POLSKA AKADEMIA NAUK, INSTYTUT MATEMATYCZNY

DISSERTATIONES MATHEMATICAE

(ROZPRAWY MATEMATYCZNE)

KOMITET REDAKCYJNY

ANDRZEJ BIAŁYNICKI-BIRULA, BOGDAN BOJARSKI,
ZBIGNIEW CIESIELSKI, JERZY ŁOŚ,
ZBIGNIEW SEMADENI, JERZY ZABCZYK redaktor,
WIESŁAW ŻELAZKO zastępca redaktora

CCCLXI

V. VALMORIN

Fonctions généralisées périodiques et applications

WARSZAWA 1997

V. Valmorin
Faculté des Sciences Exactes et Naturelles
Département de Mathématiques et Informatique
Université des Antilles et de la Guyane
Campus de Fouillole
97159 Pointe à Pitre
Guadeloupe
E-mail: vincent.valmorin@univ-ag.fr

1991 Mathematics Subject Classification: 46F10, 42B05, 35D99.
Received 31.7.1995; revised version 5.2.1996.

Published by the Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences
Typeset in TEX at the Institute
Printed and bound by
drukarnia
herman & herman
02-240 Warszawa, ul. Jakobinów 23, tel: 846-79-66, tel/fax: 49-89-95

P R I N T E D I N P O L A N D

© Copyright by Instytut Matematyczny PAN, Warszawa 1997

ISSN 0012-3862

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 6
I. Distributions et fonctions généralisées sur $\mathcal{T}^n$ 9
1. Fonctions et distributions 9
1.1. Définition du tore $\mathcal{T}^n$ 9
1.2. Fonctions définies sur $\mathcal{T}^n$ 10
1.2.1. Fonctions définies sur $\mathcal{T}^n$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ 10
1.2.2. Applications C^∞ de $\mathcal{T}^m$ dans $\mathcal{T}^n$ 10
1.2.3. Applications définies sur une partie de $\mathcal{T}^n$ 11
1.2.4. Intégration sur $\mathcal{T}^n$ 11
1.3. Distributions sur $\mathcal{T}^n$ 12
1.3.1. Définitions 12
1.3.2. Restrictions et support 12
1.3.3. Convolution dans $L^1(\mathcal{T}^n)$ et dans $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$ 13
1.4. Séries de Fourier 14
1.4.1. Série de Fourier d'un élément de $\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ 14
1.4.2. Série de Fourier d'un élément de $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$ 14
1.4.3. La distribution de Dirac δ_1 15
2. L'algèbre $\mathcal{G}(\mathcal{T}^n)$ des fonctions généralisées périodiques 15
2.1. Algèbre des fonctions généralisées sur $\mathbb{R}^m$ 15
2.2. Définition de l'algèbre $\mathcal{G}(\mathcal{T}^n)$ 16
2.3. Propriétés de $\mathcal{G}$ 16
2.3.1. Propriété (i) 16
2.3.2. Propriété (ii) 17
2.3.3. Propriété (iii) 17
2.4. Fonctions réelles généralisées 18
2.5. Fonctions généralisées périodiques sur $\mathbb{R}^n$ 18
2.6. Nombres complexes généralisés 18
2.6.1. Définitions 18
2.6.2. Nombres réels généralisés 19
2.7. Relation d'association dans $\overline{\mathcal{C}}$ et dans $\mathcal{G}$ 19
2.7.1. Relation d'association dans $\overline{\mathcal{C}}$ 19
2.7.2. Relation d'association dans $\mathcal{G}$ 20
2.8. Valeurs ponctuelles d'un élément de $\mathcal{G}$ 21
3. Intégration et coefficients de Fourier 23
3.1. Intégration des fonctions généralisées 23
3.2. Convolution dans $\mathcal{G}$ 24
3.3. Coefficients de Fourier 25
3.4. Suites à croissance lente dans $\mathcal{C}^{\mathbb{Z}^n}$ 25
3.5. Problèmes de régularité globale 27
3.5.1. $\mathcal{E}_A$-régularité et $\mathcal{D}'_A$-régularité 27
3.5.2. $\mathcal{E}_A$-régularité faible et $\mathcal{D}'_A$-régularité faible 28

3.5.3. Opérateurs différentiels réguliers 28
3.5.4. La sous-algèbre $\mathcal{G}^\infty$ 30
3.6. Exemples : fonction de $\mathcal{G}_\pi(\mathbb{R})$ associée à v.p.cot x, équation des ondes 31
3.6.1. Fonction de $\mathcal{G}_\pi(\mathbb{R})$ associée à v.p.cot x 31
3.6.2. Exemples de solutions de l'équation des ondes 33
4. Restrictions des éléments de $\mathcal{G}$ 34
4.1. Restriction à un sous-groupe 34
4.2. Restriction à un ouvert de $\mathcal{T}^n$ 37
4.2.1. Fonctions généralisées bornées sur un ouvert 37
4.2.2. Restriction à U d'un élément de $\mathcal{G}$ 38
4.3. Restriction à un fermé de $\mathcal{T}^n$ 39
4.3.1. Fonctions généralisées sur un fermé de $\mathcal{T}^n$ 39
4.3.2. Lien avec les fonctions généralisées bornées 39
4.3.3. Extension d'une fonction généralisée définie sur un fermé 40
II. Distributions et fonctions généralisées sur $\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n$ 40
5. Espaces fonctionnels sur $\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n$ 40
5.1. Définitions 40
5.1.1. Espaces $C^k(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ 40
5.1.2. Espaces $L^p(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ 40
5.2. Coefficients de Fourier partiels 41
5.2.1. Coefficients de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ 41
5.2.2. Coefficients de Fourier dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ 41
5.3. Fonctions de classe C^k sur un ouvert de $\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n$ 42
5.4. Convolution dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ 42
6. Distributions sur $\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n$ 43
6.1. Définitions 43
6.2. Restrictions et support d'une distribution 43
6.3. Exemple de suite tendant vers $\delta_0 \otimes \delta_1$ 43
6.4. Convolution d'une distribution et d'une fonction 43
6.5. Structure locale des distributions 44
7. Fonctions généralisées sur $\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n$ 48
7.1. Notations et définitions 48
7.2. Injections de $\mathcal{E}^{m,n}$ et de $\mathcal{D}'^{m,n}$ dans $\mathcal{G}^{m,n}$ 49
7.3. Coefficients de Fourier partiels 52
7.3.1. Intégration des fonctions généralisées 53
7.3.2. Coefficients de Fourier partiels d'un élément de $\mathcal{G}^{m,n}$ 53
7.4. Fonctions généralisées sur $\Omega \times \mathcal{T}^n$ et sur $\overline{\Omega} \times \mathcal{T}^n$ 54
7.4.1. Fonctions généralisées sur $\Omega \times \mathcal{T}^n$ 54
7.4.2. Fonctions généralisées sur $\overline{\Omega} \times \mathcal{T}^n$ 54
7.4.3. Restrictions d'un élément de $\mathcal{G}^{m,n}$ à $\Omega \times \mathcal{T}^n$ et $\overline{\Omega} \times \mathcal{T}^n$ 55
III. Exemples de problèmes différentiels 55
8. Exemples de problèmes différentiels 55
8.1. Equations des ondes et de la chaleur 55
8.1.1. Equation des ondes 55
8.1.2. Equation de la chaleur dans $[0, \infty[\times \mathcal{T}^n$ 57
8.2. Exemple d'équation différentielle ordinaire 58
8.2.1. Fonctions non linéaires sur $\overline{\mathcal{C}}^m$ et $(\mathcal{G}(U))^m$ 58
8.2.2. Rappel de quelques résultats 59
8.2.3. Etude de (I) dans $(\mathcal{G}_{2\pi}(\mathbb{R}))^n$ 60
8.3. Exemple d'E.D.P. dans $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathcal{T}^n)$ 62
8.3.1. Introduction 62

8.3.2. Conditions sur la fonction f 62
8.3.3. Etude dans le cas de données périodiques 63
8.3.4. Etude du problème dans $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathcal{T}^n)$ 64
8.4. Problème de Goursat à données généralisées périodiques 66
8.4.1. Position du problème 66
8.4.2. Etude du problème dans le cadre classique 67
8.4.3. Etude du problème dans $\widetilde{\mathcal{G}}_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ 68
8.4.4. Etude de certains cas linéaires 70
8.4.5. Etude de certains cas non linéaires 72
Bibliographie 74

Introduction

Depuis une quinzaine d'années la théorie des fonctions généralisées a pris un essor considérable, permettant de pallier entre autres l'impossibilité de multiplier, dans le cas général, deux distributions (L. Schwartz [33]). Certaines équations aux dérivées partielles peuvent ne pas avoir de solutions dans l'espace des distributions; des exemples ont été donnés par H. Lewy [22], F. Trèves [38], Yu. V. Egorov [14] et d'autres. Il arrive néanmoins que de telles équations admettent des solutions dans une algèbre de fonctions généralisées ([3], [13], [23]).

L'une des motivations de cette théorie est donc l'étude des équations différen- tielles ordinaires ou aux dérivées partielles non linéaires à données irrégulières. On peut citer les travaux de J. Aragona, H. A. Biagioni, J.-F. Colombeau, Yu. V. Egorov, M. Oberguggenberger et E. Rosinger.

Cependant même dans le cas linéaire, quand il se pose des problèmes de restrictions de distributions à des sous-ensembles fermés, on est souvent amené à travailler dans une algèbre de fonctions généralisées.

On peut dire qu'une fonction généralisée est un élément d'une algèbre qui est le "quotient d'une algèbre de fonctions de classe C^∞ par un certain idéal". Par exemple, soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ sur Ω à support compact et $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω. On désigne par $C^k(\Omega)$, $0 \leq k \leq \infty$, l'algèbre des fonctions de classe C^k et par $L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ celle des (classes de) fonctions mesurables localement bornées sur Ω.

On veut construire une algèbre $(\mathcal{A}(\Omega), +, \bullet)$ associative, commutative et unitaire possédant de bonnes propriétés telles que :

(1) $\mathcal{D}'(\Omega)$ s'injecte linéairement dans $\mathcal{A}(\Omega)$ et la fonction constante 1 est l'unité de $\mathcal{A}(\Omega)$.

(2) Il existe n dérivations $\partial_1, \ldots, \partial_n$ sur $\mathcal{A}(\Omega)$.

(3) $\partial_j|\mathcal{D}'(\Omega)$ coincide avec $\partial/\partial x_j$ pour $j = 1, \ldots, n$.

(4) $\bullet|_{L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)\times L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)}$ coïncide avec le produit usuel.

On montre que (3) et (4) sont incompatibles dans une algèbre associative commutative vérifiant (1) et (2). L. Schwartz [33] a montré que pour $k \in \mathbb{N}$, $\bullet|_{C^k(\Omega)\times C^k(\Omega)}$ ne peut coïncider avec le produit usuel si (3) est vérifié.

Finalement, J.-F. Colombeau [8] a montré que l'on pouvait construire une algèbre possédant les propriétés (1), (2), (3) et

(5) $\bullet|_{C^\infty(\Omega)\times C^\infty(\Omega)}$ coïncide avec le produit usuel.

M. Oberguggenberger [27] donne un exposé détaillé des problèmes précédents.

Il existe plusieurs versions de cette algèbre notée $\mathcal{G}(\Omega)$, et $\mathcal{G}_{\mathrm{s}}(\Omega)$ dans sa version dite simplifiée. Pour ce qui nous concerne, nous nous intéressons à sa version simplifiée et ce dans le cadre particulier où l'algèbre de base est celle des fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathcal{T}^n$, le tore de dimension n, où $\mathcal{T}$ est le cercle unité de $\mathbb{C}$. Dans ce travail nous avons adopté la notation $\mathcal{G}(\mathcal{T}^n)$ et $\mathcal{G}(\Omega)$ à la place de $\mathcal{G}_{\mathrm{s}}(\mathcal{T}^n)$ et $\mathcal{G}_{\mathrm{s}}(\Omega)$ dans la mesure où il n'y a pas de risque de confusion.

Ce cadre de travail (tore de dimension n) trouve sa justification dans le but que nous nous sommes fixé, à savoir : mettre en place des outils permettant l'étude de certains phénomènes dont la modélisation mathématique pourrait déboucher sur la résolution d'équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles à données périodiques ou semi-périodiques irrégulières pouvant sortir du cadre des distributions.

Ce travail se divise en trois parties :

— Distributions et fonctions généralisées sur $\mathcal{T}^n$.
— Distributions et fonctions généralisées sur $\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n$.
— Exemples de problèmes différentiels.

Dans la première partie nous commençons par rappeler la définition du tore $\mathcal{T}^n$, de sa topologie ainsi que des espaces classiques qui lui sont attachés, à savoir $C^k(\mathcal{T}^n)$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$. Nous généralisons ces définitions à une partie de $\mathcal{T}^n$ après avoir défini l'espace $C^k(\mathcal{T}^m, \mathcal{T}^n)$ et abordons très succinctement l'intégration sur $\mathcal{T}^n$.

L'étude des distributions sur $\mathcal{T}^n$ est faite en liaison étroite avec celle sur $\mathbb{R}^n$ à travers l'égalité $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n) = {}^t\Phi(\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n))$, ce qui permet de définir de manière aisée la notion de restriction et de support. Avant d'arriver aux *fonctions généralisées* nous faisons quelques rappels sur la convolution et les *séries de Fourier* des éléments de $\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ et $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$; pour cela on peut se référer au livre de C.-C. Chou [7]. Nous examinons en particulier la distribution de Dirac en définissant la famille de fonctions $(\varphi_\varepsilon)_\varepsilon$ qui sera l'une des bases de notre construction de l'algèbre $\mathcal{G}(\mathcal{T}^n)$.

Nous arrivons au thème central de cette partie, qui est la construction et l'étude de $\mathcal{G}(\mathcal{T}^n)$, en rappelant d'abord la définition de l'algèbre simplifiée $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$, puis montrons que $\mathcal{G}(\mathcal{T}^n)$ vérifie les propriétés (1), (2), (3) et (5) énoncées précédemment. L'agèbre $\mathcal{G}(\mathcal{T}^n)$ que nous noterons $\mathcal{G}$ est le quotient d'une algèbre $\mathcal{X}_M$ par un idéal $\mathcal{N}$. Nous donnons une caractérisation de $\mathcal{X}_M$ et $\mathcal{N}$ par les coefficients de Fourier et définissons également les algèbres $\mathcal{G}_\varpi(\mathbb{R}^n)$ des fonctions généralisées ϖ-périodiques sur $\mathbb{R}^n$ qui sont liées de façon naturelle à $\mathcal{G}$.

Après avoir défini l'algèbre $\overline{\mathcal{C}}$ des nombres complexes généralisés, nous étudions la relation d'*association* (d'*égalité faible*) dans $\overline{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{G}$, ainsi que les valeurs ponctuelles d'une fonction généralisée. Nous démontrons quelques résultats reliant ces deux notions.

L'étude se poursuit par la définition de la convolution dans $\mathcal{G}$ qui se trouve être le prolongement de celle définie sur $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$ et nous établissons quelques résultats naturels de cohérence par rapport à l'égalité ou l'égalité faible; nous définissons aussi la notion de *coefficients de Fourier* d'une fonction généralisée.

Nous introduisons ensuite la notion de *croissance lente* pour les suites à valeurs dans l'algèbre dont $\overline{\mathcal{C}}$ est un quotient et pour les éléments de $\mathcal{G}$, ce qui nous permet de caractériser les fonctions généralisées associées à une distribution.

Il est à noter que cette construction de l'algèbre $\mathcal{G}$ ne permet pas de donner une définition cohérente de la notion de *série de Fourier* d'une fonction généralisée mais nous pensons revenir sur ce problème dans un proche avenir.

Nous étudions certaines notions de *régularité globale* pour les fonctions généralisées liée aux coefficients de Fourier, nous considérons les régularités de type $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{D}'$ forte (égalité) ou faible (association). Nous introduisons une condition de régularité sur un sous-espace de $\mathbb{C}(X_1, \ldots, X_n)$ noté $\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}(X)$ et sur certains opérateurs différentiels attachés à $\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}(X)$; ceci pourrait s'apparenter avec la notion d'hypoellipticité. Dans ce paragraphe nous définissons et donnons quelques propriétés de la sous-algèbre $\mathcal{G}^\infty$ de $\mathcal{G}$ correspondant à la sous-algèbre $\mathcal{G}^\infty(\Omega)$ de $\mathcal{G}(\Omega)$ introduite par M. Oberguggenberger [28].

Nous poursuivons cette partie en donnant deux exemples: l'un sur l'équation des ondes et l'autre sur une fonction généralisée de $G_\pi(\mathbb{R})$ associée à $\mathrm{v.p.}\cot x$ où l'on retrouve le développement en série de Fourier de $\mathrm{v.p.}\cot x$.

Cette partie s'achève sur les problèmes de restriction. Cette notion qui peut soulever des dificultés inextricables dans le cas des distributions devient quasiment naturelle pour les fonctions généralisées. Nous envisageons d'abord la restriction à certains types de sous-groupes de $\mathcal{T}^n$, puis à un ouvert de $\mathcal{T}^n$, en établissant une propriété de faisceau de $\mathcal{G}^b$. Nous concluons par la restriction à un fermé en énonçant un théorème de type Whitney et le théorème de Borel pour les fonctions généralisées sur $\mathcal{T}^n$ en suivant [5].

Nous débutons la deuxième partie "Distributions et fonctions généralisées sur $\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n$" en précisant le cadre fonctionnel de notre travail et en donnant quelques résultats liés aux coefficients de Fourier partiels pour les fonctions de $\mathcal{E}^{m,n} = \mathcal{E}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$, espace des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n$, qui nous seront utiles par la suite.

Après avoir défini l'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ des distributions sur $\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n$, que nous notons $\mathcal{D}'^{m,n}$, nous construisons des fonctions Φ_ε telles que $\lim_{\varepsilon\to 0} \Phi_\varepsilon = \delta_0 \otimes \delta_1$ dans $\mathcal{D}'^{m,n}$ (δ_0 est la mesure de Dirac à l'origine de $\mathbb{R}^m$ et δ_1 la mesure de Dirac au point unité de $\mathcal{T}^n$), à l'aide des résultats précédents. Ces fonctions Φ_ε sont le support de l'injection de $\mathcal{D}'^{m,n}$ dans $\mathcal{G}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n) = \mathcal{G}^{m,n}$, l'algèbre des fonctions généralisées sur $\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n$.

Le résultat central de l'étude de $\mathcal{D}'^{m,n}$ est le théorème de structure locale : *Soit $T \in \mathcal{D}'^{m,n}$ et U un ouvert borné de $\mathbb{R}^m$. Alors la restriction de T à $U \times \mathcal{T}^n$ est une somme finie de restrictions de dérivées de fonctions de $L^2(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$.* Ce théorème va nous permettre d'établir l'écriture canonique d'un élément de $\mathcal{D}'^{m,n}$ et de définir ainsi les coefficients de Fourier (partiels) d'une distribution sur $\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n$. Plus précisément, nous démontrons le résultat suivant : *Si $T \in \mathcal{D}'^{m,n}$, il existe une suite unique $(\widehat{T}_p)_{p\in\mathbb{Z}^n}$ d'éléments de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ telle que $T = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \widehat{T}_p \otimes m_p$ où m_p est définie sur $\mathcal{T}^n$ par $m_p(x) = x^p$.* Ce résultat est complété par certaines propriétés de la suite $(\widehat{T}_p)_p$.

Nous construisons l'algèbre $\mathcal{G}^{m,n}$ comme quotient d'une algèbre $\mathcal{X}^{m,n}$ de familles de fonctions C^∞ par un ideal $\mathcal{N}^{m,n}$ en suivant la construction de l'algèbre $\mathcal{G}(\mathbb{R}^m)$ (version simplifiée). Une caractérisation de $\mathcal{X}^{m,n}$ et de $\mathcal{N}^{m,n}$ est établie à l'aide des coefficients de Fourier des représentants.

Après avoir montré que $(f * \Phi_\varepsilon - f)_\varepsilon \in \mathcal{N}^{m,n}$ et $(T * \Phi_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}^{m,n}$ pour $f \in \mathcal{D}'^{m,n}$ et $T \in \mathcal{E}'^{m,n}$ où $\mathcal{E}'^{m,n}$ désigne l'espace des distributions à support compact, nous démontrons

l'injection de $\mathcal{D}'^{m,n}$ dans $\mathcal{G}^{m,n}$. La restriction de cette injection à $\mathcal{E}^{m,n}$ est l'injection canonique; $\mathcal{G}^{m,n}$ vérifie (1), (2), (3) et (5).

Tout comme nous l'avons fait pour les éléments de $\mathcal{G}$, nous définissons les coefficients de Fourier d'une fonction généralisée sur $\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n$. Un coefficient de Fourier d'un élément de $\mathcal{G}^{m,n}$ est une fonction généralisée sur $\mathbb{R}^m$. Nous introduisons également la notion de croissance lente afin de caractériser les éléments de $\mathcal{G}^{m,n}$ qui sont associés à une distribution.

Nous terminons cette deuxième partie en définissant les fonctions généralisées sur $\Omega \times \mathcal{T}^n$ et $\overline{\Omega} \times \mathcal{T}^n$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^m$, et les restrictions d'une fonction généralisée à ces sous-ensembles. Pour $\overline{\Omega} \times \mathcal{T}^n$ nous avons un théorème de type Whitney, c'est-à-dire, la surjectivité de $\mathcal{G}^{m,n} \to \mathcal{G}(\overline{\Omega} \times \mathcal{T}^n)$, $f \mapsto f|_{\overline{\Omega} \times \mathcal{T}^n}$ (voir [5]).

Nous débutons la dernière partie de ce travail par deux problèmes de Cauchy linéaires, l'un pour l'équation des ondes dans $\mathcal{G}^{1,n}$, l'autre pour l'équation de la chaleur dans $\mathcal{G}([0,\infty[\times \mathcal{T}^n)$, avec des fonctions généralisées comme données initiales et en seconds membres. La méthode consiste à travailler sur les coefficients de Fourier partiels. Dans le cas de l'équation des ondes nous trouvons une solution unique qui est une distribution quand les données sont des distributions. En ce qui concerne l'équation de la chaleur nous trouvons une solution unique à une constante généralisée près.

Après avoir défini les fonctions non linéaires sur $\overline{\mathbb{C}}^m$ et sur $(\mathcal{G}(U))^m$, nous étudions deux problèmes non linéaires sans conditions initiales liés à la théorie de Floquet. Le premier est une équation différentielle ordinaire de la forme $x' = A(t)x + \mu f(t) + g(t,x)$ où $f \in (\mathcal{G}_{2\pi}(\mathbb{R}))^n$, $\mu \in \overline{\mathbb{C}}$, $A \in M_n(\mathcal{G}_{2\pi}(\mathbb{R}))$, algèbre des matrices carrées à coefficients dans $\mathcal{G}_{2\pi}(\mathbb{R})$, g est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$, à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ et $g \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C}^n)$ quand $\mathbb{C}$ est identifié à $\mathbb{R}^2$. Avec des conditions techniques appropriées nous montrons l'existence d'une solution unique. Le deuxième problème est une équation aux dérivées partielles de la forme $\sum_{k=1}^m a_k D_t^k u - \sum_{\beta \le l} b_\beta D_x^\beta u = f(u)$ où $(m,l) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $a_k, b_\beta \in \mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathcal{T}^n)$ pour $1 \le k \le m-1$, $\beta \le l$ et $a_m = \mathrm{cl}(1)_\varepsilon$. Ici f est une fonction définie par $f(\varphi)(t,x) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} f_p(t, \widehat{\varphi}_p(t)) x^p$ pour $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R} \times \mathcal{T}^n)$, les f_p sont définies sur $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$. La fonction généralisée $f(u)$ est définie par $f(u) = \mathrm{cl}(f(u_\varepsilon))_\varepsilon$ pour $u \in \mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathcal{T}^n)$.

Sous certaines hypothèses, en particulier les a_k et les b_β ont des représentants périodiques par rapport à t et indépendants de x, on montre l'existence d'une solution qui *a priori* n'est pas unique sauf dans le cas où sa valeur en un point est fixé et $b_\beta = 0$ pour $\beta \neq 0$.

Nous concluons ce travail sur un problème de Goursat et donnons un exemple de problème homogène à données distributions où la solution est une fonction généralisée qui n'est même pas associée à une distribution.

I. Distributions et fonctions généralisées sur $\mathcal{T}^n$

1. Fonctions et distributions

1.1. *Définition du tore $\mathcal{T}^n$.* Soit $\mathcal{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. $\mathcal{S}^1$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{C}$ est un sous-groupe compact de $\mathbb{C}$. On désigne par $\mathcal{T}^n$ le groupe produit $(\mathcal{S}^1)^n$ qui est un sous-groupe compact de $\mathbb{C}^n$ appelé *tore* de dimension n.

La topologie de $\mathcal{T}^n$ est également celle définie par l'une des trois distances équivalentes d_1, d_2, d_∞, définies de la façon suivante : Si $(x,y) \in \mathcal{T}^n \times \mathcal{T}^n$ avec $x = (e^{is_1}, \ldots, e^{is_n})$ et $y = (e^{it_1}, \ldots, e^{it_n})$,

$$d_1(x,y) = \left|\sin\left(\frac{s_1 - t_1}{2}\right)\right| + \ldots + \left|\sin\left(\frac{s_n - t_n}{2}\right)\right|$$

$$d_2(x,y) = \left[\sin^2\left(\frac{s_1 - t_1}{2}\right) + \ldots + \sin^2\left(\frac{s_n - t_n}{2}\right)\right]^{1/2}$$

$$d_\infty(x,y) = \sup_{1 \le k \le n}\left|\sin\left(\frac{s_k - t_k}{2}\right)\right|$$

Ces trois distances sont invariantes par translation. Si on pose $x_k = e^{is_k}$ et $y_k = e^{it_k}$, alors

$$|x_k - y_k| = 2\left|\sin\left(\frac{s_k - t_k}{2}\right)\right|,$$

ce qui permet de voir que d_1, d_2, d_∞ définissent la même topologie que celle induite par $\mathbb{C}^n$ sur $\mathcal{T}^n$.

Soit θ l'application $\mathbb{R}^n \to \mathcal{T}^n$, $(t_1, \ldots, t_n) \mapsto (e^{it_1}, \ldots, e^{it_n})$; alors θ définit par passage au quotient un isomorphisme topologique de $\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ sur $\mathcal{T}^n$.

1.2. *Fonctions définies sur $\mathcal{T}^n$*

1.2.1. *Fonctions définies sur $\mathcal{T}^n$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.* On désigne par $\mathcal{F}(\mathcal{T}^n)$ l'espace des fonctions sur $\mathcal{T}^n$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si $u \in \mathcal{F}(\mathcal{T}^n)$, on dira que u est *continue*, *de classe C^k*, *de classe C^∞*, si $u \circ \theta$ appartient respectivement à $C(\mathbb{R}^n)$, $C^k(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$; les espaces associés à ces fonctions seront notés respectivement $C(\mathcal{T}^n)$, $C^k(\mathcal{T}^n)$, $\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$. Soit $\mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}^n$; désignons par Φ l'application $\mathcal{F}(\mathcal{T}^n) \to \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, $u \mapsto u \circ \theta$. On désigne par $t = (t_1, \ldots, t_n)$ et $x = (x_1, \ldots, x_n)$ des éléments de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{T}^n$ respectivement; si $x_k = e^{it_k}$ avec $k = 1, \ldots, n$ on définit $\partial/\partial x_k$ sur $C^1(\mathcal{T}^n)$ par

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial t_k} \circ \Phi.$$

Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ on pose

$$D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} \quad \text{et} \quad D_t^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial t_1 \ldots \partial t_n};$$

on a alors $D_x^\alpha = D_t^\alpha \circ \Phi$. Pour tout $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $(x,t) \in \mathcal{T}^n \times \mathbb{R}^n$ tel que $x_k = e^{it_k}$ on a donc $D_x^\alpha u = D_t^\alpha(u \circ \theta)$ que nous écrirons plus simplement sous la forme $D^\alpha u = D^\alpha(u \circ \theta)$.

En particulier, si $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{Z}^n$, on pose $x^p = x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n}$, d'où $D_x^\alpha x^p = (ip)^\alpha x^p$.

1.2.2. *Applications C^∞ de $\mathcal{T}^m$ dans $\mathcal{T}^n$.* Pour tout entier $m \ge 1$ on désigne par θ_m l'application $\mathbb{R}^m \to \mathcal{T}^m$, $(t_1, \ldots, t_m) \mapsto (e^{it_1}, \ldots, e^{it_m})$, et par 1_m l'élément unité de $\mathcal{T}^m$, c'est-à-dire, $1_m = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^m$.

Définition 1.1. Soit m et n deux entiers ≥ 1. Une application f de $\mathcal{T}^m$ dans $\mathcal{T}^n$ est de *classe C^∞* si $f \circ \theta_m$ est de classe C^∞ de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathcal{T}^n$.

Si $f = (f_1, \ldots, f_n)$ avec $f_k : \mathcal{T}^m \to \mathcal{T}$, on peut considérer $f_k \circ \theta_m$ comme une application de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{C}$; dans ces conditions $f \in C^\infty(\mathcal{T}^m, \mathcal{T}^n)$ si et seulement si $f_k \circ \theta_m \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$.

EXEMPLE 1.2. On suppose que $1 \le m < n$; soit ι l'inclusion de $\mathcal{T}^m$ dans $\mathcal{T}^n$ définie par $\iota(x) = (x, 1_{n-m})$ pour $x \in \mathcal{T}^m$. Alors $\iota \in C^\infty(\mathcal{T}^m, \mathcal{T}^n)$.

EXEMPLE 1.3. Les applications $\mathcal{T}^n \times \mathcal{T}^n \to \mathcal{T}^n$, $(x, y) \mapsto xy$, et $\mathcal{T}^n \to \mathcal{T}^n$, $x \mapsto \overline{x}$, sont C^∞.

PROPOSITION 1.4. *Soit $h \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathcal{T}^n)$; alors pour tout $t_0 \in \mathbb{R}^m$ il existe un voisinage V_0 de t_0 et $\widetilde{h} \in C^\infty(V_0, \mathcal{T}^n)$ tels que $h|_{V_0} = \theta_n \circ \widetilde{h}$.*

Preuve. Soit d une demi-droite de $\mathbb{C}$ d'origine 0, coupant $\mathcal{T}$ en un point autre que $h_k(t_0)$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ et où on a posé $h = (h_1, \ldots, h_n)$. Désignons par log la détermination du logarithme associé à $\mathbb{C}\backslash d$. Comme $(\mathbb{C}\backslash d)^n$ est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ contenant $h(t_0)$ et que h est continue alors $h^{-1}((\mathbb{C}\backslash d)^n)$ est un ouvert V_0 de $\mathbb{R}^m$ contenant t_0. Pour tout $t \in V_0$ posons $\widetilde{h}(t) = (-i\log(h_1(t)), \ldots, -i\log(h(t)))$. Comme $|h_k(t)| = 1$ alors $-i\log(h_k(t)) = \arg(h_k(t))$, d'où $h(t) = (\theta_n \circ \widetilde{h})(t)$. Il est clair que $\widetilde{h} \in C^\infty(V_0, \mathcal{T}^n)$ car $(\log, \ldots, \log) \in C^\infty((\mathbb{C}\backslash d\ )^n, \mathbb{C}^n)$. ■

COROLLAIRE 1.5. *Si $f \in C^\infty(\mathcal{T}^m, \mathcal{T}^n)$ et $g \in C^\infty(\mathcal{T}^n, \mathcal{T}^p)$ alors $g \circ f \in C^\infty(\mathcal{T}^m, \mathcal{T}^p)$.*

Preuve. Par définition $g \circ f \in C^\infty(\mathcal{T}^m, \mathcal{T}^p)$ ssi $(g \circ f) \circ \theta_m \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathcal{T}^p)$, on a $(g \circ f) \circ \theta_m = g \circ (f \circ \theta_m)$ et par hypothèse $f \circ \theta_m \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathcal{T}^n)$. Soit $t_0 \in \mathbb{R}^m$. D'après la proposition, il existe un voisinage V_0 de t_0 dans $\mathbb{R}^m$ et une fonction $\widetilde{f} \in C^\infty(V_0, \mathbb{R}^n)$ tels que $f \circ \theta_m|_{V_0} = \theta_n \circ \widetilde{f}$. On a alors pour tout $t \in V_0 [(g \circ f) \circ \theta_m](t) = [(g \circ \theta_n) \circ \widetilde{f}](t)$.

Comme $g \circ \theta_n \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathcal{T}^p)$ alors $(g \circ \theta_n) \circ \widetilde{f} \in C^\infty(V_0, \mathcal{T}^p)$, c'est-à-dire $(g \circ f) \circ \theta \in C^\infty(V_0, \mathcal{T}^p)$. ■

1.2.3. *Applications définies sur une partie de $\mathcal{T}^n$.* Soit $\mathcal{L} \subset \mathcal{T}^n$ et f une application de $\mathcal{L}$ dans $\mathbb{C}$. On dit que f est *continue* sur $\mathcal{L}$, et on écrit $f \in C(\mathcal{L})$, si $f \circ \theta \in C(\theta^{-1}(\mathcal{L}))$. Si $\mathcal{L}$ est un ouvert de $\mathcal{T}^n$, la continuité de θ entraîne que $\theta^{-1}(\mathcal{L})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$; on dit alors que f est *de classe* C^k sur $\mathcal{L}$ pour $1 \le k \le \infty$ si $f \circ \theta \in C^k(\theta^{-1}(\mathcal{L}))$ et on écrit $f \in C^k(\mathcal{L})$.

Si $f \in C^k(\mathcal{L})$, on a par définition, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D_x^\alpha f = D_t^\alpha (f \circ \theta)$. D'autre part, l'égalité $\theta^{-1}(\mathcal{L}) = \theta^{-1}(\mathcal{L}) \cap \mathcal{I}^n + 2\pi\mathbb{Z}^n$ montre que f est 2π-périodique sur $\theta^{-1}(\mathcal{L})$.

1.2.4. *Intégration sur $\mathcal{T}^n$*

DÉFINITION 1.6. Soit $I = [-\pi, \pi]$. Si $u \in \mathcal{F}(\mathcal{T}^n)$ et $p \in [1, \infty]$ on dit que $u \in L^p(\mathcal{T}^n)$ si $u \circ \theta \in L^p(I^n)$.

Si $u \in L^1(\mathcal{T}^n)$ on pose

$$\int_{\mathcal{T}^n} u \, d\mu = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{I^n} (u \circ \theta)(t) \, dt;$$

on définit ainsi une mesure μ sur $\mathcal{T}^n$ telle que $\mu(\mathcal{T}^n) = 1$, et μ est une mesure invariante par translation, c'est-à-dire $\int_{\mathcal{T}^n} u(xy) \, d\mu(y) = \int_{\mathcal{T}^n} u(y) \, d\mu(y)$ pour tout $x \in \mathcal{T}^n$.

Si $\mathcal{L}$ est une partie de $\mathcal{T}^n$, pour tout $p \in [1,\infty]$ et pour toute fonction définie sur $\mathcal{L}$, on dit que $f \in L^p(\mathcal{L})$ si $f \circ \theta \in L^p(\theta^{-1}(\mathcal{L}))$. Pour $p < \infty$ on pose

$$\int_{\mathcal{L}} |f|^p \, d\mu = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{(\theta^{-1}(\mathcal{L}))\cap I^n} |(f \circ \theta)(t)|^p \, dt.$$

Si $p = \infty$ on pose

$$\|f\|_{\mathcal{L}}^{\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{t \in \theta^{-1}(\mathcal{L})} |(f \circ \theta)(t)|.$$

1.3. *Distributions sur* $\mathcal{T}^n$

1.3.1. *Définitions.* La restriction de Φ à $\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ induit une application de $\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ dans $\mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ où $\mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des fonctions C^∞ et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}^n$. Nous appelons encore Φ cette restriction.

On munit $\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ de la topologie définie par la famille de semi-normes $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ où $p_k = \sup_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_\infty$ et $\|D^\alpha u\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}^n} |D^\alpha(u\circ\theta)(t)|$.

PROPOSITION 1.7. *Φ est un isomorphisme topologique de $\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ sur $\mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. Il est clair que Φ est linéaire, l'injectivité de Φ résulte de la surjectivité de l'application θ.

Soit $\varphi \in \mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$; considérons l'application $\nu : \mathcal{T}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1,\ldots,x_n) \mapsto (\nu_1 x_1,\ldots,\nu_n x_n)$, où $\nu_k x_k$ est l'argument de x_k dans $]-\pi,\pi]$. Posons $\psi = \varphi\circ\nu$ et soit $(t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^n$; on peut écrire

$$\psi\circ\theta(t_1,\ldots,t_n) = \varphi\circ\nu(e^{it_1},\ldots,e^{it_n}) = \varphi(s_1,\ldots,s_n) \quad \text{avec } s_k = \nu_k e^{it_k}.$$

Nous avons $\varphi(s_1,\ldots,s_n) = \varphi(t_1,\ldots,t_n)$ car φ est 2π-périodique et $t_k - s_k \in 2\pi\mathbb{Z}$. Pour tout $(t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^n$ on a $\psi\circ\theta(t_1,\ldots,t_n) = \varphi(t_1,\ldots,t_n)$ donc $\varphi = \psi\circ\theta$, d'ou la surjectivité de Φ. L'application Φ est continue par définition et comme $\Phi^{-1}(\varphi) = \varphi\circ\nu$ on voit que Φ^{-1} est continue. ■

DÉFINITION 1.8. On appelle *distribution* sur $\mathcal{T}^n$ toute forme linéaire continue sur $\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$. On désigne par $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$ l'ensemble des distributions sur $\mathcal{T}^n$.

En notant $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ le dual topologique de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, on a :

PROPOSITION 1.9. *${}^t\Phi$ est un isomorphisme et $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n) = {}^t\Phi(\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n))$.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente car ${}^t\Phi$ est un isomorphisme ssi Φ en est un. ■

1.3.2. *Restrictions et support*

Restriction à un ouvert. Soit U un ouvert de $\mathcal{T}^n$ et $\mathcal{E}_U(\mathcal{T}^n)$ le sous-espace topologique de $\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ formé des éléments dont le support est contenu dans U. Si $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$ alors la restriction de U à $\mathcal{E}_U(\mathcal{T}^n)$ est continue.

DÉFINITION 1.10. On appelle *restriction* de T à U, que l'on note $T|_U$, la restriction de T à $\mathcal{E}_U(\mathcal{T}^n)$.

Support d'une distribution

PROPOSITION 1.11. *Soit* $f \in \mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *et* $\psi \in \mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ *tels que* $f = \psi \circ \theta$; *alors* $\operatorname{supp} f = \theta^{-1}(\operatorname{supp} \psi)$ *et* $\operatorname{supp} \psi = \theta(\operatorname{supp} f)$.

Preuve. Désignons par $\mathcal{O}_f$ et par $\mathcal{O}_\psi$ les ouverts d'annulation de f et ψ respectivement. Soit $t \in \mathcal{O}_f$. Il existe un ouvert V_t de $\mathbb{R}^n$ contenant t tel que $f|_{V_t} = 0$. Comme θ est ouverte alors $\theta(V_t)$ est un ouvert de $\mathcal{T}^n$ contenant $\theta(t)$ et pour tout $x \in \theta(V_t)$ on a $\psi(x) = 0$, d'où $\theta(t) \in \mathcal{O}_\psi$. Réciproquement, soit $x \in \mathcal{O}_\psi$. Il existe V_x ouvert de $\mathcal{T}^n$ contenant x tel que $\psi|_{V_x} = 0$. Posons $V = \theta^{-1}(V_x)$; comme θ est continue alors V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant t où $\theta(t) = x$; on a donc $x \in \theta(V)$. Comme θ est surjective alors $\theta(V) = \theta(\theta^{-1}(V_x)) = V_x$; on en déduit que $f|_V = 0$. On a montré que $\mathcal{O}_f = \theta^{-1}(\mathcal{O}_\psi)$, d'où $\operatorname{supp} f = \theta^{-1}(\operatorname{supp} \psi)$. L'égalité $\operatorname{supp} \psi = \theta(\operatorname{supp} f)$ résulte de la surjectivié de θ. ∎

PROPOSITION 1.12. *Soit* $(U_i)_{i\in I}$ *une famille d'ouverts de* $\mathcal{T}^n$ *et* $U = \bigcup_{i\in I} U_i$. *Si* $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$ *vérifie* $T|_{U_i} = 0$ *pour tout* $i \in I$ *alors* $T|_U = 0$.

Preuve. Il existe $S \in \mathcal{E}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ tel que $T = {}^t\Phi(S)$; si $f \in \mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ et $\psi \in \mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ alors $\langle T, \psi\rangle = \langle S, f\rangle$. On en déduit à l'aide de la proposition précédente que $T|_{U_i} = 0$ si et seulement si $S|_{\theta^{-1}(U_i)} = 0$. Or $S|_{\theta^{-1}(U_i)} = 0$ pour tout $i \in I$ entraîne $S|_{\theta^{-1}(U)} = 0$, d'où $T|_U = 0$. ∎

DÉFINITION 1.13. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$. On appelle *ouvert d'annulation* de T le plus grand ouvert sur lequel T est nulle; le complémentaire de cet ouvert est appelé *support* de T et noté $\operatorname{supp} T$.

1.3.3. *Convolution dans* $L^1(\mathcal{T}^n)$ *et dans* $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$

Convolution dans $L^1(\mathcal{T}^n)$

DÉFINITION 1.14. Soit $\varphi, \psi \in L^1(\mathcal{T}^n)$. On appelle *convolée* de φ et ψ, que l'on note $\varphi * \psi$ la fonction $x \mapsto \int_{\mathcal{T}^n} \varphi(x\overline{y})\psi(y)\, d\mu$.

Si $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ et $x = (e^{it_1}, \ldots, e^{it_n})$ alors

$$(\varphi * \psi)(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{I^n} (\varphi \circ \theta)(t - s)(\psi \circ \theta)(s)\, ds;$$

on vérifie aisément que $\varphi * \psi = \psi * \varphi$.

Si f et g sont deux fonctions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}^n$ et localement intégrables on définit leur produit de convolution par

$$(f * g)(t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{I^n} f(t - s)g(s)\, ds.$$

Dans ces conditions on a

$$\Phi(\varphi * \psi) = \Phi(\varphi) * \Phi(\psi).$$

$L^1(\mathcal{T}^n)$ muni de la convolution est une algèbre commutative.

Convolution dans $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$. On désigne par $\widetilde{m}$ l'application $\mathcal{T}^n \times \mathcal{T}^n \to \mathcal{T}^n$, $(x, y) \mapsto xy$; on sait (Exemple 1.3) que $\widetilde{m}$ est de classe C^∞.

Définition 1.15. Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$; on définit le *produit de convolution* de T_1 et T_2 par

$$\langle T_1 * T_2, \varphi\rangle = \langle T_1 \otimes T_2, \varphi \circ \widetilde{m}\rangle.$$

En particulier, si $T_1, T_2 \in L^1(\mathcal{T}^n)$ on a

$$\langle T_1 * T_2, \varphi\rangle = \int_{\mathcal{T}^n}\int_{\mathcal{T}^n} T_1(x)T_2(y)\varphi(xy)\,d\mu(x)\,d\mu(y).$$

Si $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ alors $(T*\varphi)(x) = \langle T, \gamma_{\overline{x}}\check{\varphi}\rangle$ où $\check{\varphi}$ et $\gamma_{\overline{x}}\check{\varphi}$ sont définies par $(\varphi(y))^\vee = \varphi(\overline{y})$ et $(\gamma_{\overline{x}}\varphi)(y) = \varphi(y\overline{x})$ pour $y \in \mathcal{T}^n$; d'autre part, on montre que $T*\varphi$ est de classe C^∞.

On a les règles de calcul habituelles pour la dérivation du produit de convolution, et $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$ muni du produit de convolution est une algèbre commutative unitaire d'élément unité δ_{1_n} où 1_n est l'élément unité de $\mathcal{T}^n$, que l'on notera 1 s'il n'y a pas de risque de confusion.

