angeben. Man erhält die Polynome

$$(6.4) \quad R_i = U_i^k + U_{k-i}^k, \quad i = 0, 1, \dots, k/2.$$

Damit liegt die Indexmenge  $M$  für Schritt 3 der Konstruktionsmethode 4.3.5 fest. Man kann z.B.  $M = \{k/2+1, k/2+2, \dots, k-1\}$  wählen. Die Überprüfung von (4.44) mit dieser Indexmenge ist problemlos. Sie liefert das gesuchte Ergebnis.

Es gibt eine minimale Formel vom Grad  $m = 2k-1$ ,  $k$  gerade, für das hier betrachtete Integral, deren Knotenanzahl der unteren Schranke aus (4.21) entspricht. Die Knoten sind die gemeinsamen Nullstellen der Polynome aus (6.4), sie werden in 6.5.18 angegeben.

Wenn  $k$  ungerade ist, geht man ähnlich vor. Die Lösung von (4.48) bereitet auch jetzt keine grossen Schwierigkeiten. Man überzeugt sich schnell, dass  $\gamma_{k-1} = \gamma_{2k} = 2^{-2k}$ ,  $\gamma_i = 0$ , falls  $i \neq k-1$ ,  $i \neq 2k$  dieses System löst. Um die Polynome aus  $\hat{P}_k$  zu bestimmen, muss eine möglichst grosse Lösungsmenge von (4.49) bestimmt werden. Durch den in 4.3.5 beschriebenen Ansatz, wobei berücksichtigt wird, dass die Polynome aus (4.36) für ungerades  $k$  im gesuchten Ideal liegen müssen, erhalten wir diese beiden Polynome, nämlich

$$(6.5) \quad \begin{cases} R_1 = U_0^k + U_2^k + \dots + U_{k-1}^k, \\ R_t = U_1^k + U_3^k + \dots + U_k^k, \quad t = [k/2] + 2, \end{cases}$$

sowie

$$(6.6) \quad R_i = U_{i-1}^k + U_{k-i}^k, \quad i = 1, 2, \dots, [k/2] + 1.$$

Die Indexmenge  $M$  aus Schritt 3 lässt sich als  $M = \{[k/2]+1, [k/2]+2, \dots, k-1\}$  wählen. Die Überprüfung von (4.44) für diese Indexmenge lässt sich direkt durchführen.

Damit ist auch für ungerades  $k$  gezeigt, dass das hier betrachtete Integral eine minimale Formel für den Grad  $m = 2k-1$  besitzt, deren Knotenanzahl der unteren Schranke aus (4.21) entspricht. Die Knoten sind die gemeinsamen Nullstellen der Polynome aus (6.5) und (6.6), sie werden in 6.5.19 angegeben.

Wir merken noch an, dass man für die Gewichtsfunktion  $\omega_\alpha$ ,  $\alpha = -1/2$ , im Fall  $m = 2k-1$ ,  $k$  gerade, ebenfalls mit der hier beschriebenen Methode minimale Formeln konstruieren kann. Wenn  $k$  ungerade ist, so konnte bis jetzt noch keine allgemeine Lösung von (4.48) durch einen direkten Ansatz gefunden werden. Auch für  $m = 2k-2$  konnte das zugehörige System (4.34) nicht allgemein gelöst werden.

### 6.3. Nicht-minimale Formeln

Wir wenden nun die Konstruktionsmethode 4.3.6 an, um nicht-minimale Formeln für Integrale vom Typ 6.1 zu gewinnen.

#### 6.3.1. Nicht-minimale Formeln vom Grad 5. Wir lösen das System (4.48)

für  $k = 3$  durch den folgenden symmetrischen Ansatz,  $\gamma_0 = \gamma_6$ ,  $\gamma_1 = \gamma_5 = 0$ ,  $\gamma_2 = \gamma_4$ . Dann liegen folgende Gleichungen vor,

$$(6.7) \quad \begin{cases} 0 = \gamma_3 (A_3 - A_1 + (\gamma_2 - \gamma_0)/M_0^2 + \gamma_2/M_1^2), \\ 0 = \gamma_2 (2A_3 - 2\gamma_0/M_0^2 + \gamma_2/M_1^2), \\ M_1^4 = A_1\gamma_0 + (A_3 - A_2)\gamma_2 + (\gamma_3^2 - \gamma_2^2 - \gamma_0\gamma_2)/M_0^2, \\ M_2^4 = 2(A_2 - A_1)\gamma_2 + 2\gamma_2^2/M_0^2 + (\gamma_3^2 - \gamma_2^2)/M_1^2. \end{cases}$$

Wenn wir  $\gamma_3 = 0$  wählen, so ergeben sich die restlichen Unbekannten als  $\gamma_2 = \gamma_4 = A_1^2 A_2^2 / (A_2 - 2A_1)$  und als  $\gamma_0 = \gamma_6 = A_1 A_2 A_3 + A_1 A_2^3 / (2A_2 - 4A_1)$ , wobei wir  $A_2 \neq 2A_1$  annehmen. In Schritt 2 der Methode 4.3.5 ist eine maximale Lösungsmenge von (4.49) zu bestimmen. Diese Gleichung hat jetzt die Gestalt

$$b_0^2 + b_3^2 + 4A_1^2 (b_1^2 + b_2^2) / A_2^2 = -4A_1 (b_0 b_2 + b_1 b_3) / A_2.$$

Man erhält folgende Lösungsvektoren  $b = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ ,  $(1, 0, -A_2/(2A_1), 0)$  und  $(0, 1, 0, -2A_1/A_2)$ . Damit müssen neben den Polynomen

$$R_i^4 = P_i^4 + \sum_{j=0}^2 \gamma_{i+j} P_j^2 / M_j^2, \quad i = 0, 1, \dots, 4,$$

auch die Polynome  $R_1 = P_0^3 - A_2 P_2^3 / (2A_1)$  und  $R_2 = P_1^3 - 2A_1 P_3^3 / A_2$  zum gesuchten Ideal gehören. Die Indexmenge kann somit als  $M = \{2, 3\}$  gewählt werden. Für diese Menge ist (4.44) zu überprüfen. Die Bedingungen aus (4.44) haben die Form

$$(6.8) \quad M_2^3 - \gamma_4 > 0, \quad M_3^3 - \gamma_6 > 0 \quad \text{und} \quad \gamma_5^2 < (M_2^3 - \gamma_4)(M_3^3 - \gamma_6).$$

Man erkennt, dass für  $2A_1 > A_2$  diese Bedingungen erfüllt sind. Somit haben wir insbesondere für alle Integrale vom Typ (6.1) mit einer Gewichtsfunktion (6.2) die Existenz einer nicht-minimalen Formel vom Grad 5 mit 8 Knoten nachgewiesen. Als Basis des zur Formel gehörigen Ideals können wir neben  $R_1$  und  $R_2$  noch das Polynom  $R_3 = P_2^4 - A_1 A_2 (P_0^2 + P_2^2) / (A_2 - 2A_1)$  wählen. Die gemeinsamen 8 Nullstellen dieser Polynome sind die Knoten der Formel. Für  $\omega_\alpha$ ,  $\alpha = 0$ , ist diese Formel wohlbekannt, sie wurde bereits 1908 von W. Burnside [08] angegeben.

Eine weitere Formel erhält man aus (6.7) mit dem Ansatz  $\gamma_2 = \gamma_4 = 0$ . Jetzt ergeben sich die restlichen Unbekannten zu  $\gamma_0 = \gamma_6 = A_1 A_2 (A_3 - A_1)$  und  $\gamma_3^2 = A_1^4 A_2^2$ . Wir wählen  $\gamma_3$  positiv, der negative Wert von  $\gamma_3$  führt auf eine symmetrische Formel. Das System (4.49) hat die Form  $b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 2(b_0 b_3 + b_1 b_2)$ . Man bestimmt folgende Lösungen  $b = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ ,  $(1, 0, 0, 1)$  und  $(0, 1, 1, 0)$ . Als Indexmenge können wir  $M = \{2, 3\}$  wählen, die Bedingung (4.44) hat somit wieder die Form (6.8). Diese Bedingung ist für die hier bestimmten Werte  $\gamma_i$  erfüllt. Als Basis des zu dieser Formel gehörigen Ideals kann man die Polynome  $R_1 = P_0^3 + P_3^3$ ,  $R_2 = P_1^3 + P_2^3$  und  $R_3$

$= P_2^4 + \Lambda_2 P_1^2$  wählen. Die zugehörige Formel für  $\omega_\alpha$ ,  $\alpha = 0$ , hat H. J. Schmid [79]<sub>2</sub> angegeben, siehe 6.5.1.

**6.3.2. Eine nicht-minimale Formel vom Grad 7.** Wir lösen das System (4.48) durch den folgenden symmetrischen Ansatz,  $\gamma_0 = \gamma_8$ ,  $\gamma_2 = \gamma_6 = 0$ ,  $\gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_5 = \gamma_7 = 0$ . Es verbleiben zwei Gleichungen, aus denen man  $\gamma_0 = \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 (\Lambda_4 - \Lambda_1)$  und  $\gamma_4 = -\Lambda_1^2 \Lambda_2 \Lambda_3$  berechnet. Das System (4.49) hat die Gestalt

$$(b_0^2 + b_1^2 + b_3^2 + b_4^2) + (\Lambda_2 + \Lambda_3) b_2^2 / \Lambda_3 = -2(b_0 b_4 + b_1 b_3).$$

Es ergeben sich die folgenden Lösungen  $b = (b_0, b_1, \dots, b_4)$ ,  $(1, 0, 0, 0, -1)$  und  $(0, 1, 0, -1, 0)$ . Damit liegen die Polynome  $R_1 = P_0^4 - P_4^4$  und  $R_2 = P_1^4 - P_3^4$  fest. Die Indexmenge kann als  $M = \{2, 3, 4\}$  gewählt werden. Die Bedingungen aus (4.44) sind erfüllt. Damit gibt es eine Formel vom Grad 7 mit 13 Knoten, die die Nullstellen der Polynome  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_3 = P_2^5 - \Lambda_3 P_2^3$ ,  $R_4 = P_3^5 - \Lambda_3 P_3^3$  sind. Auch diese Formel wurde für  $\omega_\alpha$ ,  $\alpha = 0$ , bei H. J. Schmid [79]<sub>2</sub> angegeben, siehe 6.5.8.

Bei C. R. Morrow und T. N. L. Patterson [78] und H. J. Schmid [80] wird auch die Existenz nicht-minimaler Formeln vom Grad  $m = 2k - 1$ ,  $k$  ungerade, für die Gewichtsfunktion  $\omega_\alpha$ ,  $\alpha = 1/2$ , nachgewiesen. Diese Formel besitzen einen Knoten mehr als die Schranke in (4.21) angibt.

#### 6.4. Formeln für Integrale über dem Dreieck und dem Kreis

Abschliessend streifen wir kurz Kubaturformeln für Integrale, die keine Produkt-Gestalt haben. Von besonderem Interesse sind hier Integrale über dem Kreis  $\mathcal{K}_2$  und über dem Simplex

$$T_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1, x, y \geq 0\}.$$

Wir nehmen in beiden Fällen eine konstante Gewichtsfunktion an und bezeichnen die zugehörigen linearen Funktionale mit  $I_K$  bzw.  $I_T$ , wobei wir auf  $I_K(1) = I_T(1) = 1$  normieren. Die orthogonalen Polynome vom Grad  $i$  in monomischer Form bezeichnen wir mit  $P_j^i$ ,  $j = 0, 1, \dots, i$ . Diese Polynome haben in den hier betrachteten Fällen keine Produkt-Gestalt mehr, ihre Berechnung ist entsprechend aufwendig. Wir untersuchen hier Formeln mit geradem Genauigkeitsgrad, soweit das ohne übermässigen Rechenaufwand möglich ist.

