MATHEMATICAL MODELS AND METHODS
IN MECHANICS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 15
PWN – POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1985

УСТОЙЧИВОСТЬ, УПРАВЛЯЕМОСТЬ, НАБЛЮДАЕМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К ЗАДАЧАМ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

А. М. КОВАЛЕВ

Институт прикладной математики и механики АН УССР; СССР, Донецк, 340048

Проблемы устойчивости, управляемости, наблюдаемости механических систем состоят в изучении отклонения движения системы от заданного при малом изменении начальных данных, определении внешних воздействий, при которых движение системы удовлетворяет заданным требованиям, а также в нахождении текущего состояния системы по некоторой информации о ее движении. Эти вопросы играют все возрастающую роль в решении большинства современных научно-технических задач и требуют постоянного совершенствования применяемых методов и математического аппарата. Широкое использование топологических методов, методов функционального анализа, теории групп Ли и дифференциальной геометрии существенно расширило возможности исследователей и позволило решить ряд крупных проблем в теории нелинейных систем, являющейся наиболее трудной для изучения.

Исследование указанных проблем в настоящей работе проводится методом, в основе которого лежит построение инвариантных многообразий систем дифференциальных уравнений, либо многообразий более общей структуры, названных многообразиями, ориентированными относительно системы. Так устойчивость стационарных движений и устойчивость интегралов показывается либо непосредственным применением теоремы Колмогорова–Арнольда о сохранении движений, либо с использованием теоремы Мозера об инвариантных кривых. Задачи управления и наблюдения анализируются с помощью модификации метода инвариантных соотношений, разработанного в аналитической механике для построения инвариантных многообразий. Обобщением понятия инвариантного многообразия является понятие многообразия, ориентированного относительно системы, которое дало возможность получить весьма широкие необходимые условия управляемости нелинейных механических систем.

1. Стационарные движения гамильтоновых систем и их устойчивость

Рассматривается консервативная механическая система с n степенями свободы. Ее состояние описывается переменными Гамильтона $q_j, p_j (j = 1, 2, \ldots, n)$. С помощью функции Гамильтона $H(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ уравнения движения системы записываются в канонической форме

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

где точка означает дифференцирование по времени t.

При наличии циклических координат $q_\alpha (\alpha = k+1, \ldots, n)$ функция Гамильтона имеет вид $H(q_1, q_2, \ldots, q_k, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ и уравнения движения допускают $n-k$ циклических интегралов $p_\alpha = c_\alpha = \mathrm{const} (\alpha = k+1, \ldots, n)$. Функция $H(q_1, q_2, \ldots, q_k, p_1, p_2, \ldots, p_k, c_{k+1}, \ldots, c_n)$ определяет систему с k степенями свободы, которую называют *приведенной*.

Определение 1. *Стационарными движениями* механической системы называют такие движения, в которых позиционные координаты и импульсы $q_j, p_j (j = 1, 2, \ldots, k)$ и циклические импульсы $p_\alpha (\alpha = k+1, \ldots, n)$ сохраняют начальные значения $q_j = q_j^0, p_j = p_j^0, p_\alpha = c_\alpha$. Постоянные значения c_α произвольны, значения q_j^0, p_j^0 находятся из условий

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial p_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

и определяют положение равновесия приведенной системы (в уравнениях (1) функция H является функцией Гамильтона приведенной системы).

Под *устойчивостью стационарных движений* понимают устойчивость по Ляпунову этих движений по отношению к величинам $q_j, p_j, c_\alpha (j = 1, 2, \ldots, k; \ \alpha = k+1, \ldots, n)$. Эффективным средством исследования устойчивости стационарных движений является теорема Рауса–Ляпунова, сводящая вопрос об устойчивости стационарных движений к исследованию экстремума потенциальной энергии приведенной системы. Для гамильтоновых систем ее можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1 (Е. Раус [35], А. М. Ляпунов [17]). *Пусть функция Гамильтона приведенной системы является знакоопределенной в точке* $q_j = q_j^0 = q_j(c^0), p_j = p_j^0 = p_j(c^0) (j = 1, 2, \ldots, k)$ *и значения* $q_j(c), p_j(c)$ *непрерывно зависят от* c *в точке* c^0. *Тогда стационарное движение, определяетое величинами* $q_j = q_j^0, p_j = p_j^0, c_\alpha = c_\alpha^0$, *является устойчивым.*

Теорема 1 не решает вопроса об устойчивости стационарных движений, если в положении равновесия гамильтониан приведенной системы не является знакоопределенной функцией. Исследование этого случая представляет большие трудности и существенно продвинуто для гамильтоновых систем, приведенная система которых двумерна. А. М. Ковалев, А. Я. Савченко [7] и В. С. Сергеев [24] применили к такого рода системам известную теорему Арнольда–Мозера [1, 20]. Первоначальный результат был получен в следующей форме.

Теорема 2 (А. М. Ковалев, А. Я. Савченко [7], В. С. Сергеев [24]). *Пусть гамильтониан* $H(q_1, q_2, p_1, p_2, \ldots, p_{2+m})$ *имеет непрерывные частные производные до 10 порядка по координатам и импульсам в точке с координатами*

$$(2) \qquad q_1 = q_2 = 0, \quad p_1 = p_2 = 0, \quad p_{2+\alpha} = c_\alpha^0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

определяющими изучаемое стационарное движение, и удовлетворяет в этой точке условиям

1. *Собственные числа линеаризованной приведенной системы чисто мнимые* $\pm i a_1^0, \pm i a_2^0$.

2. *Для всех целых чисел* k_1, k_2, *удовлетворяющих неравенству* $|k_1| + |k_2| \leqslant 4$, *выполнено условие* $k_1 a_1^0 + k_2 a_2^0 \neq 0$.

3. $D^0 = \beta_{11}^0 a_2^{0^2} - 2\beta_{12}^0 a_1^0 a_2^0 + \beta_{22}^0 a_1^{0^2} \neq 0$, *где* $\beta_{\nu\mu}^0$ — *коэффициенты формы четвертого порядка гамильтониана* H^0, *преобразованного к виду*

$$(3) \qquad H^0 = \sum_{\nu=1}^{2} \frac{a_\nu^0}{2} R_\nu + \sum_{\nu,\mu=1}^{2} \frac{\beta_{\nu\mu}^0}{4} R_\nu R_\mu + O_5, \qquad R_\nu = \xi_\nu^2 + \eta_\nu^2$$

(O_5 — *степенной ряд, содержащий члены порядка не меньше пятого*).

Тогда стационарное движение (2) *устойчиво.*

Сложившаяся к настоящему времени процедура исследования устойчивости стационарных движений конкретных механических систем с помощью теоремы 2 такова. Сначала находят собственные числа приведенной системы, линеаризованной в окрестности изучаемого движения. С их помощью записывают необходимые условия устойчивости (что обеспечивает выполнение условия 1 теоремы) и проверяют условия 2, которые называют *условиями отсутствия резонансов*. Для проверки третьего условия гамильтониан приводят к виду (3) с помощью преобразования Биркгофа или Депри–Хори. Условия 2, 3 являются условиями типа равенств, и для стационарных движений, как правило, эти равенства не выполняются тождественно. Поэтому можно утверждать, что областью устойчивости стационарных движений является область выполнения необходимых условий, из которой исключены некоторые многообразия меньшей размерности. Во всех известных приложениях теоремы 2 этот результат, действительно, имеет место. Для более детального анализа необходимо рассматривать случаи, когда не выполнены условия 2 или 3 теоремы 2. Наиболее общий результат в этой задаче получен А. Н. Чудненко [31]. Приведем его вместе с доказательством, следуя работе [31].

