

COMPUTATIONAL MATHEMATICS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 13
PWN - POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1984

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ

И. К. НАВАЛ, С. В. ЧЕРНИГОВСКИЙ

Институт Математики с ВЦ АН МССР, Кишинев, СССР

Предложен основанный на использовании пространственных характеристических соотношений метод численного интегрирования связанных термоупругих уравнений, описывающих волновой процесс в упругой изотропной полуполосе вследствии внешнего механического или теплового воздействия на торце. Линеаризованные уравнения плоской теории связанной термоупругости представлены в виде симметричной гиперболической системы уравнений первого порядка. Исследованы характеристические свойства полученной системы и разработан численный метод решения, основанный на этих свойствах. Представлены и обсуждены результаты вычислений, показывающие зависимость компонентов напряжений, скоростей смещений и температуры от изменения внешних воздействий; прослежен процесс зарождения и формирования термоупругих волн. Исследовано влияние теплопроводности и связности на деформации и температуру.

1. Система определяющих уравнений

В основу исследования положена система модельных уравнений динамической связанной термоупругости с учётом конечной скорости распространения тепла, состоящая из уравнений движения (без учёта массовых сил)

$$\frac{\partial \sigma^x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma^y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = \varrho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

соотношений Дюамеля–Неймана

$$(2) \quad \begin{aligned} \sigma^x &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} - (3\lambda + 2\mu) a(T - T_0), \\ \sigma^y &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} - (3\lambda + 2\mu) a(T - T_0), \\ \tau &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

и баланса энергии при отсутствии тепловых источников [1]

$$(3) \quad \begin{aligned} \varrho c_v \frac{\partial T}{\partial t} &= -q_x - \eta_y + (3\lambda + 2\mu) a T_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ q + \tau_0 \frac{\partial q}{\partial t} &= -k \frac{\partial T}{\partial x}, \\ \eta + \tau_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -k \frac{\partial T}{\partial y}. \end{aligned}$$

Здесь $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ — составляющие вектора смещения вдоль координатных осей $0x$ и $0y$ соответственно; σ^x, σ^y, τ — компоненты тензора напряжений; T — температура; q и η — составляющие вектора теплового потока; T_0 — начальная температура; ϱ — плотность; c_v — удельная теплоёмкость при постоянном объёме; a — коэффициент линейного расширения; k — коэффициент теплопроводности; λ и μ — параметры Ляме; τ_0 — время тепловой релаксации.

Из нескольких эквивалентных способов выбора определяющей системы дифференциальных уравнений плоской задачи динамической теории термоупругости остановимся на таком, когда зависимыми переменными являются скорости смещения, компоненты тензора напряжений, температура и компоненты теплового потока. Такой выбор позволяет исключить производные по пространственным переменным из граничных условий.

Вводя безразмерные координаты и функции по формулам

$$\begin{aligned} x &= \frac{a \varrho c_v}{k} \hat{x}; \quad y = \frac{a \varrho c_v}{k} \hat{y}; \quad t = \frac{a^2 \varrho c_v}{k} \hat{t}; \\ \sigma^x &= \hat{\sigma}^x / p; \quad \sigma^y = \hat{\sigma}^y / p; \quad \tau = \hat{\tau} / p; \\ u &= \frac{a^3 \varrho^2 c_v}{kp} \hat{u}; \quad v = \frac{a^3 \varrho^2 c_v}{kp} \hat{v}; \quad T = \frac{\hat{T} - T_0}{T_0}; \\ q &= \frac{\hat{q}}{a \varrho c_v T_0}; \quad \eta = \frac{\hat{\eta}}{a \varrho c_v T_0}; \quad a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}}; \quad p = (3\lambda + 2\mu) a T_0, \end{aligned}$$