Beginnen wir mit einer Charakterisierung aller minimalen Formeln vom Grad 2 für  $I_T$ . Wenn es eine Kubaturformel vom Grad 2 mit 3 Knoten gibt, so wird das zur Formel gehörige Ideal von den Polynomen

$$(6.9) \quad \begin{cases} R_0 = P_0^2 + a_0 P_0^1 + b_0 P_1^1, \\ R_1 = P_1^2 + a_1 P_0^1 + b_1 P_1^1, \\ R_2 = P_2^2 + a_2 P_0^1 + b_2 P_1^1 \end{cases}$$

erzeugt, wobei die reellen Parameter  $a_i$  und  $b_i$  dadurch eingeschränkt werden, dass das von  $R_0, R_1, R_2$  erzeugte Ideal reell sein soll. Wir arbeiten hier bewusst nicht mit den Polynomen  $T_j^i$  aus 4.1, denn ihre zusätzliche Berechnung übersteigt den Rechengewinn, der durch die einfache Form von (4.5) vorliegt. Die Bedingungen aus Korollar 4.1.4 lassen sich jedoch auf den Ansatz (6.9) in analoger Weise übertragen. In explizier Form liest sich (6.9) als

$$(6.10) \quad \begin{cases} x^2 - 4x/5 + 1/10 + a_0(x-1/3) + b_0(y-1/3), \\ xy - x/5 - y/5 + 1/20 + a_1(x-1/3) + b_1(y-1/3), \\ y^2 - 4y/5 + 1/10 + a_2(x-1/3) + b_2(y-1/3). \end{cases}$$

Die Bedingungen an die Parameter ergeben sich nach einiger Rechnung zu

$$(6.11) \quad \begin{cases} a_0 = b_1 + 2b_0 - 2a_1, \\ b_2 = a_1 + 2a_2 - 2b_1, \\ 1/100 = b_1a_1 - b_0a_2 + 2a_1/15 + 2b_1/15. \end{cases}$$

**6.4.1. Minimale Formeln vom Grad 2 für  $I_T$ .** Alle minimalen Formeln vom Grad 2 für  $I_T$  sind durch das von den Polynomen aus (6.10) erzeugte Ideal charakterisiert, wobei die Parameter den Bedingungen aus (6.11) genügen.

Für  $a_1 = b_1 = -a_0 = -b_2 = 1/30$ ,  $b_0 = a_2 = 0$  ergibt sich die bekannte klassische Formel mit den Knoten  $(2/3, 1/6)$ ,  $(1/6, 1/6)$  und  $(1/6, 2/3)$ .

Der Aufwand für Formeln des Grades 4 ist weitaus höher. Nach längerer Rechnung stellt man jedoch fest, dass die gewonnene Kennzeichnung sich von der des Produktfalles nur unwesentlich unterscheidet, insbesondere ist die Zahl der Freiheitsgrade ebenso gross wie bei Formeln für Produkt-Integrale vom Grad 4.

Wir setzen die Basis des gesuchten Ideals in der folgenden Form an,

$$(6.12) \quad \begin{cases} R_0 = P_0^3 + a_0P_0^2 + a_1P_1^2 + a_2P_2^2, \\ R_1 = P_1^3 + b_0P_0^2 + b_1P_1^2 + b_2P_2^2, \\ R_2 = P_2^3 + c_2P_0^2 + c_1P_1^2 + c_0P_2^2, \\ R_3 = P_3^3 + d_2P_0^2 + d_1P_1^2 + d_0P_2^2, \end{cases}$$

wobei

$$P_0^2(x, y) = P_2^2(y, x) = x^2 - 4x/5 + 1/10, \quad P_1^2(x, y) = xy - (x+y)/5 + 1/20$$

und

$$P_0^3(x, y) = P_3^3(y, x) = x^3 - 9x^2/7 + 3x/7 - 1/35,$$

$$P_1^3(x, y) = P_2^3(x, y) = x^2y - x^2/7 - 4xy/7 + 2x/21 + y/21 - 1/105$$

gilt. Hierbei werden die Parameter durch die Bedingungen aus Korollar 4.1.4 festgelegt. Diese Bedingungen bestehen aus den folgenden linearen Gleichungen,

$$(6.13) \quad \begin{cases} -a_0/2 + 7a_1/12 - a_2/2 - b_0 + b_1/2 - b_2/3 = 0, \\ a_0/3 - a_1/2 + a_2 + b_0/2 - 7b_1/12 + b_2/2 = 0, \\ -b_0/2 + 7b_1/12 - b_2/2 - c_2 + c_1/2 - c_0/3 = 0, \end{cases}$$

sowie aus drei weiteren Gleichungen, die sich aus (6.13) durch Vertauschen der  $a_i$  mit den  $d_i$  und der  $b_i$  mit den  $c_i$  ergeben. Ausserdem müssen die folgenden nichtlinearen Gleichungen erfüllt werden,

$$(6.14) \quad \begin{cases} b_1 b_0 + b_2 c_2 - a_1 c_2 - a_2 d_2 + 8b_0/35 + 2b_1/35 = 2/147, \\ b_1 b_2 - a_0 b_2 + b_2 c_0 - a_1 c_0 + b_0 a_2 - a_2 d_0 + 4b_2/7 - \\ \quad - 2a_1/35 + 12a_2/35 = 0, \\ b_1^2 - a_0 b_1 + b_2 c_1 - a_1 c_1 + b_0 a_1 - a_2 d_1 - 8a_0/35 + 8a_1/35 + \\ \quad + 12b_1/35 + 8b_2/35 = 4/147, \\ b_0^2 - b_0 c_1 - c_0 c_2 + b_1 c_2 + b_2 d_2 - a_0 c_2 + 2b_0/7 - 2c_1/35 + \\ \quad + 2c_2/35 = 2/147, \\ -b_0 b_1 + c_0 c_1 - b_2 d_1 + a_1 c_2 - 8b_0/35 + 8c_0/35 - 22b_1/35 + \\ \quad + 22c_1/35 = 0, \\ c_1 b_2 - b_0 b_2 + c_0^2 - b_1 c_0 - b_2 d_0 + a_2 c_2 + 2c_0/7 - 2b_1/35 + \\ \quad + 2b_2/35 = 2/147. \end{cases}$$

Hinzu kommen weitere Bedingungen, die sich aus (6.14) durch Vertauschung der  $a_i$  mit den  $d_i$  und der  $b_i$  mit den  $c_i$  ergeben.

**6.4.2. Minimale Formeln vom Grad 4 für  $I_7$ .** Alle minimalen Formeln vom Grad 4 für  $I_7$  sind durch das von den Polynomen aus (6.12) erzeugte Ideal charakterisiert, wobei die Parameter  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  und  $d_i$  den Bedingungen aus (6.13) und (6.14) genügen, sowie diesen Bedingungen bei Vertauschung von  $a_i$  mit  $d_i$  und  $b_i$  mit  $c_i$ .

In (6.14) liegen noch Redundanzen vor, wenn man die Bedingungen aus (6.13) einsetzt. Das wird durch den symmetrischen Ansatz  $a_i = d_i$ ,  $b_i = c_i$  deutlich. Jetzt reduzieren sich die Gleichungen aus (6.14) nach dem Einsetzen von (6.13). Die linearen Beziehungen nehmen die Form

$$\begin{aligned} b_0 &= -a_0/5 + 6a_2/5, \\ b_1 &= 13a_0/10 - 9a_1/4 + 57a_2/10, \\ b_2 &= 21a_0/20 - 13a_1/8 + 69a_2/20 \end{aligned}$$

an, während (6.14) auf die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}
& 337a_0^2/200 + 273a_1^2/32 + 7097a_2^2/200 - 321a_0a_1/40 + 1533a_0a_2/100 - \\
& \quad - 1389a_1a_2/40 + 2a_0/35 - 9a_1/35 + 6a_2/5 = 4/147, \\
& 21a_0^2/200 + 117a_1^2/32 + 5001a_2^2/200 - 93a_0a_1/40 + 639a_0a_2/100 - \\
& \quad - 807a_1a_2/40 + 21a_0/35 - 69a_1/70 + 81a_2/35 = 0
\end{aligned}$$

schrumpft. Damit ist ein Parameter frei zu wählen. Mit dem Ansatz  $a_1 = 0$  haben wir eine Lösung dieser Gleichungen numerisch berechnet und die Knoten der zugehörigen Formel bestimmt, siehe 6.5.20.

Weniger aufwendig ist das Vorgehen im Falle von  $I_K$ . Wir geben eine Charakterisierung sämtlicher minimalen Formeln vom Grad 4 an. Dazu setzen wir die Polynome, die das zur Formel gehörige Ideal erzeugen sollen, in der folgenden Form an,

$$(6.15) \quad \begin{cases} R_0 = x^3 - x/2 + a_0(x^2 - 1/4) + b_0xy + c_0(y^2 - 1/4), \\ R_1 = x^2y - y/6 + a_1(x^2 - 1/4) + b_1xy + c_1(y^2 - 1/4), \\ R_2 = xy^2 - x/6 + a_2(x^2 - 1/4) + b_2xy + c_2(y^2 - 1/4), \\ R_3 = y^3 - y/2 + a_3(x^2 - 1/4) + b_3xy + c_3(y^2 - 1/4). \end{cases}$$

Die Bedingungen, die sich gemäss Korollar 4.1.4 an die Parameter  $a_i$ ,  $b_i$  und  $c_i$  ergeben, gliedern sich in die linearen Gleichungen

$$(6.16) \quad \begin{cases} a_0 = 3c_0 - 2b_1, & c_1 = 3a_1 - 2b_0, & c_2 = 3a_2 - 2b_1, \\ a_1 = 3c_1 - 2b_2, & c_3 = 3a_3 - 2b_2, & a_2 = 3c_2 - 2b_3 \end{cases}$$

und in die folgenden nichtlinearen Bedingungen,

$$(6.17) \quad \begin{cases} a_0b_1 - b_0a_1 - b_1^2 + b_0b_2 - b_2c_1 + b_3c_0 = -1/3, \\ a_2b_0 - b_1a_1 - c_1a_2 + a_3c_0 = 0, \\ a_0c_1 - a_1c_0 - b_1c_1 + b_0c_2 - c_1c_2 + c_0c_3 = 0, \\ a_2b_0 - c_1b_3 - a_1b_1 + c_2b_2 = 0, \\ a_0a_2 - c_1a_3 + a_1b_2 - a_1^2 + a_2c_2 - b_1a_2 = -1/6, \\ a_2c_0 - c_1c_3 + c_1b_2 - a_1c_1 + c_2^2 - c_2b_1 = 1/6, \\ b_0a_3 - b_3c_2 + b_1b_3 - a_2b_1 + c_3b_2 - b_2^2 = -1/3, \\ a_0a_3 - c_2a_3 + a_1b_3 - a_2a_1 + a_2c_3 - b_2a_2 = 0. \end{cases}$$

**6.4.3. Minimale Formeln vom Grad 4 für  $I_K$ .** *Alle minimalen Formeln vom Grad 4 für  $I_K$  sind durch das von den Polynomen aus (6.15) erzeugte Ideal charakterisiert, wobei die Parameter  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  den Bedingungen aus (6.16) und (6.17) genügen.*