Теорема 3 (А. Н. Чудненко [31]). *Пусть гамильтониан $H(q_1, q_2, p_1, p_2, \ldots, p_{2+m})$ является аналитической функцией своих аргументов в точке с координатами* (2) *и удовлетворяет в этой точке условиям: собственные числа линеаризованной приведенной системы чисто мнимые $\pm i a_1(c^0)$, $\pm i a_2(c^0)$; частоты не связаны резонансным соотношением первого порядка $k_1 a_1(c^0) + k_2 a_2(c^0) \neq 0$, $|k_1| + |k_2| = 1$ (k_1, k_2 — целые числа). Тогда из устойчивости по Ляпунову положения равновесия приведенной системы, доказанной путем редукции с применением теоремы Мозера об отображениях, следует устойчивость стационарного движения* (2).

Доказательство. Так как гамильтониан H удовлетворяет условиям леммы 1.1 работы [23], то для каждого c из некоторой окрестности точки c^0 стационарному движению соответствует точка покоя приведенной системы, а гамильтониан H_c приведенной системы — аналитическая функция циклических постоянных c в точке c^0 и может быть представлен в виде ряда

$$(4)\qquad H_c = H_2 + H_3 + \ldots, \qquad H_m = \sum_{\nu=m} h_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} q_1^{\nu_3} q_2^{\nu_4},$$
$$(\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4),$$

коэффициенты которого $h_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(c)$ — аналитические функции c в точке c^0.

Для доказательства теоремы необходимо исследовать возмущенные движения

$$(5)\qquad \begin{aligned} &p_j = \varepsilon p_j', \qquad q_j = \varepsilon q_j' \qquad (j = 1, 2), \\ &c_a = c_a^0 + \delta c_a' \qquad (a = 1, 2, \ldots, m), \qquad |c'| \leqslant 1, \end{aligned}$$

где $|x|$ — евклидова норма вектора x, $\delta = \varepsilon^k$ (обычно полагают $k = 1$), ε — произвольное, достаточно малое положительное число. Выбор соответствующего значения k (определяющего окрестность точки c^0)

позволяет преодолеть трудности, вызванные зависимостью коэффициентов гамильтониана приведенной системы от циклических постоянных. Если вопрос об устойчивости положения равновесия приведенной системы с гамильтонианом H_{c^0} решается путем редукции (исследование сводится к системе с одной степенью свободы, но неавтономной (см., например, [19])) формами до порядка $2+a$ включительно в разложении (4), то выбираем $k=a+1$. Тогда, представляя степенными рядами аналитические в точке c^0 функции $h_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(c)$, с учетом замены переменных (5), преобразуем гамильтониан (4) к виду

$$
(6)\qquad \begin{gathered}
H_c = H_c^0(p', q', \varepsilon) + H_c^1(p', q', c', \varepsilon),\\
H_c^0 = \sum_{j=2}^{2+a} \sum_{\nu=j} \varepsilon^{j-2} h_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(c^0) p_1'^{\nu_1} p_2'^{\nu_2} q_1'^{\nu_3} q_2'^{\nu_4}.
\end{gathered}
$$

Здесь H_c^0 — невозмущенная часть гамильтониана, а возмущенная часть $H_c^1 = O(\varepsilon^{a+1})$ равномерно ограничена по c' для всех $|c'| \leqslant 1$. Заметим, что невозмущенная часть гамильтониана (6) не зависит от c', и, следовательно, $H_c^0 = H_{c^0}^0$. Нормализуя невозмущенную часть гамильтониана (6) и используя интеграл $H_c = h$, осуществляем на нулевом изоэнергетическом уровне редукцию к одномерной системе, гамильтониан которой примет вид

$$
(7)\qquad K = (r\varepsilon)^a \Phi(\varphi) + K^*(t, r, \varphi, c', \varepsilon),
$$

где функции Φ и $K^* = O(\varepsilon^{a+1})$ периодичны по φ, а K^* 2π-периодична по t и равномерно ограничена по c' для всех $|c'| \leqslant 1$. Здесь r, φ — импульс и координата одномерной системы, t — переменная, играющая роль времени. Поскольку положение равновесия приведенной системы устойчиво и устойчивость определяется формами до порядка $2+a$ включительно в разложении гамильтониана (4), то функция $\Phi(\varphi)$ не обращается в нуль ни при каких значениях φ. Это позволяет в гамильтониане (7) перейти к переменным действие-угол и ввести отображение последования, которое будет удовлетворять условиям теоремы Мозера об инвариантных кривых [20]. В силу равномерной ограниченности по c' возмущающей части K^* размеры кольца, в котором существует инвариантная кривая, можно выбрать независящими от c'. Отсюда следует устойчивость по Ляпунову движения (2) относительно p, q, c, что и означает устойчивость изучаемого стационарного движения.

Замечание 1. Требование аналитичности гамильтониана H можно заменить условием существования частных производных до порядка $a+8$ по всем аргументам.

Теорема 3 позволила распространить на стационарные движения результаты по устойчивости положения равновесия автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы как в случае наличия резонансов четвертого, третьего [19], второго [8, 26] порядков, так и в случае отсутствия резонансов при невыполнении условия 3 теоремы 2 [18].

При исследовании устойчивости стационарных движений конкретных гамильтоновых систем можно ограничиться теоремами 1–3, так как они дают наиболее широкие достаточные условия устойчивости из известных в настоящее время. В ряде случаев дополнительную информацию о движениях можно получить с помощью теории бифуркаций стационарных движений, созданной А. Пуанкаре [33] и Н. Г. Четаевым [29, 30] и распространенной В. Н. Рубановским [21] на системы с известными первыми интегралами.

2. Равномерные вращения гиростата

В качестве конкретной механической системы для иллюстрации изложенных методов выберем гиростат с неподвижной точкой, находящийся в поле силы тяжести. Под *гиростатом* понимаем твердое тело, которое несет на себе роторы, вращающиеся вокруг своей оси динамической симметрии по инерции, либо с постоянной относительной скоростью. Движение роторов можно охарактеризовать гиростатическим моментом $\bar{\lambda}$, который в этом случае будет постоянным. Стационарными движениями такой системы являются равномерные вращения вокруг вертикали. Они определяются тем, что угловая скорость гиростата во все время движения сохраняет постоянное значение. В неподвижном пространстве вектор угловой скорости совпадает с вертикалью, а в пространстве, неизменно связанном с теломносителем, оси равномерного вращения образуют конус, указанный П. В. Харламовым [27]. При обращении в нуль гиростатического момента этот конус совпадает с конусом осей равномерного вращения твердого тела, найденным и исследованным О. Штауде [36].