где знак \wedge обозначает размерную величину, и дифференцируя по времени закон Дюамеля–Неймана, систему (1)–(3) можно представить в эквивалентной форме в виде системы восьми линейных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами относительно иско-мых функций

$$\begin{aligned}
 u_t &= \sigma_x^x + \tau_y; \\
 \frac{1}{\beta_3} \tau_t &= u_y + v_x; \\
 v_t &= \sigma_y^y + \tau_x; \\
 \frac{1}{1-\beta_2^2} \sigma_t^x - \frac{\beta_2}{1-\beta_2^2} \sigma_t^y + \frac{1}{1+\beta_2} T_t &= u_x; \\
 (4) \quad -\frac{\beta_2}{1-\beta_2^2} \sigma_t^x + \frac{1}{1-\beta_2^2} \sigma_t^y + \frac{1}{1+\beta_2} T_t &= v_y; \\
 \frac{1}{1+\beta_2} \sigma_t^x + \frac{1}{1+\beta_2} \sigma_t^y + \left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{2}{1+\beta_2} \right) T_t &= -\frac{1}{\beta_1} (q_x + \eta_y); \\
 \frac{\beta}{\beta_1} q_t &= -\frac{1}{\beta_1} T_x - \frac{1}{\beta_1} q; \\
 \frac{\beta}{\beta_1} \eta_t &= -\frac{1}{\beta_1} T_y - \frac{1}{\beta_1} \eta;
 \end{aligned}$$

где

$$\beta = \frac{a^2 \varrho c_v \tau_0}{k}; \quad \beta_1 = \frac{(3\lambda+2\mu)^2 a^2 T_0}{(\lambda+2\mu) \varrho c_v}; \quad \beta_2 = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}; \quad \beta_3 = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}.$$

Нижний индекс означает частное дифференцирование по соответствующей переменной, а u и v , здесь и далее, – компоненты вектора скорости смещения.

Система (4) принадлежит к гиперболическому типу и имеет симметричный вид.

2. Вывод разностных уравнений

Поверхность $\Phi(x, y, t) = \text{const}$ является характеристической для системы уравнений (4) при условии равенства нулю детерминанта характеристической матрицы

$$A = A^t \Phi_t + A^x \Phi_x + A^y \Phi_y,$$

где A^t, A^x и A^y — матрицы, составленные из коэффициентов при производных по t, x, y системы (4).

Характеристическое уравнение можно записать в виде

$$(5) \quad \Phi_t^3 [\Phi_t^2 - \beta_3(\Phi_x^2 + \Phi_y^2)] \cdot [\Phi_t^2 - c_2^2(\Phi_x^2 + \Phi_y^2)] \times \\ \times [\Phi_t^2 - c_3^2(\Phi_x^2 + \Phi_y^2)] = 0,$$

где

$$c_{2,3}^2 = (\beta\beta_1 + \beta + 1 \pm \sqrt{(\beta\beta_1 + \beta + 1)^2 - 4\beta})/2\beta.$$

Решения уравнения (5) дают три семейства характеристических конусов, а равенство $\Phi_t = 0$ — ось конусов [2], [3].

Нуль-векторы для характеристических конусов с тангенсами углов полураствора при вершине равными $\sqrt{\beta_3}, c_2, c_3$ соответственно имеют вид (с учётом замены a на $a + \pi$)

$$l_1 = [-\sin a, \sqrt{\beta_3} \cos 2a, \cos a, -\sqrt{\beta_3} \sin 2a, \sqrt{\beta_3} \sin 2a, 0, 0, 0]; \\ l_i = \left[c_i \cos a, \beta_3 \sin 2a, c_i \sin a, c_i^2 - 2\beta_3 \sin^2 a, c_i^2 - 2\beta_3 \cos^2 a, \right. \\ \left. \frac{c_i^2 - 1}{\beta c_i} \cos a, \frac{c_i^2 - 1}{\beta c_i} \sin a \right], \quad i = 2, 3.$$

Конечный вид трёх семейств соотношений на бихарактеристиках следующий

$$(6) \quad -\sin a du + \frac{1}{\sqrt{\beta_3}} \cos 2a d\tau + \cos a dv - \frac{1}{2\sqrt{\beta_3}} \sin 2a d\sigma^x + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\beta_3}} \sin 2a d\sigma^y = S_1(a) dt; \\ c_i \cos a du + \sin 2a d\tau + c_i \sin a dv + \cos^2 a d\sigma^x + \sin^2 a d\sigma^y + \\ + \left(1 + \frac{1 - c_i^2}{\beta_1}\right) dT + \frac{c_i^2 - 1}{\beta_1 c_i} \cos a dq + \frac{c_i^2 - 1}{\beta_1 c_i} \sin a d\eta = S_i(a) dt, \quad i = 2, 3,$$