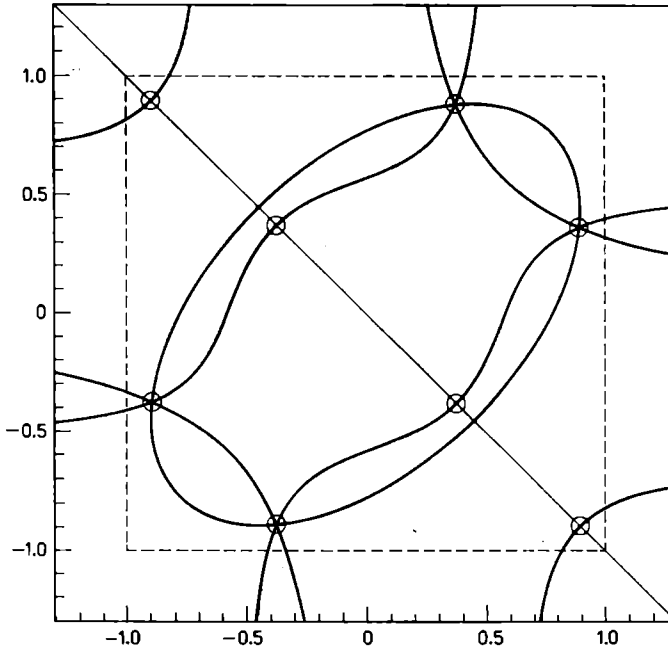
Wir haben darauf verzichtet, durch Einsetzen der Gleichungen aus (6.16) in (6.17) die Redundanzen zu bestimmen, geben aber eine Lösung durch den direkten Ansatz  $a_0 = b_0 = c_0 = b_1 = 0$  an. In diesem Fall erhält man für die

restlichen Parameter die Bedingungen  $a_2 = b_3 = c_2 = 0$ ,  $a_1 = c_3 = 1/6$ ,  $a_3 = 1/2$ . Die zugehörige Formel geben wir in 6.5.21 an. Minimale Formeln vom Grad 4 für  $I_K$ , die den Nullpunkt als Knoten besitzen, hat bereits I. P. Mysovskikh [64] bestimmt.

### 6.5. Numerische Ergebnisse

Wir geben hier für die in diesem Kapitel untersuchten Beispiele numerische Ergebnisse an. Dabei beschränken wir uns im wesentlichen auf Standardbeispiele, die neu sind. Weitere numerische Ergebnisse findet man bei N. Kroll, J. Linden und H. J. Schmid [80]. Wir geben die explizite Form der Polynome an, die das zur Formel gehörige Ideal erzeugen, und illustrieren die Lage der Knoten durch Plotterzeichnungen der Nullstellen dieser Polynome. Eine sinnvolle Bezeichnung ist hier nur durch eine farbige Wiedergabe möglich. Da wir darauf verzichten müssen, begnügen wir uns damit, die gemeinsamen Nullstellen durch Kreise hervorzuheben. Das Integrationsgebiet ist gestrichelt eingezeichnet, um die Formeln mit einem Blick ersichtlich werden zu lassen, deren Knoten im Integrationsgebiet liegen. Bei den Zeichnungen ist zu berücksichtigen, dass gemeinsame Komponenten nicht zu erkennen sind, hier muss man die explizite Gestalt der geplotteten Kurven zu Hilfe nehmen.

Numerische Werte für die Knoten werden nur in einigen interessanten Fällen angegeben. Zu ihrer Berechnung – wie zur Berechnung der Koeffizienten der orthogonalen Polynome im Fall  $m = 2k - 2$  – wurde eine zyklische Version des Broyden-Verfahrens benutzt. Die Genauigkeit war in allen durchgerechneten Beispielen auf über 20 Stellen gesichert. Es wurde auf 20 Stellen gerundet. Wir bezeichnen die Integrale über  $C_2$  mit der Gewichtsfunktion  $\omega_\alpha$  aus (6.2) mit  $I_\alpha$ . Die zugehörigen orthogonalen Polynome und ihre Momente werden mit  $P_j^{\alpha,i}$  bzw.  $M_j^{\alpha,i}$  bezeichnet. Ihre explizite Form wurde in 6.1 angegeben.

6.5.1. Formel vom Grad 5 mit 8 Knoten für  $I_\alpha$ ,  $\alpha = 0$ .

Die Knoten sind die gemeinsamen Nullstellen der Polynome

$$R_1 = x^3 - 3x/5 + y^3 - 3y/5,$$

$$R_2 = y(x^2 - 1/3) + x(y^2 - 1/3),$$

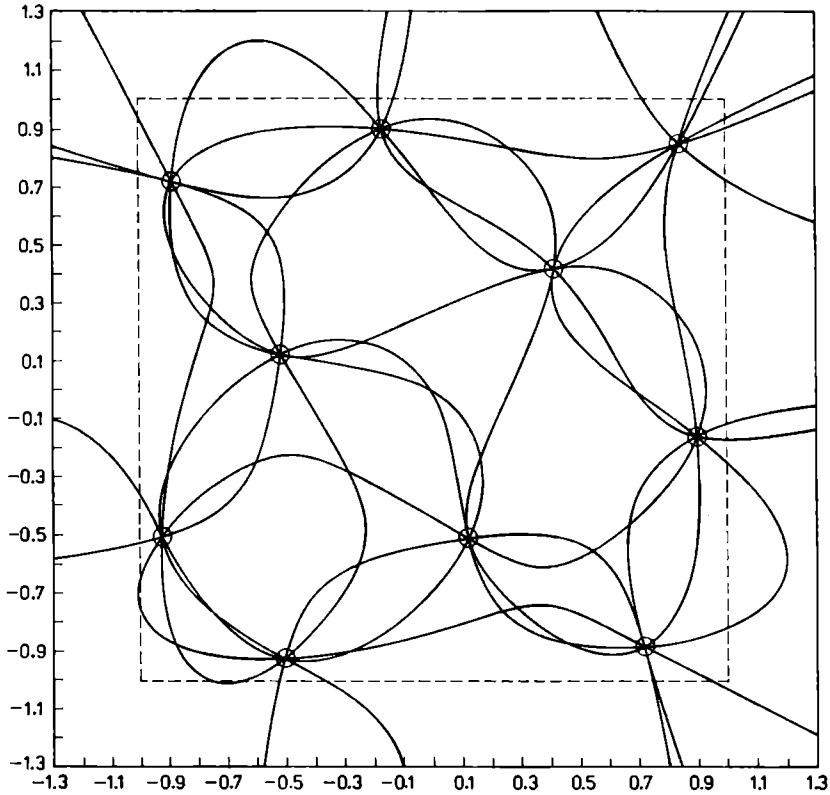
$$R_3 = (x^2 - 1/3)(y^2 - 1/3) + 4xy/15.$$

Sie berechnen sich zu  $(a, b)$ ,  $(b, a)$ ,  $(-b, -a)$ ,  $(-a, -b)$ ,  $(-a, a)$ ,  $(-b, b)$ ,  $(a, -a)$ ,  $(b, -b)$ , wobei

$$a = \sqrt{\frac{7}{15} - \frac{\sqrt{24}}{15}} \quad \text{und} \quad b = \sqrt{\frac{7}{15} + \frac{\sqrt{24}}{15}}$$

gilt.

### 6.5.2. Minimale Formel vom Grad 6 für $I_\alpha$ , $\alpha = 0$ .



Die Knoten sind die gemeinsamen Nullstellen der Polynome

$$R_i = P_i^{\alpha,4} + \sum_{j=0}^3 \gamma_{i+j} P_j^{\alpha,3} / M_j^{\alpha,3}, \quad i = 0, 1, \dots, 4,$$

wobei  $\alpha = 0$  und die Koeffizienten  $\gamma_i$  die folgenden Werte haben,

$$\gamma_0 = \gamma_7 = 0.00281288840812658383,$$

$$\gamma_1 = \gamma_6 = -0.00020046911772661817,$$

$$\gamma_2 = \gamma_5 = 0.00400513589739527501,$$

$$\gamma_3 = \gamma_4 = -0.00811576150159656691.$$

Die Knoten haben die folgenden Werte,

$i$	$x_i$	$y_i$
1	0.84201445597398314143	$x_1$
2	0.89941595523293391288	-0.16227524049635520844
3	0.12337121100804798421	-0.50804102187713235436
4	0.41592857677425903725	$x_4$
5	0.71783400678669389053	-0.87942554526195005038
6	-0.50322592728712731628	-0.92115620066809328111
7	$y_6$	$x_6$
8	$y_2$	$x_2$
9	$y_5$	$x_5$
10	$y_3$	$x_3$

Die Koeffizienten haben die Werte

$$C_1 = 0.04891574726261658687,$$

$$C_2 = C_8 = 0.08332434106194142326,$$

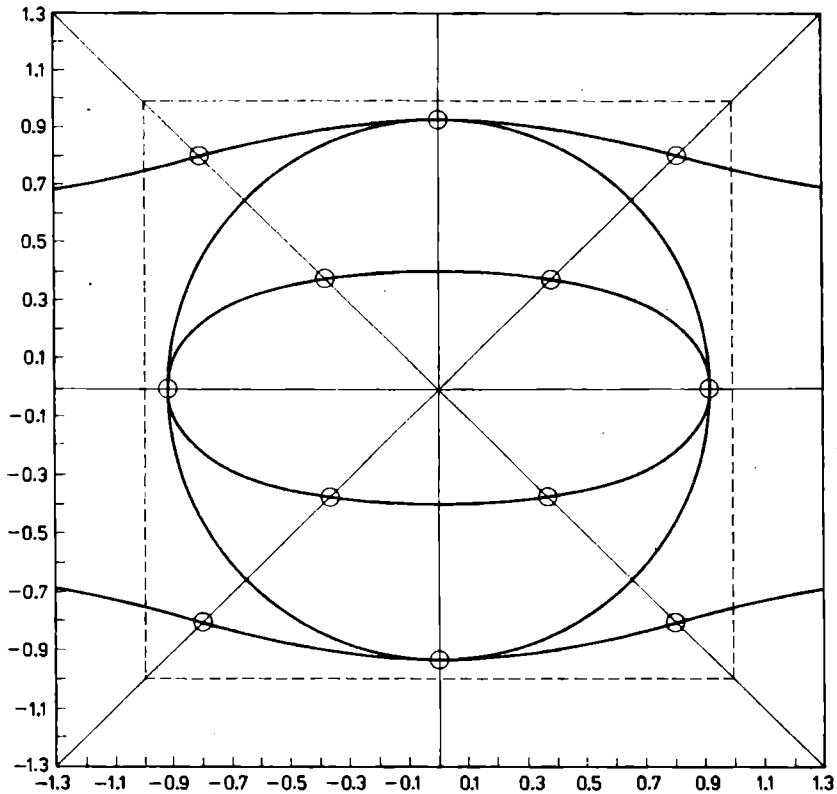
$$C_3 = C_{10} = 0.18216416106602873034,$$