Изучение устойчивости равномерных вращений гиростата начато В. Вольтерра [37], который подробно рассмотрел равномерные вращения гиростата по инерции. В. В. Румянцев [22] провел анализ этих вращений методом Ляпунова. В этой же работе получены достаточные условия устойчивости равномерных вращений тяжелого гиростата вокруг главной оси с произвольной угловой скоростью. Следуя работам [10, 25], продолжим исследование этих вращений с помощью теоремы 2.

Из анализа конуса осей равномерного вращения гиростата следует, что равномерное вращение гиростата вокруг главной оси с произвольной угловой скоростью $\bar{\omega}$ возможно лишь при условии, что эта ось несет центр масс и по этой же оси направлен вектор гиростатического момента $\bar{\lambda}$. Принимая эту ось в качестве первой главной оси, запишем функцию Гамильтона [6]

$$(8)\quad H = \frac{1}{2\sin^2\theta}\{a_1[(p_\psi - p_\varphi\cos\theta)\sin\varphi + p_\theta\cos\varphi\sin\theta - \lambda'\sin\theta]^2 + \\ + a_2[(p_\psi - p_\varphi\cos\theta)\cos\varphi - p_\theta\sin\varphi\sin\theta]^2\} + \frac{a_3 p_\varphi^2}{2} + \Gamma e\sin\varphi\sin\theta.$$

Здесь a_1, a_2, a_3 — компоненты гирационного тензора, Γ — произведение веса гиростата и расстояния центра масс до неподвижной точки, λ', e — проекции на первую ось соответственно вектора гиростатического момента и единичного вектора, направленного из неподвижной точки в центр масс гиростата. В качестве координат приняты углы Эйлера ψ, φ, θ: угол прецессии ψ определяет первый поворот подвижной системы вокруг третьей оси неподвижной системы, угол собственного вращения φ определяет последний поворот подвижной системы вокруг своей третьей оси и угол нутации θ определяет промежуточный поворот подвижной системы вокруг своей первой оси, занимающей положение после первого поворота. Импульсы $p_\psi, p_\varphi, p_\theta$ являются сопряженными каноническими переменными для координат ψ, φ, θ.

Чтобы избежать появления особенности в уравнениях возмущенного движения, следуя работе [7], изучаемое равномерное вращение гиростата с угловой скоростью ω' определим следующими значениями переменных:

$$(9)\quad p_\varphi = 0,\quad p_\theta = 0,\quad p_\psi = \frac{\omega'}{a_1} + \lambda',$$
$$\varphi = \frac{\pi}{2},\quad \theta = \frac{\pi}{2},\quad \psi = \omega' t + \psi_0.$$

Равномерное вращение, определяемое равенствами (9), является стационарным движением механической системы с гамильтонианом (8), и, поскольку приведенная система в данном случае двумерна, для исследования его устойчивости применима теорема 2. Отметим, что исследование на устойчивость равномерных вращений относительно $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3$, являющихся проекциями на подвижные оси вектора угловой скорости и вектора вертикали, эквивалентно исследованию на устойчивость соответствующих стационарных движений относительно $p_\varphi, p_\theta, p_\psi, \varphi, \theta$.

Для дальнейшего анализа введем безразмерные переменные x_1, x_2, y_1, y_2 и безразмерное время τ, полагая

$$(p_\theta, p_\varphi) = \sqrt{\Gamma/a_1}(x_1, x_2),\quad \left(\theta - \frac{\pi}{2}, \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = (y_1, y_2),\quad \tau = t\sqrt{\Gamma a_1}.$$

Уравнения возмущенного движения приведенной системы в безразмерном виде таковы

$$\frac{dx_1}{d\tau}=-\frac{\partial H}{\partial y_1},\quad \frac{dx_2}{d\tau}=-\frac{\partial H}{\partial y_2},\quad \frac{dy_1}{d\tau}=\frac{\partial H}{\partial x_1},\quad \frac{dy_2}{d\tau}=\frac{\partial H}{\partial x_2},$$

$$H=H_2+H_4+\ldots,$$

(10)
$$2H_2=ax_1^2+bx_2^2+(\omega^2+\omega\lambda+e)y_1^2+\left[(\omega+\lambda)\left(a(\omega+\lambda)-\omega\right)+e\right]y_2^2+$$
$$+2\left[a(\omega+\lambda)-\omega\right]x_1y_2+2\omega x_2y_1,$$

$$24H_4=(3\lambda^2+11\lambda\omega+8\omega^2-e)y_1^4+\left[(\omega+\lambda)\left(4\omega+3\lambda-4a(\omega+\lambda)\right)-\right.$$
$$\left.-e\right]y_2^4+6\left[(\omega+\lambda)\left(-2\omega-\lambda+2a(\omega+\lambda)\right)-e\right]y_1^2y_2^2+$$
$$+12(1-a)x_1^2y_2^2+12x_2^2y_1^2+$$
$$+4\left[4\omega+3\lambda-4a(\omega+\lambda)\right]x_1y_2^3+4(5\omega+3\lambda)x_2y_1^3+$$
$$+12(a-1)(\omega+\lambda)x_1y_1^2y_2+$$
$$+12\left[-2\omega-\lambda+2a(\omega+\lambda)\right]x_2y_1y_2^2+24(a-1)x_1x_2y_1y_2,$$

$$a=\frac{a_2}{a_1},\quad b=\frac{a_3}{a_1},\quad \omega=\frac{\omega'}{\sqrt{\Gamma a_1}},\quad \lambda=\sqrt{\frac{a_1}{\Gamma}}\lambda'.$$

Параметры ω,λ могут принимать произвольные значения, значения параметров a, b должны удовлетворять условиям, следующим из неравенств треугольника для моментов инерции. Область C изменения параметров a, b, — это область положительных значений a, b, ограниченная кривыми $a=b(a+1),\ b=a(b+1),\ a=b(a-1)$.

Для получения необходимых условий устойчивости запишем характеристическое уравнение линеаризованной системы с функцией H_2

(11)
$$\mu^4+\xi_1\mu^2+\xi_2\xi_3=0,$$
$$\xi_1=ab(\omega+\lambda)^2-(a+b)(\omega+\lambda)\omega+2\omega^2+e(a+b),$$
$$\xi_2=\omega^2(a-1)+a\omega\lambda+ae,\qquad \xi_3=\omega^2(b-1)+b\omega\lambda+be.$$

Необходимые условия устойчивости, следовательно, имеют вид

(12)
$$\xi_1>0,\qquad \xi_2\xi_3>0,$$
$$\xi_1^2-4\xi_2\xi_3=a^2b^2(\omega+\lambda)^4-2ab(a+b)(\omega+\lambda)^3\omega+$$
$$+(a+b)^2(\omega+\lambda)^2\omega^2+2abe(a+b)(\omega+\lambda)^2-2e(a+b)^2(\omega+\lambda)\omega-$$
$$-8abe(\omega+\lambda)\omega+8e(a+b)\omega^2+(a-b)^2>0.$$