1.4. *Séries de Fourier*

1.4.1. *Série de Fourier d'un élément de $\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$.* Soit $\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$. Alors il existe une unique $f \in \mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi \circ \theta = f$. Or on peut écrire de façon unique :

$$f(t) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}_p e^{ipt} \quad \text{où} \quad \widehat{f}_p = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{I^n} f(t)e^{-ist}\,dt;$$

ici $\widehat{f}_p$ est le coefficient de Fourier d'indice p de f et $pt = p_1t_1 + \ldots + p_nt_n$.

En posant $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ et $x = (e^{it_1}, \ldots, e^{it_n})$, $\varphi \circ \theta = f$ donne $\varphi(x) = f(t)$, c'est-à-dire

$$\varphi(x) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \widehat{\varphi}_p x^p \quad \text{où} \quad \widehat{\varphi}_p = \int_{I^n} \varphi(x)\overline{x}^p\,d\mu.$$

Définition 1.16. La série ci-dessus est la *série de Fourier* de f et $\widehat{\varphi}_p$ le *coefficient de Fourier* d'indice p de φ.

Compte tenu du fait que φ et $\Phi(\varphi)$ ont mêmes coefficients de Fourier, il s'en suit que la suite des coefficients de Fourier de $\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ est à *décroissance rapide*, c'est-à-dire que pour tout $k > 0$ la série $\sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \|p\|^k|\widehat{\varphi}_p|$ est convergente.

1.4.2. *Série de Fourier d'un élément de $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$.* Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$. Alors il existe une unique $S \in \mathcal{E}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ telle que $T = {}^t\Phi(S)$ et S s'écrit de façon unique sous la forme

$$S = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \widehat{S}_p e^{ipt} \quad \text{où} \quad \widehat{S}_p = \langle S, e^{-ipt}\rangle.$$

On en déduit que tout élément $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$T = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \widehat{T}_p x^p \quad \text{où} \quad \widehat{T}_p = \langle T, \overline{x}^p\rangle.$$

$\widehat{T}_p$ est le coefficient de Fourier d'indice p de T, la suite $(T_p)_{p\in\mathbb{Z}^n}$ étant à *croissance lente*, c'est-à-dire qu'il existe $k > 0$ tel que la série $\sum_{p\in\mathbb{Z}^n-\{0\}} \|p\|^{-k}|\widehat{T}_p|$ est convergente.

Définition 1.17. La série $\sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \widehat{T}_p x^p$ est la *série de Fourier* de T et $\widehat{T}_p$ est le *coefficient de Fourier* d'indice p de T.

1.4.3. *La distribution de Dirac* δ_1. On note 1 l'élément unité de $\mathcal{T}^n$ et δ_1 la mesure de Dirac en ce point. Si $p \in \mathbb{Z}^n$ alors $\langle \delta_1, \overline{x}^p \rangle = 1$, d'où $\delta_1 = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} x^p$. En utilisant ce développement de δ_1 on a :

PROPOSITION 1.18. *Pour tout* $\varepsilon \in]0,1[$ *il existe* $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ *tel que* :

(i) $\check{\varphi}_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$,
(ii) $\|\varphi_\varepsilon\|_\infty = \varphi_\varepsilon(1) = (2[1/\varepsilon]+1)^n$,
(iii) $\int_{\mathcal{T}^n} \varphi_\varepsilon \, d\mu = 1$,
(iv) $\lim_{\varepsilon\to 0} \varphi_\varepsilon = \delta_1$ *dans* $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$.

Preuve. Posons $r_\varepsilon = ([1/\varepsilon], \ldots, [1/\varepsilon]) \in \mathbb{N}^n$, $I_\varepsilon = \{p \in \mathbb{Z}^n : -r_\varepsilon \le p \le r_\varepsilon\}$ et $\varphi_\varepsilon = \sum_{p\in I_\varepsilon} x^p$. Il est clair que $\check{\varphi}_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$ et comme $|x^p| = 1$ on a $|\varphi_\varepsilon(x)| \le \varphi_\varepsilon(1)$. D'autre part,

$$\varphi_\varepsilon(1) = \operatorname{card}(I_\varepsilon) = (2[1/\varepsilon]+1)^n$$

d'où (ii). On a

$$\int_{\mathcal{T}^n} x^p \, d\mu = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0, \\ 0 & \text{si } p \ne 0, \end{cases}$$

ce qui donne $\int_{\mathcal{T}^n} \varphi_\varepsilon \, d\mu = 1$.

Soit $\psi \in \mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$. Comme $\langle x^p, \psi \rangle = \widehat{\psi}_{-p}$ alors $\langle \varphi_\varepsilon, \psi \rangle = \sum_{p\in I_\varepsilon} \widehat{\psi}_{-p} = \sum_{p\in I_\varepsilon} \widehat{\psi}_p$, d'où $\lim_{\varepsilon\to 0} \langle \varphi_\varepsilon, \psi \rangle = \psi(1)$; on a bien $\lim_{\varepsilon\to 0} \varphi_\varepsilon = \delta_1$ dans $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$. ∎

Remarque 1. On a montré en passant que si $\psi \in \mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ alors

$$(\varphi_\varepsilon * \psi)(x) = \sum_{p\in I_\varepsilon} \widehat{\psi}_p x^p.$$

Remarque 2. Si $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{Z}^n$ on pose $|p| = |p_1| + \ldots + |p_n|$.

2. L'algèbre $\mathcal{G}(\mathcal{T}^n)$ des fonctions généralisées périodiques

2.1. *Algèbre des fonctions généralisées sur* $\mathbb{R}^m$. On va définir l'algèbre simplifiée des fonctions généralisées de Colombeau.

Soit $E =]0,1[$ et $\mathcal{X}(\mathbb{R}^m) = [\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)]^E$ l'ensemble des familles d'applications de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^m$ indexées par E. On pose

$$\mathcal{X}_M(\mathbb{R}^m) = \{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^m) : \\ \forall K' \text{ compact} \subset \mathbb{R}^m,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \exists r > 0,\ \exists \eta > 0\ (0 < \varepsilon < \eta \Rightarrow \|D^\alpha u_\varepsilon\|^\infty_{K'} \le \varepsilon^{-r})\},$$

$$\mathcal{N}(\mathbb{R}^m) = \{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^m) : \\ \forall K' \text{ compact} \subset \mathbb{R}^m,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \forall q > 0,\ \exists \eta > 0\ (0 < \varepsilon < \eta \Rightarrow \|D^\alpha u_\varepsilon\|^\infty_{K'} \le \varepsilon^{q})\}.$$

L'algèbre simplifiée des *fonctions généralisées* sur $\mathbb{R}^m$ est l'algèbre quotient

$$\mathcal{G}(\mathbb{R}^m) = \mathcal{X}_M(\mathbb{R}^m)/\mathcal{N}(\mathbb{R}^m).$$

De manière analogue nous allons définir l'algèbre des fonctions généralisées sur le tore $\mathcal{T}^n$ de dimension n.

2.2. *Définition de l'algèbre* $\mathcal{G}(\mathcal{T}^n)$. On désigne par $\mathcal{X}(\mathcal{T}^n)$ l'algèbre $[\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)]^E$ et on pose

$$\mathcal{X}_M(\mathcal{T}^n) = \{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}(\mathcal{T}^n) : \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \exists r > 0,\ \exists \eta > 0\ (0 < \varepsilon < \eta \Rightarrow \|D^\alpha u_\varepsilon\|_\infty \le \varepsilon^{-r})\}.$$

Les éléments de $\mathcal{X}_M(\mathcal{T}^n)$ sont dits à *croissance lente* en $1/\varepsilon$.

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}^n) = \{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}(\mathcal{T}^n) : \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \forall q > 0,\ \exists \eta > 0\ (0 < \varepsilon < \eta \Rightarrow \|D^\alpha u_\varepsilon\|_\infty \le \varepsilon^{q})\}.$$

Les éléments de $\mathcal{N}(\mathcal{T}^n)$ sont dits à *décroissance rapide* en ε.

$\mathcal{X}_M(\mathcal{T}^n)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{X}(\mathcal{T}^n)$ et $\mathcal{N}(\mathcal{T}^n)$ est un idéal de $\mathcal{X}_M(\mathcal{T}^n)$, on peut donc définir l'algèbre quotient :

$$\mathcal{G}(\mathcal{T}^n) = \mathcal{X}_M(\mathcal{T}^n)/\mathcal{N}(\mathcal{T}^n).$$

C'est l'algèbre des *fonctions généralisées* sur $\mathcal{T}^n$.

Dans la suite on désigne ces espaces par $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}_M$, $\mathcal{N}$ et $\mathcal{G}$.

PROPOSITION 2.1 (Caractérisation de $\mathcal{X}_M$ et $\mathcal{N}$). (a) *Soit* $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}$; *alors* $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}_M$ *si et seulement si*

(i) $$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \exists r > 0,\ \exists \eta > 0\ (0 < \varepsilon < \eta \Rightarrow |p^\alpha \widehat{u}_{\varepsilon,p}| \le \varepsilon^{-r})\ \forall p \in \mathbb{Z}^n.$$

(b) *Soit* $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}$; *alors* $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}$ *si et seulement si*

(ii) $$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \forall q > 0,\ \exists \eta > 0\ (0 < \varepsilon < \eta \Rightarrow |p^\alpha \widehat{u}_{\varepsilon,p}| \le \varepsilon^{q})\ \forall p \in \mathbb{Z}^n.$$

Preuve. Soit $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $p \in \mathbb{Z}^n$. On a

$$(\widehat{D^\alpha u_\varepsilon})_p = \int_{\mathcal{T}^n} D^\alpha u_\varepsilon(y)\overline{y}^p\, d\mu = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathcal{T}^n} u_\varepsilon(y) D^\alpha(\overline{y}^p)\, d\mu$$

d'où $(\widehat{D^\alpha u_\varepsilon})_p = (ip)^\alpha \widehat{u}_{\varepsilon,p}$.

Comme $|(\widehat{D^\alpha u_\varepsilon})_p| \le \|D^\alpha u_\varepsilon\|_\infty$ on a $|p^\alpha \widehat{u}_\varepsilon| \le \|D^\alpha u_\varepsilon\|_\infty$; cette dernière inégalité montre la nécéssité des conditions (i) et (ii).

Réciproquement, soit $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}$ vérifiant (i) par exemple, (b) se démontrant de façon analogue. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et soit $s \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{p\in\mathbb{Z}^n}(1+\|p\|^2)^{-s} < \infty$. Il existe $r' > 0$ et $\eta' > 0$ tels que $|p^{\alpha+\beta}\widehat{u}_{\varepsilon,p}| \le \varepsilon^{-r'}$ pour $0 < \varepsilon < \eta'$ et $\beta \in \mathbb{N}^n$ avec $|\beta| \le 2s$, on a donc $(\sum_{|\beta|\le 2s}|p^\beta|)|p^\alpha \widehat{u}_{\varepsilon,p}| \le \mathrm{card}\{\beta \in \mathbb{N}^n : |\beta| \le 2s\}\varepsilon^{-r'}$. Or il existe $c' > 0$ dépendant de s et n tel que $(\sum_{|\beta|\le 2s}|p^\beta|)^{-1} \le c'(1+\|p\|^2)^{-s}$; on en déduit qu'il existe $c > 0$ tel que $|p^\alpha \widehat{u}_\varepsilon| \le c(1+\|p\|^2)^{-s}\varepsilon^{-r'}$ pour $0 < \varepsilon < \eta'$, d'où $\|D^\alpha u_\varepsilon\|_\infty \le c(\sum_{p\in\mathbb{Z}^n}(1+\|p\|^2)^{-s})\varepsilon^{-r'}$ pour $0 < \varepsilon < \eta'$. En prenant $r = r' + 1$ et $\eta = \inf\{\eta', [c(\sum_{p\in\mathbb{Z}^n}(1+\|p\|^2)^{-s})]^{-1}\}$, on a $\|D^\alpha u_\varepsilon\|_\infty \le \varepsilon^{-r}$. ∎

2.3. *Propriétés de* $\mathcal{G}$

2.3.1. PROPRIÉTÉ (i). *Il existe une injection linéaire de* $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$ *dans* $\mathcal{G}$.

Preuve. Soit $\varphi_\varepsilon(x) = \sum_{p\in I_\varepsilon} x^p$ (cf. Proposition 1.18), et $i : \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n) \to \mathcal{X}$, $T \mapsto (T * \varphi_\varepsilon)_\varepsilon$. Montrons que $(T * \varphi_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}_M$.

Pour $p \in \mathbb{Z}^n$ désignons par m_p l'application $\mathcal{T}^n \to \mathbb{C}$, $x \mapsto x^p$. On a $(T * m_p) = \langle T, \gamma_{\overline{x}}\check{m}_p\rangle$, c'est-à-dire $(T * m_p) = \langle T, m_{-p}\rangle x^p = \widehat{T}_p x^p$, d'où $(T * \varphi_\varepsilon) = \sum_{p\in I_\varepsilon} \widehat{T}_p x^p$.

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $k > 0$, $M > 0$ tels que $|\widehat{T}_p| \le M|p|^k$ pour $p \ne 0$; si $p \in I_\varepsilon$ alors $|(ip)^\alpha| \le (1/\varepsilon)^{|\alpha|}$ et $|p| \le |r_\varepsilon| \le n/\varepsilon$, d'où $|\widehat{T}_p| \le M(n/\varepsilon)^k$. D 'autre part,

$$\operatorname{card}(I_\varepsilon) = \left(2\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1\right)^n < \left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^n, \qquad D^\alpha(T*\varphi_\varepsilon)(x) = \sum_{p\in I_\varepsilon} \widehat{T}_s(ip)^\alpha x^p;$$

on en déduit que $\|D^\alpha(T*\varphi_\varepsilon)\|_\infty \le (3^n n^k M)\varepsilon^{-(n+k+|\alpha|)}$. Cette inégalité montre que $(T*\varphi_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}_M$. Il est clair que i est linéaire, elle définit par passage au quotient l'application linéaire $\overline{i} : \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n) \to G$, $T \mapsto \operatorname{cl}(T*\varphi_\varepsilon)_\varepsilon$, et on a $\overline{i}(T) = 0$ ssi $(T*\varphi_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}$, d'où $T = \lim_{\varepsilon\to 0} T*\varphi_\varepsilon = 0$. L'application $\overline{i}$ est donc injective. ■

L'application i est également injective, ces deux injections ne sont pas canoniques, néanmoins elles seront privilégiées dans toute la suite.

PROPOSITION 2.2. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$, $u \in \mathcal{G}$ et $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ un représentant de u. Soit $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(w_\varepsilon)_\varepsilon$ définis par*

$$v_\varepsilon = (u_\varepsilon - T)*\varphi_\varepsilon \quad \text{et} \quad w_\varepsilon = (\delta_1 - \varphi_\varepsilon)*u_\varepsilon.$$

Alors $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est un représentant de T si et seulement si $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(w_\varepsilon)_\varepsilon$ sont dans $\mathcal{N}$.

Preuve. La condition est suffisante car $u_\varepsilon - T*\varphi_\varepsilon = v_\varepsilon + w_\varepsilon$ entraîne que $(u_\varepsilon - T*\varphi_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}$, d'où $\operatorname{cl}(u_\varepsilon)_\varepsilon = \operatorname{cl}(T*\varphi_\varepsilon)_\varepsilon$, c'est-à-dire $u = \overline{i}(T)$.

Réciproquement, si $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est un représentant de T, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on a $D^\alpha v_\varepsilon = \sum_{p\in I_\varepsilon}(ip)^\alpha(u_\varepsilon - T*\varphi_\varepsilon)^\wedge m_p$, d'où $D^\alpha v_\varepsilon = \sum_{p\in I_\varepsilon}[(D^\alpha(u_\varepsilon - T*\varphi_\varepsilon))^\wedge]_p m_p$ en vertu de l'égalité $(ip)^\alpha[(u_\varepsilon - T*\varphi_\varepsilon)^\wedge]_p = [(D^\alpha(u_\varepsilon - T*\varphi_\varepsilon))^\wedge]_p Z$.

D'autre part, $|[(D^\alpha(u_\varepsilon - T*\varphi_\varepsilon))^\wedge]_p| \le \|D^\alpha(u_\varepsilon - T*\varphi_\varepsilon)\|_\infty$, d'où nous déduisons que $\|D^\alpha v_\varepsilon\|_\infty \le 3^n\|D^\alpha(u_\varepsilon - T*\varphi_\varepsilon)\|_\infty \varepsilon^{-n}$ et comme $(\|D^\alpha(u_\varepsilon - T*\varphi_\varepsilon)\|_\infty)_\varepsilon \in \mathcal{J}$ alors $(v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}$ et $(w_\varepsilon)_\varepsilon = (u_\varepsilon - T*\varphi_\varepsilon)_\varepsilon - (v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}$. ■

2.3.2. PROPRIÉTÉ (ii). *Il existe n dérivations $\widetilde{\partial}_1, \ldots, \widetilde{\partial}_n$ sur $\mathcal{G}$ telles que $\widetilde{\partial}_k|_{\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)} = \partial_k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.*

Preuve. Soit $u \in G$ et $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ un représentant de u; pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $(\partial_k u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}_M$, on pose $\widetilde{\partial}_k u = \operatorname{cl}(\partial_k u_\varepsilon)_\varepsilon$. Il est évident que cette écriture ne dépend pas du représentant de u.

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$. On a $\widetilde{\partial}_k(\overline{i}(T)) = \operatorname{cl}(\partial_k(T*\varphi_\varepsilon))_\varepsilon = \operatorname{cl}(\partial_k T*\varphi_\varepsilon)_\varepsilon$, c'est-à-dire que $\widetilde{\partial}_k(\overline{i}(T)) = \overline{i}(\partial_k T)$, ce qui signifie que $\widetilde{\partial}_k|_{\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)} = \partial_k$. ■

Dans la suite on fera l'abus de notation $\widetilde{\partial}_k = \partial_k$.

2.3.3. PROPRIÉTÉ (iii). *Il existe un morphisme injectif canonique d'algèbres différentielles $\sigma : \mathcal{E}(\mathcal{T}^n) \to \mathcal{G}$ tel que $\overline{i}|_{\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)} = \sigma$.*

Preuve. Pour tout $u \in \mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ posons $\sigma(u) = \operatorname{cl}(u_\varepsilon)_\varepsilon$ où $u_\varepsilon = u$ pour tout $\varepsilon \in E$. Il est clair que σ est un morphisme injectif d'algèbres différentielles. Soit $u \in \mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$; on a $u = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n}\widehat{u}_p m_p$ et $u*\varphi_\varepsilon = \sum_{p\in I_\varepsilon}\widehat{u}_p m_p$. Si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $q > 0$ alors $D^\alpha(u*\varphi_\varepsilon) - D^\alpha u = \sum_{p\notin I_\varepsilon}\widehat{u}_p(ip)^\alpha m_p$. Posons $k = q + |\alpha| + 1$. Comme $p \notin I_\varepsilon$ alors $|p| > 1/\varepsilon$, d'où $|p|^{-q-1} < \varepsilon^{q+1}$. D'autre part, $\sum_{p\in\mathbb{Z}^n}|p|^k|\widehat{u}_p|$ étant convergente, il existe $M(q,\alpha) > 0$ telle que $|\sum_{p\notin I_\varepsilon}\widehat{u}_p(ip)^\alpha x^p| \le M(q,\alpha)\varepsilon^{q+1}$. Cette inégalité montre que $\|D^\alpha(u*\varphi_\varepsilon) - D^\alpha u\|_\infty \le \varepsilon^q$ pour ε assez petit, d'où $(u*\varphi_\varepsilon - u)_\varepsilon \in \mathcal{N}$, ce qui signifie que $\overline{i}|_{\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)} = \sigma$. ■

Ces résultats montrent que $\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ s'identifie à une sous-algèbre de $\mathcal{G}$ et la restriction de la multiplication dans $\mathcal{G}$ à $\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ coïncide avec le produit usuel, car si $u, v \in \mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ alors $((u * \varphi_\varepsilon)(v * \varphi_\varepsilon) - uv)_\varepsilon \in \mathcal{N}$.

2.4. *Fonctions réelles généralisées.* Soit $\widetilde{\mathcal{E}}(\mathcal{T}^n)$ la sous-algèbre de $\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ des fonctions généralisées à valeurs réelles. On a $\mathcal{E}(\mathcal{T}^n) = \widetilde{\mathcal{E}}(\mathcal{T}^n) \oplus \widetilde{\mathcal{E}}(\mathcal{T}^n)$. En posant $\widetilde{\mathcal{X}} = [\widetilde{\mathcal{E}}(\mathcal{T}^n)]^E$ on peut écrire $\widetilde{\mathcal{X}} \oplus i\widetilde{\mathcal{X}}$. Si $(f_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}$ on a alors $(f_\varepsilon)_\varepsilon = (u_\varepsilon)_\varepsilon + i(v_\varepsilon)_\varepsilon$ avec $(u_\varepsilon)_\varepsilon, (v_\varepsilon)_\varepsilon \in \widetilde{\mathcal{X}}$. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$; la double inégalité

$$\sup\{\|D^\alpha u_\varepsilon\|_\infty, \|D^\alpha v_\varepsilon\|_\infty\} \le \|D^\alpha f_\varepsilon\|_\infty \le (\|D^\alpha u_\varepsilon\|_\infty^2 + \|D^\alpha v_\varepsilon\|_\infty^2)^{1/2}$$

montre, avec des notations évidentes, que $\mathcal{X}_M = \widetilde{\mathcal{X}}_M \oplus i\widetilde{\mathcal{X}}_M$ et $\mathcal{N} = \widetilde{\mathcal{N}} \oplus i\widetilde{\mathcal{N}}$.

En posant $\widetilde{\mathcal{G}} = \widetilde{\mathcal{X}}_M/\widetilde{\mathcal{N}}$, l'application $\widetilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$, $(u_\varepsilon)_\varepsilon + \widetilde{\mathcal{N}} \mapsto (u_\varepsilon)_\varepsilon + \mathcal{N}$, est un monomorphisme d'algèbres. $\widetilde{\mathcal{G}}$ s'identifie donc à une sous-algèbre de $\mathcal{G}$ et on a $\mathcal{G} = \widetilde{\mathcal{G}} \oplus i\widetilde{\mathcal{G}}$ où $i\widetilde{\mathcal{G}} = \{\mathrm{cl}(u_\varepsilon)_\varepsilon : (u_\varepsilon)_\varepsilon \in \widetilde{X}_M\}$. $\widetilde{\mathcal{G}}$ est la sous-algèbre de $\mathcal{G}$ des *fonctions généralisées réelles*. Tout élément f de $\mathcal{G}$ se décompose de façon unique sous la forme $f = u + iv$ avec $u, v \in \widetilde{\mathcal{G}}$. u est la partie réelle de f et v sa partie imaginaire; on écrira $u = \mathrm{Re}\, f$ et $v = \mathrm{Im}\, f$.

2.5. *Fonctions généralisées périodiques sur* $\mathbb{R}^n$. On désigne par $\mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ l'algèbre des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ et 2π-périodiques. Soit $\mathcal{X}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) = [\mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)]^E$; on considère les algèbres

$$\mathcal{X}_{2\pi,M}(\mathbb{R}^n) = \{(f_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) : \exists (u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}_M \ (f = u_\varepsilon \circ \theta)\},$$
$$\mathcal{N}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) = \{(f_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) : \exists (u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N} \ (f = u_\varepsilon \circ \theta)\}.$$

On définit l'algèbre des fonctions généralisées périodiques (de période 2π) par

$$\mathcal{G}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{X}_{2\pi,M}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{N}_{2\pi}(\mathbb{R}^n).$$

L'application $\mathcal{G} \to \mathcal{G}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{cl}(u_\varepsilon)_\varepsilon \mapsto \mathrm{cl}(u_\varepsilon \circ \theta)_\varepsilon$, est un isomorphisme d'algèbres différentielles. De manière générale, si $\varpi = (\varpi_1, \ldots, \varpi_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et si $\mathcal{E}_\varpi(\mathbb{R}^n)$ désigne l'algèbre des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ et ϖ-périodiques, on définit via l'application $\theta_\varpi : \mathbb{R}^n \to \mathcal{T}^n$, $(t_1, \ldots, t_n) \mapsto (e^{2i\pi t_1/\varpi_1}, \ldots, e^{2i\pi t_n/\varpi_n})$, l'algèbre $\mathcal{G}_\varpi(\mathbb{R}^n)$ des fonctions généralisées ϖ-périodiques et de même on a un isomorphisme d'algèbres différentielles $\mathcal{G} \to \mathcal{G}_\varpi(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{cl}(u_\varepsilon)_\varepsilon \mapsto \mathrm{cl}(u_\varepsilon \circ \theta_\varpi)_\varepsilon$.

2.6. *Nombres complexes généralisés*

2.6.1. *Définitions.* Soit $\mathcal{C} = \mathbb{C}^E$, l'algèbre des suites complexes indexées par E; on pose

$$\mathcal{C}_M = \{(z_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{C} : \exists r > 0,\ \exists \eta > 0\ (0 < \varepsilon < \eta \Rightarrow |z_\varepsilon| \le \varepsilon^{-p})\},$$
$$\mathcal{J} = \{(z_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{C} : \forall q > 0,\ \exists \eta > 0\ (0 < \varepsilon < \eta \Rightarrow |z_\varepsilon| \le \varepsilon^{q})\}.$$

$\mathcal{C}_M$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}$, ses éléments sont dits *modérés*; $\mathcal{J}$ est l'idéal de $\mathcal{C}_M$ des éléments dits à *décroissance rapide*. On peut donc considérer l'algèbre quotient

$$\overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C}_M/\mathcal{J}.$$

$\overline{\mathcal{C}}$ est appelé algèbre des *nombres complexes généralisés*.

L'application $j : \mathbb{C} \to \mathcal{C}_M$, $z \mapsto (z_\varepsilon)_\varepsilon$, où $z_\varepsilon = z$, est un monomorphisme d'algèbres qui par passage au quotient donne le monomorphisme d'algèbres $\overline{j} : \mathbb{C} \to \overline{\mathcal{C}}$, $z \mapsto \mathrm{cl}(z_\varepsilon)_\varepsilon$, où $z_\varepsilon = z$ pour tout ε dans E.

2.6.2. *Nombres réels généralisés.* De manière analogue à ce qui précède, on définit l'algèbre des nombres réels généralisés.

Soit $\mathcal{R} = \mathbb{R}^E$; on pose

$$\mathcal{R}_M = \{(x_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{R} : \exists r > 0,\ \exists \eta > 0\ (0 < \varepsilon < \eta \Rightarrow |x_\varepsilon| \le \varepsilon^{-r})\},$$
$$\widetilde{\mathcal{J}} = \{(x_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{R} : \forall q > 0,\ \exists \eta > 0\ (0 < \varepsilon < \eta \Rightarrow |x_\varepsilon| \le \varepsilon)\}.$$

L'algèbre des *nombres réels généralisés* est l'algèbre quotient

$$\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{R}_M / \widetilde{\mathcal{J}}.$$

Si $(z_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{C}_M$ et si $z_\varepsilon = x_\varepsilon + iy_\varepsilon$ avec $(x_\varepsilon)_\varepsilon, (y_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{R}$ alors les inégalités

$$\sup\{|x_\varepsilon|, |y_\varepsilon|\} \le |z_\varepsilon| \le (x_\varepsilon^2 + y_\varepsilon^2)^{1/2}$$

entraînent $\mathcal{C}_M = \mathcal{R}_M \oplus i\mathcal{R}_M$ et $\mathcal{J} = \widetilde{\mathcal{J}} \oplus i\widetilde{\mathcal{J}}$.

Par l'application $\overline{\mathcal{R}} \to \overline{\mathcal{C}}$, $(x_\varepsilon)_\varepsilon + \widetilde{\mathcal{J}} \mapsto (x_\varepsilon)_\varepsilon + \mathcal{J}$, $\overline{\mathcal{R}}$ s'identifie à une sous-algèbre de $\overline{\mathcal{C}}$; dans ces conditions on a l'identification $\overline{\mathcal{C}} = \overline{\mathcal{R}} \oplus i\overline{\mathcal{R}}$. Tout nombre complexe généralisé z s'écrit donc de façon unique sous la forme $z = x + iy$ avec $x, y \in \overline{\mathcal{R}}$, c-est-à-dire $x = \mathrm{Re}\, z$ et $y = \mathrm{Im}\, z$.

2.7. *Relation d'association dans $\overline{\mathcal{C}}$ et dans $\mathcal{G}$*

2.7.1. *Relation d'association dans $\overline{\mathcal{C}}$*

DÉFINITION 2.3. On dit que deux éléments z_1 et z_2 de $\overline{\mathcal{C}}$ sont *associés* s'il existe $(a_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(b_\varepsilon)_\varepsilon$ des représentants respectifs de z_1 et de z_2 tels que $\lim_{\varepsilon\to 0}(a_\varepsilon - b_\varepsilon) = 0$. On écrit alors $z_1 \approx z_2$.

Il est clair que la relation "$\approx$" dite d'*association* est une relation d'équivalence sur $\overline{\mathcal{C}}$. En particulier, $z \in \overline{\mathcal{C}}$ et $\zeta \in \mathbb{C}$ sont associés s'il existe un représentant $(a_\varepsilon)_\varepsilon$ de z tel que $\lim_{\varepsilon\to 0} a_\varepsilon = \zeta$; on peut donc écrire : $z_1 \approx z_2 \Leftrightarrow z_1 - z_2 \approx 0$.

EXEMPLE 2.4. Soit $z_1 = \mathrm{cl}(\varepsilon + 1/\varepsilon^2)_\varepsilon$ et $z_2 = \mathrm{cl}(1/\varepsilon^2)_\varepsilon$. On a $z_1^2 = \mathrm{cl}(\varepsilon^2 + 2/\varepsilon + 1/\varepsilon^4)_\varepsilon$ et $z_2^2 = \mathrm{cl}(1/\varepsilon^4)_\varepsilon$, et on remarque que $z_1 \approx z_2$ mais z_1^2 et z_2^2 ne sont pas associés; la relation d'association n'est donc pas compatible avec le produit dans $\overline{\mathcal{C}}$.

DÉFINITION 2.5. On dit qu'un élément $z \in \overline{\mathcal{C}}$ est *fini* s'il admet un représentant borné, i.e. $\exists (a_\varepsilon),\ z = \mathrm{cl}(a_\varepsilon)_\varepsilon,\ \exists M > 0,\ \exists \eta > 0\ (0 < \varepsilon < \eta \Rightarrow |a_\varepsilon| \le M)$. On désigne par $\overline{\mathcal{C}}_{\mathrm{f}}$ l'ensemble des éléments finis de $\overline{\mathcal{C}}$, et c'est une sous-algèbre de $\mathcal{C}$.

PROPOSITION 2.6. *Soient $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathcal{C}}$ tels que $z_1 \approx z_2$, $z_3 \approx z_4$. Si z_2 et z_3 sont finis alors $z_1 z_3 \approx z_2 z_4$.*

Preuve. Ceci résulte de l'égalité $z_1 z_3 - z_2 z_4 = (z_1 - z_2) z_3 + z_2 (z_3 - z_4)$. ∎

Si on désigne par $\mathcal{C}_{\mathrm{b}}$ l'ensemble des éléments bornés de $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{C}_{\mathrm{b}}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}_M$, $\overline{\mathcal{C}}_{\mathrm{f}} = \mathcal{C}_{\mathrm{b}}/J$ et $\mathbb{C}$ s'identifie à une sous-algèbre de $\overline{\mathcal{C}}_{\mathrm{f}}$.

2.7.2. *Relation d'association dans* $\mathcal{G}$

DÉFINITION 2.7. On dit que $u \in \mathcal{G}$ admet $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$ comme *distribution associée* si elle a un représentant $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ tel que $\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon = T$ dans $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$. On écrit alors $u \approx T$.

Cette définition ne dépend pas du représentant choisi car si $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ est un autre représentant de u alors $\lim_{\varepsilon\to 0}(u_\varepsilon - v_\varepsilon) = 0$ dans $\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$, donc dans $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$ également.

DÉFINITION 2.8. On dit que $u, v \in \mathcal{G}$ sont *associées* si $u - v \approx 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$.

Il est clair que la relation d'association dans $\mathcal{G}$ est une relation d'équivalence.

PROPOSITION 2.9. (a) *Si* $f, g \in L^2(\mathcal{T}^n)$ *alors* $\bar{i}(f)\bar{i}(g) \approx fg$.
(b) *Si* $f \in \mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ *et* $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$ *alors* $\bar{i}(f)\bar{i}(T) \approx fT$.

Preuve. Soit $\psi \in \mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$; on a alors

$$\int_{\mathcal{T}^n} [(f*\varphi_\varepsilon)(g*\varphi_\varepsilon) - fg]\psi\, d\mu = \int_{\mathcal{T}^n} (f*\varphi_\varepsilon)(g*\varphi_\varepsilon - g)\psi\, d\mu + \int_{\mathcal{T}^n} (f*\varphi_\varepsilon - f)g\psi\, d\mu.$$

D'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on a

$$\Big|\int_{\mathcal{T}^n} [(f*\varphi_\varepsilon)(g*\varphi_\varepsilon) - fg]\psi\, d\mu\Big| \le \{\|f*\varphi_\varepsilon\|_2\|g*\varphi_\varepsilon - g\|_2 + \|g\|_2\|f*\varphi_\varepsilon - f\|_2\}\|\psi\|_\infty.$$

La relation de Parseval donne

$$\|f*\varphi_\varepsilon\|_2^2 = \sum_{p\in I_\varepsilon} |\widehat{f}_p|^2 \le \|f\|_2^2, \qquad \|f*\varphi_\varepsilon - f\|_2^2 = \sum_{p\notin I_\varepsilon} |\widehat{f}_p|^2, \qquad \|g*\varphi_\varepsilon - g\|_2^2 = \sum_{p\notin I_\varepsilon} |\widehat{g}_p|^2.$$

Pour $p \notin I_\varepsilon$ on a $|p| > 1/\varepsilon$; comme les séries $\sum_{p\in\mathbb{Z}^n} |\widehat{f}_p|^2$ et $\sum_{p\in\mathbb{Z}^n} |\widehat{g}_p|^2$ sont convergentes, alors $\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{p\notin I_\varepsilon} |\widehat{f}_p|^2 = 0$ et $\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{p\notin I_\varepsilon} |\widehat{g}_p|^2 = 0$. Des relations précédentes on déduit que $\lim_{\varepsilon\to 0}(f*\varphi_\varepsilon)(g*\varphi_\varepsilon) = fg$ dans $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$, ce qui démontre (a).

Soit $f \in \mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$. Compte tenu du fait que $\bar{i}|_{\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)} = \sigma$, pour démontrer (b) on doit montrer que pour tout $\psi \in \mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle f(T*\varphi_\varepsilon), \psi\rangle = \langle fT, \psi\rangle, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\langle (T*\varphi_\varepsilon) - T, f\psi\rangle = 0;$$

mais ceci résulte du fait que $\lim_{\varepsilon\to 0} T*\varphi_\varepsilon = T$ dans $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$. ∎

PROPOSITION 2.10. *Il existe* $g \in \mathcal{G}(\mathcal{T})$ *tel que* $g\,\mathrm{cl}(\varepsilon)_\varepsilon \approx 2\delta_1$ *et* $\delta_1^2 \approx g + \delta_1 + i\delta_1'$.

Preuve. On a $\varphi_\varepsilon^2 = \sum_{p,s\in I_\varepsilon} m_{p+s} = \sum_{-2r_\varepsilon\le p\le 2r_\varepsilon}(\mathrm{card}\{s\in\mathbb{Z} : (s, s-p)\in I_\varepsilon^2\})m_p$. En posant $p_\varepsilon^{(1)} = \inf\{r_\varepsilon, r_\varepsilon + p\}$ et $p_\varepsilon^{(2)} = \sup\{-r_\varepsilon, -r_\varepsilon + p\}$ on obtient

$$\varphi_\varepsilon^2 = \sum_{-2r_\varepsilon\le p\le 2r_\varepsilon} (\mathrm{card}\{s\in\mathbb{Z} : p_\varepsilon^{(1)} \le s \le p_\varepsilon^{(2)}\})m_p,$$

d'où

$$\varphi_\varepsilon^2 = 2\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 + \sum_{-2r_\varepsilon\le p\le -1}\left(2\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + p + 1\right) + \sum_{1\le p\le 2r_\varepsilon}\left(2\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] - p + 1\right).$$

Ceci donne

$$\varphi_\varepsilon^2 = \sum_{-2[1/\varepsilon]\le p\le 2[1/\varepsilon]}\left(2\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] - |p| + 1\right)m_p.$$

Posons

$$g = \mathrm{cl}\left(2\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \sum_{-2[1/\varepsilon]\le p\le 2[1/\varepsilon]} m_p\right)_\varepsilon .$$

Comme

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{-2[1/\varepsilon]\le p\le 2[1/\varepsilon]} m_p = \delta_1$$

dans $\mathcal{D}'(\mathcal{T})$ on a $g\,\mathrm{cl}(\varepsilon)_\varepsilon \approx 2\delta_1$, et de

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{-2[1/\varepsilon]\le p\le 2[1/\varepsilon]} (-p+1)m_p = \delta_1 - \sum_{p\in\mathbb{Z}} |p| m_p$$

dans $\mathcal{D}'(\mathcal{T})$ on déduit que $\delta_1^2 \approx g + \delta_1 + i\delta_1'$ car $\sum_{p\in\mathbb{Z}} |p| m_p = -i\delta_1'$. ∎

Corollaire 2.11. *Il existe $H \in \mathcal{G}(\mathcal{T}^n)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$ tels que $H\,\mathrm{cl}(\varepsilon^n)_\varepsilon \approx 2^n\delta_1$ et $\delta_1^2 \approx H + T + \delta_1$.*

Preuve. On désigne par s et p des éléments de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^n$ respectivement. Nous avons

$$\varphi_\varepsilon(x) = \prod_{j=1}^n \Big(\sum_{|s|\le 1/\varepsilon} x_j^s\Big);$$

on en déduit en vertu de la proposition précédente que

$$\varphi_\varepsilon^2(x) = \prod_{j=1}^n \Big[\sum_{|s|\le 2[1/\varepsilon]} \Big(2\Big[\frac{1}{\varepsilon}\Big] - |s| + 1\Big) x_j^s\Big],$$

d'où

$$\varphi_\varepsilon^2(x) = \sum_{p\in 2I_\varepsilon} \Big[\prod_{j=1}^n \Big(2\Big[\frac{1}{\varepsilon}\Big] - |p_j| + 1\Big)\Big] x^p.$$

En désignant par σ_k le polynôme symétrique élémentaire homogène de degré k à n variables et par R_p le polynôme $\alpha_n^p X^n + \alpha_{n-1}^p X^{n-1} + \ldots + \alpha_1^p X + \alpha_0^p$ où $\alpha_{n-k}^p = \sigma_k(1-|p_1|,\ldots,1-|p_n|)$ pour $0\le k\le n$ on a $\varphi_\varepsilon^2(x) = \sum_{p\in 2I_\varepsilon} R_p(2[1/\varepsilon])x^p$.

D'autre part, on a

$$\sum_{p\in 2I_\varepsilon} \alpha_0^p x^p = \sum_{p\in 2I_\varepsilon} x^p + \sum_{p\in 2I_\varepsilon} \Big[\sum_{k=1}^n (-1)^k \sigma_k(|p_1|,\ldots,|p_n|)\Big] x^p;$$

si on pose

$$H_\varepsilon(x) = \sum_{p\in 2I_\varepsilon} \Big[R_p\Big(2\Big[\frac{1}{\varepsilon}\Big]\Big) - \alpha_0^p\Big] x^p \quad \text{et} \quad T = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \Big[\sum_{k=1}^n (-1)^k \sigma_k(|p_1|,\ldots,|p_n|)\Big] x^p$$

il est alors clair que $(H_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}_M$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$. On prend donc $H = \mathrm{cl}(H_\varepsilon)_\varepsilon$ et on obtient le résultat énoncé. ∎

2.8. *Valeurs ponctuelles d'un élément de $\mathcal{G}$.* Soit $u \in \mathcal{G}$, $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ un représentant de u et $x \in \mathcal{T}^n$. Comme $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}_M$ alors $(u_\varepsilon(x))_\varepsilon \in \mathcal{C}_M$. Si $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ est un autre représentant de u alors $(u_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x))_\varepsilon \in \mathcal{J}$ car $(u_\varepsilon - v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}$, d'où $\mathrm{cl}(u_\varepsilon(x))_\varepsilon = \mathrm{cl}(v_\varepsilon(x))_\varepsilon$.

Soit $u \in \mathcal{G}$ et $x \in \mathcal{T}^n$; on appelle *valeur* de u en x le nombre complexe généralisé $\mathrm{cl}(u_\varepsilon(x))_\varepsilon$ où $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est un représentant quelconque de u.

Proposition 2.12. (a) *Si $f \in \mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ alors pour tout $x \in \mathcal{T}^n$ on a $(\overline{i}(f))(x) = \overline{j}(f(x))$.*
(b) *Si $f \in C(\mathcal{T}^n)$ et si sa série de Fourier est sommable alors $(\overline{i}(f))(x) \approx \overline{j}(f(x))$.*

Preuve. (a) est évident, montrons donc (b). Considérons la série de Fourier de f; on a toujours $f = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}_p m_p$ dans $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$. Par ailleurs, $\sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}_p m_p$ est continu car la sommabilité de cette série entraîne sa convergence uniforme et m_p est continue pour tout $p \in \mathbb{Z}^n$. Comme f est continue l'égalité dans $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$ entraîne celle dans $C(\mathcal{T}^n)$ et on a alors $(f * \varphi_\varepsilon) - f = \sum_{p\notin I_\varepsilon} \widehat{f}_p m_p$. La série de Fourier de f étant sommable on a $\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{p\notin I_\varepsilon} \widehat{f}_p x^p = 0$, d'où $(\overline{i}(f))(x) \approx \overline{j}(f(x))$. ∎

La nullité ponctuelle d'une fonction généralisée n'entraîne pas sa nullité en tant que fonction généralisée comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2.13. Soit u l'élément de $\mathcal{G}(\mathcal{T})$ dont un représentant $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est défini par

$$u_\varepsilon(x) = \frac{x^2-1}{x} \exp\left[\frac{(x^2-1)^2}{4\varepsilon x^2}\right].$$

En posant $[\Phi(u_\varepsilon)] = \psi_\varepsilon$, nous avons $\psi_\varepsilon(t) = 2i\sin t \cdot \exp(-\varepsilon^{-1}\sin^2 t)$; soit $\psi = \mathrm{cl}(\psi_\varepsilon)_\varepsilon$ dans $\mathcal{G}_{2\pi}(\mathbb{R})$. On vérifie que $\psi(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors que $\psi'_\varepsilon(0) = 1$ pour tout ε, donc $\psi \neq 0$, et par suite $u(x) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{T}$ avec $u \neq 0$.

Nous allons voir que sous certaines conditions la nullité ponctuelle entraîne la nullité faible.

Définition 2.14. On dit qu'une fonction généralisée est *équicontinue* si elle admet un représentant équicontinu.

Proposition 2.15. *Si $u \in \mathcal{G}$ est équicontinue et si $u(x)$ est associé à un nombre complexe pour tout x dans un sous-ensemble dense de $\mathcal{T}^n$ alors u est associé à une fonction continue.*

Preuve. L'équicontinuité de u et la densité du sous-ensemble montrent que $(u_\varepsilon(x))_\varepsilon$ est de Cauchy pour tout $x \in \mathcal{T}^n$, ce qui montre que $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ converge simplement sur $\mathcal{T}^n$ vers une fonction g continue. Comme $\mathcal{T}^n$ est compact et u équicontinue alors cette convergence est uniforme, d'où *a fortiori* $u \approx g$. ∎

Corollaire 2.16. *Si $u \in \mathcal{G}$ est équicontinue et faiblement nulle ponctuellement sur une partie dense de $\mathcal{T}^n$ alors u est faiblement nulle sur $\mathcal{T}^n$.*

Sous certaines hypothèses, la nullité ponctuelle entraîne la nullité; c'est ce que montre le corollaire de la proposition suivante qui traite du cas $n = 1$.