$$C_4 = 0.16818171299542258861,$$

$$C_5 = C_9 = 0.06092146870198110653,$$

$$C_6 = C_7 = 0.06504129904087052559.$$

### 6.5.3. Minimale Formel vom Grad 7 für $I_a$ , $\alpha = 0$ , Typ (i).



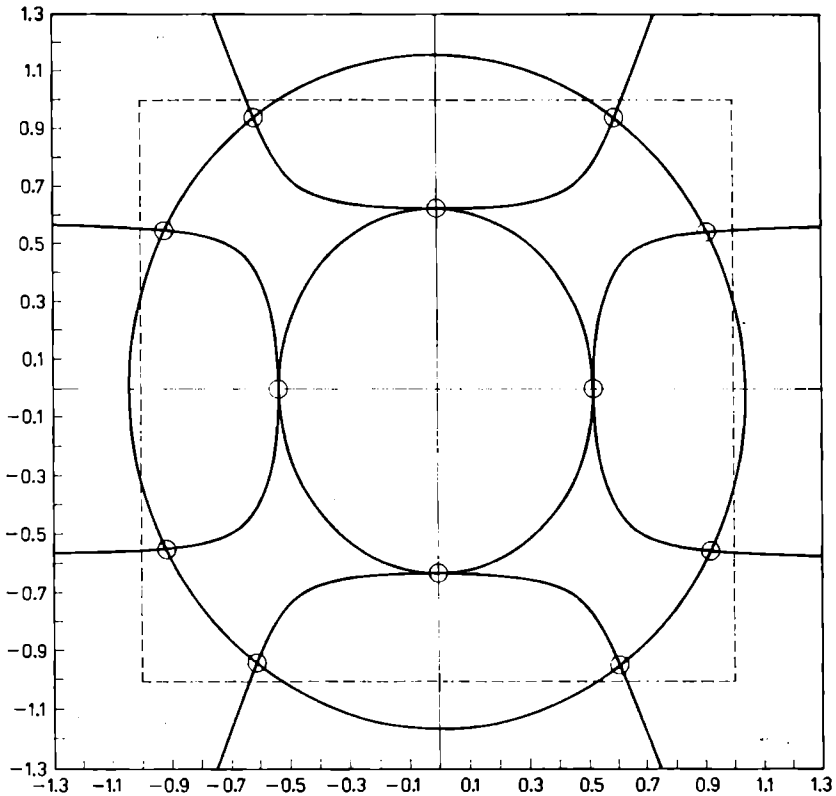
Die Knoten sind die gemeinsamen Nullstellen der Polynome

$$R_1 = x^4 - 6x^2/7 - y^4 + 6y^2/7,$$

$$R_2 = y(x^3 - 3x/5) - x(y^3 - 3y/5),$$

$$R_3 = (x^2 - 1/3)(y^2 - 1/3) + 55(y^4 - 6y^2/7 + 3/35)/27.$$

(In 6.1.6 wird  $a = 0$  gewählt.)

**6.5.4. Minimale Formel vom Grad 7 für  $I_\alpha$ ,  $\alpha = 0$ , Typ (ii).**


Die Knoten sind die gemeinsamen Nullstellen der Polynome

$$R_1 = a(1 + 28a/27)P_0^{\alpha,4} + (a^2 - 1)P_2^{\alpha,4} - (28/27 + a)P_4^{\alpha,4},$$

$$R_2 = -aP_1^{\alpha,4} + P_3^{\alpha,4},$$

$$R_3 = P_2^{\alpha,4} + (28/27 + a)P_4^{\alpha,4}.$$

wobei  $a = -43/42 - \sqrt{85/42}$  gilt. (In 6.1.6, (ii) wird  $b = 0$  gewählt.)

Die Knoten haben die folgenden Werte,

$i$	$x_i$	$y_i$
1	0	0.62704137378039531763
2	0.52942280204265532589	0
3	$-x_2$	0
4	0.61126876646532841440	0.93884325665885830459
5	0	$-y_1$
6	0.91711782231277058626	0.54793120682809232377
7	$x_6$	$-y_6$
8	$x_4$	$-y_4$
9	$-x_4$	$-y_4$
10	$-x_6$	$-y_6$
11	$-x_6$	$y_6$
12	$-x_4$	$y_4$

Die Koeffizienten haben die Werte

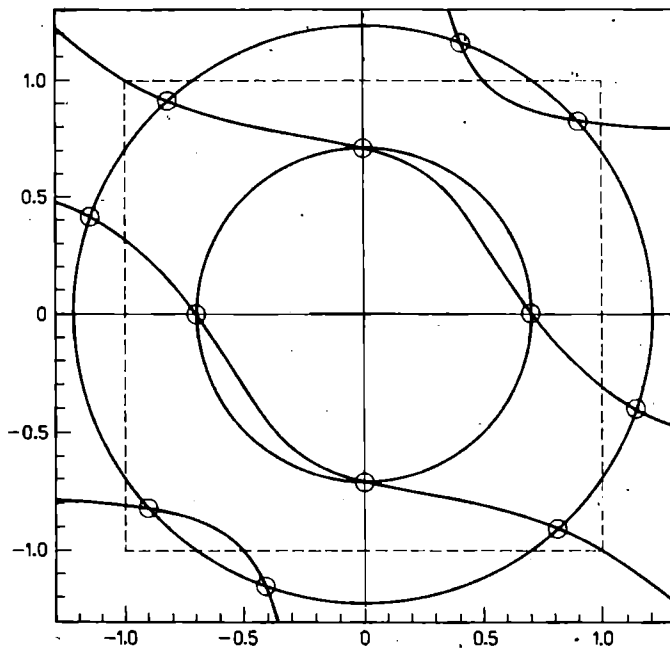
$$C_1 = C_5 = 0.14750317885525769074,$$

$$C_2 = C_3 = 0.15896347086081994296,$$

$$C_4 = C_8 = C_9 = C_{12} = 0.04350237223672390153,$$

$$C_6 = C_7 = C_{10} = C_{11} = 0.05326430290523728163.$$

**6.5.5. Minimale Formel vom Grad 7 für  $I_a$ ,  $\alpha = -1/2$ , Typ (iii).**



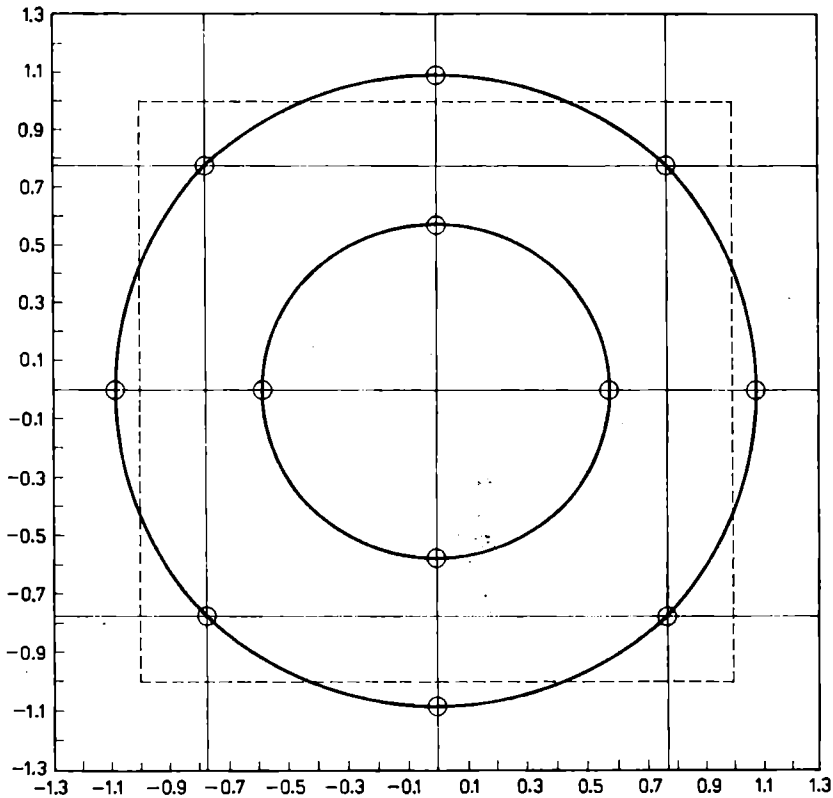
Die Knoten sind die gemeinsamen Nullstellen der Polynome

$$R_1 = x^4 - x^2 + 1/8 + 2(x^2 - 1/2)(y^2 - 1/2) + y^4 - y^2 + 1/8,$$

$$R_2 = y(x^3 - 3x/4) + x(y^3 - 3y/4),$$

$$R_3 = (x^2 - 1/2)(y^2 - 1/2) + x(y^3 - 3y/4).$$

(In 6.1.6, (iii) wurde  $a = -1$  gewählt.)

**6.5.6. Minimale Formel vom Grad 7 für  $I_\alpha$ ,  $\alpha = 0$ , Typ (iv).**


Die Knoten sind die gemeinsamen Nullstellen der Polynome

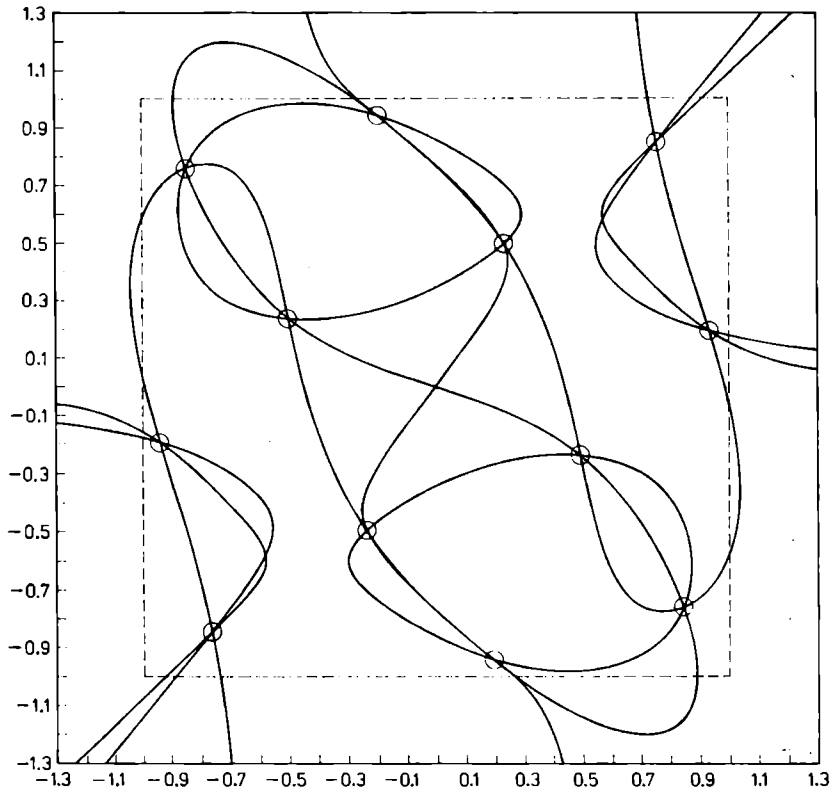
$$R_1 = x^4 - 6x^2/7 + y^4 - 6y^2/7 + 27(x^2 - 1/3)(y^2 - 1/3)/14 + 6/35,$$

$$R_2 = y(x^3 - 3x/5),$$

$$R_3 = x(y^3 - 3y/5).$$

(In 6.1.6, (iv) wurde  $a = 1$  gewählt.)