В пространстве $O\xi_1\xi_2\xi_3$ область G выполнения необходимых условий устойчивости (12) состоит из двух подобластей G_1, G_2. Анализ области G в пространстве безразмерных параметров a, b, ω, λ представляет довольно сложную задачу. Однако можно утверждать, что, в отличие от случая твердого тела [7, 24], условия (12) выполнены для всех точек области C при соответствующем выборе величины λ. В области G_2, определяемой неравенствами $\xi_1 > 0$, $\xi_2 > 0$, $\xi_3 > 0$, квадратичная форма H_2 в разложении (10) является знакоопределенной, что позволяет применить теорему 1 и утверждать, что соответствующие этой области равномерные вращения устойчивы. Условия устойчивости совпадают с достаточными условиями, полученными В. В. Румянцевым [22]. В области G_1, для которой $\xi_1 > 0$, $\xi_2 < 0$, $\xi_3 < 0$, $\xi_1^2 - 4\xi_2\xi_3 > 0$, квадратичная форма H_2 является знакопеременной. Обозначим корни характеристического уравнения (11) через $\pm i a_1$, $\pm i a_2 (a_1 > a_2 > 0)$ и запишем каноническое преобразование, приводящее гамильтониан (10) к виду

$$(13)\qquad \tilde{H} = -ia_1 p_1 q_1 + ia_2 p_2 q_2 + \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_4=4} h_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} q_1^{\nu_3} q_2^{\nu_4} + \ldots$$

Получаем

$$\begin{aligned}
x_1 &= is_1(p_1 - q_1) + ic_1(q_2 - p_2),\\
x_2 &= s_2(p_1 + q_1) + c_2(q_2 + p_2),\\
y_1 &= s_3(p_1 + q_1) + c_3(q_2 + p_2),\\
y_2 &= is_4(p_1 - q_1) + ic_4(q_2 - p_2),\\
s_1 &= a_1\{a_1^2 - [a(\omega+\lambda) - \omega][b(\omega+\lambda) - \omega] - be\}w,\\
s_2 &= \{(\omega^2 - a_1)[a(\omega+\lambda) - \omega] + a\omega e\}w,\\
s_3 &= \{aa_1^2 - b\omega[a(\omega+\lambda) - \omega] - abe\}w,\\
s_4 &= a_1[ab(\omega+\lambda) - \omega(a+b)]w,\\
w^2 &= a_2\{aa_1^2 - b\omega[a(\omega+\lambda) - \omega] - abe\}^{-1}.
\end{aligned}$$

Формулы для c_1, c_2, c_3, c_4 находятся из выражений для s_1, s_2, s_3, s_4 заменой a_1 на a_2 и a_2 на a_1.

Для решения вопроса об устойчивости изучаемых движений необходимо вычислить детерминант

$$(14)\qquad D = \beta_{11}a_2^2 + 2\beta_{12}a_1a_2 + \beta_{22}a_1^2.$$

Коэффициенты $\beta_{11}, \beta_{22}, \beta_{12}$ равны коэффициентам при $p_1^2q_1^2, p_2^2q_2^2, 2p_1q_1p_2q_2$ в форме $2i\tilde{H}$, где гамильтониан $\tilde{H}$ определен выражением (13).

Имеем

$$2a_1a_2(a_2^2-a_1^2)\beta_{11} = \frac{3\lambda^2+11\lambda\omega+8\omega^2-e}{2}s_3^4+2(5\omega+3\lambda)s_2s_3^3+$$
$$+\frac{(\omega+\lambda)\big(4\omega+3\lambda-4a(\omega+\lambda)\big)-e}{2}s_4^2+2\big(4\omega+3\lambda-4a(\omega+\lambda)\big)s_1s_4^3+$$
$$+\big[(\omega+\lambda)\big(-2\omega-\lambda+2a(\omega+\lambda)\big)-e\big]s_3^2s_4^2+6(1-a)s_1^2s_4^2+6s_2^2s_3^2+$$
$$+2(\omega+\lambda)(a-1)s_1s_4s_2^3+2\big(-2\omega-\lambda+2a(\omega+\lambda)\big)s_2s_3s_4^2+$$
$$+4(a-1)s_1s_2s_3s_4,$$

$$2a_1a_2(a_2^2-a_1^2)\beta_{12} = \frac{3\lambda^2+11\lambda\omega+8\omega^2-e}{2}s_3^2c_3^2+(s_3c_2+c_3s_2)^2+$$
$$+\frac{(\omega+\lambda)\big(-2\omega-\lambda+2a(\omega+\lambda)\big)-e}{2}(s_3^2c_4^2+c_3^2s_4^2)+2s_2s_3c_2c_3+$$
$$+\frac{(\omega+\lambda)\big(4\omega+3\lambda-4a(\omega+\lambda)\big)-e}{2}s_4^2c_4^2+(1-a)\big((s_4c_1+s_1c_4)^2+$$
$$+2s_1s_4c_1c_4\big)+\big(4\omega+3\lambda-4a(\omega+\lambda)\big)(s_1c_4+s_4c_1)s_4c_4+(5\omega+3\lambda)(s_2c_3+$$
$$+s_3c_2)s_3c_3+(a-1)(\omega+\lambda)(s_1s_4c_3^2+c_1c_4s_3^2)+\big(-2\omega-\lambda+2a(\omega+$$
$$+\lambda)\big)(s_2s_3c_4^2+c_2c_3s_4^2)+2(a-1)(s_2s_3c_1c_4+s_1s_4c_2c_3).$$

Выражение для β_{22} получается из формулы для β_{11}, если в ней поменять местами s_k и c_k.

Детерминант (14) при $\lambda=0, a=1, e=-1$ вычислен в работах [7, 24]. С точностью до постоянного множителя его значение таково

$$(15)\qquad D=(b-1)^2\omega^8+2(b-1)(b^2+4b-7)\omega^6+(b-1)(b^3+$$
$$+17b^2-45b-13)\omega^4+2(5b^4-27b^3+29b^2+7b+10)\omega^2+$$
$$+2b(4-b)(b-1)^2.$$

Из представления (15) следует, что $D(a,b,\lambda,\omega)\not\equiv 0$, поэтому равенство $D(a,b,\lambda,\omega)=0$ выделяет в пространстве $Oab\lambda\omega$ некоторые многообразия. Резонансные соотношения $a_1=0, a_2=0, a_1=a_2, a_1=3a_2$ также выделяют в пространстве $Oab\lambda\omega$ некоторые многообразия. Равномерные вращения, соответствующие выделенным многообразиям, исключаются из рассмотрения. Относительно остальных равномерных вращений, принадлежащих области G_1, на основании теоремы 2 заключаем, что эти движения устойчивы. Суммируя результат, получаем следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть гиростат вращается равномерно вокруг главной оси, несущей центр масс, по которой направлен вектор гиростатического момента. Тогда в расширенном параметрическом пространстве* $Oab\lambda\omega$ *область устойчивости представляет собой область* G *выполнения необходимых условий устойчивости, из которой исключены многообразия, соответствующие резонансным соотношениям и условию равенства нулю детерминанта* (14).