где

$$S_1(a) = \sqrt{\beta_3} (\cos^2 a u_y - \sin^2 a v_x + \sin a \cos a (v_y - u_x)) - \\ - \sin a (1 + \cos 2a) \tau_y + \cos a (1 - \cos 2a) \tau_x + \\ + (\frac{1}{2} \sin 2a \cos a - \sin a) \sigma_x^x + (\cos a - \frac{1}{2} \sin 2a \sin a) \sigma_y^y + \\ + \frac{1}{2} \sin 2a \sin a \sigma_y^x - \frac{1}{2} \sin 2a \cos a \sigma_x^y;$$

$$\begin{aligned}
S_i(a) = & (c_i^2 - 2\beta_3) \sin^2 a u_x + \left(1 - \frac{c_i^2}{2}\right) \sin 2a(u_y + v_x) + \\
& + (c_i^2 - 2\beta_3) \cos^2 a v_y + c_i(\sin a - \sin 2a \cos a) \tau_x + \\
& + c_i(\cos a - \sin 2a \sin a) \tau_y + c_i \cos a \sin^2 a (\sigma_x^x - \sigma_x^y) + \\
& + c_i \sin a \cos^2 a (\sigma_y^y - \sigma_y^x) + \frac{c_i^2 - 1}{\beta_1} \sin^2 a q_x + \\
& + \frac{1 - c_i^2}{\beta_1} \sin a \cos a (q_y + \eta_x) + \frac{c_i^2 - 1}{\beta_1} \cos^2 a \eta_y + \\
& + \frac{1 - c_i^2}{\beta_1 c_i} (q \cos a + \eta \sin a).
\end{aligned}$$

Пусть $O(t_0, x_0, y_0)$ — общая вершина трёх характеристических конусов, а точка O' имеет координаты $(t_0 - k, x_0, y_0)$, где k — шаг по времени. Интегрирование уравнений (6) вдоль бихарактеристики, для которой $a = a_j$, от точки O до точки O_j пересечения характеристики, с плоскостью $t = t_0 - k$ даёт

$$\begin{aligned}
& -\sin a_j \delta u + \frac{1}{\sqrt{\beta_3}} \cos 2a_j \delta \tau + \cos a_j \delta v - \frac{1}{2\sqrt{\beta_3}} \sin 2a_j \delta \sigma^x + \frac{1}{2\sqrt{\beta_3}} \sin 2a_j \delta \sigma^y = \\
& = \frac{1}{2} k [S_1(a_j)_j + S_1(a_j)_0] - W_1(a_j) + O(k^3); \\
(7) \quad & c_i \cos a_j \delta u + \sin 2a_j \delta \tau + c_i \sin a_j \delta v + \cos^2 a_j \delta \sigma^x + \\
& + \sin^2 a_j \delta \sigma^y + \left(1 + \frac{1 - c_i^2}{\beta_1}\right) \delta T + \frac{c_i^2 - 1}{\beta_1 c_i} \cos a_j \delta q + \frac{c_i^2 - 1}{\beta_1 c_i} \sin a_j \delta \eta = \\
& = \frac{1}{2} k [S_i(a_j)_j + S_i(a_j)_0] - W_i(a_j) + O(k^3), \quad i = 2, 3,
\end{aligned}$$

где, например,

$$\delta u = u(t_0, x_0, y_0) - u(t_0 - k, x_0, y_0),$$

а

$$\begin{aligned}
W_1(a_j) = & (u_j - u') \sin a_j + \frac{1}{\sqrt{\beta_3}} \cos 2a_j (\tau' - \tau_j) + \cos a_j (v' - v_j) - \\
& - \frac{1}{2\sqrt{\beta_3}} \sin 2a_j (\sigma_x^x - \sigma_j^x) + \frac{1}{2\sqrt{\beta_3}} \sin 2a_j (\sigma_y^y - \sigma_j^y);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_i(a_j) = & c_i \cos a_j (u' - u_j) + \sin 2a_j (\tau' - \tau_j) + \\
& + c_i \sin a_j (v' - v_j) + \cos^2 a_j (\sigma_x^x - \sigma_j^x) + \sin^2 a_j (\sigma_y^y - \sigma_j^y) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(1 + \frac{1 - c_i^2}{\beta_1} \right) (T' - T_j) + \frac{c_i^2 - 1}{\beta_1 c_i} \cos a_j (q' - q_j) + \\
& + \frac{c_i^2 - 1}{\beta_1 c_i} \sin a_j (\eta' - \eta_j); \\
a_j & = (j - 1)\pi/2, \quad j = 1, \dots, 4.
\end{aligned}$$