### 6.5.7. Minimale Formel vom Grad 7 für $I_\alpha$ , $\alpha = 0$ , Typ (v).



Die Knoten sind die gemeinsamen Nullstellen der Polynome

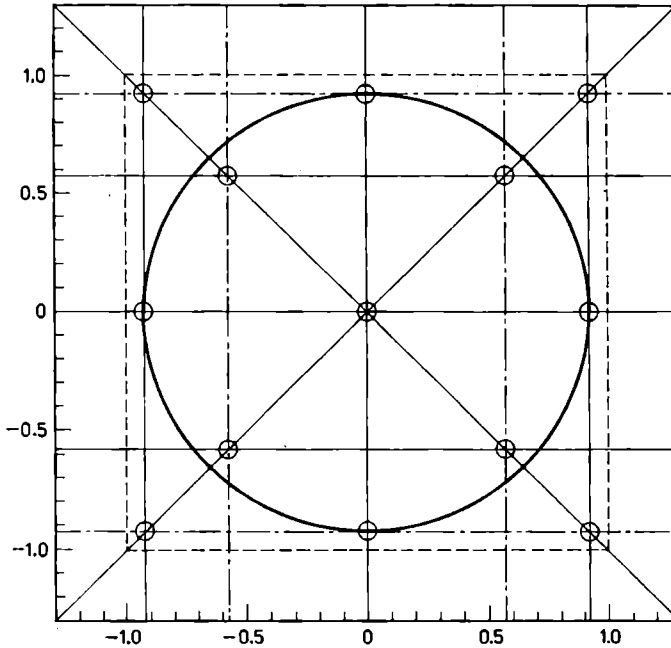
$$R_1 = P_0^{\alpha,4} + P_1^{\alpha,4} + 27P_2^{\alpha,4}/28,$$

$$R_2 = 28P_1^{\alpha,4}/27 - P_3^{\alpha,4}/27 - P_4^{\alpha,4},$$

$$R_3 = 84P_1^{\alpha,4}/135 + 9P_2^{\alpha,4}/35 - 13P_3^{\alpha,4}/45 + P_4^{\alpha,4}/3.$$

(In 6.1.6, (v) wurde  $a = d = 0$  und  $b = c = -1$  gewählt,  $R_3$  wurde in einer anderen Gestalt als in 6.1.6, (v) angegeben geplottet.)

**6.5.8. Formel vom Grad 7 mit 13 Knoten für  $I_\alpha$ ,  $\alpha = 0$ .**



Die Knoten sind die gemeinsamen Nullstellen der Polynome

$$R_1 = x^4 - 6x^2/7 - y^4 + 6y^2/7,$$

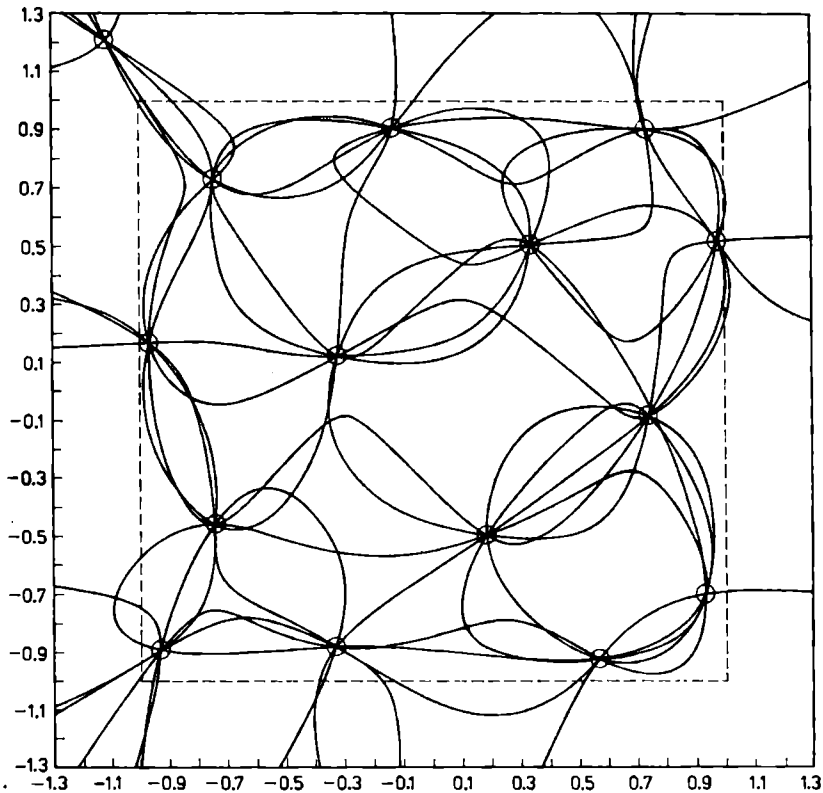
$$R_2 = y(x^3 - 3x/5) - x(y^3 - 3y/5),$$

$$R_3 = (y^2 - 1/3)(x^3 - 3x/5) - 9(y^2 - 1/3)x/35,$$

$$R_4 = (x^2 - 1/3)(y^3 - 3y/5) - 9(x^2 - 1/3)y/35.$$

Sie haben die Gestalt  $(0, 0)$ ,  $(\pm\sqrt{1/3}, \pm\sqrt{1/3})$ ,  $(\pm\sqrt{6/7}, \pm\sqrt{6/7})$ ,  $(0, \pm\sqrt{6/7})$ ,  $(\pm\sqrt{6/7}, 0)$ .

### 6.5.9. Minimale Formel vom Grad 8 für $I_\alpha$ , $\alpha = 0$ .



Die Knoten sind die gemeinsamen Nullstellen der Polynome

$$R_i = P_i^{\alpha,5} + \sum_{j=0}^4 \gamma_{i+j} P_j^{\alpha,4} / M_j^{\alpha,4}, \quad i = 0, 1, \dots, 5,$$

wobei die Koeffizienten  $\gamma_i$  die folgende Form haben,

$$\gamma_0 = 0.00021575625473967300,$$

$$\gamma_1 = -0.00076588075327800541,$$

$$\gamma_2 = -0.00026184553450149853,$$

$$\gamma_3 = 0.00130225743054657344,$$

$$\gamma_4 = 0.00342820697355507257,$$

$$\gamma_5 = -0.00170788443090971111,$$

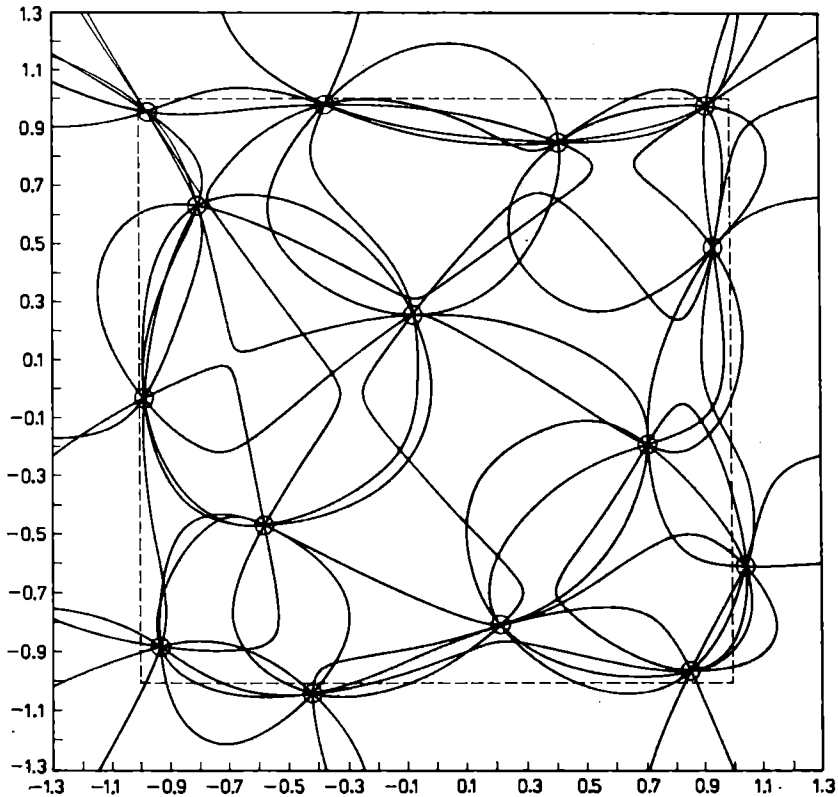
$$\gamma_6 = 0.00166087511182251111,$$

$$\gamma_7 = -0.00126415718534784990,$$

$$\gamma_8 = 0.00088074976617305312,$$

$$\gamma_9 = -0.00154056766715330256.$$

### 6.5.10. Minimale Formel vom Grad 8 für $I_\alpha$ , $\alpha = -1/2$ .



Die Knoten sind die gemeinsamen Nullstellen der Polynome

$$R_i = P_i^{\alpha,5} + \sum_{j=0}^4 \gamma_{i+j} P_j^{\alpha,4} / M_j^{\alpha,4}, \quad i = 0, 1, \dots, 5,$$

wobei die Koeffizienten  $\gamma_i$  die folgende Form haben,

$$\gamma_0 = -0.00103952066959497917,$$

$$\gamma_1 = -0.00121650790575613457,$$

$$\gamma_2 = 0.00063644656926736158,$$

$$\gamma_3 = -0.00231492038160064748,$$

$$\gamma_4 = 0.00368862550411017785,$$

$$\gamma_5 = -0.00256478152832918992,$$

$$\gamma_6 = -0.00402519127539309922,$$

$$\gamma_7 = -0.00193330377183919597,$$

$$\gamma_8 = 0.00089430024513104541,$$

$$\gamma_9 = 0.00105819912975183162.$$

Die Knoten haben die folgenden Werte,

$i$	$x_i$	$y_i$
1	-0.97355570810296120974	0.95384586666298177013
2	-0.36408091320933487785	0.97867068972643122063
3	0.42763946360113317476	0.84845289667849384554
4	0.92547951865587359801	0.97311198407776036487
5	-0.79718794697839117565	0.63029163822252790961
6	-0.07250758601925435740	0.25569449717261621845
7	0.94543683703394246393	0.48694118697419822656
8	-0.98503137923153430619	-0.03475948141991750533
9	-0.57446934445849179959	-0.46890557198368174865
10	0.71616944634859380271	-0.19056188991509526894
11	-0.93400096312353259253	-0.88160196791551476330
12	-0.41791125637925885976	-1.03722136902054505247
13	0.21428500710734247253	-0.80600407622370589503
14	0.84996739522181660596	-0.95715125078843921736
15	1.03916327279443640978	-0.60593328915991164062