Сравнивая полученный результат с исследованием равномерных вращений вокруг главной оси твердого тела [7, 24], можно утверждать, что наличие в теле ротора при соответствующем выборе его вращения оказывает на движение тела-носителя стабилизирующее влияние. Так, неустойчивые вращения тела вокруг средней главной оси можно выбором гиростатического момента сделать устойчивыми. Более того, любое равномерное вращение твердого тела можно соответствующим выбором гиростатического момента сделать устойчивым. Это следует из того, что при достаточно большом значении модуля вектора кинетического момента ротора достаточные условия устойчивости выполнены при любом фиксированном значении угловой скорости и любых значениях моментов инерции.

3. Устойчивость интегралов движения в динамике твердого тела

Для исследования устойчивости при постоянно действующих возмущениях равномерных вращений тяжелого твердого тела необходимо рассмотреть поведение интегралов уравнений движения твердого тела в случаях, близких к интегрируемым. Движение определяется функцией Гамильтона

$$H = H_0 + H_1, \tag{16}$$

где H_0 описывает движение твердого тела в одном из трех случаев: Эйлера, Лагранжа, Ковалевской; H_1 — возмущенная часть гамильтониана, причем возмущения таковы, что они сохраняют гамильтонову структуру уравнений и интеграл площадей. К рассматриваемой задаче применима теорема А. Н. Колмогорова–В. И. Арнольда [2, 13], и справедлива теорема.

Теорема 5. *При движении твердого тела с функцией Гамильтона* (16), *если возмущение* H_1 *достаточно мало, интеграл* $V = \mathrm{const}$ *устойчив в том смысле, что для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что если* $|H_1| \leqslant \delta$, *то на траекториях системы с гамильтонианом* (16) *выполнено* $|V(t) - V(0)| < \varepsilon$ *для всех* $t \in (-\infty, \infty)$. *Здесь* V — *интеграл невозмущенной задачи, отличный от интеграла энергии и площадей.*

Доказательство. Поскольку возмущения предполагают такими, что уравнения движения с гамильтонианом (16) допускают интеграл площадей, фиксируя постоянную этого интеграла, переходим к системе с двумя степенями свободы. Так как функция Гамильтона в случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской получается из функции Гамильтона для общего случая непрерывным изменением параметров твердого тела, то основное условие теоремы А. Н. Колмогорова–В. И. Арнольда

$$\det\left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j}\right| \neq 0 \tag{17}$$

достаточно проверить, выбрав параметры тела такими, чтобы одновременно удовлетворить условиям Эйлера, Лагранжа и Ковалевской, т. е. в формуле (18) положить

$$a_1 = a_2, \quad \dot{a}_3 = 2a_1, \quad \Gamma = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \tag{18}$$

При условиях (18) функцию H_0 легко записать в переменных действие-угол:

$$H_0 = \tfrac{1}{4}a_3(\mathscr{I}_1^2 + \mathscr{I}_2^2).$$

Переменная действия $\mathscr{I}_3$, дающая интеграл площадей $\mathscr{I}_3 = \text{const}$, не входит в выражение гамильтониана H_0. Условие (17) принимает теперь вид

$$\det\left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial \mathscr{I}_i \partial \mathscr{I}_j}\right| = \frac{a_3^2}{4} \neq 0.$$

Таким образом, к исследуемой задаче применима теорема А. Н. Колмогорова–В. И. Арнольда, откуда, поскольку система двумерна, и следует утверждение теоремы.

Отметим, что для случая Эйлера данное утверждение впервые доказано В. И. Арнольдом [2].

Для уравнений движения гиростата известны два случая интегрируемости

I. *Случай Жуковского* $\Gamma = 0$. Интеграл

$$p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}(p_\psi^2 + p_\varphi^2 - 2p_\varphi p_\psi \cos\theta) = M^2 = \text{const}.$$

2. *Случай Лагранжа* $a_1 = a_2, e_1 = e_2 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Интеграл

$$p_\varphi = m = \text{const}.$$

Как и в случае твердого тела функцию Гамильтона представим в виде (16). Справедливы теоремы.

Теорема 6. *Если движение гиростата описывается функцией* (16), *причем* H_0 — *функция Гамильтона в случае Жуковского, то для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что как только* $|H_1| \leqslant \delta$, *то* $|M(t) - M(0)| < \varepsilon$ *для всех* $t \in (-\infty, \infty)$.

Теорема 7. *Если движение гиростата описывается функцией* (16), *причем* H_0 — *функция Гамильтона в случае Лагранжа, то для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что как только* $|H_1| \leqslant \delta$, *то* $|\omega_3(t) - \omega_3(0)| < \varepsilon$ *для всех* $t \in (-\infty, \infty)$.

Доказательство этих теорем следует из теоремы 5, если учесть, что при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ функция Гамильтона для гиростата обращается в функцию Гамильтона для твердого тела.

С использованием теорем 5–7 получены теоремы об устойчивости равномерных вращений твердого тела и гиростата при некоторых постоянно действующих возмущениях [23]. Например.

Теорема 8 (А. Я. Савченко [23]). *Все равномерные вращения твердого тела, устойчивость которых доказана построением функции Ляпунова из известных интегралов уравнений движения, устойчивы и при постоянно действующих возмущениях, обусловленных малым постоянным гиростатическим моментом, либо малой однородной завихренностью жидкости в эллипсоидальной полости.*

4. Управляемость нелинейных механических систем

По постановкам задач, применяемым методам и сфере приложения к теории устойчивости примыкает теория управления. Перейдем к изучению вопросов управляемости, наблюдаемости, идентифицируемости механических систем, которые после доклада Р. Е. Калмана [5] на первом конгрессе ИФАК выделились в самостоятельные разделы теории управления.

Будем рассматривать механические системы, изменение которых во времени описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{19}$$

где $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ — фазовый вектор или вектор состояния системы, $u = (u^1, u^2, \ldots, u^m)$ — вектор управления, являющийся ограниченной кусочно-непрерывной вектор-функцией времени t. Система (19) рассматривается в некоторой области $D \subseteq R^n$ на промежутке времени $T = [t_0, \infty)$. Считаем, что функция $f(x, u)$ такова, что при выбранных x_0, $u(t)$ выполнены условия существования и единственности решения задачи Коши.

Для системы (19), следуя Н. Н. Красовскому [15], ставится задача управления.

Задача управления. Заданы начальное и конечное состояния $x_0, x_1 \in D$ системы (19). Требуется найти управление $u(t)$ такое, что соответствующее ему решение системы (19) удовлетворяет условиям $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$ при некотором $t_1 \geqslant t_0$.

Свойство управляемости определим следующим образом.

Определение 2. Система (19) называется *управляемой в области* $D \subseteq R^n$, если для любых двух точек $x_0, x_1 \in D$ существует управление $u(t)$ такое, что соответствующее ему решение $x(t)$ системы (19) удовлетворяет условиям $x(t) \in D$ для $t \in [t_0, t_1]$, $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$ при некотором $t_1 \geqslant t_0$.

Для изучения свойства управляемости системы проведем анализ множества скоростей в каждой точке, который будет существенно опираться на понятие, вводимое следующим определением.