Proposition 2.17. *Soit $T = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \widehat{T}_p m_p$ une distribution sur $\mathcal{T}$. Pour tout $q > 0$ on pose $\mathcal{A}_q = \{m \in \mathbb{N} : \exists m' \in \{1\} + 2\mathbb{N}\ (m = 2^q m')\}$. On suppose que T vérifie les deux conditions suivantes :*

(i) $\exists q_0 \in \mathbb{N}^*$ $(\lim_{p\to\infty,\, p\in 2\mathbb{N}\setminus\mathcal{A}_{q_0}} p^2\widehat{T}_p = 0)$.
(ii) $\forall a \in \{1, i\} \cup (\bigcup_{k=1}^{q_0}\{\exp(i\pi/2^{k+1})\})$ $(T''(a) \approx 0$ *dans* $\overline{\mathcal{C}})$.

Alors T est une fonction continue sur $\mathcal{T}$.

Preuve. On a $T'' = \sum_{p\in\mathbb{Z}}(-p^2)\widehat{T}_p m_p$ dans $\mathcal{D}'(\mathcal{T})$. Posons $\alpha_p = -p^2\widehat{T}_p$, $\mathcal{A} = \bigcup_{q=1}^{q_0}\mathcal{A}_q$ et $\mathcal{B} = \{1, i\} \cup (\bigcup_{k=1}^{q_0}\{\exp(i\pi/2^{k+1})\})$. On a $T''(a) \approx 0$ pour $a \in \mathcal{B}$, c'est-à-dire $\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{|p|\le 1/\varepsilon}\alpha_p a^p = 0$; on en déduit que

$$\lim_{m\to\infty}\Big(\sum_{|p|\le m}\alpha_p a^p - \sum_{|p|\le m-1}\alpha_p a^p\Big) = 0,$$

ce qui équivaut à $\lim_{m\to\infty}(\alpha_{-m}a^{-m} + \alpha_m a^m) = 0$. On a donc

$$\forall a \in B\ (\lim_{m\to\infty}(\alpha_{-m} + \alpha_m a^{2m}) = 0). \tag{1}$$

On va montrer que $\lim_{|m|\to\infty}\alpha_m = 0$.

Premier cas : m est impair. En prenant $a = 1$ puis $a = i$ dans (1) on obtient $\lim_{m\to\infty}(\alpha_{-m} + \alpha_m) = 0$ et

$$\lim_{m\to\infty}(\alpha_{-m} + \alpha_m) = 0, \quad \text{d'où} \quad \lim_{|p|\to\infty}\alpha_{2p+1} = 0. \tag{2}$$

Deuxième cas: m est pair. Soit $q \in \{1, \ldots, q_0\}$. Si $m \in \mathcal{A}_q$ et $a = \exp(i\pi/2^{q+1})$ on a alors $\alpha_{-m} + \alpha_m a^{2m} = \alpha_{-m} + (-1)^m\alpha_m$. En prenant $a = 1$ puis $a = \exp(i\pi/2^{q+1})$ dans (1) on obtient

$$\lim_{m\to\infty,\, m\in\mathcal{A}_q}\alpha_m = 0. \tag{3}$$

Supposons que $\overline{\lim}_{m\to\infty,\, m\in\mathcal{A}}|\alpha_m| \ne 0$. Il existe alors une sous-suite $(|\alpha_{m_k}|)_k$ extraite de $(|\alpha_m|)_{m\in\mathcal{A}}$ convergeant dans $\overline{\mathbb{R}}$ et de limite non nulle. Comme les $\mathcal{A}_q$ sont en nombre fini, il existe $q \ge 1$ tel que $\{m \in \mathcal{A} : m \in \mathcal{A}_q\}$ soit infini. D'après (3), de la sous-suite $(|\alpha_{m_k}|)_k$ on peut extraire une sous-suite convergeant vers zéro, ce qui contredit $\lim_{k\to\infty}|\alpha_{m_k}| \ne 0$. On en déduit que $\lim_{m\to\infty,\, m\in\mathcal{A}}\alpha_m = 0$, d'où $\lim_{m\to\infty}\alpha_m = 0$. En utilisant (1), on obtient $\lim_{|p|\to\infty}\alpha_{2p} = 0$. On a donc démontré que $\lim_{|p|\to\infty}\alpha_p = 0$.

On en déduit que la série $\sum_{p\in\mathbb{Z}^n}\widehat{T}_p$ est sommable, d'où la convergence uniforme de $\sum_{p\in\mathbb{Z}^n}\widehat{T}_p m_p$ et par suite la continuité de T. ■

Corollaire 2.18. *Si T est une distribution sur $\mathcal{T}$ vérifiant les hypothèses de la proposition et si de plus $T(a) \approx 0$ dans $\overline{\mathcal{C}}$ pour tout $a \in \mathcal{T}$, alors $T = 0$.*

Preuve. D'après Proposition 2.12(b), on a pour tout $a \in \mathcal{T}$, $(i(T)) \approx j(T(a))$, c'est-à-dire $\lim_{\varepsilon\to 0}(T * \varphi_\varepsilon)(a) = T(a)$. Comme par hypothèse $\lim_{\varepsilon\to 0}(T * \varphi_\varepsilon)(a) = 0$ pour tout $a \in \mathcal{T}$, alors $T = 0$. ■

Remarque 3. On peut, dans la proposition, remplacer (i) par

$$\text{“}\exists q_0 \in \mathbb{N}^*\ (\lim_{p\to\infty,\, p\in 2\mathbb{N}\setminus\mathcal{A}_{q_0}} p^2\widehat{T}_{-p} = 0)\text{”}.$$

3. Intégration et coefficients de Fourier

3.1. *Intégration des fonctions généralisées.* Soit $u \in \mathcal{G}$ et $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ un représentant de u. Alors pour chaque $\varepsilon \in]0, 1[$, l'intégrale $A_\varepsilon = \int_{\mathcal{T}^n} u_\varepsilon\, d\mu$ est bien définie et comme $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}_M$ on a $(A_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{C}_M$. Si $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ est un autre représentant de u et si $B_\varepsilon = \int_{\mathcal{T}^n} v_\varepsilon\, d\mu$ alors $(u_\varepsilon - v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}$, d'où $(A_\varepsilon - B_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{J}$. On a donc la définition suivante :

Définition 3.1. Soit $u \in \mathcal{G}$; on appelle *intégrale* de u sur $\mathcal{T}^n$, que l'on note $\int_{\mathcal{T}^n} u\,d\mu$, la classe de $(\int_{\mathcal{T}^n} u_\varepsilon\,d\mu)_\varepsilon$ dans $\overline{\mathcal{C}}$ où $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est un représentant de u.

Proposition 3.2. *Si $f \in L^1(\mathcal{T}^n)$ alors l'intégrale de $\overline{i}(f)$ sur $\mathcal{T}^n$ coïncide avec celle de f, c'est-à-dire*

$$\int_{\mathcal{T}^n} \overline{i}(f)\,d\mu = \mathrm{cl}\Big(\int_{\mathcal{T}^n} f\,d\mu\Big)_\varepsilon.$$

Preuve. On a $(f*\varphi_\varepsilon)(x) = \int_{\mathcal{T}^n} f(x\overline{y})\varphi_\varepsilon(y)\,d\mu$, d'où

$$\int_{\mathcal{T}^n} (f*\varphi_\varepsilon)\,d\mu = \int_{\mathcal{T}^n}\Big(\int_{\mathcal{T}^n} f(x\overline{y})\varphi_\varepsilon(y)\,d\mu(y)\Big)d\mu(x) = \int_{\mathcal{T}^n}\Big(\int_{\mathcal{T}^n} f(x\overline{y})\,d\mu(x)\Big)\varphi_\varepsilon(y)\,d\mu(y).$$

Comme $\int_{\mathcal{T}^n} f(x\overline{y})\,d\mu(x) = \int_{\mathcal{T}^n} f\,d\mu$ et $\int_{\mathcal{T}^n}\varphi_\varepsilon\,d\mu = 1$ on a bien $\int_{\mathcal{T}^n}\overline{i}(f) = \mathrm{cl}(\int_{\mathcal{T}^n} f\,d\mu)_\varepsilon$. ∎

Proposition 3.3. *Soit $T, S \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$; alors $\int_{\mathcal{T}^n}\overline{i}(T)\overline{i}(S)\,d\mu = \mathrm{cl}(\langle T*\check{S},\varphi_\varepsilon\rangle)_\varepsilon$ dans $\overline{\mathcal{C}}$.*

Preuve. On a $\int_{\mathcal{T}^n}(T*\varphi_\varepsilon)(S*\varphi_\varepsilon)\,d\mu = \int_{\mathcal{T}^n}(\sum_{s\in I_\varepsilon}\widehat{T}_p x^s)(\sum_{p\in I_\varepsilon}\widehat{S}_p x^p)\,d\mu$, d'où

$$\int_{\mathcal{T}^n}(T*\varphi_\varepsilon)(S*\varphi_\varepsilon)\,d\mu = \sum_{p\in I_\varepsilon}\widehat{T}_p\widehat{S}_{-p} = \langle T, S*\varphi_\varepsilon\rangle = \langle T*\check{S},\varphi_\varepsilon\rangle. \ ∎$$

Corollaire 3.4. *Soit $f \in \mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$; alors $\int_{\mathcal{T}^n}\overline{i}(T)\overline{i}(f)\,d\mu = \overline{j}(T(f))$.*

Preuve. Si $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$ et $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}$ on pose $T[(u_\varepsilon)_\varepsilon] = (T(u_\varepsilon))_\varepsilon$; on a alors $T(\mathcal{X}_M) \subset \mathcal{C}_M$ et $T(\mathcal{N})$. D'après la proposition $\int_{\mathcal{T}^n}\overline{i}(T)\overline{i}(f)\,d\mu = \mathrm{cl}(T(f*\varphi_\varepsilon)_\varepsilon)$. Comme $f \in \mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ alors d'après la Propriété (iii) du Chapitre 2, $(f*\varphi_\varepsilon - f)_\varepsilon \in \mathcal{N}$, d'où $T[(f*\varphi_e - f)_\varepsilon] \in \mathcal{J}$. On a donc $\int_{\mathcal{T}^n}\overline{i}(T)\overline{i}(f)\,d\mu = \overline{j}(T(f))$. ∎

Remarque 1. D'après ce corollaire on a, pour $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$,

$$\overline{j}(\widehat{T}_p) = \int_{\mathcal{T}^n}\overline{i}(T)\overline{i}(\overline{x}^p)\,d\mu.$$

Proposition 3.5. *Soit $u, v \in \mathcal{G}$; alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$,*

$$\int_{\mathcal{T}^n}(D^\alpha u)v\,d\mu = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathcal{T}^n} u(D^\alpha v)\,d\mu.$$

Preuve. Si $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ sont des représentants respectifs de u et v alors en intégrant par parties on a

$$\int_{I^n} D^\alpha(u_\varepsilon\circ\theta)(t)(v_\varepsilon\circ\theta)(t)\,dt = (-1)^{|\alpha|}\int_{I^n}(u_\varepsilon\circ\theta)(t)D^\alpha(v_\varepsilon\circ\theta)(t)\,dt,$$

les parties intégrées étant nulles à cause de la périodicité. ∎

3.2. *Convolution dans $\mathcal{G}$.* Soit $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ deux éléments de $\mathcal{X}$. On appelle *convolée* de $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ l'élément $(u_\varepsilon * v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}$. Pour la convolution $\mathcal{X}$ est une algèbre.

Proposition 3.6. *Pour la convolution $\mathcal{X}_M$ est une sous-algèbre de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{N}$ un idéal de $\mathcal{X}_M$.*

Preuve. Soit $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ des éléments de $\mathcal{X}$. On a $(u_\varepsilon*v_\varepsilon)(x) = \int_{\mathcal{T}^n} u_\varepsilon(x\overline{y})v_\varepsilon(y)\,d\mu$. Par suite, si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ alors $D^\alpha(u_\varepsilon*v_\varepsilon)(x) = \int_{\mathcal{T}^n} u_\varepsilon(x\overline{y})D^\alpha v_\varepsilon(y)\,d\mu$, d'où l'on obtient $\|D^\alpha(u_\varepsilon*v_\varepsilon)\| \le \|u_\varepsilon\|_\infty\|D^\alpha v_\varepsilon\|_\infty$. Cette inégalité montre que $(u_\varepsilon*v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}_M$, et si de plus $(v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}$ alors $(u_\varepsilon*v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}$. ∎

Supposons maintenant que l'on ait $(u_\varepsilon)_\varepsilon$, $(v_\varepsilon)_\varepsilon$, $(f_\varepsilon)_\varepsilon$, $(g_\varepsilon)_\varepsilon$ appartenant à $\mathcal{X}_M$ tels que $\mathrm{cl}(u_\varepsilon)_\varepsilon = \mathrm{cl}(f_\varepsilon)_\varepsilon$ et $\mathrm{cl}(v_\varepsilon)_\varepsilon = \mathrm{cl}(g_\varepsilon)_\varepsilon$. Alors

$$u_\varepsilon * v_\varepsilon - f_\varepsilon * g_\varepsilon = (u_\varepsilon - f_\varepsilon) * (v_\varepsilon - g_\varepsilon) + f_\varepsilon * (v_\varepsilon - g_\varepsilon) + g_\varepsilon * (u_\varepsilon - f_\varepsilon).$$

Cette décomposition montre, compte tenu de la proposition précédente, que $\mathrm{cl}(u_\varepsilon * v_\varepsilon)_\varepsilon = \mathrm{cl}(f_\varepsilon * g_\varepsilon)_\varepsilon$, d'où

$$\mathrm{cl}(u_\varepsilon * u_\varepsilon)_\varepsilon = \mathrm{cl}(f_\varepsilon * g_\varepsilon)_\varepsilon,$$

d'où :

Définition 3.7. Soient u et v deux éléments de $\mathcal{G}$. On appelle *convolée* de u et v, que l'on note $u \diamond v$, l'élément de $\mathcal{G}$ défini par $u \diamond v = \mathrm{cl}(u_\varepsilon * v_\varepsilon)_\varepsilon$ où $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ sont des représentants respectifs de u et v.

Proposition 3.8. (a) *La loi* $\diamond$ *est commutative et associative.*

(b) $\diamond|_{\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)} = *$.

(c) *Si* $S \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$ *alors* $\overline{i}(S) \diamond \overline{i}(\delta) = \overline{i}(S)$.

(d) *Soient* $u, v \in \mathcal{G}$ *et* $S, T \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$; *alors* $u \approx S$ *et* $v \approx T \Rightarrow u \diamond v \approx S * T$.

Preuve. (a) est évident. Soit $S, T \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$; on a $\overline{i}(S) \diamond \overline{i}(T) = \mathrm{cl}[(S * \varphi_\varepsilon) * (T * \varphi_\varepsilon)]_\varepsilon$, comme $(S * \varphi_\varepsilon) * (T * \varphi_\varepsilon) = (S * T) * (\varphi_\varepsilon * \varphi_\varepsilon)$ et $\varphi_\varepsilon * \varphi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$, d'où $\overline{i}(S) \diamond \overline{i}(T) = \overline{i}(S * T)$. On a donc démontré (b). En remplaçant T par δ dans l'égalité précédente on obtient (c). L'implication du (d) résulte de la continuité du produit de convolution dans $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$. ∎

Remarque 2. D'après (b), $\diamond$ est un prolongement à $\mathcal{G}$ de $*$ défini dans $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$; donc dans la suite on utilisera la même notation $*$ pour ces deux notions.

3.3. *Coefficients de Fourier*

Définition 3.9. Soit $u \in \mathcal{G}$, $p \in \mathbb{Z}^n$ et $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ un représentant de u. On appelle *coefficient de Fourier* d'indice p de u le nombre complexe généralisé noté $\widehat{u}_p$ et défini par $\widehat{u}_p = \int_{\mathcal{T}^n} u(x)\overline{x}^p \, d\mu$; autrement dit, $\widehat{u}_p = \mathrm{cl}(\widehat{u}_{\varepsilon,p})_\varepsilon$.

Proposition 3.10. *Soit* $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$ *et* $\widehat{T}_p$ *son coefficient de Fourier dans* $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$ *d'indice* p; *alors* $[(\overline{i}(T))^\wedge]_p = \overline{j}(\widehat{T}_p)$. (*Autrement dit, les deux notions coïncident*).

Preuve. On a $T = \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} \widehat{T}_p x^p$ et $T * \varphi_\varepsilon = \sum_{p \in I_\varepsilon} \widehat{T}_p x^p$, ce qui entraîne

$$[(T * \varphi_\varepsilon)^\wedge]_p - \widehat{T}_p = -\sum_{s \notin I_\varepsilon} \widehat{T}_s \int_{\mathcal{T}^n} x^{s-p} = -\sum_{s \notin I_\varepsilon} \widehat{T}_s \delta_{s,p}.$$

Pour p fixé il existe donc $\eta > 0$ tel que $p \notin I_\varepsilon$ si $0 < \varepsilon < \eta$, d'où $[(T * \varphi_\varepsilon)^\wedge]_p = \widehat{T}_p$ pour $0 < \varepsilon < \eta$. ∎

Proposition 3.11. *Si* $u, v \in \mathcal{G}$ *alors* $[(u * v)^\wedge]_p = \widehat{u}_p \cdot \widehat{v}_p$ *pour tout* $p \in \mathbb{Z}^n$ *et si* $u \approx v$ *alors* $\widehat{u}_p \approx \widehat{v}_p$ *pour tout* $p \in \mathbb{Z}^n$.

Preuve. Ces relations résultent directement des définitions. ∎

3.4. *Suites à croissance lente dans* $\mathcal{C}^{\mathbb{Z}^n}$. On désigne par $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ (resp. $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$) l'ensemble des suites de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}$ à décroissance rapide (resp. à croissance lente). On rappelle que $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ est le dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ muni de sa topologie habituelle. On désigne par

$\mathcal{C}^{\mathbb{Z}^n}$ l'ensemble des suites indexées par $\mathbb{Z}^n$ et à valeurs dans $\mathcal{C}$; un élément de $\mathcal{C}^{\mathbb{Z}^n}$ est donc de la forme $(x_\varepsilon(p))_{\varepsilon,p}$ où $\varepsilon \in]0,1[$ et $p \in \mathbb{Z}^n$.

DÉFINITION 3.12. On dit qu'une suite $(x_\varepsilon(p))_{\varepsilon,p} \in \mathcal{C}^{\mathbb{Z}^n}$ est *à croissance lente* s'il existe $\eta > 0$ tel que $(x_\varepsilon(p))_{p\in\mathbb{Z}^n} \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ pour tout ε fixé dans $]0,1[$ et si

$$\lambda(a) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} x_\varepsilon(p) a_p$$

existe pour tout $a = (a_p)_{p\in\mathbb{Z}^n} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$.

PROPOSITION 3.13. *Si $(x_\varepsilon(p))_{\varepsilon,p} \in \mathcal{C}^{\mathbb{Z}^n}$ est une suite à croissance lente alors pour tout $s \in \mathbb{Z}^n$, $x(s) = \lim_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon(s)$ existe et $(x(p))_{p\in\mathbb{Z}^n} \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$.*

Preuve. Soit $s \in \mathbb{Z}^n$ et $(\delta_{p,s})_{p\in\mathbb{Z}^n} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}$ définie par $\delta_{p,s} = 1$ si $p = s$ et $\delta_{p,s} = 0$ sinon. $(\delta_{p,s})_{p\in\mathbb{Z}^n} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ entraîne que $\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} x_\varepsilon(p)\delta_{p,s}$ existe, c'est-à-dire que $\lim_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon(s)$ existe. Pour tout $\varepsilon \in]0,\eta[$, $(x_\varepsilon(p))_{p\in\mathbb{Z}^n} \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$, donc d'après le théorème de Banach–Steinhaus $\lambda \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$. En posant $\lambda = (\lambda_p)_{p\in\mathbb{Z}^n}$ on obtient $\lambda(a) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \lambda_p a_p$ pour tout $a = (a_p)_{p\in\mathbb{Z}^n} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$; en particulier, $\lambda((\delta_{p,s})_{p\in\mathbb{Z}^n}) = \lambda_s$, d'où $x(s) = \lambda_s$ et $(x(p))_{p\in\mathbb{Z}^n} \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$. ∎

Remarque 3. La réciproque de la proposition est fausse, comme le montre l'exemple de la suite de terme général $x_\varepsilon(p) = e^{\varepsilon|p|}$.

PROPOSITION 3.14. *Soit $(x_\varepsilon(p))_{\varepsilon,p} \in \mathcal{C}^{\mathbb{Z}^n}$ vérifiant les conditions suivantes* :

(i) $(\|x_\varepsilon\|_\infty)_\varepsilon \in \mathcal{C}_M$ *où* $\|x_\varepsilon\|_\infty = \sup_{p\in\mathbb{Z}^n} |x_\varepsilon(p)|$ *pour ε fixé.*
(ii) $\exists \mu > 0,\ \exists (\beta_p)_{p\in\mathbb{Z}^n} \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n),\ \forall (p,\varepsilon) \in \mathbb{Z}^n \times]0,\eta[\ (|x_\varepsilon(p)| \le \beta_p)$.
(iii) $\exists (\alpha_p)_{p\in\mathbb{Z}^n} \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n),\ \forall p \in \mathbb{Z}^n\ (\lim_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon(p) = \alpha_p)$.

Alors $(x_\varepsilon(p))_{\varepsilon,p}$ est à croissance lente et pour tout $(a_p)_{p\in\mathbb{Z}^n} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} x_\varepsilon(p) a_p = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \alpha_p a_p.$$

Preuve. D'après (i) on a $\exists \eta_1 > 0$, $\exists r > 0$ $(0 < \varepsilon < \eta_1 \Rightarrow |x_\varepsilon(p)| \le \varepsilon^{-r})$ pour tout $p \in \mathbb{Z}^n$. S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(x_\varepsilon(p))_{p\in\mathbb{Z}^n} \notin \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ alors pour tout $(m,c) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ il existe $p_\varepsilon \in \mathbb{Z}^n$ tel que $|x_\varepsilon(p)| > c(1+|p_\varepsilon|^2)^m$. En prenant $c = \varepsilon^{-r}$ on a $|x_\varepsilon(p)| > \varepsilon^{-r}$, d'où $\varepsilon \ge \eta_1$; on en déduit donc que $(x_\varepsilon(p))_{p\in\mathbb{Z}^n} \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ pour chaque $\varepsilon \in]0,\eta[$. Si on prend $\eta = \inf\{\eta_1, \mu\}$ alors $(x_\varepsilon(p)a_p)_{p\in\mathbb{Z}^n}$ est sommable pour tout $(a_p)_{p\in\mathbb{Z}^n} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ et pour tout $\varepsilon \in]0,\eta[$.

Les conditions (i) et (ii) avec le théorème de la convergence dominée entraînent que $\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} x_\varepsilon(p)a_p = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \alpha_p a_p$ pour tout $(a_p)_{p\in\mathbb{Z}^n} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$. ∎

EXEMPLE 3.15. Soit $r > 0$, $Q \in \mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$ et $(x_\varepsilon(p))_{\varepsilon,p}$ définie par

$$x_\varepsilon(p) = \begin{cases} Q(p) & \text{si } p \in I_\varepsilon, \\ \varepsilon^{-(|p|+r)} e^{-|p|/\varepsilon} & \text{si } p \notin I_\varepsilon; \end{cases}$$

alors $(x_\varepsilon(p))_{\varepsilon,p}$ vérifie les conditions (i), (ii), (iii), elle est donc à croissance lente.

DÉFINITION 3.16. Soit $u \in \mathcal{G}$; on dit que u est *à croissance lente* si elle admet un représentant $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ tel que pour tout $(a_p)_{p\in\mathbb{Z}^n} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$, $\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} u_\varepsilon(p)a_p$ existe (cette limite ne dépend pas du représentant).

THÉORÈME 3.17. *Une fonction généralisée est associée à une distribution si et seulement si elle est à croissance lente.*

Preuve. Soit $u \in \mathcal{G}$ et $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ un représentant de u. Pour tout $f \in \mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ nous avons $\langle u_\varepsilon, f\rangle = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \widehat{u}_{\varepsilon,p}\widehat{f}_{-p}$. Comme $(\widehat{f}_{-p})_{p\in\mathbb{Z}^n} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ si u est à croissance lente alors $\lim_{\varepsilon\to 0}\langle u_\varepsilon, f\rangle$ existe. On en déduit d'après le théorème de Banach–Steinhaus qu'il existe $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$ telle que $\langle T, f\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle u_\varepsilon, f\rangle$, d'où $u \approx T$.

Réciproquement, soit $u \approx T$ avec $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$. Si $(a_p)_{p\in\mathbb{Z}^n} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ alors $(a_{-p}x^p)_{p\in\mathbb{Z}^n}$ est sommable pour tout $x \in \mathcal{T}^n$ et la fonction f définie sur $\mathcal{T}^n$ par $f(x) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} a_{-p}x^p$ appartient à $\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$. De plus, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, $(\widehat{u}_{\varepsilon,p}a_p)_{p\in\mathbb{Z}^n}$ est sommable et $\langle u_\varepsilon, f\rangle = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \widehat{u}_{\varepsilon,p}a_p$. Comme $\langle T, f\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle u_\varepsilon, f\rangle$ on en déduit que $\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \widehat{u}_{\varepsilon,p}a_p$ existe, u est donc à croissance lente. ∎

PROPOSITION 3.18. *Soit $u\in\mathcal{G}$, $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ un représentant de u et $T\in\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées* :

(i) $\exists (s^\varepsilon)_\varepsilon, (t^\varepsilon)_\varepsilon \in (\mathbb{Z}^n)^E$, $\forall k \in \{1,\ldots,n\}$ $((s_k^\varepsilon)_\varepsilon, (t_k^\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{C}_M$, $\lim_{\varepsilon\to 0} s_k^\varepsilon = -\lim_{\varepsilon\to 0} t_k^\varepsilon = -\infty)$.

(ii) *Il existe $(w_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}$ et $(a_\varepsilon(p))_{\varepsilon,p} \in \mathcal{C}^{\mathbb{Z}^n}$ avec $(\|a_\varepsilon\|_\infty)_\varepsilon \in \mathcal{J}$ tels que $\widehat{u}_{\varepsilon,p} = \widehat{T}_p + a_\varepsilon(p)$ si $p \in I_\varepsilon^{s,t}$ et $\widehat{u}_{\varepsilon,p} = \widehat{w}_{\varepsilon,p}$ si $p \notin I_\varepsilon^{s,t}$, où $I_\varepsilon^{s,t} = \{p \in \mathbb{Z}^n : s^\varepsilon \le p \le t^\varepsilon\}$.*

Alors $u \approx T$.

Preuve. D'après (i), $\lim_{\varepsilon\to 0} s_k^\varepsilon = -\infty$ et $\lim_{\varepsilon\to 0} t_k^\varepsilon = \infty$ pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$, il existe donc $\eta_1 > 0$ tel que $s^\varepsilon \le t^\varepsilon$ pour $0 < \varepsilon < \eta_1$. Posons $v_\varepsilon = 0$ si $\eta \le \varepsilon < 1$ et $v_\varepsilon(x) = \sum_{p\in I_\varepsilon^{s,t}} \widehat{T}_p x^p$ si $0 < \varepsilon < \eta_1$; on a $\lim_{\varepsilon\to 0} v_\varepsilon = T$ dans $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$.

Pour $0 < \varepsilon < \eta_1$, $u_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x) = \sum_{p\in I_\varepsilon^{s,t}} a_\varepsilon(p)x^p + \sum_{p\notin I_\varepsilon^{s,t}} w_\varepsilon(p)x^p$, d'où pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$D^\alpha(u_\varepsilon - v_\varepsilon)(x) = \sum_{p\in I_\varepsilon^{s,t}} (ip)^\alpha a_\varepsilon(p)x^p + \sum_{p\notin I_\varepsilon^{s,t}} (ip)^\alpha w_\varepsilon(p)x^p.$$

On a $\sum_{p\in I_\varepsilon^{s,t}} |(ip)^\alpha|\cdot|a_\varepsilon(p)| \le \prod_{k=1}^n (t_k^\varepsilon - s_k^\varepsilon + 1)\sup_{1\le l\le n}\{|t_l^\varepsilon|, |s_l^\varepsilon|\}^{|\alpha|}\|a_\varepsilon\|_\infty$. Comme $(s_k^\varepsilon)_\varepsilon, (t_k^\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{C}_M$ il existe $r > 0$ et $\eta_2 > 0$ tels que $\sup_{1\le l\le n}\{|t_l^\varepsilon|, |s_l^\varepsilon|\} \le \varepsilon^{-r}$ pour $0 < \varepsilon < \eta_2$, d'où $t_k^\varepsilon - s_k^\varepsilon + 1 \le 3\varepsilon^{-r}$ et $\sum_{p\in I_\varepsilon^{s,t}} |(ip)^\alpha|\cdot|a_\varepsilon(p)| \le 3^n\|a_\varepsilon\|_\infty \varepsilon^{-r(n+|\alpha|)}$ pour $0 < \varepsilon < \eta$ avec $\eta = \inf\{\eta_1, \eta_2\}$.

Comme $(\|a_\varepsilon\|_\infty)_\varepsilon \in \mathcal{J}$ on en déduit que $(u_\varepsilon - v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}$. ∎

3.5. *Problèmes de régularité globale*

3.5.1. *$\mathcal{E}_A$-régularité et $\mathcal{D}'_A$-régularité*

DÉFINITION 3.19. Soit A une partie de $\mathbb{Z}^n$ et $u \in \mathcal{G}$; on apelle *A-composante* de u la fonction généralisée notée u_A et définie par $u_A = \mathrm{cl}(\sum_{p\in A} \widehat{u}_{\varepsilon,p}m_p)_\varepsilon$, où $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est un représentant quelconque de u.

On dit que u est *$\mathcal{E}_A$-régulière* (resp. *$\mathcal{D}'_A$-régulière*) si $u_A \in \overline{i}[\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)]$ (resp. $u_A \in \overline{i}[\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)]$), et on désigne par $\mathcal{V}_A$ (resp. $\mathcal{W}_A$) le sous-espace de $\mathcal{G}$ des éléments $\mathcal{E}_A$-réguliers (resp. $\mathcal{D}'_A$-réguliers). On pose

$$\mathcal{R}_{\mathcal{E}}(u) = \bigcup\{A \subset \mathbb{Z}^n : u \in \mathcal{V}_A\}, \qquad \mathcal{R}_{\mathcal{D}'}(u) = \bigcup\{A \subset \mathbb{Z}^n : u \in \mathcal{W}_A\}.$$

$\mathcal{R}_{\mathcal{E}}(u)$ (resp. $\mathcal{R}_{\mathcal{D}'}(u)$) est *l'ensemble de $\mathcal{E}$-régularité* (resp. *$\mathcal{D}'$-régularité*) de u. On dira que u est *$\mathcal{E}$-irrégulière* (resp. *$\mathcal{D}'$-irrégulière*) si $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}(u) = \emptyset$ (resp. $\mathcal{R}_{\mathcal{D}'}(u) = \emptyset$).

3.5.2. *$\mathcal{E}_A$-régularité faible et $\mathcal{D}'_A$-régularité faible*

DÉFINITION 3.20. Avec les notations précédentes, on dit que u est *$\mathcal{E}_A$-régulière faible* (resp. *$\mathcal{D}'_A$-régulière faible*) si u_A est associée à un élément de $\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ (resp. $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$), et on définit de manière analogue au paragraphe précédent les sous-espaces $\mathcal{V}'_A$ et $\mathcal{W}'_A$, de même que les ensembles de régularité faible, $\mathcal{R}'_{\mathcal{E}}(u)$ et $\mathcal{R}'_{\mathcal{D}'}(u)$.

On dit que u est *$\mathcal{E}$-fortement irrégulière* (resp. *$\mathcal{D}'$-fortement irrégulière*) si $\mathcal{R}'_{\mathcal{E}}(u) = \emptyset$ (resp. $\mathcal{R}'_{\mathcal{D}'}(u) = \emptyset$); dans le dernier cas on dira que u est une *fonction généralisée pure*.

PROPOSITION 3.21. (i) $\mathcal{V}_A \subset \mathcal{W}_A \subset \mathcal{W}'_A$.

(ii) $\mathcal{V}_A \subset \mathcal{V}'_A \subset \mathcal{W}'_A$.

(iii) *Si $A \subset B$ alors $\mathcal{V}_B \subset \mathcal{V}_A$, $\mathcal{W}_B \subset \mathcal{W}_A$, $\mathcal{V}'_B \subset \mathcal{V}'_A$, $\mathcal{W}'_B \subset \mathcal{W}'_A$.*

(iv) *$\mathcal{V}_A$, $\mathcal{W}_A$, $\mathcal{V}'_A$ et $\mathcal{W}'_A$ sont stables par dérivation.*

(v) *Si A est fini alors $\mathcal{W}_A = \mathcal{V}_A$ et $\mathcal{W}'_A = \mathcal{V}'_A$.*

Preuve. Evidente. ■

3.5.3. *Opérateurs différentiels réguliers*

DÉFINITION 3.22. Soit $Q \in \mathbb{C}(X)$ où $X = (X_1, \ldots, X_n)$. On dit que Q est *$\mathcal{D}'$-compatible* si $Q(ip)$ existe pour tout $p \in \mathbb{Z}^n$ et $(Q(ip))_p \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$. On désigne par $\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}(X)$ le sous-espace des séries $\mathcal{D}'$-compatibles.

On voit que $\mathbb{C}[X] \subset \mathcal{S}'_{\mathbb{C}}(X)$. Si $Q \in \mathbb{C}(X)$, on pose $Z(Q) = \{p \in \mathbb{Z}^n : Q(ip) = 0\}$, et quand $Q(ip)$ existe pour tout $p \in \mathbb{Z}^n$ on définit $(Q_p)_p$ par

$$Q_p = \begin{cases} 0 & \text{si } p \in Z(Q), \\ |Q(ip)|^{-1} & \text{si } p \notin Z(Q). \end{cases}$$

DÉFINITION 3.23. Soit $Q \in \mathcal{S}'_{\mathbb{C}}(X)$; on dit que Q est *régulier* si $(Q_p)_p \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$.

A tout élément Q de $\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}(X)$ on associe l'opérateur différentiel $Q(D)$ défini sur $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$ par

$$[Q(D)T)^\wedge]_p = Q(ip)\widehat{T}_p \quad \text{pour tout } T \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n).$$

Si Q est régulier, on dira que $Q(D)$ est *régulier*.

PROPOSITION 3.24. *Soit $u \in \mathcal{G}$ et $Q(D)$ un opérateur différentiel régulier. Alors* :

(i) $Q(D)u \in \bar{i}[\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)] \Rightarrow u - u_{Z(Q)} \in \bar{i}[\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)]$.

(ii) $Q(D)u \in \bar{i}[\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)] \Rightarrow u - u_{Z(Q)} \in \bar{i}[\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)]$.

(iii) *Si $Q(D)u$ est associé à un élément de $\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ il en est de même de $u - u_{Z(Q)}$.*

(iv) *Si $Q(D)u$ est associé à un élément de $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$ il en est de même de $u - u_{Z(Q)}$.*

Preuve. Nous allons démontrer (ii) et (iv). Soit $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ un représentant de u et $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$ telle que $Q(D) = T$; on a $Q(D)u = \mathrm{cl}(\sum_{p\in\mathbb{Z}^n} Q(ip)\widehat{u}_{\varepsilon,p} m_p)_\varepsilon$.

Comme Q est régulier, il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $Q_p \le C(1+\|p\|^2)^m$ pour tout $p \in \mathbb{Z}^n$. D'après la Proposition 2.2, $Q(D)u = T$ si et seulement si $[(Q(D)u_\varepsilon - T)*\varphi_\varepsilon]_\varepsilon \in \mathcal{N}$

et $[(\delta_1 - \varphi_\varepsilon) * Q(D)u_\varepsilon]_\varepsilon \in \mathcal{N}$; on en déduit que pour tout $q > 0$ et $s \in \mathbb{N}$ il existe $\eta' > 0$ tel que

$$0 < \varepsilon < \eta' \Rightarrow \begin{cases} |Q(ip)\widehat{u}_{\varepsilon,p} - \widehat{T}_p| \le \varepsilon^{q+1}(1+\|p\|^2)^{-s-m} & \text{pour } p \in I_\varepsilon, \\ |Q(ip)\widehat{u}_{\varepsilon,p}| \le \varepsilon^{q+1}(1+\|p\|^2)^{-s-m} & \text{pour } p \notin I_\varepsilon, \end{cases}$$

d'où

$$|\widehat{u}_{\varepsilon,p} - \widehat{T}_p/Q(ip)| \le \varepsilon^{q+1} Q_p (1+\|p\|^2)^{-s-m} \quad \text{pour } p \in I_\varepsilon \cap (\mathbb{Z}^n \backslash Z(Q))$$

et

$$|\widehat{u}_{\varepsilon,p}| \le \varepsilon^{q+1} Q_p (1+\|p\|^2)^{-s-m} \quad \text{pour } p \in (\mathbb{Z}^n \backslash I_\varepsilon) \cap (\mathbb{Z}^n \backslash Z(Q))$$

pour $0 < \varepsilon < \eta'$.

En prenant $\eta = \inf\{\eta', 1/C\}$ on a, pour $0 < \varepsilon < \eta$,

$$|\widehat{u}_{\varepsilon,p} - \widehat{T}_p/Q(ip)| \le \varepsilon^{q+1}(1+\|p\|^2)^{-s} \quad \text{pour } p \in I_\varepsilon \cap (\mathbb{Z}^n \backslash Z(Q))$$

et

$$|\widehat{u}_{\varepsilon,p}| \le \varepsilon^{q+1}(1+\|p\|^2)^{-s} \quad \text{pour } p \in (\mathbb{Z}^n \backslash I_\varepsilon) \cap (\mathbb{Z}^n \backslash Z(Q)),$$

ce qui équivaut à $u - u_{Z(Q)} = S$ où $S \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$ est définie par $\widehat{S}_p = \widehat{T}_p/Q(ip)$ si $p \notin Z(Q)$ et $\widehat{S}_p = 0$ si $p \in Z(Q)$. On a donc (ii).

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$ telle que $Q(D)u \approx T$ et $f \in \mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$, soit $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ un représentant de u. On a

$$\langle u_\varepsilon - u_{Z(Q),\varepsilon}, f\rangle = \sum_{p \notin Z(Q)} \widehat{u}_{\varepsilon,p}\widehat{f}_{-p} = \sum_{p \notin Z(Q)} Q(ip)\widehat{u}_{\varepsilon,p}\,\frac{\widehat{f}_{-p}}{Q(ip)} = \langle Q(D)u_\varepsilon, g\rangle$$

où $g \in \mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ est définie par $\widehat{g}_p = \widehat{f}_p/Q(-ip)$ si $p \notin Z(Q)$ et $g_p = 0$ si $p \in Z(Q)$.

L'application L_Q de $\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ dans $\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ définie par $L_Q(f) = g$ est continue, car si S est la distribution définie par $\widehat{S}_p = 1/Q(-ip)$ si $p \notin Z(Q)$ et $\widehat{S}_p = 0$ sinon alors $L_Q(f) = S * f$. Comme $Q(D)u \approx T$ on a $\lim_{\varepsilon\to 0}\langle u_\varepsilon - u_{Z(Q)\varepsilon}, f\rangle = \langle T, g\rangle$ et $\langle T, g\rangle = \langle T \circ L_Q, f\rangle$ avec $T \circ L_Q \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$. ∎

COROLLAIRE 3.25. *Soit $u \in \mathcal{G}$ et $Q(D)$ un opérateur différentiel régulier. Alors* :

(i) $u \in \mathcal{V}_{Z(Q)}$ *et* $Q(D)u \in \overline{i}[\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)] \Rightarrow u \in \overline{i}[\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)]$.

(ii) $u \in \mathcal{W}_{Z(Q)}$ *et* $Q(D)u \in \overline{i}[\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)] \Rightarrow u \in \overline{i}[\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)]$.

(iii) *Si* $u \in \mathcal{V}'_{Z(Q)}$ *et $Q(D)u$ est associé à un élément de $\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ il en est de même de u.*

(iv) *Si* $u \in \mathcal{W}'_{Z(Q)}$ *et $Q(D)u$ est associé à un élément de $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$ il en est de même de u.*

Preuve. Immédiate. ∎

COROLLAIRE 3.26. *Soit* $\mathcal{V}^0 = \overline{\mathcal{C}} + \overline{i}[\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)]$ *et* $\mathcal{W}^0 = \overline{\mathcal{C}} + \overline{i}[\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)]$. *Si* $u \in \mathcal{G}$ *alors*

$$\triangle u \in \mathcal{V}_0 \Rightarrow u \in \mathcal{V}_0, \quad \triangle u \in \mathcal{W}^0 \Rightarrow u \in \mathcal{W}^0.$$

Preuve. $\triangle$ est associé au polynôme $Q(X) = X_1^2 + \ldots + X_n^2$. Comme $Z(Q) = \{0\}$ on voit que $\triangle$ est un opérateur régulier. Le résultat découle alors du (i) et du (ii) de la Proposition 3.24. ∎

3.5.4. *La sous-algèbre* $\mathcal{G}^\infty$

DÉFINITION 3.27. On désigne par $\mathcal{G}^\infty$ l'ensemble des éléments u de $\mathcal{G}$ admettant un représentant $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ tel que

$$\exists r > 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \exists \eta > 0\ (0 < \varepsilon < \eta \Rightarrow \|D^\alpha u_\varepsilon\|_\infty \le \varepsilon^{-r}). \tag{1}$$

En utilisant la formule de Leibniz on montre facilement que $\mathcal{G}^\infty$ est une sous-algèbre de $\mathcal{G}$. Par ailleurs, si $u \in \mathcal{G}^\infty$ alors tout représentant de u vérifie (1). En effet, soient $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ deux représentants de u avec $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ vérifiant (1); nous pouvons écrire :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \forall q > 0,\ \exists \eta_0 > 0\ (0 < \varepsilon < \eta_0 \Rightarrow \|D^\alpha (u_\varepsilon - v_\varepsilon)\|_\infty \le \varepsilon^q)$$

et

$$\exists r_1 > 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \exists \eta_1 > 0\ (0 < \varepsilon < \eta_1 \Rightarrow \|D^\alpha u_\varepsilon\|_\infty \le \varepsilon^{-r_1}),$$

d'où l'on déduit $D^\alpha v_\varepsilon \le \varepsilon^q + \varepsilon^{-r_1} \le 2\varepsilon^{-r_1}$ pour $0 < \varepsilon < \inf\{\eta_0, \eta_1\}$.

En prenant $\eta = \inf\left\{\frac{1}{2}, \eta_0, \eta_1\right\}$ et $r = r_1 + 1$ on a $0 < \varepsilon < \eta \Rightarrow \|D^\alpha v_\varepsilon\|_\infty \le \varepsilon^{-r}$.

PROPOSITION 3.28. *$u \in \mathcal{G}^\infty$ ssi u admet un représentant $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ vérifiant*

$$\exists r > 0,\ \forall s \in \mathbb{N},\ \exists \eta > 0\ (0 < \varepsilon < \eta \Rightarrow |\widehat{u}_{\varepsilon,p}| \le \varepsilon^{-r}(1 + \|p\|^2)^{-s} \text{ pour tout } p \in \mathbb{Z}^n). \tag{2}$$

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la caractérisation de $\mathcal{X}_M$ par les coefficients de Fourier. ∎

Evidemment, si $u \in \mathcal{G}^\infty$ alors tout représentant de u vérifie (2).