Die Koeffizienten haben die Werte

$$C_1 = 0.03968181051470807382,$$

$$C_2 = 0.05528699173377750461,$$

$$C_3 = 0.08632975977253101411,$$

$$C_4 = 0.04638434280200992646,$$

$$C_5 = 0.08513741799015705231,$$

$$C_6 = 0.08851013979038138489,$$

$$C_7 = 0.06614145150543519746,$$

$$C_8 = 0.05314856221459591834,$$

$$C_9 = 0.08823232677706752908,$$

$$C_{10} = 0.09189984908887157697,$$

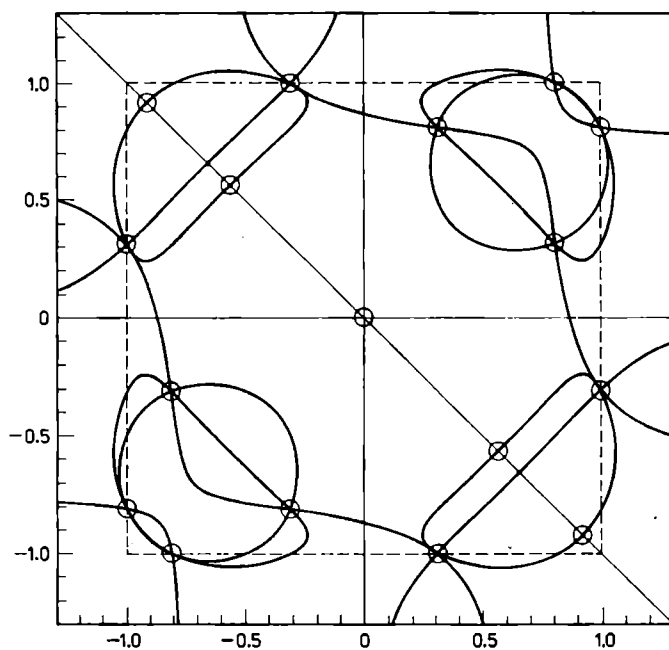
$$C_{11} = 0.07324488777486121389,$$

$$C_{12} = 0.03446092350164093534,$$

$$C_{13} = 0.09183515826370534327,$$

$$C_{14} = 0.06650546825253638037,$$

$$C_{15} = 0.03320091001772094908.$$

**6.5.11. Minimale Formel vom Grad 9 für  $I_\alpha$ ,  $\alpha = -1/2$ , Typ (i).**


Die Knoten sind die gemeinsamen Nullstellen der Polynome

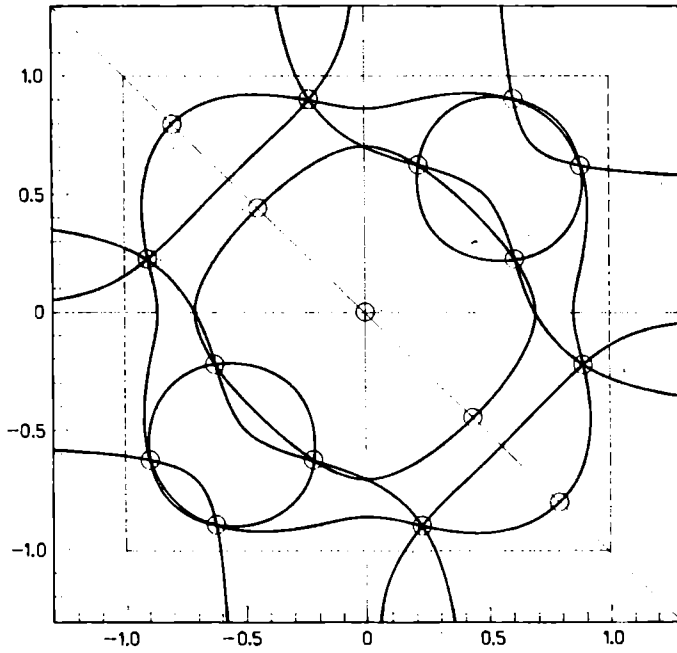
$$R_1 = P_0^{\alpha,5} + P_2^{\alpha,5} + P_4^{\alpha,5},$$

$$R_2 = P_1^{\alpha,5} + P_3^{\alpha,5} + P_5^{\alpha,5},$$

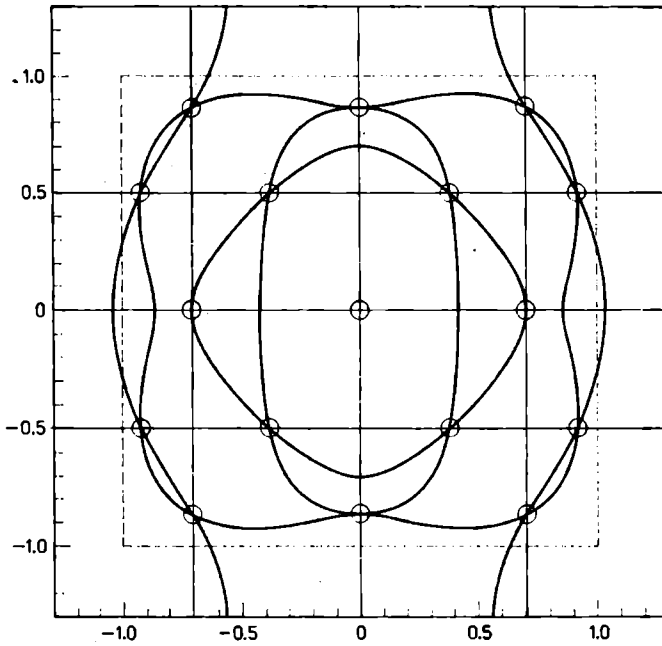
$$R_3 = P_1^{\alpha,5} + P_4^{\alpha,5},$$

$$R_4 = P_2^{\alpha,5} + P_3^{\alpha,5}, \quad \alpha = -1/2.$$

Der Fall  $\alpha = 1/2$  ist in der folgenden Zeichnung dargestellt.

**Minimale Kubaturformel vom Grad 9, für  $I_a$ ,  $\alpha = 1/2$ , Typ (i).**

**6.5.12. Minimale Formel vom Grad 9 für  $I_\alpha$ ,  $\alpha = 1/2$ , Typ (ii).**



Die Knoten sind die gemeinsamen Nullstellen der Polynome

$$R_1 = P_0^{\alpha,5} + P_2^{\alpha,5} + P_4^{\alpha,5},$$

$$R_2 = P_1^{\alpha,5} + P_3^{\alpha,5} + P_5^{\alpha,5},$$

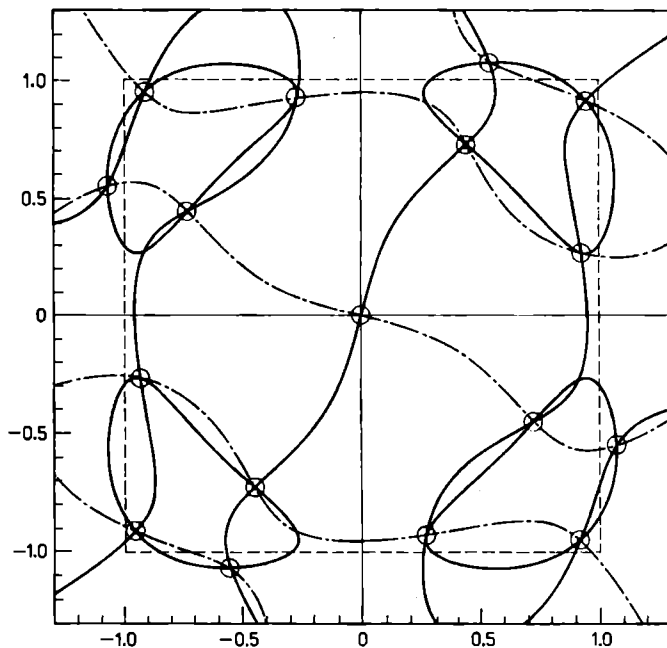
$$R_3 = P_1^{\alpha,5} + P_3^{\alpha,5},$$

$$R_4 = P_2^{\alpha,5}.$$

(In 6.1.8, (ii) wurde  $a = b = 0$  gewählt.)

**6.5.13. Minimale Formel vom Grad 9 für  $I_\alpha$ ,  $\alpha = -3/5$ , Typ (iii).**Minimale Kubaturformel vom Grad 9 für  $C_2$  mit

$$\omega(u) = \frac{\Gamma(2\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)2^{2\alpha+1}}(1-u^2)^\alpha,$$

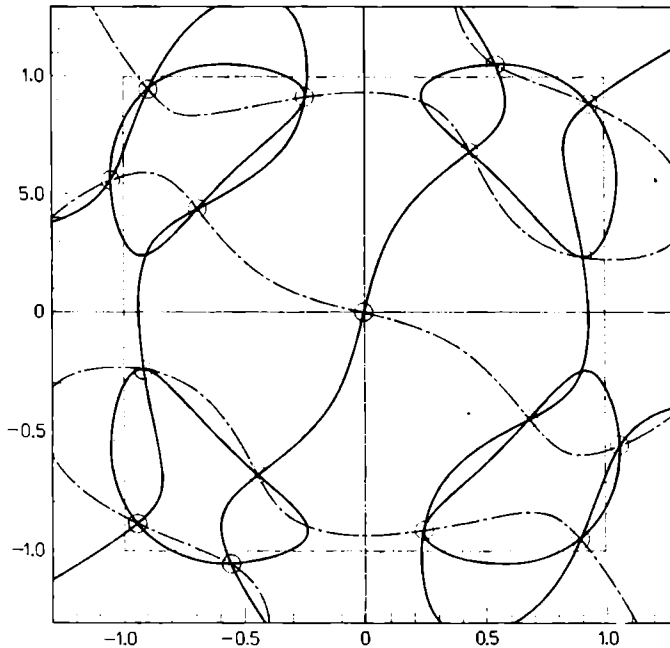
 $\alpha = -0.600$ ,  $c = 1.014$ .

Die Knoten sind die gemeinsamen Nullstellen der Polynome aus 6.1.8, (iii) für  $\alpha = -3/5$ .

**6.5.14. Minimale Formel vom Grad 9 für  $I_\alpha$ ,  $\alpha = -1/2$ , Typ (iii).  
Minimale Kubaturformel vom Grad 9 für  $C_2$  mit**

$$\omega(u) = \frac{\Gamma(2\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)2^{2\alpha+1}}(1-u^2)^\alpha,$$

$\alpha = -0.500$ ,  $c = 0.866$ .

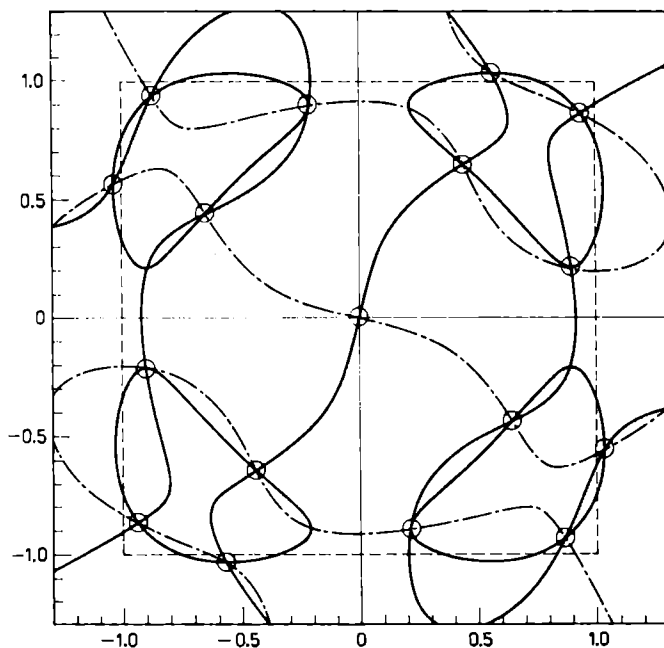


Die Knoten sind die gemeinsamen Nullstellen der Polynome aus 6.1.8, (iii) für  $\alpha = -1/2$ .