Определение 3. Гладкое многообразие $\mathfrak{N} \subset D$ с кусочно гладкой границей Γ назовем *ориентированным относительно системы* (19) *в области* D, если в каждой его внутренней точке вектор $f(x, u)$ для всех $u \in R^m$ принадлежит касательному пространству к $\mathfrak{N}$ в данной точке, а в каждой точке границы Γ, из которой исключены точки границы области D, вектор $f(x, u)$ либо является касательным к Γ в этой точке, либо направлен во внутренность многообразия $\mathfrak{N}$. В точках границы Γ к касательным векторам отнесем векторы, являющиеся односторонними производными функций, задающих кривые, лежащие в Γ.

Справедлива теорема.

Теорема 9. *Пусть система* (19) *управляема в некоторой области* $D \subseteq R^n$, *функция* $f(x, u)$ *является непрерывно дифференцируемой по* x, u *для* $(x, u) \in D \times R^m$. *Тогда в области* D *отсутствует гладкое многообразие* $\mathfrak{N} \subset D$ *с кусочно гладкой границей* Γ, *ориентированное относительно системы* (19).

Доказательство. Предположим, что вопреки утверждению теоремы, в области D существует гладкое многообразие $\mathfrak{N} \subset D$ с кусочно гладкой границей Γ, ориентированное относительно системы (19). Сначала рассмотрим случай, когда вектор $f(x, u)$ во всех точках границы Γ является либо касательным к Γ, либо направлен во внешность многообразия $\mathfrak{N}$. Найдем траекторию $x(t)$ системы (19), удовлетворяющую условиям $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$, где t_1 — некоторый момент времени $t_1 \geqslant t_0$, x_1 является внутренней точкой многообразия $\mathfrak{N}$, а $x_0 \notin \mathfrak{N}$. По предположению такая траектория существует и в некоторый момент $t_* \in [t_0, t_1]$ она попадает в точку $x(t_*) = x_*$, принадлежащую границе Γ, либо являющуюся внутренней точкой многообразия $\mathfrak{N}$ (последний вариант возможен, если размерность $\mathfrak{N}$ меньше n). В первом варианте при дальнейшем увеличении времени траектория либо остается на границе Γ, либо, вообще, уходит из многообразия $\mathfrak{N}$ в область D, и, таким образом, попасть в точку x_1 не может. Попасть же во внутреннюю точку многообразия $\mathfrak{N}$ за конечный промежуток времени вдоль траектории системы, начинающейся в точке x_0, нельзя, т. к. в малой окрестности точки x_* справедлива оценка $|\dot{y}| \leqslant k|y|$, где y — координата, отсчитываемая от точки x_* в направлении, ортогональном $\mathfrak{N}$, k — некоторая постоянная. Отсюда следует, что $y \to 0$ при $t \to \infty$, т. е. точка x_* не может быть достигнута за конечный промежуток времени. Совместно с выводом, полученным при рассмотрении первого варианта, это показывает, что задача управления для выбранных точек не имеет решения, и, следовательно, система (19) неуправляема в области D, что противоречит исходному предположению. Это противоречие доказывает утверждение теоремы в первом случае. Второй возможный случай рассматривается аналогично, только точки x_0, x_1 выбираются иначе: x_0 является внутренней точкой многообразия $\mathfrak{N}$, а $x_1 \notin \mathfrak{N}$.

Данная теорема сводит решение задачи об управляемости системы к отысканию геометрических объектов с указанными в определении 3 свойствами. Эта задача может быть эффективно решена в том частном случае, когда многообразие $\mathfrak{N}$ обладает тем свойством, что его размерность меньше n и в каждой его точке вектор скорости системы (19) лежит в касательном пространстве к нему в данной точке. Тогда при любом допустимом управлении траектории системы, имеющие общую точку с таким многообразием, целиком ему принадлежат. В теории дифференциальных уравнений такие многообразия называют инвариантными. Сохраним этот термин и для систем управления.

Определение 4. Многообразие $\mathfrak{M} \subset D$ называется *инвариантным многообразием системы управления*, если при любых допустимых управлениях траектория, являющаяся решением системы и принадлежащая этому многообразию в некоторый момент времени $t \in T$, принадлежит этому многообразию и при всех остальных значениях $t \in T$.

Необходимо отметить, что для обыкновенных дифференциальных уравнений отдельная траектория является одномерным инвариантным многообразием. Поэтому для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в области задания всегда имеются инвариантные многообразия (а именно, одномерные). Хотя в задачах управления понятие инвариантного многообразия сохраняет свой геометрический смысл: по-прежнему его можно понимать как некоторое многообразие, „сотканное" из траекторий системы, но система управления может не иметь такого многообразия, и процедура его отыскания усложняется.

Изучение вопроса существования инвариантного многообразия начнем с анализа множества V_x скоростей системы (19) в произвольной точке $x \in D$. Очевидно, что для существования инвариантного многообразия размерность его линейной оболочки LV_x должна быть меньше n: $\dim LV_x = s < n$. Если неравенство $s < n$ выполнено в точках некоторого множества $M \subset D$, то инвариантное многообразие, если оно существует, принадлежит множеству M. В случае, когда условие $s < n$ выполнено для всех $x \in D$, в области D может существовать инвариантное многообразие размерности, не меньшей s. Из проведенного анализа и теоремы 9 получаем следующий результат.

Теорема 10. *Если система* (19) *управляема в области* D, *то выполнено одно из следующих условий*:

1. $\dim LV_x = n$ *для всех* $x \in D$,

2. $\dim LV_x \leqslant s < n$ *для* $x \in M \subset D$, *но множество* M *не содержит инвариантного многообразия системы* (19),

3. $\dim LV_x \leqslant s < n$ *для всех* $x \in D$, *но в области* D *не существует инвариантного многообразия системы* (19).

Здесь через LV_x обозначена линейная оболочка множества скоростей системы (19) в произвольной точке $x \in D$.

5. Метод инвариантных соотношений

Для изучения с помощью теоремы 10 конкретных систем управления надо уметь решать вопрос о существовании в области D инвариантных многообразий, а также проверять, содержит ли данное множество инвариантное многообразие или нет. Приведем основные определения и теоремы метода инвариантных соотношений, составляющие два способа решения указанной проблемы для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Начнем с изложения результатов Т. Леви-Чивита [16].

Определение 5. Конечное соотношение между x и t

$$f(x, t) = 0 \tag{20}$$

называется *инвариантным по отношению к заданной системе обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{21}$$

если решения системы, которые удовлетворяют этому соотношению вначале, т. е. при частном значении t, будут удовлетворять ему также и при всяком другом значении этого переменного.

Теорема 11 (Т. Леви-Чивита [16]). *Для того, чтобы функция* (20) *была инвариантным соотношением системы* (21), *необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла линейному дифференциальному уравнению в частных производных*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda f, \tag{22}$$

где λ есть некоторая функция от x, t, которая не имеет особенностей в рассматриваемой области.

Определение инвариантного соотношения и соответствующее характеристическое дифференциальное уравнение (22) допускают естественное обобщение.

Определение 6. Система из $m \leqslant n$ конечных соотношений между x и t

$$f_r(x, t) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m) \tag{23}$$

называется *инвариантной относительно системы обыкновенных дифференциальных уравнений* (21), если она будет удовлетворяться при каком угодно значении t всяким решением $x(t)$ системы (21), начальные значения которого (т. е. соответствующие частному значению t) ей удовлетворяют.