Индексы 0, j и штрих при искомых функциях означают, что функция берётся в точках O , O_j и O' соответственно.

Проинтегрируем теперь первые шесть уравнений системы (4) вдоль оси конусов от точки O' до точки O и исключим в них производные по x и y в точке O с помощью линейных комбинаций 12 линейных алгебраических уравнений (7). Приращения для функций q и η с исключением производных в точке O можно получить непосредственно из (7).

Окончательная система уравнений для приращений $\delta u, \dots, \delta \eta$, из которой исключены производные в точке O , даётся выражениями

$$\begin{aligned}
& \frac{a_4 - a_2}{2} + \frac{b_1 - b_3}{2c_2} = (\text{I}); \\
& \frac{a_1 - a_2 + a_3 - a_4}{2\sqrt{\beta_3}} = (\text{II}); \\
& \frac{a_1 - a_3}{2} + \frac{b_2 - b_4}{2c_2} = (\text{III}); \\
& \frac{b_1 + b_3}{2} \varphi_1 - \frac{d_1 + d_3}{2} \varphi_2 = (\text{V}); \\
(8) \quad & \frac{b_2 + b_4}{2} \varphi_1 - \frac{d_2 + d_4}{2} \varphi_2 = (\text{IV}); \\
& \frac{b_1 + b_2 + b_3 + b_4}{2} \varphi_3 - \frac{d_1 + d_2 + d_3 + d_4}{2} \varphi_4 = (\text{VI}); \\
& \frac{b_3 - b_1}{2c_2} = \frac{d_3 - d_1}{2c_3}; \quad \frac{b_4 - b_2}{2c_2} = \frac{d_4 - d_2}{2c_3};
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\varphi_1 & = (1 - c_3^2)/\gamma; \quad \varphi_2 = (1 - c_2^2)/\gamma; \\
\varphi_3 & = (2\beta_3 - c_3^2)/\gamma; \quad \varphi_4 = (2\beta_3 - c_2^2)/\gamma; \quad \gamma = \beta_2(c_2^2 - c_3^2)
\end{aligned}$$

и использованы обозначения a_j, b_j, d_j для уравнений (7), а (I), напри-

мер, означает первое уравнение системы (4) после интегрирования её вдоль оси конусов, т.е.

$$\delta u = \frac{1}{2} k [(\sigma_x^x + \tau_y)_0 + (\sigma_x^x + \tau_y)'] + O(k^3).$$

После проведения всех преобразований, обеспечивающих точность $O(k^3)$, систему разрешающих уравнений можно записать в виде