PROPOSITION 3.29. *Soit Q un opérateur différentiel régulier et $u \in \mathcal{G}$. Alors $Q(D)u \in \mathcal{G}^\infty \Rightarrow u - u_{Z(Q)} \in \mathcal{G}$.*

Preuve. Soit $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ un représentant de u; on a $Q(D)u_\varepsilon = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} Q(ip)\widehat{u}_{\varepsilon,p} m_p$. Comme $Q(D)$ est régulier, il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $Q_p \le C(1 + \|p\|^2)^m$ pour tout $p \in \mathbb{Z}^n$. D'après la Proposition 3.28 on a

$$\exists r > 0,\ \forall s \in \mathbb{N},\ \exists \eta' > 0\ (0 < \varepsilon < \eta' \Rightarrow |Q(ip)\widehat{u}_{\varepsilon,p}| \le \varepsilon^{-r+1}(1 + \|p\|^2)^{-s-m} \text{ pour tout } p \in \mathbb{Z}^n).$$

En prenant $\eta = \inf\{\eta', 1/C\}$ on obtient

$$0 < \varepsilon < \eta \Rightarrow |\widehat{u}_{\varepsilon,p}| \le \varepsilon^{-r}(1 + \|p\|^2)^{-s} \text{ pour tout } p \notin -iZ_Q,$$

c'est-à-dire $u - u_{Z(Q)} \in \mathcal{G}^\infty$. ∎

COROLLAIRE 3.30. *Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Z_Q = \emptyset$ où $Z_Q = \{0\}$ et $u \in \mathcal{G}$. Alors $Q(D)u \in \mathcal{G}^\infty \Rightarrow u \in \mathcal{G}^\infty$.*

Preuve. D'après la Proposition 3.29 on peut écrire

$$\exists r_1 > 0,\ \forall s \in \mathbb{N},\ \exists \eta_1 > 0\ (0 < \varepsilon < \eta_1 \Rightarrow |\widehat{u}_{\varepsilon,p}| \le \varepsilon^{-r_1}(1 + \|p\|^2)^{-s} \text{ pour tout } p \ne 0),$$

et d'autre part, $\exists r_2 > 0$, $\exists \eta_2 > 0$ $(0 < \varepsilon < \eta_2 \Rightarrow |\widehat{u}_{\varepsilon,0}| \le \varepsilon^{-r_2})$.

En prenant $r = \sup\{r_1, r_2\}$ et $\eta = \inf\{\eta_1, \eta_2\}$ on a :

$$\forall s \in \mathbb{N}\ (0 < \varepsilon < \eta \Rightarrow |\widehat{u}_{\varepsilon,p}| \le \varepsilon^{-r}(1 + \|p\|^2)^{-s} \text{ pour tout } p \in \mathbb{Z}^n).$$

ce qui signifie que $u \in \mathcal{G}^\infty$. ∎

COROLLAIRE 3.31. *Soit $u \in \mathcal{G}$; alors $\triangle u \in \mathcal{G}^\infty \Rightarrow u \in \mathcal{G}^\infty$.*

P r e u v e. C'est une conséquence directe du Corollaire 3.30. ∎

Nous allons apporter quelques informations supplémentaires sur $\mathcal{G}^\infty$. Soit H l'ensemble des applications h de E dans $\mathbb{C}$ pour lesquelles il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|h(\varepsilon)| \le \varepsilon^\lambda$ pour tout $\varepsilon \in E$. On désigne par $\mathcal{H}$ la sous-algèbre de $\mathcal{G}$ formée des éléments admettant un représentant de la forme $(h(\varepsilon))_\varepsilon$ avec $h \in H$.

PROPOSITION 3.32. *$\mathcal{G}^\infty$ contient la sous-algèbre engendrée par $\mathcal{H}$ et $\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$.*

P r e u v e. Le résultat découle des inclusions $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}^\infty$ et $\mathcal{E}(\mathcal{T}^n) \subset \mathcal{G}^\infty$. ∎

PROPOSITION 3.33. $\mathcal{G}^\infty \cap \bar{i}[\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)] = \bar{i}[\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)]$.

P r e u v e. Identifions $\bar{i}[\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)]$ et $\bar{i}[\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)]$ avec $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$ et $\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ respectivement. Si $f \in \mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ alors pour tout $s \in \mathbb{N}$ il existe une constante $C(s) > 0$ telle que l'on ait $|\widehat{f}_p| \le C(s)(1+\|p\|^2)^{-s}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}^n$; nous pouvons donc écrire $|\widehat{f}_p| \le \varepsilon^{-1}(1+\|p\|^2)^{-s}$ si $\varepsilon \in \,]0, 1/C(s)[$ et $p \in \mathbb{Z}^n$, d'où $f \in \mathcal{G}^\infty$ et $\mathcal{E}(\mathcal{T}^n) \subset \mathcal{G}^\infty$. On en déduit l'inclusion $\mathcal{E}(\mathcal{T}^n) \subset \mathcal{G}^\infty \cap \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$.

Montrons que si $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)\backslash\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ alors $T \notin \mathcal{G}^\infty$. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)\backslash\mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$. Comme $(\widehat{T}_p)_p \notin \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $\overline{\lim}_{\|p\|\to\infty}(1+\|p\|^2)^s|\widehat{T}_p| = \infty$. Si $T \in \mathcal{G}^\infty$ il existe $r > 0$ et $\eta > 0$ tels que $|\widehat{T}_p| \le \varepsilon^{-r}(1+\|p\|^2)^{-s}$ pour $0 < \varepsilon < \eta$ et $p \in I_\varepsilon$. Comme $\overline{\lim}_{\|p\|\to\infty}(1+\|p\|^2)^s|\widehat{T}_p| = \infty$, pour $A > 0$ et $\eta > 0$ il existe $p \in \mathbb{Z}^n$ avec $\|p\|^2 > \eta$ tel que $(1+\|p\|^2)^s|\widehat{T}_p| > A$. En prenant $A = \varepsilon^{-r}$ et $\eta = n/\varepsilon^2$ avec $0 < \varepsilon < \eta$ on a $p \in I_\varepsilon$ et $(1+\|p\|^2)^s|\widehat{T}_p| > \varepsilon^{-r}$, ce qui contredit $T \in \mathcal{G}^\infty$, d'où $\mathcal{G}^\infty \cap \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n) \subset \mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$. ∎

R e m a r q u e 4. La sous-algèbre $\mathcal{G}^\infty$ est une version périodique de celle définie par M. Oberguggenberger qui a aussi démontré la Proposition 3.33 dans le cas non périodique (cf. [28], pp. 274–277).

3.6. *Exemples : fonction de $\mathcal{G}_\pi(\mathbb{R})$ associée à* v.p.$\cot x$, *équation des ondes*

3.6.1. *Fonction de $\mathcal{G}_\pi(\mathbb{R})$ associée à* v.p.$\cot x$

Construction de l'exemple. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction positive telle que son support soit dans $[-1, 1]$ et vérifiant $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\,dx = 1$. Pour chaque $\varepsilon \in \,]0, 1[$, soit $\psi_\varepsilon \in \mathcal{E}_\pi(\mathbb{R})$ définie par $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\psi(x/\varepsilon)$ pour $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

On désigne par f_ε la fonction π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie par $f_\varepsilon(x) = \cot x$ si $\varepsilon \le |x| \le \pi/2$, $f_\varepsilon(x) = \operatorname{sgn} x \cdot \cot x$ si $0 < |x| < \varepsilon$ et $f_\varepsilon(0) = 0$. On pose $F_\varepsilon(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_\varepsilon(x-t)\psi_\varepsilon(t)\,dt$.

F_ε est une fonction impaire et $F_\varepsilon \in \mathcal{E}_\pi(\mathbb{R})$; de plus, $F_\varepsilon(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_\varepsilon(t)\psi_\varepsilon(x-t)\,dt$. On en déduit que $F_\varepsilon^{(m)}(x) = (1/\varepsilon)^{m+1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_\varepsilon(t)\psi_\varepsilon^{(m)}((x-t)/\varepsilon)\,dt$ pour $m \in \mathbb{N}$. D'autre part,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |f_\varepsilon(t)|\,dt = 2\Big(\varepsilon\cot\varepsilon + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cot t\,dt\Big) = 2(\varepsilon\cot\varepsilon - \log\sin\varepsilon);$$

on en déduit que

$$\|F_\varepsilon^{(m)}\|_\infty \le 2(\varepsilon\cot\varepsilon - \log\sin\varepsilon)\|\psi^{(m)}\|_\infty\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{m+1}.$$

Comme $\lim_{\varepsilon\to 0} 2\varepsilon(\varepsilon\cot\varepsilon - \log\sin\varepsilon) = 0$, on en déduit qu'il existe $c > 0$ tel que l'on ait $\|F_\varepsilon^{(m)}\|_\infty \le c(1/\varepsilon)^{m+2}$, ce qui montre que $(F_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}_{\pi,M}(\mathbb{R})$.

Soit $\varphi \in \mathcal{E}_\pi(\mathbb{R})$; on a

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} F_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_\varepsilon(x-t)\psi_\varepsilon(t)\,dt\Big)\varphi(x)\,dx,$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} F_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_\varepsilon(x-t)\varphi(x)\,dx\Big)\psi_\varepsilon(t)\,dt.$$

Posons $I_\varepsilon(t) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_\varepsilon(x-t)\varphi(x)\,dx$. En faisant un changement de variable et en tenant compte de la parité de f_ε on obtient $I_\varepsilon(t) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_\varepsilon(x)\varphi(x+t)\,dx$. En décomposant $I_\varepsilon(t)$ on obtient

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} F_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx - \int_{\varepsilon\le|x|\le\pi/2} \cot x\,\varphi(x)\,dx$$
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big(\int_{\varepsilon\le|x|\le\pi/2} \cot x\,(\varphi(x+t)-\varphi(x))\,dx\Big)\psi_\varepsilon(t)\,dt + \cot\varepsilon\int_0^\varepsilon(\varphi(x+t)-\varphi(-x+t))\,dx.$$

En appliquant le théorème des accroissements finis on obtient

$$\Big|\int_{\varepsilon\le|x|\le\pi/2} \cot x\,(\varphi(x+t)-\varphi(x))\,dx\Big| \le -2|t|\cdot\|\varphi'\|_\infty \log\sin\varepsilon,$$

$$\Big|\int_0^\varepsilon(\varphi(x+t)-\varphi(-x+t))\,dx\Big| \le 2\varepsilon^2\|\varphi'\|_\infty,$$

et comme $[-\pi/2,\pi/2]\cap\operatorname{supp}\psi_\varepsilon \subset [-\varepsilon,\varepsilon]$, on prend $|t|\le\varepsilon$, d'où

$$\Big|\int_{-\pi/2}^{\pi/2} F_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx - \int_{\varepsilon\le|x|\le\pi/2}\cot x\,\varphi(x)\,dx\Big| \le 2(\varepsilon^2\cot\varepsilon - \varepsilon\log\sin\varepsilon)\|\varphi'\|_\infty.$$

Par définition on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\le|x|\le\pi/2}\cot x\,\varphi(x)\,dx = \langle \text{v.p.}\cot x,\varphi\rangle,$$

et d'autre part,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^2\cot\varepsilon - \varepsilon\log\sin\varepsilon) = 0.$$

On en déduit $\lim_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon = \text{v.p.}\cot x$ dans $\mathcal{D}'_\pi(\mathbb{R})$. En posant $F = \operatorname{cl}(F_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{G}_\pi(\mathbb{R})$ on a donc $F \approx \text{v.p.}\cot x$.

Coefficients de Fourier de F_ε. On a $\widehat{\psi}_\varepsilon(k) = \pi^{-1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\psi_\varepsilon(t)e^{-2ikt}\,dt$ pour $k\in\mathbb{Z}$, d'où

$$\Big|\widehat{\psi}_\varepsilon(k) - \frac{1}{\pi}\Big| \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\psi_\varepsilon(t)|e^{-2ikt}-1|\,dt.$$

Soit $\alpha > 0$; il existe $\eta > 0$ tel que $0 < |t| < \eta \Rightarrow |e^{-2ikt}-1| < \alpha$; d'où $\lim_{\varepsilon\to 0}\widehat{\psi}_\varepsilon(k) = 1/\pi$.

Par ailleurs, $\widehat{F}_\varepsilon(k) = \pi \widehat{f}_\varepsilon(k)\widehat{\psi}_\varepsilon(k)$ et l'existence de $\lim_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon$ dans $\mathcal{D}'_\pi(\mathbb{R})$ entraînent que $\lim_{\varepsilon\to 0} \widehat{F}_\varepsilon(k)$ existe et $\lim_{\varepsilon\to 0} \widehat{F}_\varepsilon(k) = \lim_{\varepsilon\to 0} \widehat{f}_\varepsilon(k)$. On a

$$\widehat{f}_\varepsilon(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_\varepsilon(t) e^{-2ikt}\, dt,$$

d'où $\widehat{f}_\varepsilon(0) = 0$ et pour $k \neq 0$,

$$\widehat{f}_\varepsilon(k) = -\frac{2i \cot\varepsilon \cdot \sin^2 k\varepsilon}{k\pi} - \frac{2i}{\pi} \int_\varepsilon^{\pi/2} \cot t \cdot \sin 2kt\, dt.$$

Ensuite, un calcul simple donne

$$\int_\varepsilon^{\pi/2} \cot t \cdot \sin 2kt\, dt = \frac{\pi}{2} - \varepsilon - \sum_{p=1}^{k-1} \frac{\sin 2p\varepsilon}{p} - \frac{\sin 2k\varepsilon}{2k} \qquad \text{pour } k \geq 2.$$

En résumé, en notant le signe sgn, on obtient :

$$\widehat{f}_\varepsilon(0) = 0,$$

$$\widehat{f}_\varepsilon(-1) = i + \frac{2i}{\pi}\Big(\cot\varepsilon \cdot \sin^2\varepsilon + \frac{\sin 2\varepsilon}{2} - \varepsilon\Big),$$

$$\widehat{f}_\varepsilon(1) = -i - \frac{2i}{\pi}\Big(\cot\varepsilon \cdot \sin^2\varepsilon + \frac{\sin 2\varepsilon}{2} - \varepsilon\Big),$$

$$\widehat{f}_\varepsilon(k) = \operatorname{sgn} k\Big\{ -i + \frac{2i}{\pi}\Big(-\frac{\cot\varepsilon \cdot \sin^2 k\varepsilon}{|k|} + \frac{\sin 2k\varepsilon}{2k} + \varepsilon + \sum_{p=1}^{|k|-1} \frac{\sin 2p\varepsilon}{p}\Big)\Big\} \qquad \text{si } |k| \geq 2.$$

En posant $\operatorname{sgn} 0 = 0$ on a alors $\lim_{\varepsilon\to 0} \widehat{f}_\varepsilon(k) = -i \operatorname{sgn} k$, d'où $\lim_{\varepsilon\to 0} \widehat{F}_\varepsilon(k) = -i \operatorname{sgn} k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$; on en déduit que

$$\text{v.p.}\cot x = -i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} k \cdot e^{2ikx} \qquad \text{dans } \mathcal{D}'_\pi(\mathbb{R}),$$

c'est-à-dire que pour tout $\varphi \in \mathcal{E}_\pi(\mathbb{R})$,

$$\langle \text{v.p.}\cot x, \varphi\rangle = i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} k \cdot \widehat{\varphi}(k).$$

Ainsi donc on retrouve le developpement en série de Fourier bien connu de v.p.$\cot x$.

Nous allons donner maintenant quelques solutions particulières de l'équation des ondes.

3.6.2. *Exemples de solutions de l'équation des ondes.* Considérons l'équation

$$\text{(I)} \qquad D_\xi^2 u(\xi, x) - \triangle_x u(\xi, x) = 0, \qquad (\xi, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}^n.$$

On cherche une solution de (I) dans $\mathcal{G}^{n+1}$, c'est-à-dire $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}_M^{n+1}$ telle que $(D^2(u_\varepsilon + v_\varepsilon) - \triangle_x(u_\varepsilon + v_\varepsilon))_\varepsilon \in \mathcal{N}^{n+1}$ pour tout $(v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}^{n+1}$.

Si $f \in \mathcal{E}(\mathcal{T} \times \mathcal{T}^n)$ alors nous avons $f(\xi, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(k,p)\xi^k x^p$ pour tout $(\xi, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}^n$.

f est solution de $D_\xi^2 u - \triangle_x u = 0$ au sens classique ssi $(\|p\|^2 - k^2)\widehat{f}(k,p) = 0$ pour tout $(k,p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^n$.

Posons $p_{jk} = (0,\ldots,k,\ldots,0)$ où $k \in \mathbb{Z}$ est la $j^{\text{ème}}$ composante de p_{jk} et prenons $\widehat{f}(k,p) = 0$ si $(k,p) \notin \{(m,p_{jm}),(m,-p_{jm}) : m \in \mathbb{Z}\}$ de sorte que

$$f(\xi,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{n} \widehat{f}(k,-p_{jk})\overline{x}_j^k + \widehat{f}(k,p_{jk})x_j^k \Big)\xi^k.$$

On obtient donc une solution de (I) en prenant $\widehat{u}_\varepsilon(k,p) = 0$ lorsque $(k,p) \notin \{(m,p_{jm}), (m,-p_{jm}) : m \in \mathbb{Z}\}$ et

(i) $$\forall \varepsilon \in E \ ((\widehat{u}_\varepsilon(k,-p_{jk}))_k \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}) \text{ et } (\widehat{u}_\varepsilon(k,p_{jk}))_k \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})),$$

de sorte que $u_\varepsilon \in \mathcal{E}(\mathcal{T}^{n+1})$, et

(ii) $$\forall s \in \mathbb{N},\ \exists r > 0,\ \exists \eta > 0$$
$$(0 < \varepsilon < \eta \Rightarrow \sup_{1\le j\le n} \{|\widehat{u}_\varepsilon(k,-p_{jk})|, |\widehat{u}_\varepsilon(k,p_{jk})|\} \le \varepsilon^{-r}(1+k^2)^{-s}).$$

On peut prendre $\widehat{u}_\varepsilon(k,-p_{jk}) = a_k\alpha_{j\varepsilon}$ et $\widehat{u}_\varepsilon(k,p_{jk}) = b_k\beta_{j\varepsilon}$ avec $(a_k)_k$ et $(b_k)_k$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$, et avec $(\alpha_{j\varepsilon})_\varepsilon$ et $(\beta_{j\varepsilon})_\varepsilon$ dans $\mathcal{C}_M$ pour $1 \le j \le n$.

— Si on prend $\widehat{u}_\varepsilon(k,-p_{jk}) = \widehat{u}_\varepsilon(k,p_{jk}) = e^{-|k|}\varepsilon^{-r}$ avec $r > 0$, alors pour $j \in \{1,\ldots,n\}$, les conditions (i) et (ii) sont vérifiées; on a donc une solution u de (I) représentée par

$$(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}_M^{n+1} \quad \text{où} \quad u_\varepsilon(\xi,x) = \varepsilon^{-r} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-|k|} \sum_{j=1} Z^n(\overline{x}_j^k + x_j^k)\xi^k$$

qui correspond à la solution $U = \mathrm{cl}(U_\varepsilon)_\varepsilon$ dans $\mathcal{G}_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$ où

$$U_\varepsilon(t,\theta) = 2\varepsilon^{-r} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-|k|} \Big(\sum_{j=1}^{n} \cos\theta_j \Big) e^{ikt} \quad \text{pour } (t,\theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n;$$

cette solution n'est pas une distribution car elle n'est pas à croissance lente.

— Si on prend $\widehat{u}_\varepsilon(k,-p_{jk}) = \widehat{u}_\varepsilon(k,p_{jk}) = \lambda_k$ pour $|k| \le 1/\varepsilon$ et $\widehat{u}_\varepsilon(k,-p_{jk}) = \widehat{u}_\varepsilon(k,p_{jk}) = 0$ pour $k > 1/\varepsilon$ avec $j \in \{1,\ldots,n\}$ et $(\lambda_k)_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$, on obtient une distribution comme solution.

4. Restrictions des éléments de $\mathcal{G}$. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{X}_{m,M} = \mathcal{X}_M(\mathcal{T}^m)$, $\mathcal{N}_m = \mathcal{N}(\mathcal{T}^m)$ et $\mathcal{G}_m = \mathcal{G}(\mathcal{T}^m)$, on désigne par 1_m l'élément $(1,\ldots,1) \in \mathcal{T}^m$, par δ_{1_m} (ou δ_1 s'il n'y a pas de risque de confusion) la mesure de Dirac en 1_m, et par $\overline{i}_m$ l'injection de $\mathcal{E}(\mathcal{T}^m)$ dans $\mathcal{G}_m$.

4.1. *Restriction à un sous-groupe.* On considère les sous-groupes de $\mathcal{T}^n$ isomorphes à $\mathcal{T}^p$ avec $p \in \{1,\ldots,n\}$. Soit m un entier ≥ 2, $n_1,\ldots,n_m$ des entiers ≥ 1 et $n = n_1+\ldots+n_m$; posons $\widetilde{\mathcal{T}^{n_k}} = \{1_{n_1+\ldots+n_{k-1}}\} \times \mathcal{T}^{n_k} \times \{1_{n_{k+1}+\ldots+n_m}\}$. On peut décomposer $\mathcal{T}^n$ sous la forme $\mathcal{T}^n = \widetilde{\mathcal{T}^{n_1}} \ldots \widetilde{\mathcal{T}^{n_m}}$, et tout élément X de $\mathcal{T}^n$ s'écrit de façon unique sous la forme $X = \widetilde{X_1} \ldots \widetilde{X_m}$ avec $\widetilde{X_k} \in \widetilde{\mathcal{T}^n}$, $1 \le k \le m$.

Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ désignons par ι_k l'inclusion de $\mathcal{T}^{n_k}$ dans $\mathcal{T}^n$ définie par $\iota_k(\mathcal{T}^{n_k}) = \mathcal{T}^{n_k}$; on sait que $\iota_k \in C^\infty(\mathcal{T}^{n_k}, \mathcal{T}^n)$, et si $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}_{n,M}$ alors nous avons $(u_\varepsilon \circ \iota_k) \in \mathcal{X}_{n_k,M}$.

DÉFINITION 4.1. Soit $u \in \mathcal{G}_n$. On appelle *restriction* de u à $\widetilde{\mathcal{T}^{n_k}}$, que l'on note $u|_{\widetilde{\mathcal{T}^{n_k}}}$, la classe de $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ où v_ε est défini sur $\widetilde{\mathcal{T}^n}$ par $v_\varepsilon(X) = (u_\varepsilon \circ \iota_k)(X_k)$ avec $X_k = (x_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1}, \ldots, x_{n_1+\ldots+n_k})$ si $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{T}^n$, $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ étant un représentant de u. On désigne par $\mathcal{G}(\widetilde{\mathcal{T}^{n_k}})$ la sous-algèbre des restrictions des éléments de $\mathcal{G}_n$ à $\widetilde{\mathcal{T}^{n_k}}$.

Dans la suite on identifiera $\widetilde{\mathcal{T}^{n_k}}$ à $\mathcal{T}^{n_k}$ et $\mathcal{G}(\widetilde{\mathcal{T}^{n_k}})$ à $\mathcal{G}_{n_k}$ par $L : \mathcal{G}_{n_k} \to \mathcal{G}_n$, $v \mapsto \mathrm{cl}(v_\varepsilon \circ \iota_k^{-1})_\varepsilon$.

EXEMPLE 4.2. *Restriction de δ_{1_n} à $\mathcal{T}^{n_j}$.* Pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon \in]0,1[$ on pose $r(m,\varepsilon) = ([1/\varepsilon], \ldots, [1/\varepsilon]) \in \mathbb{N}^m$ et $\varphi_{m,\varepsilon}(X) = \sum_{p \in I(m,\varepsilon)} X^p$ pour $X \in \mathcal{T}^m$; on a

$$\varphi_{n,\varepsilon}(X) = \sum_{p \in I(n,\varepsilon)} X^p = \sum_{p \in I(m,\varepsilon)} X_1^p \ldots X_m^p \quad \text{pour } X \in \mathcal{T}^n.$$

Ecrivons $p = (p_1, \ldots, p_m)$ avec $p_k \in \mathbb{Z}^{n_k}$ pour $k = 1, \ldots, m$. Nous avons $p \in I(n,\varepsilon) \Leftrightarrow p_k \in I(n_k,\varepsilon)$ pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$, ce qui nous permet d'écrire $\varphi_{n,\varepsilon}(X) = \sum_{k=1}^m \sum_{p_k \in I(n_k,\varepsilon)} X_1^{p_1} \ldots X_m^{p_m}$, d'où

$$\varphi_{n,\varepsilon}(X) = \prod_{k=1}^m \varphi_{n_k,\varepsilon}(X_k).$$

On a donc $\varphi_{n,\varepsilon}(X_j) = (\prod_{k=1,\, k\neq j}^m \varphi_{n_k,\varepsilon}(1_{n_k}))\varphi_{n_j,\varepsilon}(X_j)$. D'autre part, $\varphi_{n_k,\varepsilon}(1_{n_k}) = (2[1/\varepsilon]+1)^{n_k}$, ce qui donne $\varphi_{n,\varepsilon}|_{\mathcal{T}^{n_j}} = (2[1/\varepsilon]+1)^{n-n_j}\varphi_{n_j,\varepsilon}$.

Finalement, nous obtenons

$$\delta_{1_n}|_{\mathcal{T}^{n_j}} = \delta_{1_{n_j}} + u_j \quad \text{avec} \quad u_j = \mathrm{cl}\left[\left(\sum_{k=1}^{n-n_j} \binom{n-n_j}{k} \left(2\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right)^k\right)\varphi_{n_j,\varepsilon}\right]_\varepsilon.$$

Comme $\mathrm{cl}(\varphi_{n_j,\varepsilon}) = \delta_{1_{n_j}}$ dans $\mathcal{G}_{n_j}$, on voit que $\delta_{1_n}|_{\mathcal{T}^{n_j}}$ n'est pas une distribution.

PROPOSITION 4.4. *L'application $\mathcal{G}_n \to \mathcal{G}_{n_k}$, $u \mapsto u|_{\mathcal{T}^{n_k}}$, est un morphisme surjectif d'algèbres différentielles.*

Preuve. Prenons $v \in \mathcal{G}_{n_k}$ et $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ un représentant de v dans $\mathcal{X}_{n_k,M}$. Soit $u_\varepsilon \in \mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ définie par $u_\varepsilon(X) = v_\varepsilon(X_k)$ pour $X = X_1 \ldots X_m$ avec $X_j \in \mathcal{T}^{n_j}$. Il est clair que $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}_{n,M}$ et $u_\varepsilon|_{\mathcal{T}^{n_k}} = v_\varepsilon$. Si $u = \mathrm{cl}(u_\varepsilon)_\varepsilon$ alors on a $u|_{\mathcal{T}^{n_k}} = v$. ∎

PROPOSITION 4.4. (i) *Si $f \in \mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ alors $(\bar{i}_n(f))|_{\mathcal{T}^{n_k}} = \bar{i}_{n_k}(f|_{\mathcal{T}^{n_k}})$. Autrement dit, les restrictions classiques et généralisées coïncident.*

(ii) *Si $f = \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} a_p x^p$ est une série convergente alors $(\bar{i}_n(f))|_{\mathcal{T}^{n_k}} \approx \bar{i}_{n_k}(f|_{\mathcal{T}^{n_k}})$.*

Preuve. Comme (i) est évident, nous allons démontrer (ii). On a $(f * \varphi_{n,\varepsilon})(X) = \sum_{p \in I(n,\varepsilon)} a_p X^p$, d'où $(f * \varphi_{n,\varepsilon})(X_k) = \sum_{p \in I(n,\varepsilon)} a_p X_k^{p_k}$, ce que l'on peut écrire sous la forme

$$(f * \varphi_{n,\varepsilon})(X_k) = \sum_{p_k \in I(n_k,\varepsilon)} \Big(\sum_{\substack{p_j \in I(n_j,\varepsilon) \\ j \neq k}} a_p\Big) X_k^{p_k}.$$

D'autre part, $((f|_{\mathcal{T}^{n_k}})*\varphi_{n_k,\varepsilon})(X_k)=\int_{\mathcal{T}^{n_k}}(f|_{\mathcal{T}^{n_k}})(X_k\overline{Y}_k)\varphi_{n_k,\varepsilon}(Y_k)\,d\mu_k$, où μ_k désigne la mesure sur $\mathcal{T}^{n_k}$, ce qui donne

$$((f|_{\mathcal{T}^{n_k}})*\varphi_{n_k,\varepsilon})(X_k)=\int\limits_{\mathcal{T}^{n_k}}\sum_{p_k\in\mathbb{Z}^{n_k}}\Big(\sum_{\substack{p_j\in\mathbb{Z}^{n_j}\\ j\neq k}}a_p\Big)X_k^{p_k}\overline{Y}_k^{p_k}\varphi_{n_k,\varepsilon}(Y_k)\,d\mu_k.$$

La convergence absolue de la série $\sum_{p\in\mathbb{Z}^n}a_pX^p$ entraîne

$$((f|_{\mathcal{T}^{n_k}})*\varphi_{n_k,\varepsilon})(X_k)=\sum_{p_k\in I(n_k,\varepsilon)}\Big(\sum_{\substack{p_j\in\mathbb{Z}^{n_j}\\ j\neq k}}a_p\Big)X_k^{p_k}.$$

Notons I_ε^k le complémentaire dans $\mathbb{Z}^{n-n_k}$ de l'ensemble des $\widetilde{p}=(\widetilde{p}_1,\ldots,\widetilde{p}_k,\ldots,\widetilde{p}_m)$, où $\widetilde{p}_j\in\mathbb{Z}^{n_j}$, tels que $\widetilde{p}_j\in I(n_j,\varepsilon)$ pour $j\neq k$. Pour $p\in\mathbb{Z}^n$ posons $p^{(k)}=(p_1,\ldots,p_k,\ldots$ $\ldots,p_m)$. On a alors

$$(f*\varphi_{n,\varepsilon})(X_k)-((f|_{\mathcal{T}^{n_k}})*\varphi_{n_k,\varepsilon})(X_k)=\sum_{p_k\in I(n_k,\varepsilon)}\Big(\sum_{p^{(k)}\in I_\varepsilon^k}a_p\Big)X_k^{p_k}.$$

Comme $p^{(k)}\in I_\varepsilon^k$ entraîne $p\notin I_\varepsilon$, d'où $\|p\|>[1/\varepsilon]$, de la convergence de la série $\sum_{p\in\mathbb{Z}^n}a_pX^p$ on déduit que $\lim_{\varepsilon\to0}\sum_{p^{(k)}\in I_\varepsilon^k}a_p=0$. Soit $\psi\in\mathcal{E}(\mathcal{T}^{n_k})$; on a

$$\langle(f*\varphi_{n,\varepsilon})|_{\mathcal{T}^{n_k}}-((f|_{\mathcal{T}^{n_k}})*\varphi_{n_k,\varepsilon}),\psi\rangle=\sum_{p_k\in I(n_k,\varepsilon)}\Big(\sum_{p^{(k)}\in I_\varepsilon^k}a_p\Big)\widehat{\psi}(-p_k),$$

d'où l'on obtient

$$|\langle(f*\varphi_{n,\varepsilon})|_{\mathcal{T}^{n_k}}-((f|_{\mathcal{T}^{n_k}})*\varphi_{n_k,\varepsilon}),\psi\rangle|\le\sum_{p_k\in\mathbb{Z}^{n_k}}\Big|\sum_{p^{(k)}\in I_\varepsilon^k}a_p\Big||\widehat{\psi}(-p_k)|.$$

La convergence de la série $\sum_{p_k\in\mathbb{Z}^{n_k}}|\widehat{\psi}(-p_k)|$ montre que

$$\lim_{\varepsilon\to0}|\langle(f*\varphi_{n,\varepsilon})|_{\mathcal{T}^{n_k}}-((f|_{\mathcal{T}^{n_k}})*\varphi_{n_k,\varepsilon}),\psi\rangle|=0.\ \blacksquare$$

PROPOSITION 4.5. *Soit $S\in\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$. On suppose qu'il existe $k\in\{1,\ldots,m\}$, $(b_s)_{s\in\mathbb{Z}^{n_k}}$ $\in\mathcal{S}(\mathbb{Z}^{n_k})$ et $(\lambda_{\varepsilon,s})_{\varepsilon,s}\in(\mathcal{S}(\mathbb{Z}^{n_k}))^E$ tels que*

$$\forall\varepsilon\in E\ \Big(\sum_{\substack{p_j\in I(n_j,\varepsilon)\\ j\neq k}}\widehat{S}_p=b_{p_k}+\lambda_{\varepsilon,p_k}\ \textit{pour}\ |p_k|\le\frac{1}{\varepsilon}\Big).$$

On pose $F=\sum_{s\in\mathbb{Z}^{n_k}}b_sX_k^s$ et $G_\varepsilon=\sum_{s\in\mathbb{Z}^{n_k}}\lambda_{\varepsilon,s}X_k^s$. Alors :

(i) *Si $\lim_{\varepsilon\to0}G_\varepsilon=G$ dans $\mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$, alors $S|_{\mathcal{T}^{n_k}}\approx F+G$.*

(ii) *Si $(G_\varepsilon)_\varepsilon\in\mathcal{N}_{n_k}$, alors $S|_{\mathcal{T}^{n_k}}=F$.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate de l'égalité

$$(S*\varphi_{n,\varepsilon})(X_k)=\sum_{p_k\in I(n_k,\varepsilon)}\Big(\sum_{\substack{p_j\in I(n_j,\varepsilon)\\ j\neq k}}\widehat{S}_p\Big)X_k^{p_k}.\ \blacksquare$$

Exemple 4.6. Soit $(\alpha(j))_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite >1 telle que $\lim_{|j|\to\infty}\alpha(j)=\infty$, $(\beta_j)_{j\in\mathbb{Z}}\in\mathcal{S}(\mathbb{Z})$, $r\in\mathbb{N}$ et $S\in\mathcal{D}'(\mathcal{T}^2)$ avec

$$\widehat{S}_p=\begin{cases}\dfrac{\beta_k}{1+|l|^{\alpha(l)}} & \text{si } |k|<|l|,\\[2mm] \dfrac{k^r}{1+|l|^{\alpha(l)}} & \text{si } |k|\geq|l|,\end{cases}$$

avec $p=(k,l)\in\mathbb{Z}^2$. Alors $S|_{\mathcal{T}^1}$ est une distribution, où $\mathcal{T}^1$ désigne $\mathcal{T}\times\{1\}$.

Un calcul simple montre que

$$\sum_{|l|\leq 1/\varepsilon}\widehat{S}_p=\begin{cases}2\Big(\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\beta_0}{1+|l|^{\alpha(l)}}\Big)-2\Big(\sum_{l=[1/\varepsilon]+1}^{\infty}\frac{\beta_0}{1+|l|^{\alpha(l)}}\Big) & \text{si } k=0,\\[2mm] k^r+2\Big(\displaystyle\sum_{l=1}^{|k|}\frac{k^r}{1+|l|^{\alpha(l)}}+\sum_{l=|k|+1}^{\infty}\frac{\beta_k}{1+|l|^{\alpha(l)}}\Big) & \\ \qquad -2\displaystyle\sum\frac{\beta_k}{1+|l|^{\alpha(l)}} & \text{si } 0<k\leq[1/\varepsilon],\\[2mm] k^r+2\Big(\displaystyle\sum_{l=1}^{|k|}\frac{k^r}{1+|l|^{\alpha(l)}}\Big)-2\Big(\sum_{l=[1/\varepsilon]+1}^{|k|}\frac{k^r}{1+|l|^{\alpha(l)}}\Big) & \text{si } k\geq[1/\varepsilon]+1,\end{cases}$$

$$F=2\Big(\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\beta_0}{1+|l|^{\alpha(l)}}\Big)+2\sum_{k\neq 0}\Big(\sum_{l=1}^{|k|}\frac{\beta_k}{1+|l|^{\alpha(l)}}+\sum_{l=|k|+1}^{\infty}\frac{k^r}{1+|l|^{\alpha(l)}}\Big)X_1^k\in\mathcal{D}'(\mathcal{T}),$$

$$G=-2\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{l=[1/\varepsilon]+1}^{\infty}\frac{\beta_k}{1+|l|^{\alpha(l)}}\Big)X_1^k\quad\text{avec } \lambda_{\varepsilon,k}=\sum_{l=[1/\varepsilon]+1}^{\infty}\frac{\beta_k}{1+|l|^{\alpha(l)}}.\ \blacksquare$$

On a

$$2\Big(\sum_{l=[1/\varepsilon]+1}^{\infty}\frac{1}{1+|l|^{\alpha(l)}}\Big)\leq\frac{2}{\alpha([1/\varepsilon])-1}\Big[\frac{1}{\varepsilon}\Big]^{1-\alpha([1/\varepsilon]+1)}\qquad\text{avec } \alpha\Big(\Big[\frac{1}{\varepsilon}\Big]\Big)>1,$$

d'où l'on déduit

$$|\lambda_{\varepsilon,k}|\leq\frac{2|\beta_k|}{\alpha([1/\varepsilon])-1}\Big[\frac{1}{\varepsilon}\Big]^{1-\alpha([1/\varepsilon]+1)}.$$

Soit $s\in\mathbb{N}$ et $q>0$. Comme $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|^s|\beta_k|<\infty$ et $\lim_{|j|\to\infty}\alpha(j)=\infty$, alors

$$|G_\varepsilon^{(s)}(X_1)|\leq\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|^s|\beta_k|\Big)\frac{2}{\alpha([1/\varepsilon])\ -1}\Big[\frac{1}{\varepsilon}\Big]^{1-\alpha([1/\varepsilon]+1)},$$

ce qui montre que $(G_\varepsilon)_\varepsilon\in\mathcal{N}$ et par suite $S|_{\mathcal{T}^1}=F$.

4.2. *Restriction à un ouvert de $\mathcal{T}^n$.* Dans toute cette partie U désigne un ouvert de $\mathcal{T}^n$.

4.2.1. *Fonctions généralisées bornées sur un ouvert.* Soit $\mathcal{E}^{\mathrm{b}}(U)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ sur U bornées ainsi que toutes leurs dérivées, et $\mathcal{X}^{\mathrm{b}}(U)=(\mathcal{E}^{\mathrm{b}}(U)))^E$. On pose

$$\mathcal{X}_M^{\mathrm{b}}(U) = \{(f_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}^{\mathrm{b}}(U) : \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \exists p > 0,\ \exists \eta > 0\ (0 < \varepsilon < \eta \Rightarrow \|D^\alpha f_\varepsilon\|_\infty \le \varepsilon^{-p})\},$$
$$\mathcal{N}^{\mathrm{b}}(U) = \{(f_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}^{\mathrm{b}}(U) : \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \forall q > 0,\ \exists \eta > 0\ (0 < \varepsilon < \eta \Rightarrow \|D^\alpha f_\varepsilon\|_\infty \le \varepsilon^{q})\}.$$

$\mathcal{N}^{\mathrm{b}}(U)$ est un idéal de l'algèbre $\mathcal{X}_M^{\mathrm{b}}(U)$, et l'algèbre quotient

$$\mathcal{G}^{\mathrm{b}}(U) = \mathcal{X}_M^{\mathrm{b}}(U)/\mathcal{N}^{\mathrm{b}}(U)$$

est l'algèbre des fonctions généralisées *bornées* sur U.

4.2.2. *Restriction à U d'un élément de $\mathcal{G}$*

DÉFINITION 4.7. Soit $u \in \mathcal{G}$. On appelle *restriction* de u à U l'élément de $\mathcal{G}^{\mathrm{b}}(U)$ noté $u|_U$ et défini par $u|_U = \mathrm{cl}(u_\varepsilon|_U)$ où $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est un représentant quelconque de u dans $\mathcal{X}_M$.

Il est évident que si $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}$ alors $(u_\varepsilon|_U)_\varepsilon \in \mathcal{N}^{\mathrm{b}}(U)$, la définition ne dépend donc pas du représentant choisi.

Injection de $\mathcal{E}^{\mathrm{b}}(U)$ dans $\mathcal{G}^{\mathrm{b}}(U)$. Cette injection est définie par $\sigma(f) = \mathrm{cl}(f_\varepsilon)_\varepsilon$ où $f_\varepsilon = f$ pour tout $\varepsilon \in E$.

Injection de $\mathcal{E}'(U)$ dans $\mathcal{G}^{\mathrm{b}}(U)$. Soit $T \in \mathcal{E}'(U)$, $K = \operatorname{supp} T$ et $S \in \mathcal{D}'(\mathcal{T}^n)$ telle que $S|_U = T$ et $S|_{\mathcal{T}^n \setminus K} = 0$; on pose $S_\varepsilon = S * \varphi_\varepsilon$ et $T_\varepsilon = S_\varepsilon|_U$. On définit ainsi une injection $\overline{i}$ de $\mathcal{E}'(U)$ dans $\mathcal{G}^{\mathrm{b}}(U)$ en posant $\overline{i}(T) = \mathrm{cl}(T_\varepsilon)_\varepsilon$, plus précisément $\overline{i}(T) = \overline{i}(S)|_U$.

Injection de $\mathcal{D}'(U)$ dans $\mathcal{G}^{\mathrm{b}}(U)$

DÉFINITION 4.8. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts d'un ouvert U de $\mathcal{T}^n$ et pour chaque $i \in I$, $g_i \in \mathcal{G}^{\mathrm{b}}(U)$. On dit que $(U_i, g_i)_{i\in I}$ est une *famille cohérente* de U si $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ et si $g_i|_{U_i\cap U_j} = g_j|_{U_i\cap U_j}$ pour $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

PROPOSITION 4.9. *Soit $(U_i, g_i)_{i\in I}$ une famille cohérente de $\mathcal{T}^n$. Alors il existe un unique $g \in \mathcal{G}$ tel que $g|_{U_i} = g_i$ pour tout $i \in I$.*

Preuve. Comme $\mathcal{T}^n$ est compact il existe un nombre fini des U_i, que l'on peut noter $U_1, \ldots, U_m$, tels que $\mathcal{T}^n = \bigcup_{i=1}^m U_i$. Désignons par $(\eta_i)_{i\in I}$ une partition C^∞ de l'unité subordonnée à ce recouvrement, et par $(g_{i,\varepsilon})_\varepsilon \in \mathcal{X}_M^{\mathrm{b}}(U_i)$ un représentant de g_i pour chaque i.

Si f est une fonction définie sur une partie de $\mathcal{T}^n$ on désigne par $\widehat{f}$ son prolongement par 0 à $\mathcal{T}^n$. Soit g_ε définie sur $\mathcal{T}^n$ par $g_\varepsilon = \sum_{i=1}^m \widehat{\eta_i g_{i,\varepsilon}}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$; alors $g_\varepsilon \in \mathcal{E}(\mathcal{T}^n)$ et $D^\alpha(\widehat{\eta_i g_{i,\varepsilon}}) = \widehat{D^\alpha(\eta_i g_{i,\varepsilon})}$.

En utilisant la formule de Leibniz et le fait que $(g_{i,\varepsilon})_\varepsilon \in \mathcal{X}_M^{\mathrm{b}}(U_i)$, on voit qu'il existe $p_i > 0$ tel que $\|D^\alpha(\eta_i g_{i,\varepsilon})\|_\infty = O(\varepsilon^{-p_i})$ quand $\varepsilon \to 0$. Posons $p = \inf\{p_i : i \in I\}$; on a alors $\|D^\alpha g_\varepsilon\|_\infty = O(\varepsilon^{-p})$, ce qui montre que $(g_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}_M$. Pour $i, j \in I$ on posera $U_i \cap U_j = U_{ij}$.

Soit $j \in \{1, \ldots, m\}$; on a $g_\varepsilon|_{U_j} - g_{j,\varepsilon} = \sum_{i=1}^m ((\widehat{\eta_i g_{i,\varepsilon}})|_{U_j} - (\eta_i|_{U_j}) g_{j,\varepsilon})$.

Si $x \in U_j \setminus U_i$ alors $(\eta_i g_{i,\varepsilon})(x) = \eta_i(x) = 0$, d'où $g_\varepsilon(x) = g_{j,\varepsilon}(x)$. Si $x \in U_{ij}$ alors $(\widehat{\eta_i g_{i,\varepsilon}})(x) = (\eta_i g_{i,\varepsilon})(x)$ et $[(\eta_i|_{U_j}) g_{j,\varepsilon}](x) = (\eta_i g_{j,\varepsilon})(x)$.