Теорема 12 (Т. Леви-Чивита [16]). *Для того, чтобы система функций* (23) *была системой инвариантных соотношений уравнений* (21), *необходимо и достаточно, чтобы функции $f_r(x, t)$ удовлетворяли системе линейных дифференциальных уравнений в частных производных*

$$\frac{\partial f_r}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f_r}{\partial x_i} = \sum_{s=1}^{m} \lambda_{rs} f_s \qquad (r = 1, 2, \ldots, m), \tag{24}$$

где λ_{rs} есть некоторые функции от x, t, не имеющие особенностей в рассматриваемой области.

Перейдем к изложению результатов П. В. Харламова [28], составляющих второй способ построения инвариантных многообразий. В связи с системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{25}$$

любой функции $f(x)$ сопоставляется последовательность $f^{(i)}(x)$ ($i = 0, 1, 2, \ldots$), члены которой определены так

$$f^{(i)}(x) = \sum_{j=1}^{n} X_j(x) \frac{\partial f^{(i-1)}}{\partial x_j}, \qquad f^{(0)}(x) = f(x), \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{26}$$

Определение 7. Если многообразие

$$\mathfrak{M}\colon f^{(i)}(x) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{27}$$

не пусто, оно называется *инвариантным многообразием* дифференциальных уравнений (25), а соотношение $f(x) = 0$ — *инвариантным соотношением* этих уравнений.

В случае непустого $\mathfrak{M}$ в системе конечных уравнений (27) имеется $l \leqslant n$ функционально независимых членов. При $l = n$ многообразие $\mathfrak{M}$ представляет собой множество особых точек уравнений (25): $X_i(x) = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). В дальнейшем предполагается $l < n$.

Теорема 13 (П. В. Харламов [28]). *Инвариантное многообразие $\mathfrak{M}$ определено первыми l уравнениями* (26).

Пусть, теперь, рассматривается система инвариантных соотношений

$$f_s(x) = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, k. \tag{28}$$

Случай, когда пересечение порождаемых ими инвариантных многообразий пусто $\prod\limits_{s=1}^{k} \mathfrak{M}_s = \varnothing$, особого интереса не представляет. Уравнения, определяющие многообразия $\mathfrak{M}_s$

$$f_s^{(i)}(x) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, l_s - 1, \tag{29}$$

в этом случае несовместны. При объединении уравнений (29) в одну систему может оказаться, что не все уравнения последней функционально независимы. После исключения зависимых уравнений определяющая многообразие $\mathfrak{M} = \prod\limits_{s=1}^{k} \mathfrak{M}_s$ система записывается так

$$\mathfrak{M} = \prod_{s=1}^{k} \mathfrak{M}_s\colon f_s^{(i)}(x) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, l_s' - 1, \qquad s = 1, 2, \ldots, k, \tag{30}$$

причем предполагается $\sum\limits_{s=1}^{k} l_s' < n$.

Теорема 14 (П. В. Харламов [28]). *Инвариантное многообразие $\mathfrak{M}$ дифференциальных уравнений* (25), *соответствующее системе инвариантных соотношений* (28), *определяется уравнениями* (30).

Проблема отыскания инвариантных многообразий систем управления осложняется тем, что в каждой точке фазового пространства задан не один, а целое множество векторов скорости системы, соответствующих различным значениям $u \in R^m$. Это необходимо учитывать при построении характеристических уравнений (22), (24) в теоремах 11, 12 и при вычислении производных (26) в силу уравнений движения в теоремах 13, 14. Как следует из теоремы 10, вопрос об отыскании инвариантных многообразий в задачах управления возникает лишь в том случае, если размерность линейной оболочки множества скоростей системы управления меньше размерности фазового пространства либо во всей области D задания системы, либо на некотором ее подмножестве M. При выполнении этих условий во всех точках области D или множества M вектор $f(x, u)$ для всех $u \in R^m$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_s(x)$, являющихся базисом линейной оболочки LV_x. Векторы $g_i(x)$ можно выбрать таким образом, что они будут непрерывно дифференцируемы по x столько же раз, как и исходный вектор $f(x, u)$. Каждый из векторов $g_i(x)$ определяет систему

$$\dot{x} = g_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{31}$$

которую назовем *базисной системой*. Ясно, что многообразие, являющееся инвариантным для каждой системы (31), является инвариантным многообразием исходной системы (19). Таким образом, задача отыскания инвариантного многообразия системы управления сведена к задаче отыскания инвариантного многообразия, общего для семейства базисных систем (31). Это позволяет следующим образом перенести результаты теорем 11–14 на системы управления.

Теорема 15. *Пусть в каждой точке области D выполнено условие $\dim LV_x \leqslant s < n$ и вектор скорости системы представляется в виде линейной комбинации векторов $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_s(x)$. Тогда инвариантное многообразие системы (19) определяется равенством $\varphi(x) = 0$, где $\varphi(x)$ — решение системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных*

$$\sum_{j=1}^{n} g_i^j(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} = \lambda_i(x)\varphi \quad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

функции $\lambda_i(x)$ определены и не имеют особенностей для всех $x \in D$.

Теорема 16. *Пусть множество точек $M \subset D$, определенное равенствами $F_1(x) = 0, F_2(x) = 0, \ldots, F_p(x) = 0$, обладает свойствами*

1. $\operatorname{grad} F_i(x)$ *линейно независимы для $x \in M$,*

2. *в каждой точке $x \in M$ выполнено условие $\dim LV_x \leqslant s < n$, и векторы скорости системы представляются в виде линейной комбинации векторов $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_s(x)$.*

Тогда инвариантное многообразие системы (19), *принадлежащее множеству M, определено уравнениями*

$$F_1(x)=0,\ F_{111}(x)=0,\ \ldots,\ F_{11n-1}(x)=0,\ \ldots,\ F_{1s1}(x)= \\ =0,\ \ldots,\ F_{1sn-1}(x)=0,\ \ldots,\ F_{psn-1}(x)=0,$$

где $F_{ijk}=\sum_{q=1}^{n}\frac{\partial F_{ijk-1}}{\partial x^q}g_j^q$ $(i=1,2,\ldots,p;\ j=1,2,\ldots,s;\ k=1,2,\ldots \ldots,n-1)$.

6. Необходимые условия управляемости

Применим метод инвариантных соотношений и получим из теоремы 10 необходимые условия управляемости системы (19). Для этого потребуется следующая геометрическая лемма.

Лемма 1. *Необходимым и достаточным условием того, что поверхность $x=x(u)$, где $x\in D\subset R^n$, $u\in R^m$, лежит в s-мерном подпространстве $R^s\subset R^n$, является*

$$\operatorname{rank}\left(x(0),\frac{\partial x}{\partial u^1},\ldots,\frac{\partial x}{\partial u^m},\frac{\partial^2 x}{\partial (u^1)^2},\frac{\partial^2 x}{\partial u^1\partial u^2},\ldots,\frac{\partial^n x}{\partial u^{m-1}\partial (u^m)^{n-1}},\frac{\partial^n x}{\partial (u^m)^n}\right)\leqslant s$$

для всех $u\in R^m$.