$$(9) \quad \begin{aligned} \delta u + \frac{c_2^2 - 1}{\beta_1 c_2^2} \left(1 + \frac{k}{2\beta}\right) \delta q &= \frac{k^2}{2} \left[(c_2^2 - \beta_3) v_{xy} + \frac{c_2^2 - 1}{\beta_1} (q_{xx} + \eta_{xy}) + \right. \\ &\quad \left. + \beta_3 u_{yy} + c_2^2 u_{xx} \right] + k \left[\tau_y + \sigma_x^x + \left(1 + \frac{1 - c_2^2}{\beta_1}\right) T_x + \frac{1 - c_2^2}{\beta \beta_1 c_2^2} q \right]; \\ \frac{1}{\beta_3} \delta \tau &= \frac{k^2}{2} [\sigma_{xy}^x + \sigma_{xy}^y + \tau_{xx} + \tau_{yy}] + k [u_y + v_x]; \\ \delta v + \frac{c_2^2 - 1}{\beta_1 c_2^2} \left(1 + \frac{k}{2\beta}\right) \delta \eta &= \frac{k^2}{2} \left[(c_2^2 - \beta_3) u_{xy} + \frac{c_2^2 - 1}{\beta_1} (q_{xy} + \eta_{yy}) + \right. \\ &\quad \left. + \beta_3 v_{xx} + c_2^2 v_{yy} \right] + k \left[\tau_x + \sigma_y^y + \left(1 + \frac{1 - c_2^2}{\beta_1}\right) T_y + \frac{1 - c_2^2}{\beta \beta_1 c_2^2} \eta \right]; \\ \frac{1}{1 - \beta_2^2} \delta \sigma^x - \frac{\beta_2}{1 - \beta_2^2} \delta \sigma^y + \frac{1}{1 + \beta_2} \delta T &= \frac{k^2}{2} [\tau_{xy} + \sigma_{xx}^x] + k u_x; \\ -\frac{\beta_2}{1 - \beta_2^2} \delta \sigma^x + \frac{1}{1 - \beta_2^2} \delta \sigma^y + \frac{1}{1 + \beta_2} \delta T &= \frac{k^2}{2} [\tau_{xy} + \sigma_{yy}^y] + k v_y; \\ \frac{1}{\beta_3(1 + \beta_2)} (\delta \sigma^x + \delta \sigma^y) + \frac{\beta_2}{\beta_3} \left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{2}{\beta_2(1 + \beta_2)} \right) \delta T &= \\ = k^2 \left[2\tau_{xy} + \sigma_{xx}^x + \sigma_{yy}^y + \frac{\beta_2}{2\beta\beta_1\beta_3} (T_{xx} + T_{yy} + q_x + \eta_y) \right] &+ \\ + k \left[2(u_x + v_y) - \frac{\beta_2}{\beta_1\beta_3} (q_x + \eta_y) \right]; \\ \left(\beta + \frac{k}{2} \right) \delta q &= \frac{k^2}{2} [\eta_{xy} + q_{xx} + \beta_1(u_{xx} + v_{xy})] - k [T_x + q]; \\ \left(\beta + \frac{k}{2} \right) \delta \eta &= \frac{k^2}{2} [q_{xy} + \eta_{yy} + \beta_1(v_{yy} + u_{xy})] - k [T_y + \eta]. \quad (1) \end{aligned}$$

(1) Система (9) может быть упрощена, если из 1-го уравнения исключить δq , из 3-го — $\delta \eta$ с помощью 7 и 8-го уравнений соответственно; вместо 4 и 5-го рассматривать их сумму и разность и, наконец, из 6-го исключить $\delta \sigma^x$ и $\delta \sigma^y$.

Для получения разностных уравнений на границе рассматривающей области необходимо исключить из (8) характеристические уравнения, отвечающие проходящим вне области характеристикам, и добавить заданные граничные условия. Тогда получаем замкнутую разрешающую систему уравнений на границе.

3. Численный пример

Рассмотрим плоскую двумерную полубесконечную полосу конечной ширины $2h$ из линейно-упругого однородного изотропного материала, занимающую в системе неподвижных прямоугольных координат x, y, z область $|y| \leq h, 0 \leq x < \infty, |z| < \infty$. Задача состоит в определении параметров волнового поля при $t > 0$ внутри полуполосы при нулевых начальных и следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} u = f(t), v = 0, q = 0 & \quad \text{при } x = 0, |y| \leq h, \\ \tau = 0, \sigma^y = 0, T = 0 & \quad \text{при } x \geq 0, |y| = h. \end{aligned}$$

Для расчёта во внутренних точках необходимо использовать формулы (9), а на границе $x > 0, y = h$, например, после проведения требуемых преобразований будем использовать следующую разрешающую систему уравнений