Comme $[(\eta_i(g_{i,\varepsilon}-g_{j,\varepsilon}))|_{U_{ij}}]_\varepsilon \in \mathcal{N}^{\mathrm{b}}(U_{ij})$, on en déduit que $((\widehat{\eta_i g_{i,\varepsilon}})|_{U_j}-(\eta_i|_{Uj})g_{j,\varepsilon})_\varepsilon \in \mathcal{N}^{\mathrm{b}}(U_j)$, d'où $(g_\varepsilon|_{U_j} - g_{j,\varepsilon})_\varepsilon \in \mathcal{N}^{\mathrm{b}}(U_j)$; par conséquent, si on pose $g = \mathrm{cl}(g_\varepsilon)_\varepsilon$ alors $g|_{U_i} = g_i|_{U_i}$ pour $i \in \{1,\dots,m\}$.

Si U_λ est un ouvert du recouvrement initial, on peut écrire $U_\lambda = \bigcup_{i=1}^m U_{\lambda i}$ et supposer que $U_{\lambda i} \neq \emptyset$. On a par hypothèse $(g_{\lambda\varepsilon}|_{U_{\lambda i}})_\varepsilon - (g_{i\varepsilon}|_{U_{\lambda i}})_\varepsilon \in \mathcal{N}^{\mathrm{b}}(U_{\lambda i})$; comme $(g_\varepsilon|_{U_i})_\varepsilon - (g_{i\varepsilon})_\varepsilon \in \mathcal{N}^{\mathrm{b}}(U_i)$, alors $(g_\varepsilon|_{U_{\lambda i}})_\varepsilon - (g_{\lambda\varepsilon}|_{U_{\lambda i}})_\varepsilon \in \mathcal{N}^{\mathrm{b}}(U_{\lambda i})$, d'où $(g_\varepsilon|_{U_\lambda})_\varepsilon - (g_{\lambda\varepsilon})_\varepsilon \in \mathcal{N}^{\mathrm{b}}(U_\lambda)$, on a donc $g|_{U_i} = g_i$ pour tout $i \in I$.

Si $f \in \mathcal{G}$ vérifie $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ pour chaque $i \in I$ alors $((g_\varepsilon - f_\varepsilon)|_{U_i})_\varepsilon \in \mathcal{N}^{\mathrm{b}}(U_i)$ pour $i \in \{1,\dots,m\}$, d'où $(g_\varepsilon - f_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}$ et l'unicité de g. ∎

4.3. *Restriction à un fermé de $\mathcal{T}^n$*

4.3.1. *Fonctions généralisées sur un fermé de $\mathcal{T}^n$.* Soit L un fermé de $\mathcal{T}^n$ et $\mathcal{F}(L)$ l'ensemble des applications de L dans $\mathbb{C}$. Si $x \in \mathcal{T}^n$ on désigne par $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x dans $\mathcal{T}^n$. On pose $\mathcal{X}(L) = (\mathcal{F}(L))^{\mathbb{N}^n\times E}$, et on note $\mathcal{X}_M(L)$ l'ensemble des éléments $(f_{\alpha,\varepsilon})_{\alpha,\varepsilon} \in \mathcal{X}(L)$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) $\forall\alpha \in \mathbb{N}^n,\ \exists p > 0,\ \exists\eta > 0\ (0 < \varepsilon < \eta \Rightarrow \|f_{\alpha,\varepsilon}\|_L^\infty \le \varepsilon^{-p})$.

(ii) $\exists\eta > 0,\ \forall m \in \mathbb{N},\ \forall\alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \le m,\ \forall x_0 \in L,\ \exists V \in \mathcal{V}(x_0),\ \exists C_\varepsilon$

$$\Big((t,t' \in \theta^{-1}(L\cap V),\ 0 < \varepsilon < \eta) \Rightarrow \Big|(f_{\alpha,\varepsilon}\circ\theta)(t) - \sum_{|\beta|\le m-|\alpha|} \frac{(t-t')^\beta}{\beta!}(f_{\alpha+\beta,\varepsilon}\circ\theta)(t')\Big| \le C_\varepsilon|t-t'|^{m-|\alpha|+1}\Big).$$

Posons

$$\mathcal{N}(L) = \{(f_{\alpha,\varepsilon})_{\alpha,\varepsilon} \in \mathcal{X}_M(L) : \forall\alpha \in \mathbb{N}^n,\ \forall q > 0,\ \exists\eta > 0\ (0 < \varepsilon < \eta \Rightarrow \|f_{\alpha,\varepsilon}\|_L^\infty \le \varepsilon^q)\}.$$

L'algèbre des *fonctions généralisées* sur L est l'algèbre quotient

$$\mathcal{G}(L) = \mathcal{X}_M(L)/\mathcal{N}(L).$$

Pour $\beta \in \mathbb{N}^n$ on pose $D^\beta[\mathrm{cl}(f_{\alpha,\varepsilon})_{\alpha,\varepsilon}] = \mathrm{cl}(f_{\alpha+\beta,\varepsilon})_{\alpha,\varepsilon}$. Ainsi, $\mathcal{G}(L)$ devient une algèbre différentielle.

4.3.2. *Lien avec les fonctions généralisées bornées.* Soit U un ouvert de $\mathcal{T}^n$; désignons par $\mathcal{G}'(U)$ l'algèbre obtenue en remplaçant L par U dans la définition précédente de $\mathcal{G}(L)$.

Soit $\Psi : \mathcal{G}^{\mathrm{b}}(U) \to \mathcal{G}'(U)$, $\mathrm{cl}(f_\varepsilon)_\varepsilon \mapsto \mathrm{cl}(D^\alpha f_\varepsilon)_{\alpha,\varepsilon}$. Il est clair que si $(f_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}_M^{\mathrm{b}}$ alors $(D^\alpha f_\varepsilon)_{\alpha,\varepsilon} \in \mathcal{X}'_M(U)$ où $\mathcal{X}'_M(U)$ remplace $\mathcal{X}_M(L)$. Dans ces conditions Ψ est bien définie et est injective.

Soit $f = (f_{\alpha,\varepsilon})_{\alpha,\varepsilon} \in \mathcal{G}'(U)$; de la propriété (ii) on déduit

$$\exists\eta > 0\ (\forall m \in \mathbb{N},\ \forall x_0 \in U,\ \exists V \in \mathcal{V}(x_0),\ V \subset U,\ \exists C_\varepsilon > 0 \Big(\Big|(f_{0,\varepsilon}\circ\theta)(t) - \sum_{|\beta|\le m} \frac{(t-t')^\beta}{\beta!}(f_{\beta,\varepsilon}\circ\theta)(t)\Big| \le C_\varepsilon|t-t'|^{m+1}\Big),$$

pour $t,t' \in \theta^{-1}(V)$ et $0 < \varepsilon < \eta$. Alors, $f_{0,\varepsilon}$ est de classe C^∞ pour $0 < \varepsilon < \eta$ et $D^\beta f_{0,\varepsilon} = f_{\beta,\varepsilon}$ où $\beta \in \mathbb{N}^n$.

Posons $g_{\alpha,\varepsilon} = f_{\alpha,\varepsilon}$ si $0 < \varepsilon < \eta$ et $g_{\alpha,\varepsilon} = 0$ si $\eta \le \varepsilon < 1$. On a $(g_{0,\varepsilon})_\varepsilon \in \mathcal{X}_M(U)$ et si $h = \mathrm{cl}(g_{0,\varepsilon})_\varepsilon$ alors $\Psi(h) = \mathrm{cl}(g_{\alpha,\varepsilon})_\varepsilon = f$, ce qui montre que Ψ est surjectif. D'autre part, si $u \in \mathcal{G}^{\mathrm{b}}(U)$, on a $\Psi(D^\alpha u) = \Psi(\mathrm{cl}(D^\alpha u_\varepsilon)) = \mathrm{cl}(D^{\alpha+\beta} u_\varepsilon)_{\alpha,\varepsilon} = D^\alpha(\Psi(u))$. Donc, Ψ est un isomorphisme d'algèbres différentielles.

4.3.3. *Extension d'une fonction généralisée définie sur un fermé.* Soit U un ouvert de $\mathcal{T}^n$ et L un fermé de $\mathcal{T}^n$ contenu dans U. Il existe une restriction naturelle

$$\mathcal{G}^{\mathrm{b}}(U) \to \mathcal{G}(L), \qquad u = \mathrm{cl}(u_\varepsilon)_\varepsilon \mapsto u|_L = \mathrm{cl}((D^\alpha u_\varepsilon)|_L)_{\alpha,\varepsilon}.$$

On a le théorème suivant de type Whitney :

THÉORÈME 4.10. *Soit L un fermé de $\mathcal{T}^n$. S'il existe un pavé ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ de coté 2π tel que $\theta^{-1}(L) \cap \Omega$ soit un compact de Ω alors pour tout $f \in \mathcal{G}(L)$ il existe $h \in \mathcal{G}$ tel que $h|_L = f$.*

Preuve. On peut supposer que L est un fermé 2π-périodique de $\mathbb{R}^n$ tel que $L \cap \Omega$ soit un compact de Ω. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\psi = 1$ sur un voisinage de $L \cap \Omega$. D'après [5] il existe $g \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ tel que $g|_L = f$.

Soit $(g_\varepsilon)_\varepsilon$ un représentant de g et h_ε la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}^n$ définie par $h_\varepsilon = \psi g_\varepsilon$ sur $\overline{\Omega}$. Il est clair que $h_\varepsilon \in \mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on a

$$\|D^\alpha h_\varepsilon\|_\infty \le \left(\sum_{\beta \le \alpha} \binom{\beta}{\alpha} \|D^\alpha \psi\|_\infty \right) \sup_{\beta \le \alpha} \|D^\alpha g_\varepsilon\|^\infty_{\operatorname{supp}\psi},$$

ce qui montre que $h_\varepsilon \in \mathcal{X}_{2\pi,M}(\mathbb{R}^n)$. Posons $h = \mathrm{cl}(h_\varepsilon)_\varepsilon$; on a alors $h|_{L\cap\Omega} = g$ d'où $h|_{L\cap\Omega} = f$ et par périodicité $h|_L = f$. ∎

COROLLAIRE 4.11 (Théorème de Borel). *Soit $(c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathcal{C}}$. Alors il existe $u \in \mathcal{G}_n$ tel que $D^\alpha u(1) = c_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.*

Preuve. On applique le théorème précédent avec $L = \{1\}$. ∎

II. Distributions et fonctions généralisées sur $\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n$

5. Espaces fonctionnels sur $\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n$

5.1. *Définitions*

5.1.1. *Espaces $C^k(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$.* Soit $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On rappelle que θ est définie de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathcal{T}^n$ par $\theta(s_1,\ldots,s_n) = (e^{is_1},\ldots,e^{is_n})$, et on désigne par v l'application de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n$ donnée par $v(t,s) = (t,\theta(s))$.

On dit que $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ est *de classe C^k* avec $k \in \overline{\mathbb{N}}$ si $f \circ v \in C^k(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$, on note $C^k(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ l'ensemble de ces fonctions et on pose $C^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n) = \mathcal{E}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$. On désigne par $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ qui sont *à support compact* et par $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ les éléments dont le support est contenu dans un compact K.

5.1.2. *Espaces $L^p(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$.* On munit $\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n$ de la mesure produit de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$ par la mesure μ sur $\mathcal{T}^n$.

Pour $1 \le p \le \infty$, on désigne par $L^p(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ le sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ formé des fonctions f telles que $f \circ v \in L^p(\mathbb{R}^m \times I^n)$. On pose

$$\|f\|_{L^p} = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n} |f(t,x)|\, dt\, d\mu \Big)^{1/p} \quad \text{si } 1 \le p < \infty \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \|f \circ v\|_\infty.$$

5.2. *Coefficients de Fourier partiels*

5.2.1. *Coefficients de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$.* Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$. Pour presque tout $t \in \mathbb{R}^m$, la fonction $f(t,\cdot)$ définie μ-presque partout sur $\mathcal{T}^n$ par $f(t,\cdot)(x) = f(t,x)$ est un élément de $L^1(\mathcal{T}^n)$. Si $p \in \mathbb{Z}^n$ l'application définie sur $\mathcal{T}^n$ par $x \mapsto f(t,x)\overline{x}^p$ est un élément de $L^1(\mathcal{T}^n)$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}^m$.

Définition 5.1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ et $p \in \mathbb{Z}^n$. On appelle *coefficient de Fourier partiel* d'indice p la fonction $\widehat{f}_p$ définie presque partout sur $\mathbb{R}^m$ par

$$\widehat{f}_p(t) = \int\limits_{\mathcal{T}^n} f(t,y)\overline{y}^p\, d\mu.$$

On note $\|\cdot\|_{L^p_m}$ la norme usuelle de $L^p(\mathbb{R}^m)$ pour $1 \le p \le \infty$. En appliquant le théorème de Fubini on obtient

$$\|\widehat{f}_p\|_{L^p_m} \le \|f\|_\infty. \tag{1}$$

5.2.2. *Coefficients de Fourier dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$*

Proposition 5.2. *Si $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ alors $\widehat{f}_p \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}^n$, et*

$$f = \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}_p \otimes m_p. \tag{2}$$

Si de plus $f \in \mathcal{D}_{K' \times \mathcal{T}^n}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ où K' est un compact de $\mathbb{R}^m$, alors on a $\widehat{f}_p \in \mathcal{D}_{K'}(\mathbb{R}^m)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}^n$.

Preuve. Le théorème de dérivation sous le signe intégral montre que $\widehat{f}_p \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$, et $f(t,\cdot) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ pour tout t fixé, d'où $f(t,x) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}_p(t) x^p$ pour tout $x \in \mathcal{T}^n$. D'autre part, si $\operatorname{supp} f \subset K' \times \mathcal{T}^n$ alors $f(t,y) = 0$ pour $t \notin K'$ et $y \in \mathcal{T}^n$, ce qui montre que $\widehat{f}_p(t) = 0$ pour $t \notin K'$. On en déduit que $\widehat{f}_p \in \mathcal{D}_{K'}(\mathbb{R}^m)$. ∎

Corollaire 5.3. *Soit $f, g \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$. Alors $\widehat{f}_p = \widehat{g}_p$ pour tout $p \in \mathbb{Z}^n$ si et seulement si $f = g$.*

Preuve. Cela résulte de l'égalité (2). ∎

Si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^m \times \mathbb{N}^n$, de l'égalité $[(D^\alpha D^\beta f)^\wedge]_p(t) = \int_{\mathcal{T}^n} D^\alpha D^\beta f(t,y)\overline{y}^p\, d\mu$ on déduit par dérivation sous le signe d'intégration que

$$[(D^\alpha D^\beta f)^\wedge]_p = D^\alpha [(D^\beta f)^\wedge]_p. \tag{3}$$

A partir de la relation $\int_{\mathcal{T}^n} D^\beta f(t,y)\overline{y}^p\, d\mu = (-1)^{|\beta|} \int_{\mathcal{T}^n} f(t,y) D^\beta(\overline{y}^p)\, d\mu$, on obtient $[(D^\beta f)^\wedge]_p = (ip)^\beta \widehat{f}_p$. Compte tenu de ce dernier résultat et de l'égalité (3) on a

$$[(D^\alpha D^\beta f)^\wedge]_p = (ip)^\beta D^\alpha \widehat{f}_p. \tag{4}$$

Si f et toutes ses dérivées sont dans $L^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n) \cap \mathcal{E}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$, alors

$$\forall p \in \mathbb{Z}^n \ (\|[(D^\alpha D^\beta f)^\wedge]_p\|_{L^\infty_m} \le \|D^\alpha D^\beta f\|_\infty). \tag{5}$$

Il s'en suit donc, compte tenu de l'égalité (4)

$$\forall p \in \mathbb{Z}^n \ (|p^\beta| \cdot \|\widehat{f}_p\|_{L^\infty_m} \leq \|D^\beta f\|_\infty). \tag{6}$$

On en déduit que les suites $(\|\widehat{f}_p\|_{L^\infty_m})_{p\in\mathbb{Z}^n}$ et $(\|[(D^{\alpha+\beta}f)^\wedge]_p\|_{L^\infty_m})_{p\in\mathbb{Z}^n}$ sont à décroissance rapide, c'est-à-dire qu'elles appartiennent à $S(\mathbb{Z}^n)$.

5.3. *Fonctions de classe C^k sur un ouvert de $\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n$.* Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n$, f une fonction définie sur $\mathcal{O}$ et $k \in \overline{\mathbb{N}}$. On dit que f est *de classe* C^k sur $\mathcal{O}$ si $f \circ \nu \in C^k(\nu^{-1}(\mathcal{O}))$. On désigne par $C^k(\mathcal{O})$ l'ensemble de ces fonctions et par $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ celles qui sont à support compact contenu dans $\mathcal{O}$. On identifie $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ à l' ensemble des éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ qui ont leur support contenu dans $\mathcal{O}$.

5.4. *Convolution dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$.* Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ la *convolée* de f par g est définie sur $\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n$ par

$$(f * g)(t, x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n} f(u, y) g(t - u, x\overline{y})\, du\, d\mu = \int\limits_{\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n} f(t - u, x\overline{y}) g(u, y)\, du\, d\mu.$$

Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n) \cap \mathcal{E}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ alors elles s'écrivent sous la forme

$$f = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}_p \otimes m_p \quad \text{et} \quad g = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \widehat{g}_p \otimes m_p.$$

Soit $B_k = \{t \in \mathbb{R}^m : \|t\| \leq k\}$ où $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout (t, x) fixé dans $\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n$ la série $f(u, y)g(t - u, x\overline{y}) = \sum_{p,s\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}_p(u)\widehat{g}_s(t - u)x^p y^{p-s}$ est uniformément convergente par rapport à $(u, y) \in B_k \times \mathcal{T}^n$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On a donc

$$\int\limits_{B_k \times \mathcal{T}^n} f(u, y) g(\ t - u, x\overline{y})\, du\, d\mu = \sum_{p,s\in\mathbb{Z}^n} \int\limits_{\mathcal{T}^n} y^{p-s}\, d\mu \Big(\int\limits_{B_k} \widehat{f}_p(u)\widehat{g}_s(t - u)\, du \Big) x^p,$$

d'où

$$\int\limits_{B_k \times \mathcal{T}^n} f(u, y) g(t - u, x\overline{y})\, du\, d\mu = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \Big(\int\limits_{B_k} \widehat{f}_p(u)\widehat{g}_p(t - u)\, du \Big) x^p.$$

Comme $\widehat{f}_p(u)\widehat{g}_p(t - u) = \int_{\mathcal{T}^n \times \mathcal{T}^n} f(u, y) g(t - u, z)(\overline{yz})^p\, d\mu(y)\, d\mu(z)$, on a

$$|\widehat{f}_p(u)\widehat{g}_p t - u)| \leq \int\limits_{\mathcal{T}^n \times \mathcal{T}^n} |f(u, y)| \cdot |g(t - u, z)|\, d\mu(y)\, d\mu(z),$$

d'où l'on déduit

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} |\widehat{f}_p(u)\widehat{g}_p(t - u)|\, du \leq \int\limits_{\mathcal{T}^n \times \mathcal{T}^n} (|f(\cdot, y)| * g(\cdot, z))(t)\, d\mu(y)\, d\mu(z).$$

La formule $[(D^\beta f)^\wedge]_p = (ip)^\beta \widehat{f}_p$ entraîne alors que pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$,

$$|p^\beta| \Big| \int\limits_{B_k} \widehat{f}_p(u)\widehat{g}_p(t - u)\, du \Big| \leq \int\limits_{\mathcal{T}^n \times \mathcal{T}^n} (|\partial^\beta f(\cdot, y)| * |g(\cdot, z)|)(t)\, d\mu(y)\, d\mu(z).$$

D'autre part, $\lim_{k\to\infty} \int_{B_k} \widehat{f}_p(u)\widehat{g}_p(t - u)\, du = (\widehat{f}_p * \widehat{g}_p)(t)$; en appliquant le théorème de la convergence dominée, on obtient donc

$$f * g = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} (\widehat{f}_p * \widehat{g}_p) \otimes m_p. \tag{7}$$

6. Distributions sur $\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n$

6.1. *Définitions.* On munit $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ de la topologie définie par les semi-normes $\{P_{K'\times\mathcal{T}^n,l}\}$, K' parcourant l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}^m$ et l l'ensemble $\mathbb{N}$, définies par $P_{K,l}(f) = \sup_{(t,x)\in K}\{|\partial^\alpha f(t,x)| : |\alpha| \le l\}$ où $K = K' \times \mathcal{T}^n$ et $\alpha \in \mathbb{N}^{m+n}$. On munit $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ de la topologie induite par celle de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$.

Soit $B_j = \{t \in \mathbb{R}^m : \|t\| \le j\}$ où $j \in N$ et $K_j = B_j \times \mathcal{T}^n$; nous avons alors $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_{K_j}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ sera muni de la topologie limite inductive stricte des topologies des $\mathcal{D}_{K_j}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$.

6.2. *Restrictions et support d'une distribution.* Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$. On dit que T est *nulle* sur $\mathcal{O}$ si $T(f) = 0$ pour toute fonction f de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ telle que $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{O}$ et on écrit $T|_{\mathcal{O}} = 0$. On montre en utilisant une partition C^∞ de l'unité que si $(O_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de $\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n$ telle que $T|_{\mathcal{O}_i} = 0$ pour tout $i \in I$ alors $T|_{\bigcup_{i\in I}\mathcal{O}_i} = 0$ et on appelle *support* de T, que l'on note $\operatorname{supp} T$, le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel T est nulle.

On identifie l'ensemble des distributions à support compact à $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$, le dual topologique de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$. Le problème de la compacité se situe au niveau de l'espace $\mathbb{R}^m$ car $\mathcal{T}^n$ est compact. Ainsi pour $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$, si K' est un compact de $\mathbb{R}^m$ tel que $\operatorname{supp} T \subset K' \times \mathcal{T}^n$ en prenant $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ tel que $\phi = 1$ sur un voisinage de K', on obtient $T(f) = T((\phi \otimes 1)f)$ pour tout $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$, car $[1 - (\phi \otimes 1)]f = 0$ sur un voisinage de $\operatorname{supp} T$.

6.3. *Exemple de suite tendant vers* $\delta_0 \otimes \delta_1$. On désigne par δ_0 et δ_{1_n} les distributions de Dirac respectivement en $0 \in \mathbb{R}^m$ et en $1_n \in \mathcal{T}^n$, 1_n étant l'unité de $\mathcal{T}^n$ (on écrira δ_1 au lieu de δ_{1_n} s'il n'y a pas de risque de confusion).

Soit $\varrho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ tel que $\int_{\mathbb{R}^m} \varrho(t)\,dt = 1$ et $\int_{\mathbb{R}^m} t^\alpha \varrho(t)\,dt = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^m - \{0\}$. On pose $\varrho_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-m}\varrho(t/\varepsilon)$; on a alors $\lim_{\varepsilon\to 0} \varrho_\varepsilon = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$.

On rappelle que $\phi_\varepsilon(x) = \sum_{p\in I_\varepsilon} x^p$, et on définit alors Φ_ε sur $\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n$ par $\Phi_\varepsilon(t,x) = \varrho_\varepsilon(t)\phi_\varepsilon(x)$. Pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ on a au sens des distributions

$$\langle \Phi_\varepsilon, f\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^m\times\mathcal{T}^n} \varrho_\varepsilon(t)\phi_\varepsilon(x)f(t,x)\,dt\,d\mu = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varrho_\varepsilon(t)\Big(\int \phi_\varepsilon(x)f(t,x)\,d\mu\Big)dt.$$

Comme $\int_{\mathcal{T}^n} \phi_\varepsilon(x)f(t,x)\,d\mu = \sum_{p\in I_\varepsilon} \widehat{f}_p(t)$, on obtient

$$\langle \Phi_\varepsilon, f\rangle = \sum_{p\in I_\varepsilon}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^m} \varrho_\varepsilon(t)\widehat{f}_p(t)\,dt\Big). \tag{8}$$

On a $|\int_{\mathbb{R}^m} \varrho_\varepsilon(t)f_p(t)\,dt| \le (\int_{\mathbb{R}^m} |\varrho(t)|\,dt)\|\widehat{f}_p\|_\infty$ et $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^m} \varrho_\varepsilon(t)\widehat{f}_p(t)\,dt = \widehat{f}_p(0)$. D'après le théorème de la convergence dominée $\lim_{\varepsilon\to 0}\langle \Phi_\varepsilon, f\rangle = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}_p(0)$, c'est-à-dire que $\lim_{\varepsilon\to 0}\langle \Phi_\varepsilon, f\rangle = f(0, 1_n)$, ce qui montre que $\lim_{\varepsilon\to 0} \Phi_\varepsilon = \delta_0 \otimes \delta_{1_n}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$.

6.4. *Convolution d'une distribution et d'une fonction.* Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ et $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$. Pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n$ on a

$$(T * f)(t,x) = \langle T, \tau_{tx}\check{f}\rangle$$

où $\check{f}$ est défini par $\check{f}(u,y) = f(-u,\overline{y})$ et $(\tau_{tx}f)(u,y) = f(u-t, y\overline{x})$ pour $(u,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n$. On peut écrire $(T*f)(t,x) = \langle T(u,y), f(t-u, x\overline{y})\rangle$. Il est clair que $T*f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$, et en particulier, si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ alors

$$(T * \Phi_\varepsilon)(t,x) = \langle T_{(u,y)}, \varrho_\varepsilon(t-u)\phi_\varepsilon(x\overline{y})\rangle. \tag{9}$$

6.5. *Structure locale des distributions.* Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$; alors $f \in L^2(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$. Pour tout t dans $\mathbb{R}^m$ on a d'après l'égalité de Parseval

$$\int_{\mathcal{T}^n} |f(t,x)|^2\, d\mu = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} |\widehat{f}_p(t)|^2.$$

Comme $\sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \|f_p\|^2_{L^\infty_m} < \infty$, la série $\sum_{p\in\mathbb{Z}^n} |\widehat{f}_p(t)|^2$ est uniformément convergente par rapport à t. En appliquant le théorème de Fubini on peut donc écrire

$$\int_{\mathbb{R}^m\times\mathcal{T}^n} |f(t,x)|^2\, dt\, d\mu = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{R}^m} |\widehat{f}_p(t)|^2\, dt.$$

On pose $D_t = \frac{\partial^m}{\partial t_1 \ldots \partial t_m}$, $D_x = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$ et pour $k \in \mathbb{N}$, $D_t^{(k)} = D_t^{(k,\ldots,k)}$ avec $(k,\ldots,k) \in \mathbb{N}^m$. En nous inspirant de [40], pp. 250–252, nous allons établir l'équivalence de deux normes sur $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$, afin d'aboutir au théorème de structure locale. La norme usuelle de $L^2(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ est notée $\|\cdot\|_{L^2}$.

PROPOSITION 6.1. *Soit K' un compact de $\mathbb{R}^m$ et $K = K' \times \mathcal{T}^n$. Pour $(j,l) \in \mathbb{N}^2$ et $f \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ on pose $P_{j,l}(f) = \sup\{\|D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} f\|^\infty_K : |\alpha_1| \le j,\ |\alpha_2| \le l\}$ et $Q_{j,l}(f) = \sum_{|\alpha|\le l} \|D_t^{(j)} D_x^\alpha f\|_{L^2}$. Il existe alors deux constantes $a > 0$, $b > 0$ et un entier naturel s tels que*

$$aP_{j,l}(f) \le Q_{j+1,l+2s}(f) \le bP_{m(j+1),l+2s}(f)$$

pour tout $f \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$.

Preuve. Soit $(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{N}^m \times \mathbb{N}^n$ et $s \in \mathbb{N}$ tel que si $M = (\sum_{p\in\mathbb{Z}^n}(1+\|p\|)^{-2s})^{1/2}$ alors $M < \infty$. On a $\|D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} f\|_\infty \le \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \|D_t^{\alpha_1}[(D_x^{\alpha_2} f)^\wedge]_p\|_{L^\infty_m}$ et il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de s et n telle que

$$C(\sup_{\beta\in\mathbb{N}^n,\, |\beta|\le 2s} |p^\beta|)(1+\|p\|^2)^{-s} \ge 1.$$

On en déduit alors que

$$\|D_x^{\alpha_1}(D_x^{\alpha_2} f)_p\|_{L^\infty_m} \le C \sum_{|\beta|\le 2s} (1+\|p\|^2)^{-s} \|D_t^{\alpha_1}[(D_x^{\alpha_2+\beta} f)^\wedge]_p\|_{L^\infty_m}.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy–Schwarz on obtient

$$\|D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} f\|_\infty \le CM \sum_{|\beta|\le 2s} \Big(\sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \|D_t^{\alpha_1}[(D_x^{\alpha_2+\beta} f)^\wedge]_p\|^2_{L^\infty_m}\Big)^{1/2}.$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$ il existe $\gamma > 0$ ne dépendant que de j, m et K' tel que

$$\forall \phi \in \mathcal{D}_{K'}(\mathbb{R}^m)\ (\sup_{|\alpha_1|\le j} \|D_t^{\alpha_1}\phi\|^\infty_{K'} \le \gamma \|D_t^{(j+1)}\phi\|_{L^2(K')}).$$

On en déduit que $\sup_{|\alpha_1|\le j}\|D_t^{\alpha_1}D_x^{\alpha_2}f\|_\infty \le MC\gamma\sum_{|\beta|\le 2s}\|D_t^{(j+1)}D_x^{\alpha_2+\beta}f\|_{L^2}$, d'où

$$P_{j,l}(f)\le MC\gamma\sum_{|\alpha_2|\le l}\sum_{|\beta|\le 2s}\|D_t^{(j+1)}D_x^{\alpha_2+\beta}f\|_{L^2},\qquad P_{j,l}(f)\le MC\gamma Q_{j+1,l+2s}(f).$$

Et comme $\|D_t^{(j+1)}D_x^{\alpha}f\|_{L^2}\le\sqrt{\operatorname{mes}K'}\|D_t^{(j+1)}D_x^{\alpha}\|_K^\infty$ alors on obtient

$$\frac{1}{MC\gamma}P_{j,l}(f)\le Q_{j+1,l+2s}(f)\le\frac{\sup\{1,\sqrt{\operatorname{mes}K'}\}}{MC\gamma}P_{m(j+1),l+2s}(f).\ \blacksquare$$

THÉORÈME 6.2 (de structure locale). *Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^m$ et soit $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m\times\mathcal{T}^n)$. Il existe alors $q\in\mathbb{N}$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_q\in\mathbb{N}^{m+n}$, $g_{\alpha_1},\ldots,g_{\alpha_q}\in L^2(\mathbb{R}^m\times\mathcal{T}^n)$ tels que $T=\sum_{k=1}^q D^{\alpha_k}g_{\alpha_k}$ sur $U\times\mathcal{T}^n$.*

Preuve. Posons $K=\overline{U}\times\mathcal{T}^n$. Soit $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m\times\mathcal{T}^n)$; alors T est continue sur $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^m\times\mathcal{T}^n)$. D'après la Proposition 6.1,

$$\exists C>0,\ \exists(j,l)\in\mathbb{N}^2,\ \forall f\in\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^m\times\mathcal{T}^n)\ (|T(f)|\le CQ_{j,l}(f)).$$

On remarque en fait que $Q_{j,l}$ est une norme sur $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^m\times\mathcal{T}^n)$, par ce qu'en effet si $f\in\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^m\times\mathcal{T}^n)$ vérifie $Q_{j,l}(f)=0$ alors pour tout $p\in\mathbb{Z}^n$ on a $\int_{\bar U}|D^{(j)}\widehat{f}_p(t)|^2\,dt=0$. Comme $\phi\mapsto(\int_{\bar U}|D^{(j)}\phi(t)|^2\,dt)^{1/2}$ est une norme sur $\mathcal{D}_{\bar U}(\mathbb{R}^m)$, on en déduit que $\widehat{f}_p=0$ pour tout $p\in\mathbb{Z}^n$, d'où $f=0$. D'autre part, $Q_{j,l}$ est une norme équivalente à la norme préhilbertienne N définie pour $f\in\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^m\times\mathcal{T}^n)$ par $N(f)=(\sum_{|\alpha|\le l}\|D_1^{(j)}D_2^{\alpha}f\|_{L^2}^2)^{1/2}$. Soit H_1 l'espace $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^m\times\mathcal{T}^n)$ muni de la norme N. Alors $T\in H_1'$ où H_1' est le dual topologique de H_1.

Soit $\mathcal{A}=\{\alpha\in\mathbb{N}^n:|\alpha|\le l\}$ et $q=\operatorname{card}(\mathcal{A})$. Numérotons les éléments de $\mathcal{A}$ en une suite $\alpha_1,\ldots,\alpha_q$, posons $H_2=(L^2(\mathbb{R}^m\times\mathcal{T}^n))^q$ et $\|g\|=(\sum_{k=1}^q\|g_k\|_{L^2}^2)^{1/2}$ pour $g=(g_1,\ldots,g_q)\in H_2$.

On identifie l'espace H_2 à son dual topologique H_2' à l'aide de la forme bilinéaire

$$\Big((g,h)\mapsto\sum_{k=1}^q\int_{\mathbb{R}^m}g_k(t)\overline{h_k(t)}\,dt\Big).$$

Considérons $\Gamma:H_1\to H_2$, $f\mapsto(D_1^{(j)}D_2^{\alpha_1}f,\ldots,D_1^{(j)}D_2^{\alpha_q}f)$; nous avons alors

$$\|\Gamma(f)\|=\Big(\sum_{|\alpha|\le l}\|D_1^{(j)}D_2^{\alpha}f\|_{L^2}^2\Big)^{1/2}=N(f),$$

ce qui montre que ${}^t\Gamma$ est surjective de H_2 dans H_1'. Comme $T\in H_1'$, il existe $g=(g_1,\ldots,g_q)\in H_2$ tel que

$$T(f)=\sum_{k=1}^q\int_{\mathbb{R}^m\times\mathcal{T}^n}g_k(t,x)(D_t^{(j)}D_x^{\alpha_k}f)(t,x)\,dt\,d\mu$$

pour tout $f\in\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^m\times\mathcal{T}^n)$. On a donc, en posant $f_k=(-1)^{m(j+1)+|\alpha_k|}g_k$, $T=\sum_{k=1}^q D_t^{(j)}D_x^{\alpha_k}f_k$ sur $U\times\mathcal{T}^n$. $\blacksquare$

COROLLAIRE 6.3. *Soit $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m\times\mathcal{T}^n)$ et U un ouvert borné de $\mathbb{R}^m$. Alors il existe $k\in\mathbb{N}$, $(T_p)_{p\in\mathbb{Z}^n}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ et $(C_p)_{p\in\mathbb{Z}^n}\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ tels que pour tout $f\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^m\times\mathcal{T}^n)$ vérifiant* $\operatorname{supp}f\subset U\times\mathcal{T}^n$ *on ait :*

(i) $|T_p(\widehat{f}_p)| \le C_p \sup_{|\gamma|\le k} \|\partial^\gamma \widehat{f}_p\|_\infty$.

(ii) $T(f) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} T_p(\widehat{f}_p)$.

Preuve. D'après le théorème de structure locale, il existe $k \in \mathbb{N}$ et des fonctions $g_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^m \times \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| \le k$ tels que l'on ait $T = \sum_{|\alpha|\le k} D^\alpha g_\alpha$ sur $U \times \mathcal{T}^n$.

Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ avec $\operatorname{supp} f \subset U \times \mathcal{T}^n$; on peut écrire $f = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}_p \otimes m_p$. Considérons la suite de fonctions $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ où $f_l = \sum_{\|p\|\le l} \widehat{f}_p \otimes m_p$. Il est clair que $(f_l)_l$ converge vers f dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$, d'où $T(f) = \lim_{l\to\infty} \sum_{\|p\|\le l} T(\widehat{f}_p \otimes m_p)$. D'autre part, nous avons

$$T(\widehat{f}_p \otimes m_p) = \sum_{|\alpha|\le k} (-1)^{|\alpha|} (ip)^{\alpha_2} \langle g_\alpha, D^{\alpha_1} \widehat{f}_p \otimes m_p\rangle,$$

$$\langle g_\alpha, D^{\alpha_1} \widehat{f}_p \otimes m_p\rangle = \int_{K'} \Big(\int_{\mathcal{T}^n} g_\alpha(t,x) x^p \, d\mu \Big) D^{\alpha_1} \widehat{f}_p(t)\, dt = (-1)^\alpha \langle D^{\alpha_1} \widehat{g}_{\alpha,(-p)}, \widehat{f}_p\rangle$$

si K' est un compact de U tel que $\operatorname{supp} f \subset K' \times \mathcal{T}^n$. Par suite,

$$T(\widehat{f}_p \otimes m_p) = \sum_{|\alpha|\le k} (-ip)^{\alpha_2} \langle D^{\alpha_1} \widehat{g}_{\alpha,(-p)}, \widehat{f}_p\rangle.$$

Si on pose $T_p = \sum_{|\alpha|\le k} (-ip)^{\alpha_2} D^{\alpha_1} \widehat{g}_{\alpha,(-p)}$ alors $T_p \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ et

$$T_p(\widehat{f}_p) = \sum_{|\alpha|\le k} (-1)^{|\alpha_1|} (-ip)^{\alpha_2} \langle \widehat{g}_{\alpha,(-p)}, \widehat{f}_p\rangle,$$

d'où l'on déduit que

$$|T_p(\widehat{f}_p)| \le \sum_{|\alpha|\le k} |p^{\alpha_2}| \cdot \|D^{\alpha_1} \widehat{f}_p\|_\infty \|\widehat{g}_{\alpha,(-p)}\|_{L^1(K')}.$$

D'autre part, on a $\|\widehat{g}_{\alpha,(-p)}\|_{L^1(K')} \le \|g_\alpha\|_{L^1(K'\times\mathcal{T}^n)} \le \|g_\alpha\|_{L^1(U\times\mathcal{T}^n)}$. Si on pose $C_p = \sum_{|\alpha|\le k} \|g_\alpha\|_{L^1(U\times\mathcal{T}^n)} |p^{\alpha_2}|$, il est clair que $(C_p)_{p\in\mathbb{Z}^n} \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ et on a $|T_p(\widehat{f}_p)| \le C_p \sup_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha \widehat{f}_p\|_\infty$, d'où (i).

Comme $(C_p)_p \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ et $(\sup_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha \widehat{f}_p\|_\infty)_p \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ alors $(T_p(\widehat{f}_p))_p$ est sommable et $\lim_{l\to\infty} \sum_{|p|\le l} T_p(\widehat{f}_p \otimes m_p) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} T_p(\widehat{f}_p \otimes m_p)$. On a $T(f) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} T_p(\widehat{f}_p)$, c'est-à-dire (ii). ∎

Corollaire 6.4. *Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$; alors il existe $k \in \mathbb{N}, (T_p)_{p\in\mathbb{Z}^n}$ une suite d'éléments de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$, $(C_p)_p \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ et K' un compact de $\mathbb{R}^m$ tels que pour tout $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$:*

(i) $|T_p(\widehat{f}_p)| \le C_p \sup_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha \widehat{f}_p\|_{K'}^\infty$.

(ii) $T(f) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} T_p(\widehat{f}_p)$.

Preuve. Soit K_2 un compact de $\mathbb{R}^m$ tel que $\operatorname{supp} T \subset K_2 \times \mathcal{T}^n$, U un ouvert borné de $\mathbb{R}^m$ contenant K_2, $\phi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ tel que $\operatorname{supp} \phi_1 \subset U$, $\phi = 1$ sur un voisinage K_2 et $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ défini par $\phi(t,x) = \phi_1(t)$. D'après le Théorème 6.2 il existe $k \in \mathbb{N}$, $g_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ tels que $T = \sum_{|\alpha|\le k} D^\alpha g_\alpha$ sur $U \times \mathcal{T}^n$.

Si $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$ alors $T(f) = T(\phi f)$ et $\operatorname{supp}(\phi f) \subset U \times \mathcal{T}^n$; on en déduit que $T(f) = \sum_{|\alpha|\le k} \langle D^\alpha g_\alpha, \phi f\rangle$.

D'autre part,

$$\langle D^\alpha g_\alpha, \phi(\widehat{f}_p \otimes m_p)\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle g_\alpha, D^{\alpha_1}(\phi \widehat{f}_p) D^{\alpha_2} m_p\rangle,$$
$$\langle D^\alpha g_\alpha, \phi(\widehat{f}_p \otimes m_p)\rangle = (-1)^{|\alpha|}(ip)^{\alpha_2}\langle \widehat{g}_{\alpha,(-p)}, D^{\alpha_1}(\phi \widehat{f}_p)\rangle;$$

en posant $K_1 = \operatorname{supp}\phi_1$ et en appliquant la formule de Leibniz on obtient

$$|\langle D^\alpha g_\alpha, \phi(\widehat{f}_p \otimes m_p)\rangle| \le |p^{\alpha_2}| \cdot \|g_\alpha\|_{L^1(K_1\times\mathcal{T}^n)} \Big(\sum_{v\le\alpha_1} \binom{\alpha_1}{v} \|D^v\phi\|_\infty\Big) \sup_{v\le\alpha_1} \|D^v \widehat{f}_p\|_{K_1}^\infty.$$

En procédant comme dans la démonstration du premier corollaire, avec

$$T_p = \sum_{|\alpha|\le k} (-ip)^{\alpha_2} \phi_1 D^{\alpha_1} g_{\alpha,(-p)}$$

et

$$C_p = \sum_{|\alpha|\le k} |p^{\alpha_2}| \cdot \|g_\alpha\|_{L^1(K_1\times\mathcal{T}^n)} \Big(\sum_{v\le\alpha_1} \binom{\alpha_1}{v} \|D^v\phi\|_\infty\Big),$$

on réalise (i) et (ii). ∎

Nous sommes maintenant en mesure de donner la décomposition canonique d'une distribution sur $\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n$.

THÉORÈME 6.5. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$. Il existe alors une unique suite $(\widehat{T}_p)_p$ d'éléments de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ telle que $T = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \widehat{T}_p \otimes m_p$ et on a $T(f) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \widehat{T}_p(\widehat{f}_{-p})$ pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n)$. Pour tout ouvert borné U de $\mathbb{R}^m$, il existe $(C_p)_p \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $|\widehat{T}_p(\psi)| \le C_p \sup_{|\nu|\le k} \|D^\nu\psi\|_\infty$ si $\psi \in \mathcal{D}(U)$. Si de plus T est à support compact il en est de même des $\widehat{T}_p$ et il existe un compact K' de $\mathbb{R}^m$ contenant $\operatorname{supp}\widehat{T}_p$ pour tout $p \in \mathbb{Z}^n$. $(C_p)_p$ et k sont alors indépendants de U et $|\widehat{T}_p(\psi)| \le C_p \sup_{|\nu|\le k} \|D^\nu\psi\|_\infty^{K'}$ pour tout $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$.*

Preuve. D'après le Corollaire 6.3, pour chaque ouvert borné U de $\mathbb{R}^m$ il existe une suite $(T_p)_{p\in\mathbb{Z}^n}$ d'éléments de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ telle que $T|_{U\times\mathcal{T}^n} = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n}(T_{-p}|_U) \otimes m_p$, car si $f \in \mathcal{D}(U \times \mathcal{T}^n)$ nous avons l'égalité $\langle \sum_{p\in\mathbb{Z}^n}(T_{-p} \otimes m_p), f\rangle = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} T_p(f)$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on pose $U_k = \{t \in \mathbb{R}^m : \|t\| < k\}$ et on désigne par $(T_{p,k})_p$ la suite d'éléments de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ associée à T et U_k. Remarquons que nous avons $(T_{p,k+1})|_{U_k} = (T_{p,k})|_{U_k}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}^n$, car si $\psi \in \mathcal{D}(U_k)$ et $f = \psi \otimes m_p$, alors $T(f) = T_{p,k}(\psi)$ et $T(f) = T_{p,k+1}(\psi)$, car $\psi \in \mathcal{D}(U_{k+1})$ à cause de $U_k \subset U_{k+1}$. Comme $\mathbb{R}^m = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} U_k$, d'après le principe de recollement des morceaux, pour chaque $p \in \mathbb{Z}^n$ il existe $\widehat{T}_p \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ tel que $\widehat{T}_{-p}|_{U_k} = T_{p,k}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Les deux distributions T et $\sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \widehat{T}_p \otimes m_p$ coïncident sur $U_k \times \mathcal{T}^n$ pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} U_k \times \mathcal{T}^n$, on a $T = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \widehat{T}_p \otimes m_p$.