**6.5.15. Minimale Formel vom Grad 9 für  $I_\alpha$ ,  $\alpha = -2/5$ , Typ (iii).  
Minimale Kubaturformel vom Grad 9 für  $C_2$  mit**

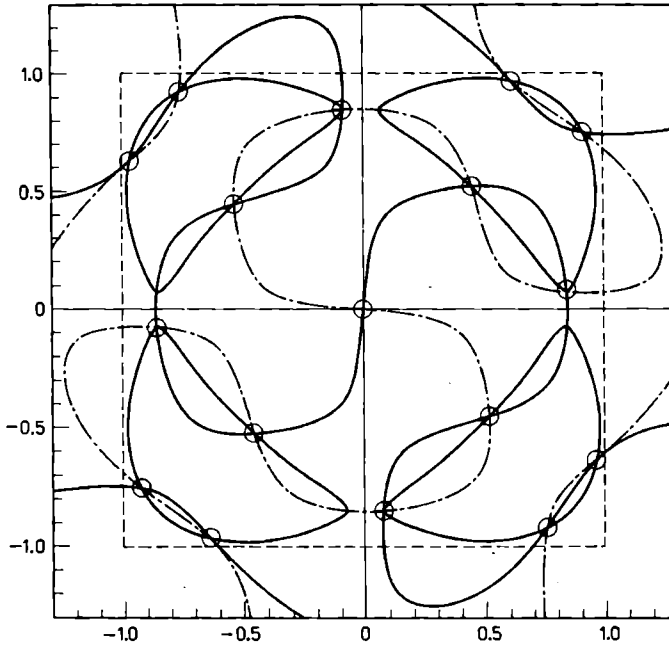
$$\omega(u) = \frac{\Gamma(2\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)2^{2\alpha+1}}(1-u^2)^\alpha,$$

$$\alpha = -0.400, c = 0.738.$$



Die Knoten sind die gemeinsamen Nullstellen der Polynome aus 6.1.8, (iii) für  $\alpha = -2/5$ .

**6.5.16. Minimale Formel vom Grad 9 für  $I_\alpha$ ,  $\alpha = 0$ , Typ (iii).**



Die Knoten sind die gemeinsamen Nullstellen der Polynome

$$R_1 = P_0^{\alpha,5} + 20P_2^{\alpha,5}/21 + P_4^{\alpha,5},$$

$$R_2 = P_1^{\alpha,5} + 20P_3^{\alpha,5}/21 + P_5^{\alpha,5},$$

$$R_3 = 21cP_1^{\alpha,5}/20 + P_2^{\alpha,5} + 21P_4^{\alpha,5}/41,$$

$$R_4 = 21P_1^{\alpha,5}/41 + P_3^{\alpha,5} + 21cP_4^{\alpha,5}/20,$$

wobei  $c = 10\sqrt{86/369}$ .

Die Knoten haben die folgende Werte,

$i$	$x_i$	$y_i$
1	-0.63068011973166885417	0.96884996636197772072
2	0.07620832819261717318	0.85261572933366230775
3	0.75027709997890053354	0.92796164595956966740
4	$y_1$	$-x_1$
5	0.52373582021442933604	0.45333982113564719076
6	$-y_5$	$x_5$
7	$-y_3$	$x_3$
8	$-y_2$	$x_2$
9	0	0
10	$-y_1$	$x_1$
11	$-x_5$	$-y_5$
12	$y_5$	$-x_5$
13	$y_2$	$-x_2$
14	$y_3$	$-x_3$
15	$-x_1$	$-y_1$
16	$-x_2$	$-y_2$
17	$-x_3$	$-y_3$

Die Koeffizienten haben die Werte

$$C_1 = C_4 = C_{10} = C_{15} = 0.02221984454254967674,$$

$$C_2 = C_8 = C_{13} = C_{16} = 0.06726283440994520075,$$

$$C_3 = C_7 = C_{14} = C_{17} = 0.02802490053239912132,$$

$$C_5 = C_6 = C_{11} = C_{12} = 0.09957060981551752382,$$

$$C_9 = 32/243, \text{ dieser Wert ergibt sich auf Grund der Formel (3.19).}$$

### 6.5.17. Minimale Formeln vom Grad $2k-2$ für $I_\alpha$ , $\alpha = 1/2$ .

Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  gibt es eine minimale Formel vom Grad  $2k-2$  mit  $k(k+1)/2$  Knoten für  $I_\alpha$ ,  $\alpha = 1/2$ .

Die Knoten sind die gemeinsamen Nullstellen der Polynome

$$R_0 = P_0^{\alpha,k}, \quad R_i = P_i^{\alpha,k} + \frac{1}{2} P_{k-1}^{\alpha,k-1}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Die Knoten haben folgende Werte,

$$\left( \cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{k+1}, \cos \frac{2\sigma\pi}{k+2} \right),$$

$$\lambda = 1, 2, \dots, [(k+1)/2], \quad \sigma = 1, 2, \dots, [(k+1)/2]$$

und

$$\left( \cos \frac{2\lambda\pi}{k+1}, \cos \frac{(2\sigma-1)\pi}{k+2} \right),$$

$$\lambda = 1, 2, \dots, [k/2], \quad \sigma = 1, 2, \dots, [k/2] + 1.$$

**6.5.18. Minimale Formeln vom Grad  $2k-1$  für  $I_\alpha$ ,  $\alpha = 1/2$ ,  $k$  gerade.**

Für jedes  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k$  gerade, gibt es eine minimale Formel vom Grad  $2k-1$  mit  $k(k+1)/2 + [k/2]$  Knoten für  $I_\alpha$ ,  $\alpha = 1/2$ .

Die Knoten sind die gemeinsamen Nullstellen der Polynome

$$R_i = P_i^{\alpha,k} + P_{k-i}^{\alpha,k}, \quad i = 0, 1, \dots, k/2-1, \quad R_{k/2} = P_{k/2}^{\alpha,k}.$$

Die Knoten haben folgende Werte,

$$\left( \cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{k+2}, \cos \frac{2\sigma\pi}{k+2} \right), \\ \lambda = 1, 2, \dots, k/2+1, \quad \sigma = 1, 2, \dots, k/2,$$

und

$$\left( \cos \frac{2\lambda\pi}{k+2}, \cos \frac{(2\sigma-1)\pi}{k+2} \right), \\ \lambda = 1, 2, \dots, k/2, \quad \sigma = 1, 2, \dots, k/2+1.$$

**6.5.19. Minimale Formeln vom Grad  $2k-1$  für  $I_\alpha$ ,  $\alpha = 1/2$ ,  $k$  ungerade.**

Für jedes  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k$  ungerade, gibt es eine minimale Formel vom Grad  $2k-1$  mit  $k(k+1)/2 + [k/2]$  Knoten für  $I_\alpha$ ,  $\alpha = 1/2$ . Die Knoten sind die gemeinsamen Nullstellen der Polynome

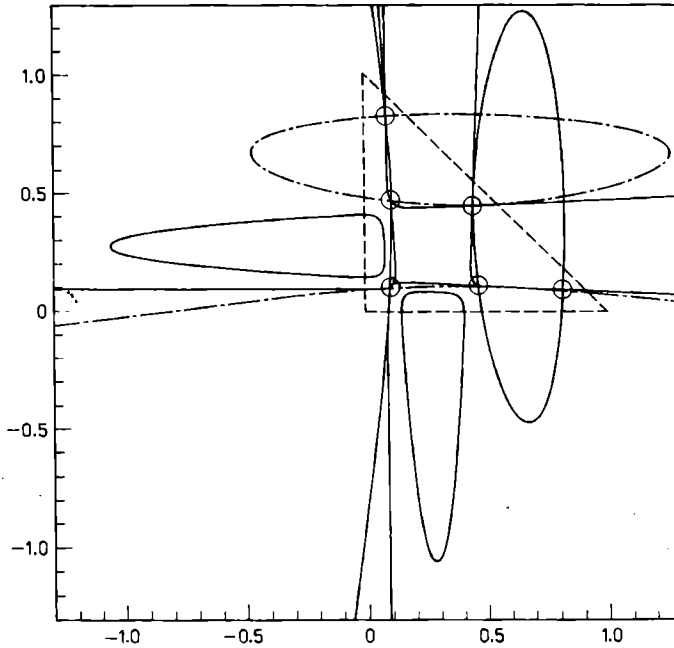
$$R_i = P_i^{\alpha,k} + P_{k-i-1}^{\alpha,k}, \quad i = 0, 1, \dots, [k/2]-1, \\ R_{[k/2]} = P_{[k/2]}^{\alpha,k}, \quad R_{[k/2]+1} = P_k^{\alpha,k}.$$

Die Knoten haben folgende Werte

$$\left( \cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{k+3}, \cos \frac{2\sigma\pi}{k+1} \right), \\ \lambda = 1, 2, \dots, [k/2]+2, \quad \sigma = 1, 2, \dots, [k/2],$$

und

$$\left( \cos \frac{2\lambda\pi}{k+3}, \cos \frac{(2\sigma-1)\pi}{k+1} \right), \\ \lambda = 1, 2, \dots, [k/2]+1, \quad \sigma = 1, 2, \dots, [k/2]+1.$$

6.5.20. Minimale Formel vom Grad 4 für  $I_T$ .

Die Knoten sind die gemeinsamen Nullstellen der Polynome

$$R_0 = P_0^3 + a_0 P_0^2 + a_2 P_2^2, \quad R_1 = P_1^3 + b_0 P_0^2 + b_1 P_1^2 + b_2 P_2^2,$$

$$R_2 = P_2^3 + b_2 P_0^2 + b_1 P_1^2 + b_0 P_2^2, \quad R_3 = P_3^3 + a_2 P_0^2 + a_0 P_2^2,$$

wobei

$$P_0^3(x, y) = P_3^3(y, x) = x^3 - 9x^2/7 + 3x/7 - 1/35,$$

$$P_1^3(x, y) = P_2^3(y, x) = x^2y - x^2/7 - 4xy/7 + 2x/21 + y/21 - 1/105$$

und

$$P_0^2(x, y) = P_2^2(y, x) = x^2 - 4x/5 + 1/10, \quad P_1^2(x, y) = xy - x/5 - y/5 + 1/20$$

gilt. Die Koeffizienten  $a_i$  und  $b_i$  haben folgende Werte,

$$a_0 = -0.10578609753637575976,$$

$$a_2 = 0.02694427916101579679,$$

$$b_0 = -a_0/5 + 6a_2/5,$$

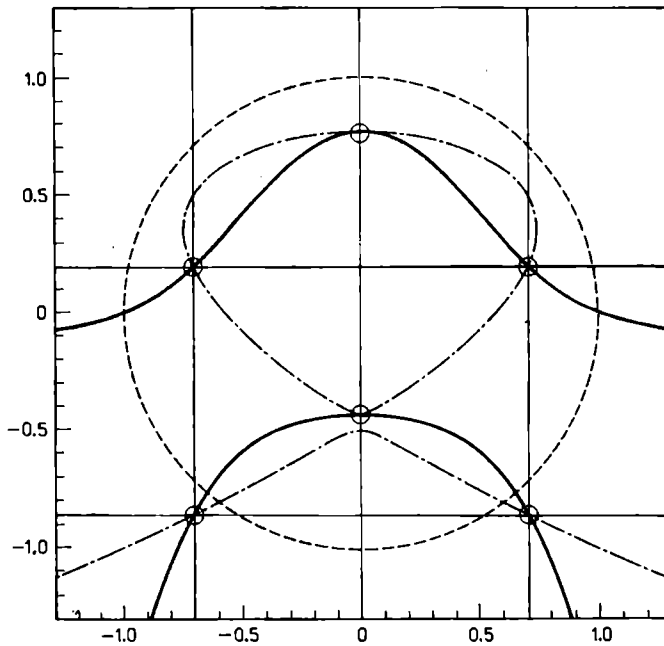
$$b_1 = 13a_0/10 + 57a_2/10,$$

$$b_2 = 21a_0/20 + 69a_2/20.$$

Die Knoten haben folgende Werte,

$i$	$x_i$	$y_i$
1	0.09077251373356230992	0.82643601903185620506
2	0.10882107300604109538	0.46366420568917636071
3	0.09974571986852673544	$x_3$
4	0.44679574728621739116	$x_4$
5	$y_2$	$x_2$
6	$y_1$	$x_1$

### 6.5.21. Minimale Formel vom Grad 4 für $I_K$ .



Die Knoten sind die gemeinsamen Nullstellen der Polynome

$$R_0 = x^3 - x/2, \quad R_1 = x^2y - y/6 + x^2/6 + y^2/2 - 1/6,$$

$$R_2 = xy^2 - x/6 + 2xy/3, \quad R_3 = y^3 - y/2 + x^2/2 + y^2/6 - 1/6.$$

Die Knoten haben die Werte,  $(0, 1/6 + \sqrt{13}/6)$ ,  $(0, 1/6 - \sqrt{13}/6)$ ,  $(\sqrt{1/2}, -1/3 + \sqrt{5/2}/3)$ ,  $(\sqrt{1/2}, -1/3 - \sqrt{5/2}/3)$ ,  $(-\sqrt{1/2}, -1/3 + \sqrt{5/2}/3)$ ,  $(-\sqrt{1/2}, -1/3 - \sqrt{5/2}/3)$ .