$$\begin{aligned} \delta u + \frac{c_2^2 - 1}{\beta_1 c_2^2} \left(1 + \frac{k}{2\beta} \right) \delta q - \frac{1}{\sqrt{\beta_3}} \delta \tau &= \frac{k^2}{2} \left[(c_2^2 - \beta_3) v_{xy} - \sqrt{\beta_3} (\sigma_{xy}^x + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{xy}^y + \tau_{xx}) + \frac{c_2^2 - 1}{\beta_1} (q_{xx} + \eta_{xy}) + c_2^2 u_{xx} \right] + k \left[\tau_y + \sigma_x^x - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\beta_3} (u_y + v_x) + \left(1 + \frac{1 - c_2^2}{\beta_1} \right) T_x + \frac{1 - c_2^2}{\beta \beta_1 c_2^2} q \right]; \\ \delta v + \frac{1}{c_2} \left(\frac{c_2^2}{\beta_2 (1 - \beta_2^2)} - \frac{1}{\beta_2} \right) \delta \sigma^x - \frac{c_2}{1 - \beta_2^2} \delta \sigma^y - \frac{1}{c_2} \left(\frac{1 - c_2^2}{\beta_1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 + \beta_2 - c_2^2}{\beta_2 (1 + \beta_2)} \right) \delta T + \frac{c_2^2 - 1}{\beta_1 c_2^2} \left(1 + \frac{k}{2\beta} \right) \delta \eta &= \\ = \frac{k^2}{2} \left[(c_2^2 - \beta_3) u_{xy} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_2^2 (2\beta_3 - \beta_2) - 2\beta_3}{\beta_2 c_2} \tau_{xy} + \beta_3 v_{xx} + \frac{(c_2^2 - 1) 2\beta_3}{\beta_2 c_2} \sigma_{xx}^x + \frac{c_2^2 - 1}{\beta \beta_1 c_2} (T_{xx} + \right. \\ &\quad \left. + q_x + \eta_y) + \frac{c_2^2 - 1}{\beta_1} q_{xy} \right] + k \left[2\beta_3 \frac{c_2^2 - 1}{\beta_2 c_2} u_x + \tau_x - c_2 v_y - \sigma_y^y + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(1 + \frac{1 - c_2^2}{\beta_1} \right) T_y + \frac{1 - c_2^2}{\beta_1 c_2} (q_x + \eta_y) + \frac{1 - c_2^2}{\beta \beta_1 c_2^2} \eta \Big]; \\
& \left(\frac{\sqrt{\beta}}{\beta_2} + \frac{1}{\beta_2 (1 - \beta_2^2)} \right) \delta \sigma^x - \frac{1}{1 - \beta_2^2} \delta \sigma^y + \\
& + \left(\frac{2(1 - \beta_3)\sqrt{\beta} + 1}{\beta_2(1 + \beta_2)} + \frac{1 + \sqrt{\beta}}{\beta_1} \right) \delta T + \frac{c_2 + c_3}{\beta_1} \left(\beta + \frac{k}{2} \right) \delta \eta = \\
= & \frac{k^2}{2} \left[(c_2 + c_3) \left(u_{xy} + \frac{1}{\beta_1} q_{xy} \right) + \frac{2\beta_3(1 + \sqrt{\beta})}{\beta_2} \sigma_{xx}^x + \right. \\
& + \frac{1 + \sqrt{\beta}}{\beta \beta_1} (\eta_y + q_x + T_{xx}) + \frac{2\beta_3(1 + \sqrt{\beta}) - \beta_2}{\beta_2} \tau_{xy} \Big] + \\
& + k \left[\frac{2\beta_3(1 + \sqrt{\beta})}{\beta_2} u_x - v_y - \frac{1 + \sqrt{\beta}}{\beta_1} (\eta_y + q_x) - \frac{c_2 + c_3}{\beta_1} (T_y + \eta) \right]; \\
& (9.4); \quad (9.7); \\
& \delta \tau = 0; \quad \delta \sigma^y = 0; \quad \delta T = 0,
\end{aligned}$$

где (9.4) и (9.7) — четвёртое и седьмое уравнения системы (9).

Аналогичным образом выводятся расчётные формулы в угловых точках $x = 0, y = h$ и $x = 0, y = -h$, а также на границах $x > 0, y = -h$ и $x = 0, |y| < h$.

Полученная разностная схема была реализована на ЭВМ для следующих значений исходных данных: $\Delta x = \Delta y = 0.02$; $\Delta t = 0.01$; $\beta = 1.1051$; $\beta_1 = 0.035$; $\beta_2 = 0.5185$; $\beta_3 = 0.2407$; $f(t) = e^{-t}$; $h = 0.5$.