Si $(S_p)_p$ est une suite d'éléments de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ telle que $T = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} S_p \otimes m_p$, alors pour $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ et $p \in \mathbb{Z}^n$ on a $T(\psi \otimes m_p) = S_p(\psi)$ et $T(\psi \otimes m_p) = \widehat{T}_p(\psi)$, d'où l'unicité de la suite $(\widehat{T}_p)_p$. Dans le cas où T est à support compact l'existence d'une suite $(\widehat{T}_p)_p$ avec $\widehat{T}_p \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ répondant aux conditions du théorème résulte Corollaire 6.4, et l'unicité de cette suite se démontre comme dans la première partie. ∎

Définition 6.6. La distribution $\widehat{T}_p$ est appelée *coefficient de Fourier partiel* d'indice p de T sur $\mathbb{R}^m$.

7. Fonctions généralisées sur $\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n$

7.1. *Notations et définitions.* On désigne par $\mathcal{E}^{m,n}$, $\mathcal{D}^{m,n}$, $\mathcal{D}_K^{m,n}$, $\mathcal{E}'^{m,n}$, $\mathcal{D}'^{m,n}$, $\mathcal{D}_K'^{m,n}$ les espaces respectifs $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m\times\mathcal{T}^n)$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m\times\mathcal{T}^n)$, $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^m\times\mathcal{T}^n)$, $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^m\times\mathcal{T}^n)$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m\times\mathcal{T}^n)$, $\mathcal{D}_K'(\mathbb{R}^m\times\mathcal{T}^n)$ et on pose $\mathcal{X}^{m,n} = (\mathcal{E}^{m,n})^E$.

On définit les algèbres suivantes :

$\mathcal{X}_M^{m,n} = \{(f_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}^{m,n} :$
$\forall K'$ compact $\subset \mathbb{R}^m,\ \forall\alpha\in\mathbb{N}^{m+n},\ \exists r>0,\ \exists\eta>0\ (0<\varepsilon<\eta \Rightarrow \|D^\alpha f_\varepsilon\|^\infty_{K'\times\mathcal{T}^n} \le \varepsilon^{-r})\}$,
$\mathcal{N}^{m,n} = \{(f_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}^{m,n} :$
$\forall K'$ compact $\subset \mathbb{R}^m, \forall\alpha\in\mathbb{N}^{m+n},\ \forall q>0,\ \exists\eta>0\ (0<\varepsilon<\eta \Rightarrow \|D^\alpha f_\varepsilon\|^\infty_{K'\times\mathcal{T}^n} \le \varepsilon^{q})\}$.

$\mathcal{N}^{m,n}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{X}_M^{m,n}$. L'algèbre des fonctions généralisées sur l'espace produit $\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}^n$ est l'algèbre quotient

$$\mathcal{G}^{m,n} = \mathcal{X}_M^{m,n}/\mathcal{N}^{m,n}.$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}^{m+n}$ et $u \in \mathcal{G}^{m,n}$ on pose $D^\alpha u = \mathrm{cl}(D^\alpha u_\varepsilon)_\varepsilon$ où $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est un représentant de u. $\mathcal{G}^{m,n}$ est donc une algèbre différentielle.

Proposition 7.1 (Caractérisation de $\mathcal{X}_M^{m,n}$ et $\mathcal{N}^{m,n}$). *Soit* $(f_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}^{m,n}$. *Alors* :

(a) $(f_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}_M^{m,n}$ *si et seulement si* $(f_\varepsilon)_\varepsilon$ *vérifie la condition*

(i) $\forall K'$ *compact* $\subset \mathbb{R}^m,\ \forall\alpha\in\mathbb{N}^m,\ \forall s\in\mathbb{N},\ \exists r>0, \exists\eta>0$
$$(0<\varepsilon<\eta \Rightarrow \|D^\alpha \widehat{f}_{\varepsilon,p}\|^\infty_{K'} \le \varepsilon^{-r}(1+\|p\|^2)^{-s}).$$

(b) $(f_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}^{m,n}$ *si et seulement si* $(f_\varepsilon)_\varepsilon$ *vérifie la condition*

(ii) $\forall K'$ *compact* $\subset \mathbb{R}^m,\ \forall\alpha\in\mathbb{N}^m,\ \forall s\in\mathbb{N},\ \forall q>0,\ \exists\eta>0$
$$(0<\varepsilon<\eta \Rightarrow \|D^\alpha \widehat{f}_{\varepsilon,p}\|^\infty_{K'} \le \varepsilon^{q}(1+\|p\|^2)^{-s}).$$

Preuve. Nous allons prouver (a). Posons $K = K' \times \mathcal{T}^n$. La condition (i) est nécessaire car d'après les relations (4) et (5) on a pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, $|p^\beta| \cdot \|D^\alpha \widehat{f}_{\varepsilon,p}\|^\infty_{K'} \le \|D^\alpha D^\beta f_\varepsilon\|^\infty_K$. D'autre part, si $s \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C > 0$ telle que $C(1+\|p\|^2)^s \le \sup_{|\beta|\le 2s} |p^\beta|$, d'où

$$C(1+\|p\|^2)^s \|D^\alpha \widehat{f}_{\varepsilon,p}\|^\infty_{K'} \le \sum_{|\beta|\le 2s} \|D^\alpha D^\beta f_\varepsilon\|^\infty_K \le \lambda \|D^\alpha D^{\beta'} f_\varepsilon,\|^\infty_K$$

où λ est une constante >0 dépendant de s et $\|D^\alpha D^{\beta'} f_\varepsilon\|^\infty_K = \sup_{|\beta|\le 2s} \|D^\alpha D^\beta f_\varepsilon\|^\infty_K$.

On a donc $\|D^\alpha \widehat{f}_{\varepsilon,p}\|^\infty_{K'} \le \eta C^{-1} \|D^\alpha D^{\beta'} f_\varepsilon\|^\infty_K (1+\|p\|^2)^{-s}$ et de là on déduit la condition (i).

Si $\nu = (\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^m \times \mathbb{N}^n$, on a $\|D^\nu f_\varepsilon\|^\infty_K \le \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} |p^\beta| \cdot \|D^\alpha \widehat{f}_{\varepsilon,p}\|^\infty_{K'}$. Choisissons $s \in \mathbb{N}$ tel que $M = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} |p^\beta|(1+\|p\|^2)^{-s} < \infty$. Il existe $r' > 0$, $\eta' > 0$ tels que si $0 < \varepsilon < \eta'$ alors $\|D^\alpha \widehat{f}_{\varepsilon,p}\|^\infty_{K'} \le \varepsilon^{-r'}(1+\|p\|^2)^{-s}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}^n$, d'où $\|D^\nu f_\varepsilon\|^\infty_K \le M\varepsilon^{-r'}$ pour

$0 < \varepsilon < \eta'$. En prenant $\eta = \inf\{1/M, \eta'\}$ et $r = r' + 1$, on a $\|D^\nu f_\varepsilon\|_K^\infty \le \varepsilon^{-r}$ pour $0 < \varepsilon < \eta$. Le (b) se démontre de façon analogue. ∎

7.2. *Injections de $\mathcal{E}^{m,n}$ et de $\mathcal{D}'^{m,n}$ dans $\mathcal{G}^{m,n}$*

PROPOSITION 7.2. *Si $f \in \mathcal{D}^{m,n}$ alors $(f * \Phi_\varepsilon - f)_\varepsilon \in \mathcal{N}^{m,n}$.*

Preuve. D'après (7) on a $f * \Phi_\varepsilon = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} (\widehat{f}_p * \widehat{\Phi}_{\varepsilon,p}) \otimes m_p$; un calcul simple donne

$$\widehat{\Phi}_{\varepsilon,p} = \varrho_\varepsilon \qquad \text{si } p \in I_\varepsilon,$$
$$\widehat{\Phi}_{\varepsilon,p} = 0 \qquad \text{si } p \notin I_\varepsilon,$$

d'où $f * \Phi_\varepsilon = \sum_{p\in I_\varepsilon} (\widehat{f}_p * \widehat{\Phi}_{\varepsilon,p}) \otimes m_p$, et ensuite

$$f * \Phi_\varepsilon - f = \sum_{p\in I_\varepsilon} (\varrho_\varepsilon * \widehat{f}_p - \widehat{f}_p) \otimes m_p - \sum_{p\notin I_\varepsilon} \widehat{f}_p \otimes m_p.$$

En faisant un changement de variable on obtient

$$(\varrho_\varepsilon * \widehat{f}_p - \widehat{f}_p)(t) = \int_{\mathbb{R}^m} (\widehat{f}_p(t - \varepsilon u) - \widehat{f}_p(t))\varrho(u)\, du.$$

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^m \times \mathbb{N}^n$, $q > 0$, K' un compact de $\mathbb{R}^m$ et $K = K' \times \mathcal{T}^n$; fixons deux entiers k et s tels que $k \ge q$, $s \ge q + 1$ et $M = 1 + \sum_{p\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} |p^\beta| \cdot \|p\|^{-s} < \infty$. La formule de Taylor appliquée à $D^\alpha \widehat{f}_p$ à l'ordre k donne

$$D^\alpha \widehat{f}_p(t - \varepsilon u) - D^\alpha \widehat{f}_p(t) = \sum_{1\le|\nu|\le k} \frac{(-\varepsilon u)^\nu}{\nu!} D^{\nu+\alpha} \widehat{f}_p(t)$$
$$+ (k+1) \sum_{|\nu|=k+1} \frac{(-\varepsilon u)^\nu}{\nu!} \int_0^1 (1-\xi)^k D^{\nu+\alpha} \widehat{f}_p(t - \xi\varepsilon u)\, d\xi.$$

Comme $\int_{\mathbb{R}^m} u^\nu \varrho(u)\, du = 0$ pour $1 \le |\nu| \le k$, on en déduit que

$$D^\alpha(\varrho_\varepsilon * \widehat{f}_p - \widehat{f}_p)(t) = (k+1) \sum_{|\nu|=k+1} \int_{\mathbb{R}^m} \left(\frac{(-\varepsilon u)^\nu}{\nu!} \int_0^1 (1-\xi)^k D^{\nu+\alpha} \widehat{f}_p(t - \xi\varepsilon u) \right) \varrho(u)\, du$$

et comme $f \in \mathcal{D}^{m,n}$ alors $\widehat{f}_p \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. On a donc

$$\|D^\alpha(\varrho_\varepsilon * \widehat{f}_p - \widehat{f}_p)\|_{K'}^\infty \le (k+1)\varepsilon^{k+1} \sum_{|\nu|=k+1} \frac{\|D^{\nu+\alpha} \widehat{f}_p\|_\infty}{\nu!} \int_{\mathbb{R}^m} |u^\nu \varrho(u)|\, du.$$

D'autre part, $\varrho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, d'où $\int_{\mathbb{R}^m} |u^\nu \varrho(u)|\, du < \infty$; par conséquent, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|D^\alpha(\varrho_\varepsilon * \widehat{f}_p - \widehat{f}_p)\|_{K'}^\infty \le C\varepsilon^{k+1} \sup_{|\nu|=k+1} \|D^{\nu+\alpha} \widehat{f}_p\|_\infty.$$

On peut donc trouver $\eta' > 0$, $C' > 0$ avec $\eta < 1$ tels que pour $0 < \varepsilon < \eta'$ on ait

$$\|D^\alpha(\varrho_\varepsilon * \widehat{f}_p - \widehat{f}_p)\|_{K'}^\infty \le \varepsilon^k (1 + \|p\|^2)^{-s} \quad \text{et} \quad \|D^\alpha \widehat{f}_p\|_{K'}^\infty \le C'(1 + \|p\|^2)^{-s}.$$

On a

$$D^\alpha D^\beta (f * \Phi_\varepsilon - f) = \sum_{p\in I_\varepsilon} (ip)^\beta D^\alpha (\varrho_\varepsilon * \widehat{f}_p - \widehat{f}_p) \otimes m_p - \sum_{p\notin I_\varepsilon} (ip)^\beta D^\alpha \widehat{f}_p \otimes m_p,$$

d'où

$$\|D^\alpha D^\beta(f*\Phi_\varepsilon - f)\|_K^\infty \le M\varepsilon^k + C'\sum_{p\notin I_\varepsilon}|p^\beta|(1+\|p\|^2)^{-s} \quad \text{pour } 0<\varepsilon<\eta'.$$

Pour $p\notin I_\varepsilon$ on a $\|p\|>[1/\varepsilon]$, d'où

$$\sum_{p\notin I_\varepsilon}|p^\beta|(1+\|p\|^2)^{-s} < M\left(\frac{\varepsilon}{1-\eta'}\right)^s.$$

On en déduit que

$$\|D^\alpha D^\beta(f*\Phi_\varepsilon - f)\|_K^\infty \le M[(1-\eta')^{-s}+C']\varepsilon^{q+1} \quad \text{pour } 0<\varepsilon<\eta'.$$

Si $\eta=\inf\{\eta',1/(M[(1-\eta')^{-s}+C')]\}$ on a $\|D^\alpha D^\beta(f*\Phi_\varepsilon-f)\|_K^\infty\le\varepsilon^q$ pour $0<\varepsilon<\eta$, d'où $(f*\Phi_\varepsilon-f)_\varepsilon\in\mathcal{N}^{m,n}$. ∎

Proposition 7.3. *Si $T\in\mathcal{E}'^{m,n}$ alors $(T*\Phi_\varepsilon)_\varepsilon\in\mathcal{X}_M^{m,n}$.*

Preuve. D'après le Théorème 6.5, on peut écrire $T=\sum_{p\in\mathbb{Z}^n}\widehat{T}_p\otimes m_p$; la continuité du produit de convolution entraîne alors $T*\Phi_\varepsilon=\sum_{p\in\mathbb{Z}^n}(\widehat{T}_p\otimes m_p)*\Phi_\varepsilon$.

D'autre part, $(\widehat{T}_p\otimes m_p)*\Phi_\varepsilon=(\widehat{T}_p*\varrho_\varepsilon)\otimes(m_p*\phi_\varepsilon)$ et

$$m_p*\phi_\varepsilon=\begin{cases} m_p & \text{si } p\in I_\varepsilon,\\ 0 & \text{si } p\notin I_\varepsilon,\end{cases}$$

d'où $T*\Phi_\varepsilon=\sum_{p\in I_\varepsilon}(\widehat{T}_p*\varrho_\varepsilon)\otimes m_p$.

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^m\times\mathbb{N}^n$; on a $D^\alpha(\widehat{T}_p*\varrho_\varepsilon)(t)=\widehat{T}_p(D^\alpha\varrho_\varepsilon(t-\cdot))$. Il existe $(C_p)_p\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$, $k\in\mathbb{N}$ et K un compact de $\mathbb{R}^m$ tels que

$$|\widehat{T}_p(D^\alpha\varrho_\varepsilon(t-\cdot))|\le C_p\sup_{|\nu|\le k}\|D^{\alpha+\nu}\varrho_\varepsilon(t-\cdot)\|_{K'}^\infty,$$

d'où, pour K'' un compact de $\mathbb{R}^m$,

$$\|D^\alpha(\widehat{T}_p*\varrho_\varepsilon)\|_{K''}^\infty\le C_p\sup_{|\nu|\le k}\|D^{\alpha+\nu}\varrho_\varepsilon\|_\infty.$$

On a $\varrho_\varepsilon(t)=(1/\varepsilon)^m\varrho(t/\varepsilon)$, d'où

$$\sup_{|\nu|\le k}\|D^{\alpha+\nu}\varrho_\varepsilon\|_\infty\le(1/\varepsilon)^{m+k+|\alpha|}\sup_{|\nu|\le k}\|D^{\alpha+\nu}\varrho\|_\infty$$

et comme $(C_p)_p\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ alors on peut trouver $M>0$ et $l\in\mathbb{N}$ tels que l'on ait $\sup\{|p^\beta|,C_p\}\le M(1+|p|)^l$, d'où $\sup\{|p^\beta|,C_p\}\le M((n+1)/\varepsilon)^l$ pour $p\in I_\varepsilon$. On en déduit donc que

$$|p^\beta|\cdot\|D^\alpha(\widehat{T}_p*\varrho_\varepsilon)\|_{K''}^\infty\le M^2(n+1)^{2l}(1/\varepsilon)^{2l+m+k+|\alpha|}\sup_{|\nu|\le k}\|D^{\alpha+\nu}\varrho\|_\infty \quad \text{pour } p\in I_\varepsilon,$$

$$\|D_t^\alpha D_x^\beta(T*\Phi_\varepsilon)\|_{K''\times\mathcal{T}^n}^\infty\le 3^nM^2(n+1)^{2l}(1/\varepsilon)^{2l+m+n+k+|\alpha|}\sup_{|\nu|\le k}\|D^{\alpha+\nu}\varrho\|_\infty,$$

d'où

$$\|D_t^\alpha D_x^\beta(T*\Phi_\varepsilon)\|_{K''\times\mathcal{T}^n}^\infty\le(1/\varepsilon)^{2l+m+n+k+|\alpha|+1}$$

si $0<\varepsilon<(3^nM^2(n+1)^{2l}\sup_{|\nu|\le k}\|D^{\alpha+\nu}\varrho\|_\infty)^{-1}$. ∎

PROPOSITION 7.4. *Les applications* $\sigma : \mathcal{E}^{m,n} \to \mathcal{G}^{m,n}$, $f \mapsto \mathrm{cl}(f)_\varepsilon$, $i_0 : \mathcal{E}'^{m,n} \to \mathcal{X}_M^{m,n}$, $T \mapsto (T * \Phi_\varepsilon)_\varepsilon$, *et* $\overline{i}_0 : \mathcal{E}'^{m,n} \to \mathcal{G}^{m,n}$, $T \mapsto \mathrm{cl}(T * \Phi_\varepsilon)_\varepsilon$, *sont des applications linéaires injectives et* $\overline{i}_0|_{\mathcal{D}^{m,n}} = \sigma$.

Preuve. Il est clair que les applications considérées sont linéaires et que σ est injective. Comme $\lim_{\varepsilon\to 0} T*\Phi_\varepsilon = T$ dans $\mathcal{D}'^{m,n}$ on en déduit que i_0 est injective; par ailleurs, si $\overline{i}_0(T) = 0$, c'est-à-dire $(T * \Phi_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}^{m,n}$, alors $\lim_{\varepsilon\to 0} T * \Phi_\varepsilon = 0$ dans $\mathcal{D}'^{m,n}$, d'où $T = 0$ et l'injectivité de $\overline{i}_0$. Le dernier point, c'est-à-dire $\overline{i}_0|_{\mathcal{E}^{m,n}} = \sigma$, est une conséquence directe de la Proposition 7.2. ∎

PROPOSITION 7.5. *Soit* $\Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ *telle que* $\Lambda = 1$ *sur un voisinage de l'origine. Alors pour tout* $T \in \mathcal{D}'^{m,n}$ *on a* $(T * ((\Lambda \otimes 1)\Phi_\varepsilon))_\varepsilon \in \mathcal{X}_M^{m,n}$, *les applications* $i : \mathcal{D}'^{m,n} \to \mathcal{X}_M^{m,n}$, $T \mapsto (T * ((\Lambda \otimes 1)\Phi_\varepsilon))_\varepsilon$, *et* $\overline{i} : \mathcal{D}'^{m,n} \to \mathcal{G}^{m,n}$, $T \mapsto \mathrm{cl}(T * ((\Lambda \otimes 1)\Phi_\varepsilon))_\varepsilon$, *sont linéaires injectives, et de plus* $\overline{i}|_{\mathcal{E}^{m,n}} = \sigma$ *et* $\overline{i}(T) \approx \overline{i}_0(T)$ *pour* $T \in \mathcal{E}'^{m,n}$.

Preuve. Soit $S \in \mathcal{D}'^{m,n}$. En écrivant $T * (\Lambda\Phi_\varepsilon) = \sum_{p\in I_\varepsilon} ((\Lambda\varrho_\varepsilon) * \widehat{T}_p) \otimes m_p$ on a alors, pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^m \times \mathbb{N}^n$,

$$D_t^\alpha D_x^\beta (T * ((\Lambda \otimes 1)\Phi_\varepsilon)) = \sum_{p\in I_\varepsilon} (ip)^\beta (D^\alpha(\Lambda\varrho_\varepsilon) * \widehat{T}_p) \otimes m_p,$$

$$(D^\alpha(\Lambda\varrho_\varepsilon) * \widehat{T}_p)(t) = \widehat{T}_p(D^\alpha(\Lambda\varrho_\varepsilon)(t - \cdot)).$$

Si K' est un compact de $\mathbb{R}^m$, il existe un compact K'' dépendant de K' et de $\operatorname{supp}\Lambda$ tel que $\operatorname{supp}(u \mapsto D^\alpha(\Lambda\varrho_\varepsilon)(t - u)) \subset K''$ pour tout $t \in K'$. Il existe alors $k \in \mathbb{N}$, $(C_p)_p \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ tels que pour tout $t \in K'$ on ait

$$|\widehat{T}_p(D^\alpha(\Lambda\varrho_\varepsilon)(t - \cdot))| \le C_p \sup_{|\nu|\le k} \|D^\nu(D^\alpha(\Lambda\varrho_\varepsilon)(t - \cdot))\|_{K''}^\infty$$

et comme $D^\nu(D^\alpha(\Lambda\varrho_\varepsilon)(t - \cdot)) = (-1)^{|\nu|} D^{\alpha+\nu}(\Lambda\varrho_\varepsilon)(t - \cdot)$ on obtient

$$\|\widehat{T}_p(D^\alpha(\Lambda\varrho_\varepsilon)(t - \cdot))\|_{K'}^\infty \le C_p \sup_{|\nu|\le k+|\alpha|} \|D^\nu(\Lambda\varrho_\varepsilon)\|_{\operatorname{supp}\Lambda}^\infty.$$

D'autre part, il existe $C > 0$ et $l \in \mathbb{N}$ tels que $C_p \le C(1 + |p|)^l$. En tenant compte du fait que $p \in I_\varepsilon$ on a

$$\|D_t^\alpha D_x^\beta (T * ((\Lambda \otimes 1)\Phi_\varepsilon))\|_{K'\times\mathcal{T}^n}^\infty \le \left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^n \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{|\beta|} C \left(\frac{n+1}{\varepsilon}\right)^l \sup_{|\nu|\le k+|\alpha|} \|D^\alpha(\Lambda\varrho_\varepsilon)\|_{\operatorname{supp}\Lambda}^\infty$$

et cette dernière égalité montre que $(T * ((\Lambda \otimes 1)\Phi_\varepsilon))_\varepsilon \in \mathcal{X}_M^{m,n}$.

Maintenant si $f \in \mathcal{E}^{m,n}$ alors

$$f * ((\Lambda \otimes 1)\Phi_\varepsilon) - f = \sum_{p\in I_\varepsilon} ((\Lambda\varrho_\varepsilon) * \widehat{f}_p - \widehat{f}_p) \otimes m_p - \sum_{p\notin I_\varepsilon} \widehat{f}_p \otimes m_p,$$

$$\begin{aligned}((\Lambda\varrho_\varepsilon) * \widehat{f}_p - \widehat{f}_p)(t) &= \int_{\mathbb{R}^m} (\Lambda\varrho_\varepsilon)(u)\widehat{f}_p(t - u)\,du - \widehat{f}_p(t))\,du \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} (\Lambda\varrho_\varepsilon)(u)(\widehat{f}_p(t - u) - \widehat{f}_p(t))\,du + f_p(t) \int_{\mathbb{R}^m} \varrho_\varepsilon(u)(\Lambda(u) - 1)\,du.\end{aligned}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$; en faisant le changement de variable $u = \varepsilon v$ puis en remplaçant v par u on trouve

$$D^\alpha((\Lambda\varrho_\varepsilon)*\widehat{f}_p-\widehat{f}_p)(t)=\int_{\mathbb{R}^m}\Lambda(\varepsilon u)\varrho(u)(D^\alpha\widehat{f}_p(t-u)-D^\alpha\widehat{f}_p(t))\,du$$
$$+D^\alpha\widehat{f}_p(t)\int_{\mathbb{R}^m}\varrho(u)(\Lambda(\varepsilon u)-1)\,du.$$

En appliquant la formule de Taylor à l'ordre $\kappa\in\mathbb{N}$ à $\widehat{f}_p$ et à Λ, puis en tenant compte de $\Lambda(0)=1$ et $D^\nu\Lambda(0)=0$ pour $\nu\neq 0$ on obtient

$$D^\alpha\widehat{f}_p(t-\varepsilon u)-D^\alpha\widehat{f}_p(t)=\sum_{1\le|\nu|\le\kappa}\frac{(-\varepsilon u)^\nu}{\nu!}D^{\nu+\alpha}\widehat{f}_p(t)$$
$$+(\kappa+1)\sum_{|\nu|=\kappa+1}\frac{(-\varepsilon u)^\nu}{\nu!}\int_0^1(1-\xi)^\kappa D^{\nu+\alpha}\widehat{f}_p(t-\xi\varepsilon u)\,d\xi,$$
$$\Lambda(\varepsilon u)-1=(\kappa+1)\sum_{|\nu|=\kappa+1}\frac{(-\varepsilon u)^\nu}{\nu!}\int_0^1(1-\xi)^\kappa D^\nu\Lambda(\xi\varepsilon u)\,d\xi.$$

Nous pouvons donc écrire $\Lambda(\varepsilon u)=1+\varepsilon^{\kappa+1}g_\varepsilon(u)$ où $|g_\varepsilon|$ est majorée par une fonction $g(u)$ indépendante de ε telle que $\int_{\mathbb{R}^m}|\varrho(u)|g(u)\,du<\infty$. On en déduit que si t est dans un compact K' alors il existe une constante $c>0$ telle que

$$\Big|D^\alpha\widehat{f}_p(t)\int_{\mathbb{R}^m}\varrho(u)(\Lambda(\varepsilon u)-1)\,du\Big|\le c\varepsilon^{\kappa+1}\|D^\alpha\widehat{f}_p\|^\infty_{K'}.$$

D'autre part, comme tous les moments de ϱ sont nuls alors on a

$$\int_{\mathbb{R}^m}\Lambda(\varepsilon u)\varrho(u)(D^\alpha\widehat{f}_p(t-u)-D^\alpha\widehat{f}_p(t))\,du$$
$$=\varepsilon^{\kappa+1}\sum_{1\le|\nu|\le\kappa}\frac{1}{\nu!}D^{\nu+\alpha}\widehat{f}_p(t)\int_{\mathbb{R}^m}(-\varepsilon u)^\nu g_\varepsilon(u)\varrho(u)\,du$$
$$+(\kappa+1)\int_0^1(1-\xi)^\kappa\Big[\sum_{|\nu|=\kappa+1}\frac{1}{\nu!}\int_{\mathbb{R}^m}(-\varepsilon u)^\nu D^{\nu+\alpha}\widehat{f}_p(t-\xi\varepsilon u)\varrho(u)\Lambda(\varepsilon u)\,du\Big]d\xi.$$

Soit $r>0$ tel que $\operatorname{supp}\Lambda\subset B(0,r)$ et $r'=\sup\{\|t\|:t\in K'\}$. Alors nous avons $\|t-\xi\varepsilon u\|\le r+r'$ pour $\varepsilon u\in B(0,r)$, d'où, en posant $B'=B(0,r+r')$,

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^m}(-\varepsilon u)^\nu D^{\nu+\alpha}\widehat{f}_p(t-\xi\varepsilon u)\varrho(u)\Lambda(\varepsilon u)\,du\Big|\le\varepsilon^{k+1}\|D^{\nu+\alpha}\widehat{f}_p\|^\infty_{B'}\Big[\|\Lambda\|_\infty\int_{\mathbb{R}^m}|u^\nu\varrho(u)|\,du\Big].$$

En posant $K''=K'\cup B'$ on voit qu'il existe une constante $c'>0$ telle que

$$\|D^\alpha((\Lambda\varrho_\varepsilon)*\widehat{f}_p-\widehat{f}_p)\|^\infty_{K'}\le c'\varepsilon^{\kappa+1}\sum_{\nu\le\kappa+1}\|D^{\nu+\alpha}\widehat{f}_p\|^\infty_{K''}.$$

On en déduit que $[((\Lambda\otimes 1)\Phi_\varepsilon)*f-f]_\varepsilon\in\mathcal{N}^{m,n}$ d'après la caractérisation de $\mathcal{N}^{m,n}$. L'injectivité de i et de $\overline{i}$ se démontre comme dans la proposition précédente, le fait que $\overline{i}(T)\approx\overline{i}_0(T)$ pour $T\in\mathcal{E}'^{m,n}$ est évident. ∎

Remarque. Les injections considérées ne sont pas canoniques, dans la pratique on fixe Λ comme on a fixé ϱ (et également ϕ_ε). Dans toute la suite les injections de référence

par rapport à $\mathcal{G}^{m,n}$ seront $\bar{i}$ et σ.

7.3. *Coefficients de Fourier partiels*

7.3.1. *Intégration des fonctions généralisées.* Soit K' un compact de $\mathbb{R}^m$, $f \in \mathcal{G}^{m,n}$ et $(f_\varepsilon)_\varepsilon$ un représentant de f. Posons $I(f_\varepsilon) = \int_{K'\times\mathcal{T}^n} f_\varepsilon(t,x)\,dt\,d\mu$; comme $|I(f_\varepsilon)| \le \|f_\varepsilon\|^\infty_{K'\times\mathcal{T}^n}$ on voit que $(I(f_\varepsilon))_\varepsilon \in \mathcal{C}_M$, ce qui justifie la définition suivante :

DÉFINITION 7.6. On appelle *intégrale* de f sur $K'\times\mathcal{T}^n$, que l'on note $\int_{K'\times\mathcal{T}^n} f\,dt\,d\mu$, le nombre complexe généralisé $\mathrm{cl}(I(f_\varepsilon))_\varepsilon$, c'est-à-dire

$$\int\limits_{K'\times\mathcal{T}^n} f\,dt\,d\mu = \mathrm{cl}\Big(\int\limits_{K'\times\mathcal{T}^n} f_\varepsilon(t,x)\,dt\,d\mu\Big)_\varepsilon,$$

ce nombre étant indépendant du représentant $(f_\varepsilon)_\varepsilon$.

Soit u_ε la fonction définie sur $\mathbb{R}^m$ pour x fixé par $u_\varepsilon(t) = \int_{\mathcal{T}^n} f_\varepsilon(t,x)\,d\mu$; il est clair que $u_\varepsilon \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$, et d'autre part, si $\alpha \in \mathbb{N}^m$ alors $\|D^\alpha u_\varepsilon\|^\infty_{K'} \le \|D^a f\|^\infty_{K'\times\mathcal{T}^n}$, ce qui montre que $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}_M(\mathbb{R}^m)$. On a donc

DÉFINITION 7.7. Soit $f \in \mathcal{G}^{m,n}$. On appelle *intégrale* de f sur $\mathcal{T}^n$ la fonction généralisée sur $\mathbb{R}^m$ notée $\int_{\mathcal{T}^n} f\,d\mu$ et définie par

$$\int\limits_{\mathcal{T}^n} f\,d\mu = \mathrm{cl}\Big(t \mapsto \int\limits_{\mathcal{T}^n} f_\varepsilon(t,x)\,d\mu\Big)_\varepsilon.$$

Cette fonction est indépendante du représentant choisi pour f.

7.3.2. *Coefficients de Fourier partiels d'un élément de $\mathcal{G}^{m,n}$*

PROPOSITION 7.8. *Soit $(f_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}^{m,n}$. Alors*

$$(f_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}^{m,n}_M \Rightarrow \forall p \in \mathbb{Z}^n\ ((\widehat{f}_{\varepsilon,p})_\varepsilon \in \mathcal{X}_M(\mathbb{R}^m)),$$
$$(f_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}^{m,n} \Rightarrow \forall p \in \mathbb{Z}^n\ ((\widehat{f}_{\varepsilon,p})_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^m)).$$

Preuve. Ces implications résultent de la Proposition 7.1 caractérisant les algèbres $\mathcal{X}^{m,n}_M$ et $\mathcal{N}^{m,n}$. ∎

DÉFINITION 7.9. On appelle *coefficient de Fourier partiel* de f d'indice $p \in \mathbb{Z}^n$, que l'on note $\widehat{f}_p$, la fonction généralisée $\mathrm{cl}(\widehat{f}_{\varepsilon,p})_\varepsilon$. C'est un élément de $\mathcal{G}(\mathbb{R}^m)$ indépendant du représentant de f, on a donc $\widehat{f}_p = \mathrm{cl}(\widehat{f}_{\varepsilon,p})_\varepsilon$.

DÉFINITION 7.10. Une suite $(f_p)_{p\in\mathbb{Z}^n}$ de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ est dite *à décroissance rapide* s'il existe un compact K' de $\mathbb{R}^m$ tel que $\operatorname{supp} f_p \subset K'$ pour tout $p \in \mathbb{Z}^n$ et $(\|f_p\|^\infty_{K'})_p \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$.

PROPOSITION 7.11. *Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{Z}^n}$ une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ à décroissance rapide. Il existe une (unique) fonction f de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m\times\mathcal{T}^n)$ telle que $\widehat{f}_p = f_p$.*

Preuve. La fonction $f = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} f_p \otimes m_p$ répond à la question. ∎

DÉFINITION 7.12. (a) Une suite $(u_{\varepsilon,p})_{\varepsilon,p}$ d'éléments de $\mathcal{X}(\mathbb{R}^m)$ est dite *à croissance lente* si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) Il existe $\eta > 0$ tel que pour toute suite $(f_p)_{p\in\mathbb{Z}^n}$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ à décroissance rapide $\int_{\mathbb{R}^m} u_{\varepsilon,p}(t) f_p(t)\,dt_p$ est sommable pour $0 < \varepsilon < \eta$.

(ii) $\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{p\in\mathbb{Z}^n}(\int_{\mathbb{R}^m} u_{\varepsilon,p}(t)f_p(t)\,dt)$ existe.

(b) Une fonction généralisée est dite *à croissance lente* si elle admet un représentant dont la suite des coefficients de Fourier partiels est à croissance lente.

Nous pouvons caractériser une fonction généralisée associée à une distribution :

PROPOSITION 7.13. *Une fonction généralisée est associée à une distribution si et seulement si elle est à croissance lente. Si $u\in\mathcal{G}^{m,n}$ est associée à $T\in\mathcal{D}'^{m,n}$ alors $\widehat{u}_p$ est associée à $\widehat{T}_p$ pour tout $p\in\mathbb{Z}^n$.*

Preuve. Soit $u\in\mathcal{G}^{m,n}$ et $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ un représentant de u. On a

$$\int_{\mathbb{R}^m\times\mathcal{T}^n} u_\varepsilon(t,x)f(t,x)\,dt\,d\mu=\sum_{p\in\mathbb{Z}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^m}\widehat{u}_{\varepsilon,p}(t)\widehat{f}_{-p}(t)\,dt\Big)\quad\text{pour tout } f\in\mathcal{D}^{m,n}.$$

Comme toute suite à décroissance rapide est de la forme $(\widehat{f}_{-p})_p$ avec $f\in\mathcal{D}^{m,n}$ (Proposition 7.11) alors $(u_{\varepsilon,p})_{\varepsilon,p}$ vérifie (i). L'égalité précédente montre que si u est associée à une distribution elle vérifie (ii). Réciproquement, si u est à croissance lente $(u_{\varepsilon,p})_{\varepsilon,p}$ vérifie (ii); on en déduit d'après cette même égalité qu'il existe $T\in\mathcal{D}'^{m,n}$ telle que $u\approx T$.

Soit $\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, $s\in\mathbb{Z}^n$ et $f\in\mathcal{D}^{m,n}$ tels que $\widehat{f}_{-s}=\psi$ et $\widehat{f}_p=0$ si $p\neq -s$. On a alors $T(f)=\widehat{T}_s(\psi)$ et $\sum_{p\in\mathbb{Z}^n}(\int_{\mathbb{R}^m}\widehat{u}_{\varepsilon,p}(t)\widehat{f}_{-p}(t)\,dt)=\int_{\mathbb{R}^m}\widehat{u}_{\varepsilon,s}(t)\psi(t)\,dt$, d'où $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^m}\widehat{u}_{\varepsilon,s}(t)\psi(t)\,dt=\widehat{T}_s(\psi)$, c'est-à-dire $\widehat{u}_s\approx\widehat{T}_s$. ∎

PROPOSITION 7.14. *Soit $u\in\mathcal{G}^{m,n}$, $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ un représentant de u et $T\in\mathcal{D}'^{m,n}$ tels que $\widehat{u}_p\approx\widehat{T}_p$ pour tout $p\in\mathbb{Z}^n$. S'il existe $\eta>0$ et $(C_p)\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ tels que $\|\widehat{u}_{\varepsilon,p}\|_{L^\infty_m}\le C_p$ pour $0<\varepsilon<\eta$ alors $u\approx T$.*

Preuve. C'est une application directe du théorème de la convergence dominée de Lebesgue. ∎

7.4. *Fonctions généralisées sur $\Omega\times\mathcal{T}^n$ et sur $\overline{\Omega}\times\mathcal{T}^n$.* On désigne par Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$.

7.4.1. *Fonctions généralisées sur $\Omega\times\mathcal{T}^n$.* On pose $\mathcal{X}(\Omega\times\mathcal{T}^n)=(\mathcal{E}(\Omega\times\mathcal{T}^n))^E$, et

$\mathcal{X}_M(\Omega\times\mathcal{T}^n)=\{(f_\varepsilon)_\varepsilon\in\mathcal{X}(\Omega\times\mathcal{T}^n):$
$\forall K$ compact $\subset\Omega\times\mathcal{T}^n,\ \forall\alpha\in\mathbb{N}^{m+n},\ \exists r>0,\ \exists\eta>0\ (0<\varepsilon<\eta\Rightarrow\|D^\alpha f\|^\infty_K\le\varepsilon^{-r})\}$,
$\mathcal{N}(\Omega\times\mathcal{T}^n)=\{(f_\varepsilon)_\varepsilon\in\mathcal{X}(\Omega\times\mathcal{T}^n):$
$\forall K$ compact $\subset\Omega\times\mathcal{T}^n,\ \forall\alpha\in\mathbb{N}^{m+n},\ \forall q>0,\ \exists\eta>0\ (0<\varepsilon<\eta\Rightarrow\|D^\alpha f\|^\infty_K\le\varepsilon^{q})\}$.

L'algèbre des *fonctions généralisées* sur $\Omega\times\mathcal{T}^n$ est l'algèbre quotient

$$\mathcal{G}(\Omega\times\mathcal{T}^n)=\mathcal{X}_M(\Omega\times\mathcal{T}^n)/\mathcal{N}(\Omega\times\mathcal{T}^n).$$

7.4.2. *Fonctions généralisées sur $\overline{\Omega}\times\mathcal{T}^n$.* On désigne par $\mathcal{E}(\overline{\Omega}\times\mathcal{T}^n)$ l'espace des fonctions f à valeurs complexes définies et continues sur $\overline{\Omega}\times\mathcal{T}^n$, telles que $f|_{\Omega\times\mathcal{T}^n}\in\mathcal{E}(\Omega\times\mathcal{T}^n)$ et dont toutes les dérivées sont continûment prolongeables à $\overline{\Omega}\times\mathcal{T}^n$.

En remplaçant $\Omega \times \mathcal{T}^n$ par $\overline{\Omega} \times \mathcal{T}^n$ dans les définitions du paragraphe précédent, on obtient les algèbres $\mathcal{X}_M(\Omega \times \mathcal{T}^n)$ et $\mathcal{N}(\Omega \times \mathcal{T}^n)$; l'algèbre des *fonctions généralisées* sur $\overline{\Omega} \times \mathcal{T}^n$ est

$$\mathcal{G}(\overline{\Omega} \times \mathcal{T}^n) = \mathcal{X}_M(\overline{\Omega} \times \mathcal{T}^n)/\mathcal{N}(\overline{\Omega} \times \mathcal{T}^n).$$

7.4.3. *Restrictions d'un élément de $\mathcal{G}^{m,n}$ à $\Omega \times \mathcal{T}^n$ et $\overline{\Omega} \times \mathcal{T}^n$.* Désignons par $\mathcal{L}$ l'un des sous-ensembles $\Omega \times \mathcal{T}^n$ ou $\overline{\Omega} \times \mathcal{T}^n$. Pour tout $(f_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}_M^{m,n}$ on a $(f_\varepsilon|_{\mathcal{L}})_\varepsilon \in \mathcal{X}_M(\mathcal{L})$. Par suite, si $f \in \mathcal{G}^{m,n}$ admet $(f_\varepsilon)_\varepsilon$ comme représentant, on définit la *restriction* $f|_{\mathcal{L}}$ de f à $\mathcal{L}$ par $f|_{\mathcal{L}} = \mathrm{cl}(f_\varepsilon|_{\mathcal{L}})_\varepsilon$. Cette restriction est donc un élément de $\mathcal{G}(\mathcal{L})$.

PROPOSITION 7.15. *Soit $\Omega = \mathbb{R}^{m-1} \times]0, \infty[$; alors $\mathcal{G}^{m,n} \to \mathcal{G}(\overline{\Omega} \times \mathcal{T}^n)$, $f \mapsto f|_{\overline{\Omega} \times \mathcal{T}^n}$, est une application surjective.*

Preuve. C'est une adaptation directe d'un cas particulier de la démonstration d'un résultat dû à J.-F. Colombeau et H. A. Biagioni sur le théorème d'extension de Whitney pour les fonctions généralisées définies sur un fermé (cf. [5]). Ce cas particulier de la démonstration, que l'on retrouve dans sa version simplifiée dans [3], pp. 80–82, repose sur un résultat dû à R. T. Seeley (cf. [35]). ∎

III. Exemples de problèmes différentiels

8. Exemples de problèmes différentiels

8.1. *Equations des ondes et de la chaleur*

8.1.1. *Equation des ondes.* On considère le problème de Cauchy

$$\text{(I)} \qquad D_t^2 u(t,x) - \triangle_x u(t,x) = f(t,x), \qquad u(0,x) = u_0(x), \quad D_t u(0,x) = u_1(x),$$

où $\triangle_x$ désigne le laplacien par rapport à x, $u_0, u_1 \in \mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{T}^n)$ et $f \in \mathcal{G}^{1,n}$. On cherche une solution u dans $\mathcal{G}^{1,n}$.