## Literaturverzeichnis

- Albrecht, J. und L. Collatz [58] *Zur numerischen Auswertung mehrdimensionaler Integrale*, Z. Angew. Math. Mech. 38 (1958), 1–15.
- Boltjanskii, V. G., S. S. Ryskov and Ju. A. Saskin [63] *On  $k$ -regular imbeddings and their application to the theory of approximation of functions*, Amer. Math. Soc. Translations (2) 28 (1963), 211–219.
- Burnside, W. [08] *An approximate quadrature formula*, Messenger of Math. 37 (1908), 166–167.
- Cernicina, V. Ja. [73] *Construction of regions for which interpolation cubature formulas with the minimum number of nodes exist* (in Russ.), Vestnik Leningrad. Univ. No. 1 (1973), 144–147.
- Choquet, G. [69] *Lectures on Analysis II. Representation Theory*, W. A. Benjam, Inc., New York, Amsterdam 1969.
- Davis, P. J. [67] *A construction of nonnegative approximate quadratures*, Math. Comp. 21 (1967), 578–587.
- Davis, P. J. and P. Rabinowitz [67] *Numerical Integration*, Blaisdell, Waltham, Mass., 1963.
- Davis, P. J. and M. W. Wilson [68] *Nonnegative interpolation formulas for uniformly elliptic equations*, J. Approx. Theory 1 (1968), 374–380.
- DeVore, R. A. [68] *One-sided best approximation of functions*, *ibid.* 1 (1968), 11–25.
- Dubois, D. W. and G. Efroymsen [70] *Algebraic theory of real varieties I*. In: *Studies and essays presented to Yu-Why Chen on his sixtieth birthday*, Taipei, Academia Sinica (1970), 107–135.
- Efroymsen, G. [74] *Local reality on algebraic varieties*, J. Algebra 29 (1974), 133–142.
- Engels, H. [66] *Neue Ergebnisse zur Numerischen Kubatur*, Diss., Aachen 1966.
- Engels, H. [80] *Numerical Quadrature and Cubature*, Academic Press, London, New York, Toronto, Sydney, San Francisco 1980.
- Freud, G. [69] *Orthogonale Polynome*, Birkhäuser, Basel, Stuttgart 1969.
- Fritsch, F. N. [70] *On the existence of regions with minimal third degree integration formulas*, Math. Comp. 24 (1970), 855–861.
- Geyer, W.-D. [67] *Anwendung der Modelltheorie in der algebraischen Geometrie*, Tagungsbericht 12/67 einer Arbeitsgemeinschaft in Oberwolfach, Leitung: P. Roquette, 1967.
- Haber, S. [70] *Numerical evaluation of multiple integrals*, Siam Review 12 (1970), 481–526.
- Haegemans, A. and R. Piessens [76] *Construction of cubature formulas of degree eleven for symmetric planar regions, using orthogonal polynomials*, Numer. Math. 25 (1976), 139–148.
- Haegemans, A. and R. Piessens [77] *Construction of cubature formulas of degree seven and nine for symmetric planar regions, using orthogonal polynomials*, Siam J. Numer. Anal. 14 (1977), 492–508.
- Karlin, S. and W. J. Studden [66] *Tschebycheff Systems: with Applications in Analysis and Statistics*, Interscience, New York 1966.
- Kroll, N., J. Linden und H. J. Schmid [80] *Minimale Kubaturformeln für Integrale über dem Einheitsquadrat*, Preprint No. 373 des Sonderforschungsbereiches 72 in Bonn 1980.
- Kelley, J. L., I. N. Namioka et al. [63] *Linear Topological Spaces*, Van Nostrand Comp., Princeton, New Jersey, Toronto, London, Melbourne 1963.

- Krylov V. I. [67] *Approximative Berechnung von Integralen* (in Russ.), Zweite Auflage, Moskau 1967.
- Kuzmenkov, V. A. [76] *The existence of cubature formulas with the least possible number of nodes* (in Russ.), Zurn. vychisl. Math. nat. Fiz. 16 (1967), 242–245.
- Mairhuber, J. C. [56] *On Haar's theorem concerning Chebycheff problems having unique solutions*, Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), 609–615.
- Macaulay, F. S. [16] *The Algebraic Theory of Modular Systems*, Cambridge Tracts in Math. and Math. Phys. No. 19, Cambridge Univ. Press, 1916.
- Möller, H. M. [73] *Polynomideale und Kubaturformeln*, Diss., Univ. Dortmund, 1973.
- Möller, H. M. [76] *Kubaturformeln mit minimaler Knotenanzahl*, Numer. Math. 25 (1976), 185–200.
- Möller, H. M. [79] *Lower bounds for the number of nodes in cubature formulas*. In: *Numerische Integration*, Hrsgb. G. Hämmerlin, ISNM 45, 221–230, Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart 1979.
- Morrow, C. R. and T. N. L. Patterson [78] *Construction of algebraic cubature rules using polynomial ideal theory*, Siam J. Numer. Anal. 15 (1978), 953–976.
- Müller, C. [62] *Spherical Harmonics*, Lecture Notes in Math. 17, Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1962.
- Mysovskikh, I. P. [64] *On the construction of cubature formulas for the simplest regions* (in Russ.), Zurn. vychisl. Mat. nat. Fiz. 4 (1964), 3–14.
- Mysovskikh, I. P. [68] *On the construction of cubature formulas with fewest knots*, Soviet Math. Dokl. 9 (1968), 277–280.
- Mysovskikh, I. P. [69] *Cubature formulae and orthogonal polynomials*. USSR Comp. Math. 9 (1969), 217–228.
- Mysovskikh, I. P. [70] *Numerical characteristics of orthogonal polynomials in two variables* (in Russ.), Vestnik Leningrad. Univ. No. 19 (1970), Translated in: Vestnik Leningrad. Univ. Math. 3 (1976), 323–332.
- Mysovskikh, I. P. [73] *Interpolatorische Kubaturformeln* (in Russ.). In: *Theorie von Kubaturformeln und Anwendung von Funktionalanalysis auf gewisse Probleme der Math. Physik*, Hrsgb. S. L. Sobolev, Novosibirsk 1973, 73–90.
- Mysovskikh, I. P. [75] *On Chakalov's theorem*, USSR Comp. Math. 15 (1975), 221–227.
- Mysovskikh, I. P. [76] *Orthogonale polynomials in several variables* (in Russ.), Metody vychisl. 10, Izdvo Leningrad. Univ. (1976), 26–35.
- Mysovskikh, I. P. [80] *The approximation of multiple integrals by using interpolatory cubature formulae*. In: *Quantitative Approximation Theory*, Eds. R. A. DeVore and K. Scherer, 217–243. Academic Press, New York, London, Sydney, Toronto, San Francisco 1980.
- Mysovskikh, I. P. and V. Ja. Cernicina [71] *The answer to a question of Radon*, Soviet Math. Dokl. 12 (1971), 852–854.
- Phillips, G. M. [67] *Numerical integration in two and three dimensions*, Computer J. 10 (1967), 202.
- Radon, J. [48] *Zur mechanischen Kubatur*, Monatsh. Math. 52 (1948), 286–300.
- Risler, J. J. [70] *Une caractérisation des idéaux des variétés algébriques réelles*, Note aux CRAS, Paris 272 (1970), 1171–1173.
- Risler, J. J. [74] *Un théorème des zéros en géométrie algébrique et analytique réelles*. In: *Fonctions de Plusieurs Variables Complexes*, Ed. F. Norguet, Lecture Notes in Math. 409 (1974), 522–531.
- Rubinstein, G. S. [55] *On a method of investigation of convex sets* (in Russ.), Dokl. Akad. Nauk SSSR 102 (1955), 451–454.
- Schmid, H. J. [77] *Interpolation of harmonic functions*. In: *Constructive Theory of Functions of Several Variables*, Eds. W. Schempp und K. Zeller, Lecture Notes in Math. 571 (1977), 226–249.

- Schmid, H. J. [78]** *On the representation of linear functionals and the Tschebycheff-rank of finite systems*, Preprint No. 174 of the SFB 72, Bonn 1978.
- Schmid, H. J. [78]<sub>2</sub>** *On cubature formulae with a minimal number of knots*, Numer. Math. 31 (1978), 282–297.
- Schmid, H. J. [79]** *On cubature formulae of degree  $2k-1$* . In: *Numerische Integration*, Hrsgb. G. Hämmerlin, ISNM 45, 252–263, Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart 1979.
- Schmid, H. J. [79]<sub>2</sub>** *Construction of cubature formulae using real ideals*. In: *Multivariate Approximation Theory*, Eds. W. Schempp und K. Zeller, ISNM 51, 359–377, Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart 1979.
- Schmid, H. J. [80]** *Kubaturformeln und reelle Ideale*, Math. Z. 170 (1980), 267–282.
- Schmid, H. J. [80]<sub>2</sub>** *On the numerical solution of non linear equations characterizing minimal cubature formulae*, Computing 24 (1980), 251–257.
- Shapiro, H. S. [71]** *Topics in approximation theory*, Lecture Notes in Math. 187, 1971.
- Stroud, A. H. [70]** *Approximate Calculation of Multiple Integrals*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.
- Stroud, A. H., Kwan-Wei-Chen, Ping-Lei Wang und Zunkwang Mao [71]** *Some second and third degree harmonic interpolation formulas*, Siam J. Numer. Anal. 8 (1971), 681–692.
- Tschakaloff, V. [57]** *Formules de cubature mécaniques a coefficients non négatifs*, Bull. Sci. Math. 12 (1957), 123–134.
- Tyler, G. W. [53]** *Numerical integration of functions of several variables*, Canadian J. Math. 5 (1953), 493–512.
- Whitney, H. [57]** *Elementary structure of real algebraic varieties*, Ann. of Math. 66 (1957), 545–556.
- Wilson, M. W. [69]** *A general algorithm for nonnegative quadrature formulas*, Math. of Comp. 23 (1969), 253–258.
- Zubovickii, S. I. [62]** *On the approximation of real functions in the sense of P. L. Tschebyscheff*, Amer. Math. Soc. Translations (2) 19 (1962), 221–252.