На рис. 1 приведены эпюры нормального напряжения σ^x на линии симметрии (сплошная кривая), свободной поверхности (пунктир) и сечении $y = -0.35$ (штрихпунктир) для различных моментов времени ($t = 0.5; 1; 1.5$).

На момент времени $t = 0.5$ напряжение является сжимающим и достигает максимальное значение в угловой точке. Влияние дифракции в окрестности угловой точки в этот момент особенно заметно на кривой пунктир.

На момент $t = 1$ напряжение в угловой точке убывает, а влияние дифрагированных волн приводит к зарождению небольшой зоны растяжения. Полученный численным расчётом волновой процесс носит существенно двумерный характер и особенно это видно в окрестности свободных поверхностей.

Величины продольной скорости (рис. 2, 3) и поперечной представлены распределением по x на свободной поверхности (пунктир), оси симметрии (сплошная кривая) и в сечении $y = -0.35$ (штрихпунктир)

Передний фронт формируется в сечениях $y = -0.5$; $y = -0.35$ как плоской волной, так и волной дифракции, распространяющейся с продольной скоростью. В этих сечениях передние фронты практически совпадают, но амплитуда скорости u на свободной поверхности больше, чем в сечении $y = -0.35$; в точках же оси симметрии передний фронт заметно опережает. Поведение скорости v соответствует распространяющемуся за передним фронтом выпучиванию полуполосы (скорость