En passant aux représentants et en calculant les coefficients de Fourier d'indice $p \in \mathbb{Z}^n$ par rapport à $x \in \mathcal{T}^n$, (I) devient

$$\text{(II)} \qquad \begin{array}{ll} (1) & \widehat{u}''_{\varepsilon,p}(t) + \|p\|^2 \widehat{u}_{\varepsilon,p}(t) = \widehat{f}_{\varepsilon,p}(t), \\ (2) & \widehat{u}_{\varepsilon,p}(0) = \widehat{u}_{0\varepsilon}(p), \qquad \widehat{u}'_{\varepsilon,p}(0) = \widehat{u}_{1\varepsilon}(p). \end{array}$$

Premier cas : $p = 0$. L'équation (1) s'écrit $\widehat{u}''_{\varepsilon,0}(t) = \widehat{f}_{\varepsilon,0}(t)$, ce qui donne

$$\widehat{u}_{\varepsilon,0}(t) = \int_0^t \Big(\int_0^\xi \widehat{f}_{\varepsilon,0}(s)\, ds \Big) d\xi + \widehat{u}'_{\varepsilon,0}(0)t + \widehat{u}''_{\varepsilon,0}(0)$$

et en tenant compte de (2) on obtient

$$\text{(3)} \qquad \widehat{u}_{\varepsilon,0}(t) = \int_0^t \Big(\int_0^\xi \widehat{f}_{\varepsilon,0}(s)\, ds \Big) d\xi + \widehat{u}_{1\varepsilon}(0)t + \widehat{u}_{0\varepsilon}(0).$$

D e u x i è m e c a s : $p \neq 0$. Les solutions de l'équation homogène associée à (1) sont de la forme $\widehat{u}_{\varepsilon,p}(t) = \alpha e^{i\|p\|t} + \beta e^{-i\|p\|t}$. Par un calcul simple on trouve

$$\alpha'_{\varepsilon,p}(t) = \frac{-i\widehat{f}_{\varepsilon,p}(t)e^{-i\|p\|t}}{2\|p\|}, \qquad \beta'_{\varepsilon,p}(t) = \frac{i\widehat{f}_{\varepsilon,p}(t)e^{i\|p\|t}}{2\|p\|}$$

et en utilisant (2) on obtient, pour $p \neq 0$,

$$\alpha_{\varepsilon,p}(t) = \frac{-i}{2\|p\|}\int_0^t \widehat{f}_{\varepsilon,p}(s)e^{-i\|p\|s}\,ds + \frac{1}{2}\Big(\widehat{u}_{0\varepsilon}(p) - i\frac{\widehat{u}_{1\varepsilon}(p)}{\|p\|}\Big), \tag{4}$$

$$\beta_{\varepsilon,p}(t) = \frac{i}{2\|p\|}\int_0^t \widehat{f}_{\varepsilon,p}(s)e^{i\|p\|s}\,ds + \frac{1}{2}\Big(\widehat{u}_{0\varepsilon}(p) + i\frac{\widehat{u}_{1\varepsilon}(p)}{\|p\|}\Big), \tag{5}$$

$$\widehat{u}_{\varepsilon,p}(t) = \alpha_{\varepsilon,p}e^{i\|p\|t} + \beta_{\varepsilon,p}e^{-i\|p\|t}. \tag{6}$$

Les solutions de (II) sont donc données par (3)–(6) et pour tout $(p,\varepsilon) \in \mathbb{Z}^n \times E$, $\widehat{u}_{\varepsilon,p} \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$. Si $j \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}^n\backslash\{0\}$ alors

$$\widehat{u}^{(j)}_{\varepsilon,p}(t) = \sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(i\|p\|)^{j-k}(e^{i\|p\|t}\alpha^{(k)}_{\varepsilon,p}(t) + (-1)^{j-k}e^{-i\|p\|t}\beta^{(k)}_{\varepsilon,p}(t)),$$

et pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\alpha^{(k)}_{\varepsilon,p}(t) = \frac{-i}{2\|p\|}(\widehat{f}_{\varepsilon,p}(t)e^{-i\|p\|t})^{(k-1)}, \quad \beta^{(k)}_{\varepsilon,p}(t) = \frac{i}{2\|p\|}(\widehat{f}_{\varepsilon,p}(t)e^{i\|p\|t})^{(k-1)}.$$

On en déduit aisément en posant $\lambda(j,k,l) = (i)^{k-l}((-1)^{k-l} + (-1)^{j-k})$ que

$$e^{i\|p\|t}\alpha^{(k)}_{\varepsilon,p}(t) + (-1)^{j-k}e^{-i\|p\|t}\beta^{(k)}_{\varepsilon,p}(t) = \frac{1}{2\|p\|}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}\widehat{f}_{\varepsilon,p}(t)\|p\|^{k-l-1}\lambda(j,k,l),$$

$$|e^{i\|p\|t}\alpha^{(k)}_{\varepsilon,p}(t) + (-1)^{j-k}e^{-i\|p\|t}\beta^{(k)}_{\varepsilon,p}(t)| \le \sum_{l=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}|\widehat{f}^{(l)}_{\varepsilon,p}(t)|\cdot\|p\|^{k-l-2}.$$

Pour $k = 0$ on trouve

$$|e^{i\|p\|t}\alpha_{\varepsilon,p}(t) + (-1)^{j}e^{-i\|p\|t}\beta_{\varepsilon,p}(t)| \le \frac{1}{\|p\|}\Big|\int_0^t |\widehat{f}_{\varepsilon,p}(s)|\,ds\Big| + \frac{|\widehat{u}_{1\varepsilon}(p)|}{\|p\|} + |\widehat{u}_{0\varepsilon}(p)|,$$

d'où l'on déduit finalement

$$|\widehat{u}_{\varepsilon,0}(t)| \le \Big|\int_0^t\Big(\int_0^\xi |\widehat{f}_{\varepsilon,0}(s)|\,ds\Big)d\xi\Big| + |\widehat{u}_{1\varepsilon}(0)|\cdot|t| + |\widehat{u}_{0\varepsilon}(0)|,$$

$$|\widehat{u}'_{\varepsilon,0}(t)| \le \Big|\int_0^t |\widehat{f}_{\varepsilon,0}(s)|\,ds\Big| + |\widehat{u}_{1\varepsilon}(0)|; \quad |\widehat{u}^{(j)}_{\varepsilon,0}(t)| \le |\widehat{f}^{(j-2)}_{\varepsilon,0}(t)| \quad \text{pour } j \ge 2,$$

$$|\widehat{u}^{(j)}_{\varepsilon,p}(t)| \le \|p\|^{j-1}\Big(\Big|\int |\widehat{f}_{\varepsilon,p}(s)|\,ds\Big| + |\widehat{u}_{1\varepsilon}(p)|\Big) + \|p\|^j|\widehat{u}_{0\varepsilon}(p)|$$
$$+ \sum_{k=1}^{j}\sum_{k-1}^{l=0}\binom{j}{k}\binom{k-1}{l}|\widehat{f}^{(l)}_{\varepsilon,p}(t)|\cdot\|p\|^{j-l-2} \quad \text{pour } p \neq 0.$$

(On convient que $\sum_{k=1}^{j}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{j}{k}\binom{k-1}{l}|\widehat{f}^{(l)}_{\varepsilon,p}(t)|\cdot\|p\|^{j-l-2} = 0$ pour $j = 0$).

Des inégalités précédentes on déduit les majorations suivantes :

$$\begin{aligned}\|\widehat{u}_{\varepsilon,0}\|_{K'}^{\infty} &\le a^2\|\widehat{f}_{\varepsilon,0}\|_{K'}^{\infty} + a|\widehat{u}_{1\varepsilon}(0)| + |\widehat{u}_{0\varepsilon}(0)|,\\ \|\widehat{u}'_{\varepsilon,0}\| &\le a\|\widehat{f}_{\varepsilon,0}\|_{K'}^{\infty} + |\widehat{u}_{1\varepsilon}(0)|,\\ \|\widehat{u}^{(j)}_{\varepsilon,0}\| &= \|\widehat{f}^{(j-2)}_{\varepsilon,0}\| \quad \text{pour } j \ge 2\end{aligned}$$

et si $a > 0$, $K' = [-a, a]$, $p \ne 0$, alors en posant $\|\widehat{f}^{(l)}_{\varepsilon,p}\|_{K'}^{\infty} = 0$ pour $l = 0$ on a

$$\|\widehat{u}^{(j)}_{\varepsilon,p}\|_{K'}^{\infty} \le \|p\|^{j-1}(a\|\widehat{f}_{\varepsilon,p}\|_{K'}^{\infty} + |\widehat{u}_{1\varepsilon}(p)|) + \|p\|^{j}|\widehat{u}_{0\varepsilon}(p)| + \left(\frac{3^j-1}{2}\right)\|p\|^{j-2}\sup_{l\le j-1}\|\widehat{f}^{(l)}_{\varepsilon,p}\|_{K'}^{\infty}.$$

Cette dernière inégalité montre que $((t,x) \mapsto \sum_{p\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \widehat{u}_{\varepsilon,p}(t)x^p)$ est de classe C^∞ sur $]-a, a[\times\mathcal{T}^n$ pour tout $a > 0$, donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\times\mathcal{T}^n$, et comme $\widehat{u}_{\varepsilon,0} \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ alors $u_\varepsilon = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} u_{\varepsilon,p} \otimes m_p \in \mathcal{E}(\mathbb{R}\times\mathcal{T}^n)$.

L'ensemble de ces inégalités montre que $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}_M^{1,n}$ d'après la caractérisation de $\mathcal{X}^{m,n}$ par les coefficients de Fourier partiel; on en déduit que $u = \mathrm{cl}(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est une solution de (I). Si on suppose que $u_0 = u_1 = 0$ dans $\mathcal{G}$ et $f = 0$ dans $\mathcal{G}^{1,n}$ alors ces inégalités montrent aussi que $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}^{1,n}$, c'est-à-dire $u = 0$. Cela signifie que le problème de Cauchy (I) admet une solution unique dans $\mathcal{G}^{1,n}$.

Supposons que u_0, u_1 et f soient des distributions, ce qui revient à dire qu'elles admettent des représentants $(u_{0\varepsilon})_\varepsilon$, $(u_{0\varepsilon})_\varepsilon$ et $(f_\varepsilon)_\varepsilon$ tels que $\widehat{u}_{0\varepsilon}(p) = 0$, $\widehat{u}_{1\varepsilon}(p) = 0$ et $\widehat{f}_{\varepsilon,p} = 0$ pour $p \notin I_\varepsilon$. Des inégalités (4)–(6) précédentes on déduit alors que $\widehat{u}_{\varepsilon,p} = 0$ pour $p \notin I_\varepsilon$, c'est-à-dire que u est aussi une distribution, comme on pouvait s'y attendre. Le résultat est donc cohérent. ■

8.1.2. *Equation de la chaleur dans* $[0,\infty[\times\mathcal{T}^n$. On considère le problème de Cauchy

$$\text{(I)} \qquad D_t u(t,x) - \triangle_x u(t,x) = f(t,x), \qquad (D_t u)|_{t=0} = (D_t u)_0 = u_0,$$

où $(t,x) \in [0,\infty[\times\mathcal{T}^n$, $f \in \mathcal{G}([0,\infty[\times\mathcal{T}^n)$ et $u_0 \in \mathcal{G}$; on cherche une solution u de (I) dans $\mathcal{G}([0,\infty[\times\mathcal{T}^n)$.

Comme tout élément de $\mathcal{G}([0,\infty[\times\mathcal{T}^n)$ se prolonge en un élément de $\mathcal{G}(\mathbb{R}\times\mathcal{T}^n)$, on peut supposer que $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}\times\mathcal{T}^n)$. Désignons par $(u_\varepsilon)_\varepsilon$, $(f_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(u_{0\varepsilon})_\varepsilon$ des représentants respectifs de u, f et u_0. Alors (I) s'écrit

$$(D_t u_\varepsilon - \triangle_x u_\varepsilon)_\varepsilon = (f_\varepsilon)_\varepsilon + \mathcal{N}([0,\infty[\times\mathcal{T}^n), \qquad ((D_t u_\varepsilon)_0)_\varepsilon = (u_{0\varepsilon})_\varepsilon + \mathcal{N}.$$

Cherchons $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ tel que l'on ait, pour tout $t > 0$,

$$\text{(1)} \qquad D_t u_\varepsilon - \triangle_x u_\varepsilon = (f_\varepsilon)_\varepsilon,$$

$$\text{(2)} \qquad (D_t u_\varepsilon)_0 = u_{0\varepsilon}.$$

En calculant les coefficients de Fourier d'indice $p \in \mathbb{Z}^n$ par rapport à x, (1) donne

$$\widehat{u}'_{\varepsilon,p}(t) + \|p\|^2\widehat{u}_{\varepsilon,p}(t) = \widehat{f}_{\varepsilon,p}(t),$$

d'où l'on tire

$$\widehat{u}_{\varepsilon,p}(t) = \Big(\int_0^t e^{\|p\|^2 s}\widehat{f}_{\varepsilon,p}(s)\,ds + \mu_\varepsilon(p)\Big)e^{-\|p\|^2 t} \quad \text{avec } \mu_\varepsilon(p) \in \mathbb{C}.$$

En tenant compte de (2) on trouve $\widehat{u}_{0\varepsilon}(p) = -\mu_\varepsilon(p) + \widehat{f}_{\varepsilon,p}(0)$, ce qui entraîne

$$\widehat{u}_{0\varepsilon}(0) = \widehat{f}_{\varepsilon,0}(0), \qquad \mu_\varepsilon(p) = \frac{\widehat{f}_{\varepsilon,p}(0) - \widehat{u}_{0\varepsilon}(p)}{\|p\|^2}, \quad p \neq 0.$$

Finalement, on obtient pour $t > 0$:

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} \widehat{u}_{\varepsilon,p}(t) &= \Big(\int_0^t e^{\|p\|^2 s}\widehat{f}_{\varepsilon,p}(s)\,ds + \frac{\widehat{f}_{\varepsilon,p}(0) - \widehat{u}_{0\varepsilon}(p)}{\|p\|^2}\Big)e^{-\|p\|^2 t} \quad \text{si } p \neq 0,\\ \widehat{u}_{\varepsilon,0}(t) &= \int_0^t \widehat{f}_{\varepsilon,0}(s)\,ds + \mu_\varepsilon(0). \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Leibniz, on a, pour $p \neq 0$,

$$\widehat{u}^{(m)}_{\varepsilon,p}(t) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k}\Big(\int_0^t e^{\|p\|^2 s}\widehat{f}_{\varepsilon,p}(s)\,ds\Big)^{(k)}(e^{-\|p\|^2 t})^{(m-k)} + \frac{\widehat{f}_{\varepsilon,p}(0) - \widehat{u}_{0\varepsilon}(p)}{\|p\|^2}(e^{-\|p\|^2 t})^{(m)},$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante (en convenant que les termes où figure le symbole $\sum$ sont nuls pour $m = 0$) :

$$\begin{aligned} \widehat{u}^{(m)}_{\varepsilon,p}(t) = {} & \Big[\Big(\int_0^t e^{\|p\|^2 s}\widehat{f}_{\varepsilon,p}(s)\,ds\Big) + \frac{\widehat{f}_{\varepsilon,p}(0) - \widehat{u}_{0\varepsilon}(p)}{\|p\|^2}\Big](-\|p\|^2)^m e^{-\|p\|^2 t}\\ & + \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{k-1} \binom{m}{k}\binom{k-1}{l}(-1)^{m-k}\|p\|^{2(m-k+l)}\widehat{f}_{\varepsilon,p}(t) \end{aligned}$$

pour $t > 0$ et $p \neq 0$, d'où, avec ces mêmes conditions,

$$|\widehat{u}^{(m)}_{\varepsilon,p}(t)| \le \|p\|^{2(m-1)}\Big[\sup_{s\in[0,t]}|\widehat{f}_{\varepsilon,p}(s)| + \frac{3^m - 1}{2}\sup_{0\le k\le m-1}|\widehat{f}^{(k)}_{\varepsilon,p}(t)| + |\widehat{f}_{\varepsilon,p}(0)| + |\widehat{u}_{0\varepsilon}(p)|\Big].$$

Pour $t > 0$ et $m \ge 1$ on a

$$|\widehat{u}_{\varepsilon,0}(t)| \le t\sup_{s\in[0,t]}|\widehat{f}_{\varepsilon,0}(s)| + |\mu_\varepsilon(0)| \quad \text{et} \quad |\widehat{u}^{(m)}_{\varepsilon,0}(t)| = |\widehat{f}^{(m-1)}_{\varepsilon,0}(t)|;$$

d'autre part, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $a > 0$, $\lim_{\varepsilon\to 0} u^{(m)}_{\varepsilon,p}(t)$ existe et $(|u^{(m)}_{\varepsilon,p}(t)|)_p$ est uniformément majorée par une suite à décroissance rapide sur $]0, a[$. On en déduit que $u_\varepsilon \in \mathcal{E}([0,\infty[\times\mathcal{T}^n)$.

Comme $(f_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}_M(\mathbb{R}\times\mathcal{T}^n)$, si $(\mu_\varepsilon(0))_\varepsilon \in \mathcal{C}_M$ alors $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}_M([0,\infty[\times\mathcal{T}^n)$ et $u = \mathrm{cl}(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est solution de (I). Si on prend $(\mu_\varepsilon(0))_\varepsilon \in \mathcal{J}$, $(u_{0\varepsilon})_\varepsilon \in \mathcal{N}([0,\infty[\times\mathcal{T}^n)$ et $(f_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}\times\mathcal{T}^n)$, les inégalités vérifiées par $|u^{(m)}_{\varepsilon,p}(t)|$ montrent que $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est dans $\mathcal{N}([0,\infty[\times\mathcal{T}^n)$, d'où l'unicité de la solution de (I) à une constante généralisée près égale à $\mathrm{cl}(\mu_\varepsilon(0))_\varepsilon$. La conclusion est donc la suivante : si $\widehat{u}_0(0) = \widehat{f}_0(0)$ alors (I) admet une solution unique à une constante généralisée près. ∎

8.2. *Exemple d'équation différentielle ordinaire*

8.2.1. *Fonctions non linéaires sur $\overline{\mathcal{C}}^m$ et $(\mathcal{G}(U))^m$.* Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $\mathcal{O}_M(\mathbb{C}^m)$ l'algèbre des fonctions f définies sur $\mathbb{C}^m$ à valeurs complexes, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{2m}$, quand on identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ et telles que

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^m \times \mathbb{N}^m,\ \exists C_\alpha \geq 0,\ \exists m_\alpha \geq 0$$
$$(|D_z^{\alpha_1} D_{\bar z}^{\alpha_2} f(z)| \leq C_\alpha (1 + \|z\|)^{m_\alpha} \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}^m).$$

Soit $(z_1, \ldots, z_m) \in \overline{\mathcal{C}}^m$ et $(z_{i\varepsilon})_\varepsilon$ un représentant de z_i pour $1 \leq i \leq m$; si $f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{C}^m)$ alors $(f(z_{1\varepsilon}, \ldots, z_{m\varepsilon}))_\varepsilon \in \mathcal{C}_M$, on peut donc définir $f(z_1, \ldots, z_m)$ en posant $f(z_1, \ldots, z_m) = \mathrm{cl}(f(z_{1\varepsilon}, \ldots, z_{m\varepsilon}))_\varepsilon \in \overline{\mathcal{C}}$. Cette définition ne dépend pas des représentants choisis.

De même, si U est un ouvert non vide de $\mathcal{T}^n$ et si $(u_1, \ldots, u_m) \in (\mathcal{G}(U))^m$ avec $(u_{i\varepsilon})_\varepsilon$, $1 \leq i \leq m$, des représentants de u_i, alors $f(u_{1\varepsilon}, \ldots, u_{m\varepsilon}) \in \mathcal{X}_M(U)$; on pose donc $f(u_1, \ldots, u_m) = \mathrm{cl}(f(u_{1\varepsilon}, \ldots, u_{m\varepsilon}))_\varepsilon \in \mathcal{G}(U)$. Comme précédemment, cette définition ne dépend pas des représentants choisis. On définit ainsi des opérations non linéaires sur $\overline{\mathcal{C}}^m$ et sur $(\mathcal{G}(U))^m$.

8.2.2. *Rappel de quelques résultats.* Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ on pose $\|x\| = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ et $\|A\| = \sup_{1 \leq i \leq n} [\sum_{j=1}^n |a_{ij}|]$. Ces normes ainsi définies vérifient $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$.

Nous avons le théorème suivant (théorie de Floquet) [31], pp. 12–13, [30], pp. 392–393.

THÉORÈME 8.1. *Soit A et f deux applications définies et continues sur $\mathbb{R}$ de période T, à valeurs dans $M_n(\mathbb{R})$ et dans $\mathbb{R}^n$ respectivement; on considère les équations différentielles*

$$x' = A(t)x + f(t), \tag{1}$$
$$x' = A(t)x. \tag{2}$$

Si (2) *n'a pas de solution périodique non nulle de période T, alors* (1) *a pour chaque fonction f une unique solution périodique x de période T, et il existe une constante $\alpha > 0$ ne dépendant que de A telle que* $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\| \leq \alpha \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|$.

Si on désigne par ϕ la résolvante de A, on montre que si x est l'unique solution T-périodique de (1) alors $x(t) = \int_t^{t+T} \phi(t,0)[\phi(0,T) - I]^{-1} \phi(0,s) f(s)\, ds$. Dans ces conditions, en posant $C_1 = \sup_{0 \leq t \leq T} \|\phi(t,0)\|$ et $C_2 = \sup_{0 \leq s \leq 2T} \|\phi(0,s)\|$, on peut prendre $\alpha \leq T C_1 C_2 \|[\phi(0,T) - I]^{-1}\|$.

Soit g une fonction continue de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique par rapport à la première variable et telle que

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\ (\|g(t,x) - g(t,y)\| \leq K \|x - y\|)$$

où K est une constante > 0 ne dépendant que de g.

En appliquant le théorème précédent on montre ([31], pp. 39–40) que si K et α vérifient $K\alpha < 1$ alors l'équation

$$x' = A(t)x + \mu f(t) + g(t,x) \quad \text{avec } \mu \in \mathbb{R} \tag{I}$$

admet une unique solution 2π-périodique pourvu que l'équation homogène associée n'admette pas de solution 2π-périodique non nulle. Si x est cette solution on a

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\| \leq \frac{2\alpha}{1 - K\alpha} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\mu f(t) + g(t,0)\|. \tag{3}$$

8.2.3. *Etude de* (I) *dans* $(\mathcal{G}_{2\pi}(\mathbb{R}))^n$. Nous considérons l'équation différentielle ordinaire

$$\text{(II)} \qquad x' = A(t)x + \mu f(t) + g(t,x)$$

où $f \in (\mathcal{G}_{2\pi}(\mathbb{R}))^n$, $\mu \in \overline{\mathcal{C}}$, $A \in M_n(\mathcal{G}_{2\pi}(\mathbb{R}))$, g est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ et $g \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C}^n)$ quand $\mathbb{C}$ est identifié à $\mathbb{R}^2$. On pose $g = (g_1, \ldots, g_n)$ et on suppose que g vérifie les conditions suivantes :

$$\text{(i)} \qquad K_j = \sup_{1\le k\le n} \left\{ \sup_{(t,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}^n} \left\| \frac{\partial g_k}{\partial z_j}(t,z) \right\| + \sup_{(t,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}^n} \left\| \frac{\partial g_k}{\partial \overline{z}_j}(t,z) \right\| \right\} < \infty$$

pour $j \in \{1, \ldots, n\}$. On posera $K = \sum_{j=1}^n K_j$.

(ii) $\forall \alpha = (m, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n,\ \exists C > 0,\ \exists l > 0$

$$\left(\sup_{1\le k\le n} \left\| \frac{\partial^{|\alpha|} g_k}{\partial t^m \partial z^{\alpha_1} \partial \overline{z}^{\alpha_2}}(t,z) \right\| \le C(1 + \|z\|)^l \text{ pour tout } (t,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \right).$$

Si $(t, z, \zeta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} g_k(t,z) - g_k(t,\zeta) = &\sum_{j=1}^n \int_0^1 (z_j - \zeta_j) \frac{\partial g_k}{\partial z_j}(t, \zeta + \sigma(z-\zeta))\, d\sigma \\ &+ \sum_{j=1}^n \int_0^1 (\overline{z_j - \zeta_j}) \frac{\partial g_k}{\partial \overline{z}_j}(t, \zeta + \sigma(z-\zeta))\, d\sigma, \end{aligned}$$

d'où

$$\|g_k(t,z) - g_k(t,\zeta)\| \le \sup_{1\le m\le n} |z_m - \zeta_m| \sum_{j=1}^n \left[\sup_{x\in\mathbb{C}^n} \left\| \frac{\partial g_k}{\partial z_j}(t,x) \right\| + \sup_{x\in\mathbb{C}^n} \left\| \frac{\partial g_k}{\partial \overline{z}_j}(t,x) \right\| \right]$$

et

$$\text{(4)} \qquad \|g(t,z) - g(t,\zeta)\| \le K\|z - \zeta\|.$$

Soient $(\mu_\varepsilon)_\varepsilon, (f_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(A_\varepsilon)_\varepsilon$ des représentants respectifs de μ, f et A. On suppose que pour tout $\varepsilon \in E$, l'équation $x' = A_\varepsilon x$ n'a pas de solution 2π-périodique non nulle et on associe à A_ε un réel $\alpha_\varepsilon > 0$ comme α a été associé à A dans la partie classique. On travaille sous l'hypothèse suivante :

$$(\mathrm{H}_1) \qquad \sup_{\varepsilon\in E} K\alpha_\varepsilon < 1 \quad \text{et} \quad (\alpha_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{C}_M.$$

On cherche $(x_\varepsilon)_\varepsilon \in (\mathcal{X}_{2\pi,M}(\mathbb{R}))^n$ tel que pour tout $\varepsilon \in E$ on ait

$$\text{(III)} \qquad x'_\varepsilon = A_\varepsilon x_\varepsilon + \mu_\varepsilon f_\varepsilon + g(t, x_\varepsilon).$$

D'après les rappels, compte tenu de (4), on voit que (III) admet pour chaque ε de E une unique solution x_ε 2π-périodique. Il est clair que $x_\varepsilon \in (\mathcal{E}(\mathbb{R}))^n$. D'autre part, d'après (3),

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|x_\varepsilon(t)\| \le \frac{2\alpha_\varepsilon}{1 - K\alpha_\varepsilon} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\mu_\varepsilon f_\varepsilon(t) + g(t,0)\|.$$

Cette inégalité montre, d'après (H_1), que l'on a l'estimation d'ordre 0 pour $(x_\varepsilon)_\varepsilon$.

D'après l'égalité (III) et la condition (ii) il existe $C > 0$, $l > 0$ tels que

$$\|x'_\varepsilon(t)\| \le \|A_\varepsilon(t)\| \cdot \|x_\varepsilon(t)\| + |\mu_\varepsilon| \cdot \|f_\varepsilon(t)\| + C(1 + \|x_\varepsilon(t)\|)^l;$$

nous obtenons ainsi l'estimation d'ordre 1 à partir de celle d'ordre 0. Par ailleurs,

$$x''_\varepsilon = A'_\varepsilon x_\varepsilon + A_\varepsilon x'_\varepsilon + \mu_\varepsilon f'_\varepsilon + \frac{\partial g}{\partial t}(t, x_\varepsilon) + \sum_{j=1}^{n} \left(x_{\varepsilon j} \frac{\partial g}{\partial z_j}(t, x_\varepsilon) + \overline{x}_{\varepsilon j} \frac{\partial g}{\partial \overline{z}_j}(t, x_\varepsilon) \right)$$

et il existe, en vertu de (ii), deux constantes $C_1 > 0$ et $l_1 > 0$ telles que

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial t}(t, x_\varepsilon) \right\| \le C_1 (1 + \|x_\varepsilon\|)^{l_1};$$

on en déduit donc

$$\|x''_\varepsilon(t)\| \le \|A'_\varepsilon(t)\| \cdot \|x_\varepsilon(t)\| + \|A_\varepsilon(t)\| \cdot \|x'_\varepsilon(t)\| + \mu_\varepsilon \|f'_\varepsilon(t)\| + C_1(1 + \|x_\varepsilon(t)\|)^{l_1} + K\|x_\varepsilon(t)\|$$

et on a l'estimation d'ordre 2 à partir des précédentes.

On montre ainsi par récurrence sur m que $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|x_\varepsilon^{(m)}(t)\|$ est majoré par un polynôme en $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|x_\varepsilon(t)\|$ à coefficients ≥ 0 qui sont à croissance lente en $1/\varepsilon$, d'où $(x_\varepsilon)_\varepsilon \in (\mathcal{X}_{2\pi,M}(\mathbb{R}))^n$.

Maintenant, si $\alpha \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$ et si $(x, y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ alors

$$\begin{aligned} D^\alpha g(t, x) - D^\alpha g(t, y) = &\sum_{j=1}^{n} \int_0^1 (x_j - y_j) \frac{\partial(\partial^\alpha g)}{\partial z_j}(t, x + (x - y)\sigma)\, d\sigma \\ &+ \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 (\overline{x_j - y_j}) \frac{\partial(\partial^\alpha g)}{\partial \overline{z}_j}(t, x + (y - y)\sigma)\, d\sigma. \end{aligned}$$

D'après (ii) il existe des constantes $C > 0$ et $l > 0$ telles que

$$\|D^\alpha g(t, x) - D^\alpha g(t, y)\| \le \|x - y\| C(1 + \|x\| + \|x - y\|)^l.$$

On en déduit que si $(x_\varepsilon - y_\varepsilon)_\varepsilon \in (\mathcal{N}_{2\pi}(\mathbb{R}))^n$ alors il existe $(d_\varepsilon)_\varepsilon \in (\mathcal{N}_{2\pi}(\mathbb{R}))^n$ tel que $x'_\varepsilon = A_\varepsilon x_\varepsilon + \mu_\varepsilon f_\varepsilon + g(t, y_\varepsilon) + d_\varepsilon$, c'est-à-dire que $x_\varepsilon = \mathrm{cl}(x_\varepsilon)_\varepsilon$ est une solution de (II) dans $(\mathcal{G}_{2\pi}(\mathbb{R}))^n$.

Nous allons montrer sous l'hypothèse

$$(\mathrm{H}_2) \qquad \exists r > 0 \left(\int_0^{2\pi} \|A_\varepsilon(s)\|\, ds = O(-r \log \varepsilon) \text{ quand } \varepsilon \to 0 \right)$$

que si $y \in (\mathcal{G}_{2\pi}(\mathbb{R}))^n$ vérifie $y' = Ay + \mu f + g(t, y)$ et $y(0) = x(0)$ alors $y = x$.

Soit $(y_\varepsilon)_\varepsilon \in (\mathcal{X}_{2\pi,M}(\mathbb{R}))^n$ un représentant de y. De l'égalité $y' = Ay + \mu f + g(t, x)$ on déduit qu'il existe $(e_\varepsilon)_\varepsilon \in (\mathcal{N}_{2\pi}(\mathbb{R}))^n$ tel que

$$y'_\varepsilon(s) = A_\varepsilon(s) y_\varepsilon(s) + \mu_\varepsilon f_\varepsilon(s) + g(s, y_\varepsilon(s)) + e_\varepsilon(s),$$

ce qui donne $x'_\varepsilon(s) - y'_\varepsilon(s) = A_\varepsilon(s)(x_\varepsilon(s) - y_\varepsilon(s)) + g(s, x_\varepsilon(s)) - g(s, y_e(s)) - e_\varepsilon(s)$.

D'après (4), en intégrant de 0 à t avec $t \in [0, 2\pi]$, on obtient

$$\|x_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t)\| \le \|x_\varepsilon(0) - y_\varepsilon(0)\| + \int_0^{2\pi} \|e_\varepsilon(s)\|\, ds + \int_0^t (\|A_\varepsilon(s)\| + K)\|x_\varepsilon(s) - y_\varepsilon(s)\|\, ds.$$

L'application du lemme de Gronwall donne

$$\|x_\varepsilon(t)-y_\varepsilon(t)\| \le \Big(\|x_\varepsilon(0)-y_\varepsilon(0)\| + \int_0^{2\pi} \|e_\varepsilon(s)\|\,ds\Big) \exp\Big[\int_0^t (\|A_\varepsilon(s)\|+K)\,ds\Big].$$

Compte tenu de l'égalité $y(0)=x(0)$ et de l'hypothèse (H_2), cette dernière inégalité nous donne l'estimation d'ordre 0 sur $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|x_\varepsilon(t)-y_\varepsilon(t)\|$. Un simple raisonnement par récurrence montre alors que $(x_\varepsilon - y_\varepsilon)_\varepsilon \in (\mathcal{N}_{2\pi}(\mathbb{R}))^n$, c'est-à-dire $y=x$. ■

8.3. *Exemple d'E.D.P. dans* $\mathcal{G}(\mathbb{R}\times\mathcal{T}^n)$

8.3.1. *Introduction.* Nous considérons l'équation aux dérivées partielles

$$\text{(I)} \qquad P(t,D_t)u(t,x) - Q(t,D_x)u(t,x) = f(u)(t,x)$$

où $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathcal{T}^n$, $P(t,D_t)=\sum_{k=1}^m a_k(t)D_t^k$ avec $a_k\in\mathcal{E}(\mathbb{R})$ et $a_m=1$, $m\in\mathbb{N}^*$, et $Q(t,D_x)=\sum_{|\beta|\le l} b_\beta(t)D_x^\beta$ avec $b_\beta\in\mathcal{E}(\mathbb{R})$, $l\in\mathbb{N}$; u est un élément de $\mathcal{E}(\mathbb{R}\times\mathcal{T}^n)$.

Dans (I), f est une fonction définie sur $\mathcal{E}(\mathbb{R}\times\mathcal{T}^n)$ par la relation

$$f(u)(t,x) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} f_p(t,\widehat{u}_p(t))x^p$$

dans un sens qui sera précisé par la suite. Quant aux fonctions f_p, elles sont définies sur $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ et appartiennent à $\mathcal{E}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2)$ quand $\mathbb{C}$ est identifié à $\mathbb{R}^2$.

En calculant les coefficients de Fourier par rapport à la variable x et en posant $Q(t,ip)=Q_p(t)$ l'équation s'écrit alors

$$\text{(II)} \qquad P(t,D_t)\widehat{u}_p(t) = Q_p(t)\widehat{u}_p(t) + f_p(t,\widehat{u}_p(t)) \quad \text{pour tout } p\in\mathbb{Z}^n$$

ou encore sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \widehat{u}_p' \\ \widehat{u}_p'' \\ \vdots \\ \widehat{u}_p^{(m-1)} \\ \widehat{u}_p^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ Q_p & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{u}_p \\ \widehat{u}_p' \\ \vdots \\ \widehat{u}_p^{(m-2)} \\ \widehat{u}_p^{(m-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_p(t,\widehat{u}_p) \end{pmatrix}.$$

En posant $X_p=(\widehat{u}_p,\widehat{u}_p',\dots,\widehat{u}_p^{(m-1)})$, $F_p(t,X_p)=(0,0,\dots,f_p(t,\widehat{u}_p))$ et en désignant par A_p la matrice $m\times n$ du précédent système, l'équation (II) s'écrit

$$\text{(III)} \qquad X_p' = A_pX_p + F_p(t,X_p) \quad \text{pour tout } p\in\mathbb{Z}^n.$$

8.3.2. *Conditions sur la fonction* f. Nous commençons par deux conditions, d'autres seront fixées ultérieurement dans le cadre de l'étude avec des données périodiques. Dans ce qui suit la notation "$A\subset\subset B$" signifie que A est un compact de B.

(i) $\forall k\in\mathbb{N},\ \forall K'\subset\subset\mathbb{R},\ \forall D\subset\subset\mathbb{C},\ \forall (p,z)\in\mathbb{Z}^n\times D,$

$$\exists C_p>0,\ (C_p)_p\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n),\ \exists s\in\mathbb{N}^*\ \Big(\sup_{t\in K'}\Big|\frac{\partial^k f_p}{\partial t^k}(t,z)\Big| \le C_p|z|^s\Big).$$

(ii) $\forall (k,\alpha)\in\mathbb{N}\times(\mathbb{N}^2\backslash\{0\}),\ \forall K\subset\subset\mathbb{R}\times\mathbb{C},\ \forall p\in\mathbb{Z}^n,$

$$\exists C_p'>0,\ (C_p')_p\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)\ \Big(\sup_{(t,z)\in K}\Big|\frac{\partial^{k+|\alpha|}f_p}{\partial t^k\partial z^{\alpha_1}\partial\overline{z}^{\alpha_2}}(t,z)\Big| \le C_p'\Big).$$

PROPOSITION 8.2. *Si f vérifie les propriétés* (i) *et* (ii) *alors*

$\forall u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^1 \times \mathcal{T}^n),\ \forall k \in \mathbb{N},\ \forall K' \subset\subset \mathbb{R},\ \forall p \in \mathbb{Z}^n,$

$\exists R_p \in \mathbb{R}^+[X_1, \ldots, X_{k+1}]$ *à coefficients à croissance lente en* p, $R(0) = 0$

$$\left(\left\|\frac{d^k}{dt^k}(f_p(t, \widehat{u}_p(t)))\right\|_{K'}^{\infty} \le R_p(\|\widehat{u}_p\|_{K'}^{\infty}, \ldots \|\widehat{u}_p^{(k)}\|_{K'}^{\infty})\right).$$

Preuve. Soient u, k, K' et p comme dans l'énoncé. On a $\|\widehat{u}_p\|_{K'}^{\infty} \le \|u\|_{K' \times \mathcal{T}^n}^{\infty}$. Désignons par D le disque fermé de centre 0 et de rayon $\|u\|_{K' \times \mathcal{T}^n}^{\infty}$. Comme f vérifie (i), à k, K' et D on peut associer une suite $(C_p)_p \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$, avec $C_p > 0$, et $s \in \mathbb{N}^*$ tels que l'inégalité de la condition (i) soit vérifiée.

On en déduit que

$$\sup_{t \in K'} \left|\frac{\partial^k f_p}{\partial t^k}(t, \widehat{u}_p(t))\right| \le C_p(\|\widehat{u}_p\|_{K'}^{\infty})^s.$$

D'autre part, dans l'expression de $(d^k/dt^k)(f_p(\cdot, \widehat{u}_p(\cdot)))$ les termes autres que $(\partial^k f_p/\partial t^k)(\cdot, \widehat{u}_p(\cdot))$ sont des combinaisons linéaires des $(\partial^{j+|\alpha|} f_p/\partial t^j \partial z^{\alpha_1} \partial \overline{z}^{\alpha_2})(\cdot, u_p(\cdot))$ avec $(\alpha_1, \alpha_2) \ne 0$, affectés de coefficients polynomiaux et non constants par rapport aux variables $\widehat{u}_p^{(i)}(\cdot)$ où $1 \le i, j \le k$.

A chaque couple (j, α) et au compact $K' \times D$ on peut associer $(C'_{p,j}) \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ avec $C'_{p,j} > 0$ tel que

$$\sup_{t \in K'} \left|\frac{\partial^{j+|\alpha|} f_p}{\partial t^j \partial z^{\alpha_1} \partial \overline{z}^{\alpha_2}}(t, u_p(t))\right| \le C'_{p,j}.$$

Les deux dernières inégalités vérifiées par les dérivées partielles de f_p permettent de conclure. ∎

8.3.3. *Etude dans le cas de données périodiques.* Nous allons étudier le problème (I) sous les hypothèses suivantes : a_k, $b_\beta \in \mathcal{E}_{2\pi}(\mathbb{R})$ pour $0 \le k \le m-1$ et $0 \le |\beta| \le l$; les f_p sont 2π-périodiques en t et l'équation homogène $X' = A_p X$ n'a de solution 2π-périodique que la solution nulle, et cela pour tout $p \in \mathbb{Z}^n$.

On sait d'après les rappels qu'il existe alors pour chaque $p \in \mathbb{Z}^n$ une constante $\alpha_p > 0$ ne dépendant que de A_p telle que pour toute fonction g continue et 2π-périodique, l'équation $X' = A_p X + g$ admet une unique solution X 2π-périodique vérifiant $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|X(t)\| \le \alpha_p \sup_{t \in \mathbb{R}} \|g(t)\|$.

Dans cette partie les f_p vérifient les conditions supplémentaires suivantes :

$$\text{(iii)} \qquad M_p = \sup_{(t,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}} \left\{\left|\frac{\partial f_p}{\partial z}(t, z)\right| + \left|\frac{\partial f_p}{\partial \overline{z}}(t, z)\right|\right\} < \infty,$$

$$\text{(iv)} \qquad \sup_{p \in \mathbb{Z}^n} \alpha_p M_p < 1 \quad \text{et} \quad (\alpha_p \|f_p(\cdot, 0)\|_\infty)_{p \in \mathbb{Z}^n} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n).$$

On en déduit que l'équation (III) admet une unique solution X_p qui est 2π-périodique et telle que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|X_p(t)\| \le \frac{2\alpha_p}{1 - \alpha_p M_p} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F_p(t, 0)\|.$$

Compte tenu de la définition de X_p et de F_p, on peut écrire succéssivement

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|X_p(t)\| \le \frac{2\alpha_p}{1-\alpha_p M_p} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f_p(\cdot,0)\|_\infty,$$

$$\|\widehat{u}_p^{(k)}\|_\infty \le \frac{2\alpha_p}{1-\alpha_p M_p} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f_p(\cdot,0)\|_\infty \quad \text{pour tout } (k,p)\in\{1,\dots,m-1\}\times\mathbb{Z}^n.$$

En revenant à l'équation (II), que l'on peut écrire sous la forme

$$\widehat{u}_p^{(m)}(t) = -a_{m-1}(t)\widehat{u}_p^{(m-1)}(t) - \dots - a_1(t)\widehat{u}_p'(t) + Q_p(t)\widehat{u}_p(t) + f_p(t,\widehat{u}_p(t))$$

pour tout $p\in\mathbb{Z}^n$, on voit que

$$\|\widehat{u}_p^{(m)}\|_\infty \le \left[\frac{2\alpha_p(\|a_{m-1}\|_\infty + \dots + \|a_1\|_\infty + \|Q_p\|_\infty)}{1-\alpha_p M_p} + 1\right] \|f_p(\cdot,0)\|_\infty \quad \text{pour tout } p\in\mathbb{Z}^n.$$

Comme Q_p est un polynôme en p, alors $(\|Q_p^{(k)}\|_\infty)_p$ est à croissance lente pour tout $k\in\mathbb{N}$; on en déduit d'après (iv) que $(\|\widehat{u}_p^{(k)}\|_\infty)_p \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ pour tout $k\in\{0,\dots,m\}$ et en utilisant (ii) et (iii) on montre par récurrence que ceci est vrai pour tout $k\in\mathbb{N}$.

On en déduit que (I) admet une unique solution u dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}\times\mathcal{T}^n)$ qui est 2π-périodique en t.

8.3.4. *Etude du problème dans* $\mathcal{G}(\mathbb{R}\times\mathcal{T}^n)$. Nous étudions l'équation

$$\text{(I}'\text{)} \qquad \sum_{k=1}^m a_k D_t^k u - \sum_{|\beta|\le l} b_\beta D_x^\beta u = f(u)$$

où $a_k, b_\beta \in \mathcal{G}(\mathbb{R}\times\mathcal{T}^n)$ pour $1\le k\le m-1$, $|\beta|\le l$, $a_m = \mathrm{cl}(1)_\varepsilon$ et f est définie comme dans l'introduction et vérifie les conditions (i)–(iv). On cherche une solution u de ce problème dans $\mathcal{G}(\mathbb{R}\times\mathcal{T}^n)$ sous les hypothèses suivantes :

(H_1) Les a_k et les b_β ont des représentants $(a_{k\varepsilon})_\varepsilon$ et $(b_{\beta\varepsilon})_\varepsilon$ indépendant de x qui sont 2π-périodiques en t.

(H_2) Pour chaque $(\varepsilon,p)\in E\times\mathbb{Z}^n$ l'équation $X' = A_{\varepsilon p}X$ n'a pas de solution 2π-périodique non nulle, où on a posé $Q_{\varepsilon p}(t) = \sum_{|\beta|\le l}(ip)^\beta b_{\beta\varepsilon}(t)$ et

$$A_{\varepsilon p} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ Q_{\varepsilon p} & -a_{1\varepsilon} & -a_{2\varepsilon} & \dots & -a_{m-1\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

A chaque matrice $A_{\varepsilon p}$ on associe un réel $\alpha_{\varepsilon p} > 0$ comme pour A_p dans la partie précédente et on suppose que f vérifie la condition

$$\text{(iv}'\text{)} \qquad \sup_{(\varepsilon,p)\in E\times\mathbb{Z}^n} \alpha_{\varepsilon p} M_p < 1 \quad \text{et} \quad \exists(\psi_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}_M(\mathcal{T}^n),\ \forall p\in\mathbb{Z}^n\ (\alpha_{\varepsilon p}\|f_p(\cdot,0)\|_\infty = \widehat{\psi}_{\varepsilon p}).$$

Existence d'une solution de (I$'$). Montrons que $f(u)$ est bien défini pour $u\in\mathcal{G}(\mathbb{R}\times\mathcal{T}^n)$.