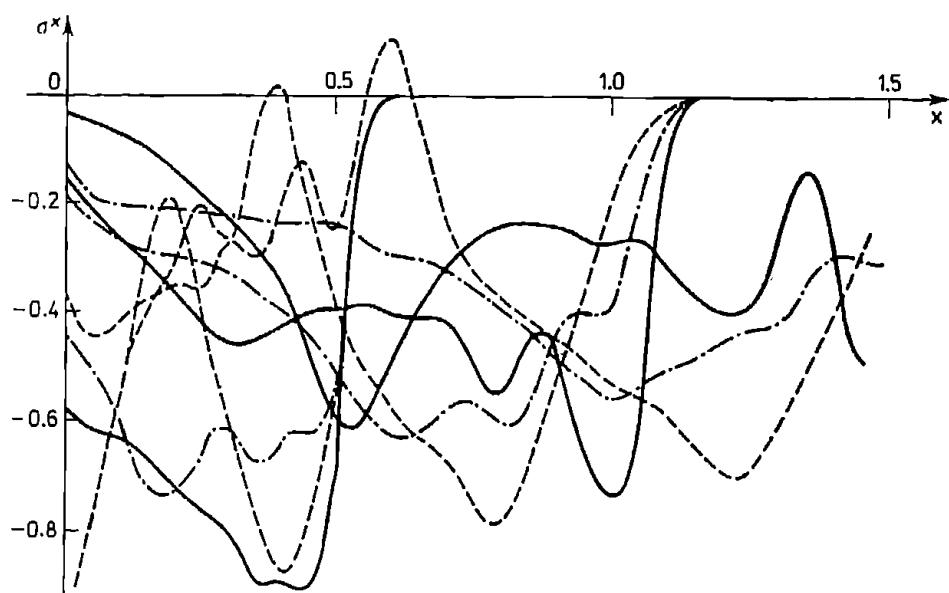


Рис. 1

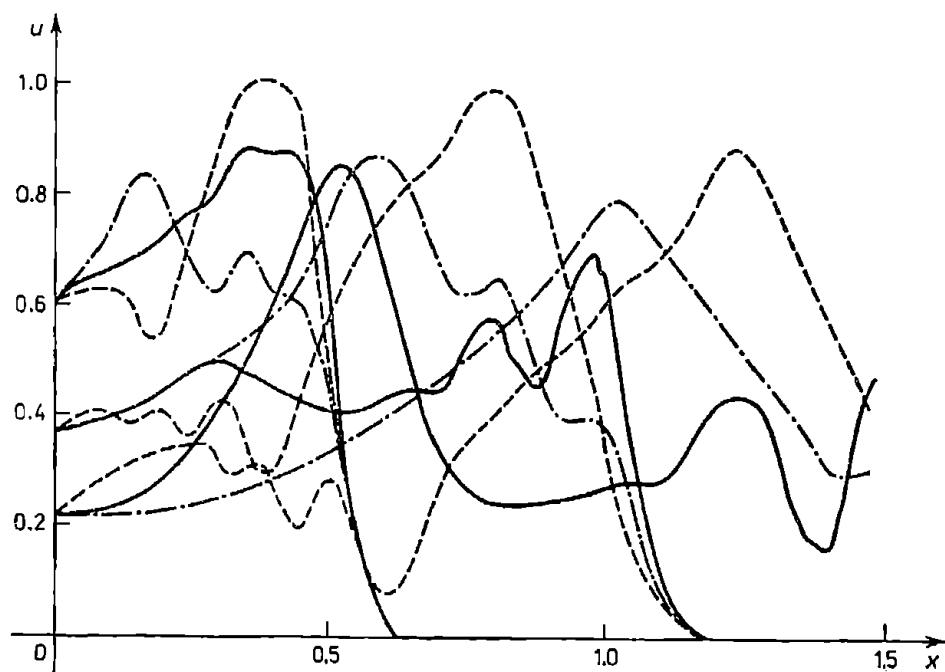


Рис. 2

отрицательна), сменяющемуся сжатием, когда скорость становится положительной.

Волновая картина, полученная численно с использованием характеристик гиперболической системы уравнений, находится в хорошем качественном соответствии с геометрическим представлением волнового процесса, но численное решение даёт и количественные значения амплитуд искомых функций.

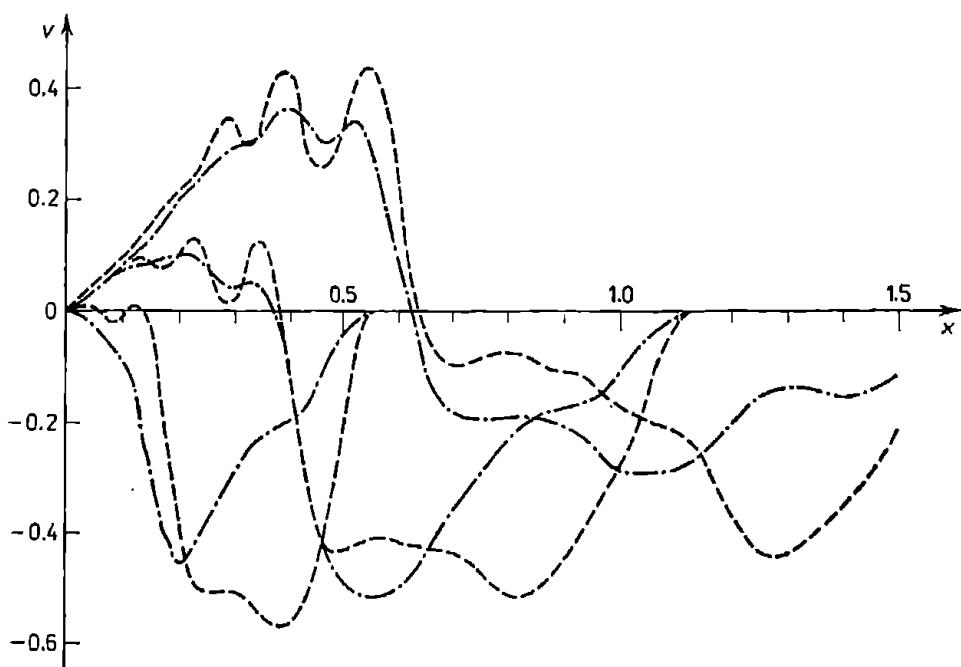


Рис. 3

Литература

- [1] S. Kaliski, *Wave equations of thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., ser. sci. techn., 13 (1965), 409–416.
- [2] Р. Дж. Клифтон, *Разностный метод в плоских задачах динамической упругости*, В сб.: *Механика*, № 1, „Мир”, Москва 1968.
- [3] В. Г. Чебан, И. К. Навал, П. Ф. Сабодаш, Р. А. Чередниченко, *Численные методы решения задач динамической теории упругости*, „Штиинца”, Кишинев 1976.

*Presented to the Semester
Computational Mathematics
February 20 – May 30, 1980*