La Proposition 8.2 montre que si $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}_M^{1,n}$ (resp. $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}^{1,n}$) alors $(f(u_\varepsilon))_\varepsilon \in \mathcal{X}_M^{1,n}$ (resp. $(f(u_\varepsilon))_\varepsilon \in \mathcal{N}^{1,n}$), c'est-à-dire en quelque sorte $\mathcal{X}_M^{1,n}$ et $\mathcal{N}^{1,n}$ sont stables

par f. Par ailleurs, si $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}_M^{1,n}$ et $(w_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}^{1,n}$, en écrivant

$$f_p(t, \widehat{u}_{\varepsilon,p}(t) + \widehat{w}_{\varepsilon,p}(t)) - f_p(t, \widehat{u}_{\varepsilon,p}(t)) = \widehat{w}_{\varepsilon,p}(t) \int_0^1 \frac{\partial f_p}{\partial z}(t, \widehat{u}_{\varepsilon,p}(t) + \sigma \widehat{w}_{\varepsilon,p}(t))\, d\sigma$$
$$+ \overline{\widehat{w}_{\varepsilon,p}(t)} \int_0^1 \frac{\partial f_p}{\partial \overline{z}}(t, \widehat{u}_{\varepsilon,p}(t) + \sigma \widehat{w}_{\varepsilon,p}(t))\, d\sigma$$

et compte tenu de la Proposition 8.2 on voit que $(f(u_\varepsilon + w_\varepsilon) - f(u_\varepsilon))_\varepsilon \in \mathcal{N}^{1,n}$, ce qui montre que $f(u) = \mathrm{cl}(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est indépendant du représentant $(u_\varepsilon)_\varepsilon$.

En prenant les représentants dans (I′) on cherche $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ dans $\mathcal{X}_M^{1,n}$ tel que

$$\text{(II}'\text{)} \qquad \sum_{k=1}^{m} a_{k\varepsilon}(t) D_t^k u_\varepsilon(t,x) - \sum_{|\beta| \le l} b_{\beta\varepsilon}(t) D_x^\beta u_\varepsilon(t,x) = f(u_\varepsilon)(t,x).$$

De façon analogue à ce qui a été fait dans le cas classique et avec des notations similaires nous obtenons

$$\text{(III}'\text{)} \qquad X'_{\varepsilon p} = A_{\varepsilon p} X_{\varepsilon p} + F_p(t, X_{\varepsilon p}) \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{Z}^n.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ nous avons

$$Q_{\varepsilon p}^{(k)}(t) = \sum_{|\beta| \le l} (-ip)^\beta b_{\beta\varepsilon}^{(k)}(t) \quad \text{et} \quad \|Q_{\varepsilon p}^{(k)}\|_\infty \le \Big[\sum_{|\beta| \le l} \|b_{\beta\varepsilon}^{(k)}\|_\infty \Big] \sup_{|\beta| \le l} |p^\beta|,$$

ce qui donne l'inégalité

$$\|Q_{\varepsilon p}^{(k)}\|_\infty \le \Big[\sum_{|\beta| \le l} \|b_{\beta\varepsilon}^{(k)}\|_\infty \Big] (1 + \|p\|^2)^l \quad \text{pour tout } (p,k) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{N}.$$

D'après l'étude classique nous pouvons écrire

$$\forall k \in \{1, \ldots, m-1\} \ \Big(\|\widehat{u}_{\varepsilon p}^{(k)}\|_\infty \le \frac{2\alpha_{\varepsilon p}}{1 - \alpha_{\varepsilon p} M_p} \|f_p(\cdot, 0)\|_\infty \Big),$$
$$\|\widehat{u}_{\varepsilon p}^{(m)}\|_\infty \le \left[\frac{2\alpha_{\varepsilon p} \|a_{m-1\varepsilon}\|_\infty + \ldots + \|a_{1\varepsilon}\|_\infty + \|Q_{\varepsilon p}\|_\infty}{1 - \alpha_{\varepsilon p} M_p} + 1 \right] \|f_p(\cdot, 0)\|_\infty$$
$$\text{pour tout } p \in \mathbb{Z}^n.$$

On en donc déduit, en tenant compte de (iv′), que

$$\forall k \in \{0, \ldots, m\},\ \forall s \in \mathbb{N},\ \exists r > 0,\ \exists \eta > 0$$
$$(\|\widehat{u}_{\varepsilon p}^{(k)}\|_\infty \le \varepsilon^{-r} (1 + \|p\|^2)^{-s} \text{ pour tout } (\varepsilon, p) \in]0, \eta[\times \mathbb{Z}^n).$$

En utilisant la Proposition 8.2 et l'inégalité vérifiée par $\|Q_{\varepsilon p}^{(k)}\|_\infty$, on montre que la propriété précédente est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}_M^{1,n}$. Soit $(w_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}^{1,n}$; on a

$$f_p(t, \widehat{u}_{\varepsilon,p}(t) + \widehat{w}_{\varepsilon,p}(t)) = f_p(t, \widehat{u}_{\varepsilon,p}(t)) + w_{\varepsilon,p}(t) \int_0^1 \frac{\partial f_p}{\partial z}(t, \widehat{u}_{\varepsilon,p}(t) + \sigma \widehat{w}_{\varepsilon,p}(t))\, d\sigma$$
$$+ \overline{w_{\varepsilon,p}(t)} \int_0^1 \frac{\partial f_p}{\partial \overline{z}}(t, \widehat{u}_{\varepsilon,p}(t) + \sigma \widehat{w}_{\varepsilon,p}(t))\, d\sigma.$$

La condition (ii) montre alors que $f(u_\varepsilon + w_\varepsilon) = f(u_\varepsilon) + c_\varepsilon$ avec $(c_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}^{1,n}$, c'est-à-dire que $u = \mathrm{cl}(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est donc solution de (I′). Par ailleurs, il est clair que cette solution est indépendante des représentants $(a_{k\varepsilon})_\varepsilon, (b_{\beta\varepsilon})_\varepsilon$.

Etude de l'unicité de la solution. Soit v une solution de (I′); il existe alors $(d_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}^{1,n}$ tel que

$$[P(D_t) - Q(D_x)](v_\varepsilon - u_\varepsilon) = f(v_\varepsilon) - f(u_\varepsilon) + d_\varepsilon;$$

en posant $Y_{\varepsilon,p} = (\widehat{v}_{\varepsilon,p}, \ldots, \widehat{v}_{\varepsilon,p}^{(m-1)})$ et $D_{\varepsilon,p} = (0, \ldots, \widehat{d}_{\varepsilon,p})$ on peut donc écrire

$$(Y_{\varepsilon,p} - X_{\varepsilon,p})' = A_{\varepsilon,p}(Y_{\varepsilon,p} - X_{\varepsilon,p}) + F_p(\cdot, Y_{\varepsilon,p}(\cdot)) - F_p(\cdot, X_{\varepsilon,p}(\cdot)) + D_{\varepsilon,p}$$

et en utilisant l'inégalité $\|F_p(\cdot, Y_{\varepsilon,p}(\cdot)) - F_p(\cdot, X_{\varepsilon,p}(\cdot))\| \le M_p \|Y_{\varepsilon,p} - X_{\varepsilon,p}\|$ on a, pour $t > 0$,

$$\|Y_{\varepsilon,p}(t) - X_{\varepsilon,p}(t)\| \le \|Y_{\varepsilon,p}(0) - X_{\varepsilon,p}(0)\| + \int_0^t |\widehat{d}_{\varepsilon,p}(\xi)|\, d\xi$$
$$+ \int_0^t (\|A_{\varepsilon,p}(\xi)\| + M_p)\|Y_{\varepsilon,p}(\xi) - X_{\varepsilon,p}(\xi)\|\, d\xi.$$

En posant $K' = [-a, a]$ avec $a > 0$ et utilisant l'inégalité de Gronwall on obtient

$$\sup_{t \in K'} \|Y_{\varepsilon,p} - X_{\varepsilon,p}\| \le [2a\|\widehat{d}_{\varepsilon,p}\|_{K'}^\infty + \|Y_{\varepsilon,p}(0) - X_{\varepsilon,p}(0)\|] \exp\Big[\int_{-a}^{a} (\|A_{\varepsilon,p}(\xi)\| + M_p)\, d\xi\Big].$$

Nous avons $\|A_{\varepsilon,p}(\xi)\| = \sup\{1, \sum_{k=1}^{m-1} |a_{k\varepsilon}(\xi)| + |Q_{\varepsilon p}(\xi)|\}$. Comme $|Q_{\varepsilon p}(\xi)|$ est à croissance polynomiale en p, on ne peut, à partir de l'inégalité précédente, déduire que $u = v$. Supposons que $b_\beta = 0$ si $\beta \ne 0$; $A_{\varepsilon,p}$ est alors indépendant de p, posons donc $A_{\varepsilon,p} = A_\varepsilon$ et faisons les hypothèses supplémentaires suivantes :

(H$_3$) $$\forall a > 0,\ \exists r > 0 \Big(\int_{-a}^{a} \|A_\varepsilon(\xi)\|\, d\xi = O(-r \ln \varepsilon) \text{ quand } \varepsilon \to 0\Big).$$

(H$_4$) $$\exists C > 0\ (M_p \le C \ln(1 + \|p\|^2)).$$

(H$_5$) $$D_t^k (u - v)|_{\{t=0\}} = 0 \quad \text{pour } 0 \le k \le m - 1.$$

Les hypothèses (H$_3$) et (H$_4$) impliquent que la suite double de terme général $\exp[\int_{-a}^{a} (\|A_\varepsilon(\xi)\| + M_p)\, d\xi]$ est modérée par rapport à ε et à croissance lente par rapport à p, l'hypothése (H$_5$) entraîne que $\mathrm{cl}(Y_{\varepsilon,p}(0) - X_{\varepsilon,p}(0))_\varepsilon = 0$, d'où la majoration d'ordre 0 pour $Y_{\varepsilon,p} - X_{\varepsilon,p}$. Les autres majorations s'obtiennent par récurrence sur l'ordre de dérivation. Finalement, sous les hypothéses (H$_3$) et (H$_4$), si deux solutions u et v de (I′) vérifient (H$_5$) alors on a $u = v$.

8.4. *Problème de Goursat à données généralisées périodiques*

8.4.1. *Position du problème.* On rappelle que $I = [-\pi, \pi]$. Soit f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$ des variables x, y, z, vérifiant les conditions suivantes :

(H$_0$) f est 2π-périodique en x et y, impaire par rapport à chacune de ces deux variables.

(H$_1$) $$k = \left\|\frac{\partial f}{\partial z}\right\|_\infty = \sup_{(x,y,z) \in I^2 \times \mathbb{R}} \left|\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\right| < \infty.$$

(H$_2$) $\quad \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3,\ \exists c > 0,\ \exists m \geq 0,\ \forall (x, y, z) \in I^2 \times \mathbb{R},$

$$\left(\left| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2} \partial z^{\alpha_3}}(x, y, z) \right| \leq c(1 + |z|)^m. \right)$$

On prend deux fonctions ϕ et ψ dans $\widetilde{\mathcal{G}}_{2\pi}(\mathbb{R})$ admettant chacune un représentant pair et telles que $\phi(0) = \psi(0)$.

On se propose de résoudre dans $\widetilde{\mathcal{G}}_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ le problème suivant dit de Goursat :

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(\cdot, \cdot, u), \qquad u|_{\{y=0\}} = \phi, \qquad u|_{\{x=0\}} = \psi$$

(voir [39]).

8.4.2. *Etude du problème dans le cadre classique*

PROPOSITION 8.3. *Si ϕ, ψ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques et paires alors* (I) *admet une solution unique dans $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ qui est paire par rapport à chacune des variables.*

Preuve. *Existence d'une solution.* Posons $u_0(x, y) = \phi(x) + \psi(y) - \phi(0)$. On voit que u_0 est une fonction de classe C^∞ qui est 2π-périodique et paire par rapport à chacune des variables. Définissons une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de fonctions sur $\mathbb{R}^2$ pour $n \geq 1$ par

$$u_n(x, y) = u_0(x, y) + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta, u_{n-1}(\xi, \eta))\, d\xi\, d\eta.$$

Soit $a > 0$, $K = [-a, a] \times [-a, a]$, soit $(x, y) \in K$ et R_{xy} le pavé de sommets $(0, 0), (x, 0), (x, y), (0, y)$. Soit $(\xi, \eta) \in R_{xy}$. On a

$$f(\xi, \eta, t) - f(\xi, \eta, t') = (t - t') \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(\xi, \eta, t' + \sigma(t - t'))\, d\sigma,$$

d'où, d'après (H$_1$),

$$|f(\xi, \eta, u_0(\xi, \eta))| \leq |f(\xi, \eta, 0)| + k\|u_0\|_\infty^{R_{xy}}.$$

En posant $v_n = u_n - u_{n-1}$ et $c(K) = \|f(\cdot, \cdot, 0)\|_\infty + k\|u_0\|_\infty^K$ on obtient donc

$$|v_1(x, y)| \leq c(K)|xy|.$$

Comme $|v_2(x, y)| \leq k|\int_0^x \int_0^y |v_1(\xi, \eta)|\, d\xi\, d\eta|$ on en déduit que

$$|v_2(x, y)| \leq kc(K)\frac{|xy|^2}{4}.$$

En raisonnant par récurrence on obtient, pour $n \geq 1$,

$$|v_n(x, y)| \leq c(K)\frac{k^{n-1}|xy|^n}{(n!)^2}, \qquad \|v_n\|_\infty^K \leq c(K)\frac{k^{n-1}a^{2n}}{(n!)^2},$$

ce qui montre que la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge uniformément sur K et par suite sur tout compact de $\mathbb{R}^2$; il en est donc de même pour la suite $(u_n)_{n\geq 0}$. On en déduit que si $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ alors

$$u(x, y) = u_0(x, y) + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta, u(\xi, \eta))\, d\xi\, d\eta,$$

ce qui entraîne que u est une solution de (I) dans $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Nous allons montrer par récurrence sur n que u_n est 2π-périodique et paire par rapport à chacune des variables.

La propriété est vraie pour u_0; supposons qu'elle le soit pour u_{n-1} avec $n \geq 1$. D'après (H_0) la fonction $(\xi,\eta) \mapsto f(\xi,\eta,u_{n-1}(\xi,\eta))$ est impaire par rapport à ξ et η. On en déduit que $(x,y) \mapsto \int_0^x \int_0^y f(\xi,\eta,u_{n-1}(\xi,\eta))\,d\xi\,d\eta$ est paire par rapport à chaque variable, par conséquent il en est de même pour u_n. On a

$$\begin{aligned} u_n(x+2\pi,y) - u_n(x,y) &= \int_x^{x+2\pi}\int_0^y f(\xi,\eta,u_{n-1}(\xi,\eta))\,d\xi\,d\eta \\ &= \int_0^y\int_x^{x+2\pi} f(\xi,\eta,u_{n-1}(\xi,\eta))\,d\xi\,d\eta. \end{aligned}$$

Compte tenu de (H_0), pour tout η, $\xi \mapsto f(\xi,\eta,u_{n-1}(\xi,\eta))$ est 2π-périodique et impaire, d'où

$$\int_x^{x+2\pi} f(\xi,\eta,u_{n-1}(\xi,\eta))\,d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi,\eta,u_{n-1}(\xi,\eta))\,d\xi = 0, \qquad u_n(x+2\pi,y) = u_n(x,y).$$

On montrerait de même que $u_n(x,y+2\pi) = u_n(x,y)$, d'où la 2π-périodicité de u_n.

On en déduit que u est une solution de (I) dans $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ qui est paire par rapport à chaque variable.

Unicité de la solution. On garde les notations précédentes; soit v une solution de (I), posons $w = v - u$. De l'égalité

$$v(x,y) = u_0(x,y) + \int_0^x\int_0^y f(\xi,\eta,v(\xi,\eta))\,d\xi\,d\eta$$

on obtient $|w(x,y)| \leq k|\int_0^x\int_0^y |w(\xi,\eta)|\,d\xi\,d\eta|$, d'où, pour $(x,y) \in K$,

$$|w(x,y)| \leq ka\Big|\int_0^x \sup_{\eta\in[-a,a]} |w(\xi,\eta)|\,d\xi\Big|.$$

En posant $g(x) = \sup_{\eta\in[-a,a]} |w(x,\eta)|$ pour $x \in [-a,a]$ on obtient $g(x) \leq ka|\int_0^x g(\xi)|\,d\xi$; on en déduit par application du lemme de Gronwall que $g = 0$, d'où $w = 0$ sur K. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, on a donc $w = 0$ et l'unicité de la solution u de (I). ∎

8.4.3. *Etude du problème dans* $\widetilde{\mathcal{G}}_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$

PROPOSITION 8.4. *Avec les conditions de la première partie le problème* (I) *admet une solution unique dans* $\widetilde{\mathcal{G}}_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$.

Preuve. *Existence de la solution.* Choisissons des représentants $(\phi_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\psi_\varepsilon)_\varepsilon$ de ϕ et ψ respectivement tels que $\phi_\varepsilon(0) = \psi_\varepsilon(0)$ pour tout $\varepsilon \in]0,1[$. D'après l'étude précédente, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$ il existe u_ε unique dans $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ telle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x\partial y}(x,y) = f(x,y,u_\varepsilon(x,y)), \qquad u_\varepsilon(x,0) = \phi_\varepsilon(x), \qquad u_\varepsilon(0,y) = \psi_\varepsilon(y).$$

Nous allons montrer que $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \widetilde{\mathcal{X}}_{2\pi,M}(\mathbb{R}^2)$. Posons, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} u_{0\varepsilon} &= \phi_\varepsilon + \psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon(0), \\ u_{n\varepsilon} &= u_{0\varepsilon} + \int_0^x\int_0^y f(\xi,\eta,u_{n-1}(\xi,\eta))\,d\xi\,d\eta, \\ v_{n\varepsilon} &= u_{n\varepsilon} - u_{n-1\varepsilon}, \\ c_\varepsilon &= \|f(\cdot,\cdot,0)\|_\infty + k\|u_{0\varepsilon}\|_\infty. \end{aligned}$$

D'après les calculs de la deuxième partie on a $\|v_{n\varepsilon}\|_\infty \leq c_\varepsilon k^{n-1}\pi^{2n}/(n!)^2$, compte tenu de l'égalité $u_{n\varepsilon} = u_{0\varepsilon} + v_{1\varepsilon} + \ldots + v_{n\varepsilon}$. Si on pose $s = \sum_{n\geq 1} k^{n-1}\pi^{2n}/(n!)^2$ on obtient alors

$$\|u_\varepsilon\|_\infty \leq \|u_{0\varepsilon}\|_\infty + c_\varepsilon s,$$

ce qui est la majoration d'ordre 0 car $(\phi_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\psi_\varepsilon)_\varepsilon$ étant dans $\widetilde{\mathcal{X}}_{2\pi,M}(\mathbb{R})$ on a $(\|u_{0\varepsilon}\|_\infty)_\varepsilon$ et $(c_\varepsilon)_\varepsilon$ qui sont modérées.

En écrivant $u_\varepsilon(x,y) = u_{0\varepsilon}(x,y) + \int_0^x\int_0^y f(\xi,\eta,u_\varepsilon(\xi,\eta))\,d\xi\,d\eta$ on obtient les autres majorations par récurrence.

Montrons maintenant que $u = \mathrm{cl}(u_\varepsilon)_\varepsilon$ dans $\widetilde{\mathcal{G}}_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ est solution de (I). Soit $(d_\varepsilon)_\varepsilon \in \widetilde{\mathcal{N}}_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$. On a

$$\frac{\partial^2(u_\varepsilon + d_\varepsilon)}{\partial x\partial y} - f(\cdot,\cdot,u_\varepsilon + d_\varepsilon) = \frac{\partial^2 d_\varepsilon}{\partial x\partial y} - d_\varepsilon\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(\cdot,\cdot,u_\varepsilon + \sigma d_\varepsilon)\,d\sigma.$$

Comme

$$\left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(\cdot,\cdot,u_\varepsilon + \sigma d_\varepsilon)\,d\sigma\right)_\varepsilon \in \widetilde{\mathcal{X}}_{2\pi,M}(\mathbb{R})$$

à cause de (H_2) et du fait que $(u_\varepsilon + d_\varepsilon)_\varepsilon \in \widetilde{\mathcal{X}}_{2\pi,M}(\mathbb{R}^2)$, on a alors

$$\left(\frac{\partial^2(u_\varepsilon + d_\varepsilon)}{\partial x\partial y} - f(\cdot,\cdot,u_\varepsilon + d_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in \widetilde{\mathcal{N}}_{2\pi}(\mathbb{R}^2),$$

ce qui est le résultat annoncé.

Unicité de la solution. Soit v une solution de (I) et $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ un représentant de v; posons $w_\varepsilon = v_\varepsilon - u_\varepsilon$. Il existe alors $(q_\varepsilon)_\varepsilon \in \widetilde{\mathcal{N}}_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$, $(r_\varepsilon)_\varepsilon$, $(s_\varepsilon)_\varepsilon \in \widetilde{\mathcal{N}}_{2\pi}(\mathbb{R})$ tels que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on ait

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x\partial y}(x,y) = f(x,y,v_\varepsilon(x,y)) + q_\varepsilon(x,y), \\ v_\varepsilon(x,0) = \phi_\varepsilon(x) + r_\varepsilon(x), \qquad v_\varepsilon(0,y) = \psi_\varepsilon(y) + s_\varepsilon(y). \end{gathered}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(x,y) = {} & u_{0\varepsilon}(x,y) + r_\varepsilon(x) + s_\varepsilon(y) - r_\varepsilon(0) \\ & + \int_0^x\int_0^y f(\xi,\eta,v_\varepsilon(\xi,\eta))\,d\xi\,d\eta + \int_0^x\int_0^y q_\varepsilon(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta; \end{aligned}$$

on a alors

$$w_\varepsilon(x,y) = \int_0^x\int_0^y [f(\xi,\eta,v_\varepsilon(\xi,\eta)) - f(\xi,\eta,u_\varepsilon(\xi,\eta))]\,d\xi\,d\eta + R_\varepsilon(x,y)$$

avec $(R_\varepsilon)_\varepsilon \in \widetilde{\mathcal{N}}_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$, ce qui donne

$$(*) \qquad w_\varepsilon(x,y) = \int_0^x\int_0^y \left[w_\varepsilon \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(\xi,\eta,u_\varepsilon + \sigma w_\varepsilon)\,d\sigma\right] d\xi\,d\eta + R_\varepsilon(x,y).$$

On garde les notations précédentes et on pose $g_\varepsilon(x) = \sup_{\eta\in[-\pi,\pi]} |w_\varepsilon(x,\eta)|$.

Nous avons $|w_\varepsilon(x,y)| \le k|\int_0^x\int_0^y |w_\varepsilon(\xi,\eta)|\,d\xi\,d\eta| + \|R_\varepsilon\|_\infty$, ce qui donne l'inégalité

$$g_\varepsilon(x) \le k\pi\Big|\int_0^x g_\varepsilon(\xi)\,d\xi\Big| + \|R_\varepsilon\|_\infty.$$

En appliquant le lemme de Gronwall il vient que $g_\varepsilon(x) \le \|R_\varepsilon\|_\infty \exp(\pi^2 k)$, d'où

$$\|w_\varepsilon\|_\infty \le \|R_\varepsilon\|_\infty \exp(\pi^2 k),$$

ce qui est l'estimation d'ordre 0.

En partant de l'égalité $(*)$, un simple raisonnement par récurrence permet d'obtenir les estimations d'ordre ≥ 1 à partir de celle d'ordre 0 et de la condition (H_2), ce qui donne l'unicité de la solution u dans $\widetilde{\mathcal{G}}_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$. ∎

8.4.4. *Etude de certains cas linéaires.* On suppose dans toute cette partie que f est de la forme $f(x,y,z) = f_1(x)f_2(y)z$ où f_1 et f_2 sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, impaires et 2π-périodiques. Le système (I) s'écrit donc

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = (f_1\otimes f_2)u, \qquad u_{|\{y=0\}} = \phi, \qquad u_{|\{x=0\}} = \psi.$$

Forme explicite de la solution. En cherchant une solution de $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = (f_1\otimes f_2)u$ de la forme $h\circ(\theta_1\otimes\theta_2)$ où h,θ_1 et θ_2 sont des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, on trouve les conditions

$$\theta_1' = f_1, \quad \theta_2' = f_2 \quad \text{et} \quad th''(t) + h'(t) - h(t) = 0.$$

Si on prend $\theta_1(x) = \int_0^x f_1(\xi)\,d\xi$, $\theta_2(y) = \int_0^y f_2(\eta)\,d\eta$ et $h(0) = 1$ alors h est solution du problème différentiel

$$th''(t) + h'(t) - h(t) = 0, \qquad h(0) = 1,$$

qui admet une unique solution développable en série entière et donnée par

$$h(t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{(n!)^2}.$$

On vérifie alors dans le cas où les données sont C^∞ que la solution de (II) est

$$u(x,y) = \phi(0)h(\theta_1(x)\theta_2(y)) + \int_0^x \phi'(\xi)h[\theta_2(y)(\theta_1(x)-\theta_1(\xi))]\,d\xi$$
$$+ \int_0^y \psi'(\eta)h[\theta_1(x)(\theta_2(y)-\theta_2(\eta))]\,d\eta.$$

En passant aux représentants et en faisant des intégrations par parties on obtient

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x,y) &= \phi_\varepsilon(x) + \psi_\varepsilon(y) - \phi_\varepsilon(0)h(\theta_1(x)\theta_2(y)) \\ &\quad + \theta_2(y)\int_0^x \phi_\varepsilon(\xi)f_1(\xi)h'[\theta_2(y)(\theta_1(x)-\theta_1(\xi))]\,d\xi \\ &\quad + \theta_1(x)\int_0^y \psi_\varepsilon(\eta)f_2(\eta)h'[\theta_1(x)(\theta_2(y)-\theta_2(\eta))]\,d\eta. \end{aligned}$$

Cas où $\phi = \sum_{p\in\mathbb{Z}} e^{ipx}$ et $\psi = \sum_{p\in\mathbb{Z}} e^{ipy}$. Dans ce cas nous prenons $\phi_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon(e^{ix})$ et $\psi_\varepsilon(y) = \varphi_\varepsilon(e^{iy})$. Dans la deuxième expression obtenue pour $u_\varepsilon(x,y)$ nous étudions la première intégrale, l'étude étant analogue pour la deuxième. Nous posons $\nu(x,y,\xi) = \theta_2(y)(\theta_1(x)-\theta_1(\xi))$ pour $(x,y)\in I^2$. Comme f_1 est impaire, 2π-périodique et de classe C^∞ alors il existe $(a_n)_n$ à décroissance rapide telle que $f_1(\xi) = \sum_{n=1}^\infty a_n \sin n\xi$.

D'autre part,

$$\phi_\varepsilon(\xi) = \frac{\sin([1/\varepsilon]+1)\xi}{\sin(\xi/2)} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\sin n\xi}{\sin(\xi/2)}\right| \le 2n,$$

d'où $|\phi_\varepsilon(\xi)\sin n\xi| \le 2n$. Comme $(a_n)_n$ est à décroissance rapide, la série $\sum_{n=1}^\infty 2n|a_n|$ est donc convergente; en posant $\varrho = \sup_{(x,y,\xi)\in I^3} |h'[\nu(x,y,\xi)]|$ on obtient alors

$$|\phi_\varepsilon(\xi)a_n \sin\xi| \cdot |h'[\nu(x,y,\xi)]| \le 2\varrho n|a_n|,$$

ce qui montre que la série $\sum_{n=1}^\infty \phi_\varepsilon(\xi)a_n \sin\xi\, h'[\nu(x,y,\xi)]$ est également convergente et ce uniformément par rapport à ξ. On en déduit que

$$\int_0^x \phi_\varepsilon(\xi)f_1(\xi)h'[\nu(x,y,\xi)]\,d\xi = \sum_{n=1}^\infty a_n \int_0^x \phi_\varepsilon(\xi)\sin n\xi\, h'[\nu(x,y,\xi)]\,d\xi.$$

D'un autre côté, l'inégalité $|\int_0^x \phi_\varepsilon(\xi)\sin n\xi\, h'[\nu(x,y,\xi)]\,d\xi| \le 2\varrho n|x|$ montre que la dernière série converge uniformément par rapport à ε, d'où

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^x \phi_\varepsilon(\xi)f_1(\xi)h'[\nu(x,y,\xi)]\,d\xi = \sum_{n=1}^\infty a_n\Big(\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^x \phi_\varepsilon(\xi)\sin n\xi\, h'[\nu(x,y,\xi)]\,d\xi\Big).$$

Comme

$$\phi_\varepsilon(\xi)\sin n\xi\, h'[\nu(x,y,\xi)] = \sin\left(\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+\frac{1}{2}\right)\xi \cdot \frac{\sin n\xi}{\sin\frac{\xi}{2}} h'[\nu(x,y,\xi)],$$

d'après le théorème de Riemann–Lebesgue on a $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^x \phi_\varepsilon(\xi)f_1(\xi)h'[\nu(x,y,\xi)]\,d\xi = 0$. Par ailleurs, comme

$$\left|\theta_2(y)\int_0^x \phi_\varepsilon(\xi)f_1(\xi)h'[\nu(x,y,\xi)]\,d\xi\right| \le \Big[2\varrho\sum_{n=1}^\infty n|a_n|\Big]|x\theta_2(y)|$$

alors en appliquant le théorème de la convergence dominée on voit que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^x \phi_\varepsilon(\xi)f_1(\xi)h'[\nu(x,y,\xi)]\,d\xi = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R}^2).$$

Soit 1_x (resp. 1_y) la distribution associée à la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$ de la variable x (resp. de la variable y). On pose $T = \delta_x \otimes 1_y + 1_x \otimes \delta_y$. Alors, T est un élément

de $\mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ et on a $(T*\varphi_{2,\varepsilon})(x,y)=\varphi_\varepsilon(e^{ix})+\varphi_\varepsilon(e^{iy})$ où $\varphi_{2,\varepsilon}(e^{ix},e^{iy})=\sum_{p,q\in\mathbb{Z}} e^{i(px+qy)}$, d'où, compte tenu de l'égalité $\phi_\varepsilon(0)=\varphi_\varepsilon(1)$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[u_\varepsilon+\varphi_\varepsilon(1)h\circ(\theta_1\otimes\theta_2)]=T \quad \text{dans } \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R}^2).$$

Autrement dit, dans $\widetilde{\mathcal{G}}'_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ on a l'association

$$u\approx\delta_x\otimes 1_y+1_x\otimes\delta_y-\mathrm{cl}(\varphi_\varepsilon(1))_\varepsilon[h\circ(\theta_1\otimes\theta_2)].$$

On voit donc que u n'est pas associée à une distribution même si le problème est linéaire et les données distributionnelles; ce phénomène est dû à la présence des restrictions.

Remarque. Si les données ϕ et ψ sont des distributions vérifiant $\phi(0)=\psi(0)=0$ alors on montre sur un exemple non périodique que la solution u est associée à une distribution (cf. [23]).

Exemple 8.5. On prend $f=0$. Le problème de Goursat (II) devient alors

$$\text{(i)}\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,\quad u|_{\{y=0\}}=\delta_x,\quad u|_{\{x=0\}}=\delta_y.$$

Il est clair que la solution de ce problème est la fonction $u\in\widetilde{\mathcal{G}}_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ définie par $u=\mathrm{cl}(u_\varepsilon)_\varepsilon$ avec

$$u_\varepsilon=\phi_\varepsilon\otimes 1_y+1_x\otimes\psi_\varepsilon-\varphi_\varepsilon(1).$$

Ici nous avons l'égalité $u=\delta_x\otimes 1_y+1_x\otimes\delta_y-\mathrm{cl}(\varphi_\varepsilon(1))_\varepsilon$. u est la somme d'une distribution et d'une constante généralisée pure, elle ne peut donc pas être associée à une distribution.

8.4.5. *Etude de certains cas non linéaires.* On se place dans le cas où $f(x,y,z)=f_1(x)f_2(y)z+g(x,y,z)$ avec f_1, f_2 comme dans le cas linéaire et g vérifiant les hypothèses (H_0)–(H_2). On ajoute les conditions supplémentaires suivantes :

$$(\mathrm{H}_3)\qquad \forall(x,y)\in I^2\ (\lim_{|z|\to\infty} g(x,y,z)=0).$$

$$(\mathrm{H}_4)\qquad \mathrm{mes}\{(x,y)\in I^2: h(\theta_1(x)\theta_2(y))=0\}=0.$$

Remarque. Comme $h(t)=J_0\big(2\sqrt{-t}\,\big)$ pour $t<0$ où J_0 est la fonction de Bessel d'ordre 0 alors $h^{-1}(\{0\})$ est non vide; de plus, $h^{-1}(\{0\})$ étant dénombrable, (H_4) peut s'écrire

$$\forall\lambda\in\,]-\infty,-1[\ \ (h(\lambda)=0\Rightarrow \mathrm{mes}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\theta_1(x)\theta_2(y)=\lambda\}=0).$$

On étudie donc le problème (I) sous la forme

$$\text{(III)}\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(f_1\otimes f_2)u+g(\cdot,\cdot,u),\quad u|_{\{y=0\}}=\phi,\quad u|_{\{x=0\}}=\psi.$$

Désignons par v_ε et u_ε les solutions respectives des systèmes (II) et (III) quand ϕ et ψ sont remplacées respectivement par ϕ_ε et ψ_ε; puis, posons $w_\varepsilon=u_\varepsilon-v_\varepsilon$. Nous avons alors

$$\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial x\partial y}=(f_1\otimes f_2)w_\varepsilon+g(\cdot,\cdot,u_\varepsilon),\quad w_\varepsilon|_{\{y=0\}}=0,\quad w_\varepsilon|_{\{x=0\}}=0,$$

d'où $w_\varepsilon(x,y)=\int_0^x\int_0^y f_1(\xi)f_2(\eta)w_\varepsilon(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta+\int_0^x\int_0^y g(\xi,\eta,u_\varepsilon(\xi,\eta))\,d\xi\,d\eta$.

En posant $g_\varepsilon(x) = \sup_{\eta\in I} w_\varepsilon(x,\eta)$ pour $x \in I$ nous avons

$$g_\varepsilon(x) \le \pi\|f_1\|_\infty\|f_2\|_\infty\Big|\int_0^x g_\varepsilon(\xi)\,d\xi\Big| + \pi^2\|g\|_\infty$$

et en appliquant le lemme de Gronwall il s'en suit

$$(***) \qquad \|w_\varepsilon\|_\infty \le \pi^2\|g\|_\infty \exp(\pi^2\|f_1\|_\infty\|f_2\|_\infty).$$

D'après l'étude du cas linéaire il existe $(\mu_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}_{2\pi,M}(\mathbb{R}^2)$ telle que pour tout $(x,y) \in I^2$ on ait $\lim_{\varepsilon\to 0}\mu_\varepsilon(x,y) = 0$ et

$$v_\varepsilon + \varphi_\varepsilon(1)[h\circ(\theta_1\otimes\theta_2)] = \phi_\varepsilon\otimes 1_y + 1_x\otimes\psi_\varepsilon + \mu_\varepsilon.$$

Posons $F = \{(x,y)\in I^2 : xy \ne 0,\ h(\theta_1(x)\theta_2(y)) \ne 0\}$; de l'hypothèse ($\mathrm{H}_4$) on déduit que le complémentaire de F dans I^2 est de mesure nulle.

D'autre part, si $(x,y)\in F$ on a $|\phi_\varepsilon(x)| \le \frac{1}{|\sin(x/2)|}$ et $|\psi_\varepsilon(y)| \le \frac{1}{|\sin(y/2)|}$, d'où

$$|v_\varepsilon(x,y) + \varphi_\varepsilon(1)h(\theta_1(x)\theta_2(y))| \le \frac{1}{|\sin(x/2)|} + \frac{1}{|\sin(y/2)|} + |\mu_\varepsilon(x,y)|.$$

Comme $\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon(1) = \infty$, $\lim_{\varepsilon\to 0}\mu_\varepsilon(x,y) = 0$ et $h(\theta_1(x)\theta_2(y)) \ne 0$ on a alors $\lim_{\varepsilon\to 0}|v_\varepsilon(x,y)| = \infty$.

Cette dernière égalité montre que $\lim_{\varepsilon\to 0}|v_\varepsilon| = \infty$ p.p. dans I^2. On en déduit alors en vertu de $(***)$ que $\lim_{\varepsilon\to 0}|u_\varepsilon| = \infty$ p.p. dans I^2, d'où, d'après (H_3), $\lim_{\varepsilon\to 0} g(\cdot,\cdot,u_\varepsilon) = 0$ p.p. dans I^2. Comme g est bornée le théorème de la convergence dominée entraîne que $\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_\varepsilon = 0$ où $\lambda_\varepsilon = \iint_{I_2}|g(\xi,\eta,u_\varepsilon(\xi,\eta))|\,d\xi\,d\eta$. D'autre part, il est clair qu'on peut remplacer $\pi^2\|g\|_\infty$ par λ_ε dans $(***)$, d'où $\lim_{\varepsilon\to 0} w_\varepsilon = 0$ dans $C_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$, donc dans $\mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$.

Par conséquent, u et v sont associées, on a donc aussi dans ce type de cas non linéaire la décomposition faible analogue au cas linéaire précédent :

$$u \approx \delta_x\otimes 1_y + 1_x\otimes\delta_y - \mathrm{cl}(\varphi_\varepsilon(1))_\varepsilon[h\circ(\theta_1\otimes\theta_2)].$$

Exemple 8.6. Si on prend $f(x,y,z) = \sin x\cdot\sin y\cdot z + g(x,y,z)$, le problème (II) devient

$$\text{(ii)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \sin x\cdot\sin y\cdot u + g(\cdot,\cdot,u), \qquad u|_{\{y=0\}} = \phi, \qquad u|_{\{x=0\}} = \psi.$$

Nous avons $\theta_1(x) = 1-\cos x$ et $\theta_2(y) = 1-\cos y$, donc $\theta_1(x)\theta_2(y) \ge 0$ pour tout $(x,y)\in I^2$ si bien que l'hypothèse (H_4) est trivialement vérifiée car h n'a pas de zéros dans $\mathbb{R}^+$.

La solution est donc une fonction u associée à la fonction $v = \mathrm{cl}(v_\varepsilon)_\varepsilon$ telle que

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(x,y) = \varphi_\varepsilon(1)h[(1-\cos x)(1-\cos y)] &+ \int_0^x \phi'_\varepsilon(\xi)h[(1-\cos y)(\cos\xi-\cos x)]\,d\xi \\ &+ \int_0^y \psi'_\varepsilon(\eta)h[(1-\cos x)(\cos\eta-\cos y)]\,d\eta \end{aligned}$$

ou encore en faisant les intégrations par parties

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(x,y) &= \phi_\varepsilon(x) + \psi_\varepsilon(y) - \varphi_\varepsilon(1)h[(1-\cos x)(1-\cos y)] \\ &\quad + (1-\cos y)\int_0^x \phi_\varepsilon(\xi)\sin\xi h'[(1-\cos y)(\cos\xi-\cos x)]\,d\xi \\ &\quad + (1-\cos x)\int_0^y \psi_\varepsilon(\eta)\sin\eta h'[(1-\cos x)(\cos\eta-\cos y)]\,d\eta. \end{aligned}$$

Quand on prend $\phi = \delta_x$ et $\psi = \delta_y$ on a alors

$$u \approx \delta_x \otimes 1_y + 1_x \otimes \delta_y - \mathrm{cl}(\varphi_\varepsilon(1))_\varepsilon h[(1-\cos x)(1-\cos y)].$$

Ainsi nous obtenons une décomposition faible de la solution u qui est indépendante de la fonction g.

Bibliographie

[1] J. Aragona and F. Villarreal, *Colombeau's theory and shock-waves in a problem of hydrodynamics*, J. Anal. Math. 61 (1993), 113–114.

[2] R. Bellman and G. Adomian, *Partial Differential Equations*, Reidel, Dordrecht, 1985.

[3] H. A. Biagioni, *A Nonlinear Theory of Generalized Functions*, Lecture Notes in Math. 1421, Springer, Berlin, 1990.

[4] H. A. Biagioni and J.-F. Colombeau, *Borel's theorem for generalized functions*, Studia Math. 81 (1985), 179–183.

[5] —, —, *Whitney's extension theorem for generalized functions*, J. Math. Anal. Appl. 114 (1986), 574–583.

[6] A. Bouvier, *Théorie élémentaire des séries*, Hermann, Paris, 1971.

[7] C.-C. Chou, *Séries de Fourier et théorie des distributions*, Editions Scientifiques, Beijing, 1983.

[8] J.-F. Colombeau, *New Generalized Functions and Multiplication of Distributions*, North-Holland Math. Stud. 84, 1984.

[9] —, *Elementary Introduction to New Generalized Functions*, North-Holland Math. Stud. 113, 1985.

[10] J.-F. Colombeau and A. Méril, *Generalized functions on $\mathscr{C}^\infty$ manifolds*, J. Math. Anal. Appl. 186 (1994), 357–364.

[11] J. Dieudonné, *Eléments d'analyse*, tome 3, deuxième édition, Gauthier-Villars, 1974.

[12] P. Dolbeault, *Analyse complexe*, Masson, Paris, 1990.

[13] Yu. V. Egorov, *A contribution to the theory of generalized functions*, Russian Math. Surveys 45 (5) (1990), 1–49.

[14] —, *On an example of a linear hyperbolic equation without solutions*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 317 (1993), 1149–1153.

[15] P. R. Garabedian, *Partial Differential Equations*, Wiley, 1964.

[16] E. Goursat, *Cours d'analyse mathématique*, tome III, Gauthier-Villars, 1964.

[17] I. M. Guelfand [I. M. Gel'fand] et G. E. Chilov [G. E. Shilov], *Les distributions*, tomes 1, 2, Dunod, Paris, 1964.

[18] M. R. Hestenes, *Extension of the range of a differentiable function*, Duke Math. J. 8 (1941), 183–192.

[19] A. Kirillov et A. Gvichiani, *Théorèmes et problèmes d'analyse fonctionnelle*, Edition Mir, Moscou, 1982.

[20] M. A. Krasnosel'skiĭ and P. P. Zabreĭko, *Geometrical Methods of Nonlinear Analysis*, Grundlehren Math. Wiss. 263, Springer, Berlin, 1984.

[21] A. C. Lazer and P. J. McKenna, *Fredholm Theory for Periodic Solutions of Some Semiliear P.D.E.s with Homogeneous Non-Linearities*, Contemp. Math. 107, Amer. Math. Soc., 1990.

[22] H. Lewy, *An example of smooth linear partial differential equation without solution*, Ann. of Math. 66 (1957), 155–158.

[23] J. A. Marti, P. S. Nuiro et V. Valmorin, *Sur un problème de Goursat non linéaire à données distributions*, preprint.

[24] R. Narasimhan, *Analysis on Real and Complex Manifolds*, North-Holland Math. Library 35, 1991.

[25] M. Oberguggenberger, Extrait d'un cours de D.E.A.

[26] —, *Generalized solutions to semilinear hyperbolic systems*, Monatsh. Math. 103 (1987), 133–144.

[27] —, *Nonlinear theories of generalized functions*, in: Advances in Analysis, Probability and Mathematical Physics—Contribution from Non-Standard Analysis, S. Albeverio, W. A. J. Luxemburg and M. P. H. Wolff (eds.), Kluwer, Dordrecht, 1994, 56–74.

[28] —, *Multiplication of distributions and application to partial differential equations*, Pitman Res. Notes Math. Ser. 259, Longman, Harlow, 1992.

[29] G. Pichon, *Groupes de Lie, représentations linéaires et applications*, Hermann, Paris, 1973.

[30] H. Reinhard, *Equations différentielles*, Gauthier-Villars, 1982.

[31] M. Roseau, *Equations différentielles*, Masson, Paris, 1976.

[32] E. Rosinger, *Generalized Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations*, North-Holland Math. Stud. 146, 1987.

[33] L. Schwartz, *Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions*, C. R. Acad. Sci. Paris 239 (1954), 847–848.

[34] —, *Théorie des distributions*, Hermann, 1969.

[35] R. T. Seeley, *Extension of C^∞ functions defined in a half space*, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), 625–626.

[36] E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton Univ. Press, 1971.

[37] F. Trèves, *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press, New York, 1967.

[38] —, *Basic Linear Partial Differential Equations*, Academic Press, New York, 1975.

[39] V. Valmorin, *Fonctions généralisées périodiques et problème de Goursat*, C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I 320 (1995), 537–540.

[40] Vo-Khac Khoan, *Distributions, analyse de Fourier, opérateurs aux dérivées partielles*, tomes 1, 2, Vuibert, Paris, 1972.

[41] H. Whitney, *Analytic extension of differentiable functions defined on closed sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934), 63–89.