Используя утверждения этой леммы и теорем 15, 16, из теоремы 10 получаем необходимые условия управляемости.

Теорема 17. *Пусть функция $f(x,u)$ n раз непрерывно дифференцируема по x, и для $(x,u)\in D\times R^m$. Если система* (19) *управляема в области D, то выполнено одно из следующих условий*

1. *для каждого $x\in D$ существует значение $u^*\in R^m$ такое, что* $\operatorname{rank}\Phi(x,u^*)=n$, *где*

(32)
$$\Phi(x,u^*)=\left(f(x,0),\frac{\partial f(x,u)}{\partial u^1},\ldots,\frac{\partial f(x,u)}{\partial u^m},\frac{\partial^2 f(x,u)}{\partial (u^1)^2},\ldots,\frac{\partial^n f(x,u)}{\partial (u^m)^n}\right).$$

2. $\operatorname{rank}\Phi(x,u)\leqslant s<n$ *для $u\in R^m$ на множестве M точек области D, определяемом равенствами $F_1(x)=0,\ F_2(x)=0,\ \ldots,\ F_p(x)=0$, вектор $f(x,u)$ на множестве M представляется в виде линейной комбинации векторов $g_1(x),\ g_2(x),\ \ldots,\ g_s(x)$ и система уравнений*

(33) $$F_{ijk}(x)=0\quad (i=1,2,\ldots,p;\ j=1,2,\ldots,s;\ k= \\ =0,1,\ldots,n-1)$$

несовместна для $x\in D$, здесь $F_{ijk}(x)=\sum_{q=1}^{n}\frac{\partial F_{ijk}(x)}{\partial x^q}g_j^q(x)$, $F_{ij0}(x)=F_i(x)$;

3. $\operatorname{rank} \Phi(x, u) \leqslant s < n$ *для всех* $(x, u) \in D \times R^m$ *и система линейных уравнений в частных производных*

$$\sum_{j=1}^{n} g_i^j(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} = \lambda_i(x) \varphi \quad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{34}$$

не имеет решений, обращающихся в нуль в области D, *здесь* $g_1(x)$, $g_2(x), \ldots, g_s(x)$ — *векторы, линейной комбинацией которых представляется вектор* $f(x, u)$ *для* $(x, u) \in D \times R^m$, $\lambda_i(x)$ — *некоторые функции переменной* x, *определенные и не имеющие особенностей для всех* $x \in D$.

Данная теорема дает необходимые условия управляемости, которые могут быть эффективно проверены. Проверка условия 1 сводится к вычислению ранга матрицы (32), что наиболее просто делается последовательной проверкой независимости ее вектор-столбцов. Наиболее сложным моментом проверки условий 2, 3 является выбор векторов $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_s(x)$. В качестве этих векторов могут быть приняты вектор-столбцы (32) при том значении u^*, при котором они линейно независимы в $M \subset D$ либо в D. Проверка условия 2 состоит в установлении несовместности системы алгебраических уравнений (33). Условие 3 может быть проверено с помощью скобок Якоби.

Обозначим $\partial\varphi/\partial x^j = p_j$, $\lambda_i \varphi = g_i^0$ и перепишем систему (34) в виде

$$G_i(\varphi) = \sum_{j=1}^{n} g_i^j p_j - g_i^0 = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{35}$$

где, по предположению, уравнения линейно независимы относительно $p_1, \ldots, p_n$. Введем в рассмотрение скобку Якоби

$$[G_i, G_j] = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial G_i}{\partial p_k} \frac{\partial G_j}{\partial x^k} - \frac{\partial G_j}{\partial p_k} \frac{\partial G_i}{\partial x^k} \right) + g_i^0 \frac{\partial G_j}{\partial \varphi} - g_j^0 \frac{\partial G_i}{\partial \varphi},$$

вычисленную с учетом равенств (35). При дифференцировании считается, что переменные $x^1, x^2, \ldots, x^n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ независимы, φ — функция от x, $\partial\varphi/\partial x^i = p_i$.

Анализ системы (35) проводится в несколько этапов. На первом к уравнениям (35) присоединяются все уравнения $[G_i, G_j] = 0$. Из полученной системы исключаются линейно зависимые относительно $p_1, p_2, \ldots, p_n$ уравнения. Каждое исключенное уравнение дает некоторое дифференциальное уравнение в частных производных на функции $\lambda_i(x) (i = 1, 2, \ldots, s)$

$$\omega(\lambda, x) = 0. \tag{36}$$

Может случиться, что каждое из присоединенных уравнений является следствием ранее данных. Такая система называется *замкнутой* и имеет решение. Исследование сводится к изучению решений системы (35) для произвольных функций $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$, удовлетворяющих уравнениям (36).

Если в полученной системе число уравнений меньше n и система незамкнута, то операция присоединения скобок Якоби повторяется до тех пор, пока система не станет замкнутой, либо пока число уравнений в ней не будет равно n. В последнем случае, при условии существования функций λ_i, удовлетворяющих уравнениям (36), решение системы (35) имеет вид $\varphi = c\exp U(x)$, где $U(x)$ — некоторая функция переменной x, $c = \mathrm{const}$, и, значит, условие 3 теоремы 17 выполнено. Если же функций λ, удовлетворяющих уравнениям (36) не существует, но система (35) несовместна, и условие 3 теоремы 17 также выполнено.

Таким образом, после конечного числа действий либо будет доказано выполнение условия 3 теоремы 17 (число независимых уравнений в пополненной системе равно n), либо задача сведется к изучению вопроса об обращении в нуль решений системы (34) при различных функциях $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$, удовлетворяющих уравнениям (36), если пополненная система окажется замкнутой.

Замечание 2. Для линейных систем условия теоремы 17 являются не только необходимыми, но и достаточными. Для нелинейных это не так, что может быть показано на примере следующей системы $\dot{x} = 1 + e^y, \dot{y} = u$.

Замечание 3. Использование в задаче управления первых интегралов систем управления [32, 34] дает более ограничительные условия. Кроме того, при этом из рассмотрения выпадают системы, у которых размерность вектора управления на единицу меньше размерности фазового пространства.

7. Управление угловой скоростью и ориентацией твердого тела

В качестве применения полученных результатов к конкретным механическим системам рассмотрим несколько задач управления движением твердого тела в поле притяжения неподвижного центра с помощью реактивной силы. Предполагается, что в теле имеется один жестко укрепленный управляющий орган, сила тяги которого изменяется. В простейшей постановке, когда уравнения движения центра масс и движения тела относительно центра масс разделяются, будут рассмотрены отдельно управление угловой скоростью (задача 1) и управление ориентацией (задача 2). В ограниченной постановке, когда центр масс движется по круговой орбите, будет рассмотрено управление ориентацией тела (задача 3).

Задача 1. *Исследовать управляемость системы*

$$\dot{\omega}_1 = a_1\omega_2\omega_3 + a_1 u, \qquad \dot{\omega}_2 = a_2\omega_3\omega_1 + a_2 u, \qquad \dot{\omega}_3 = a_3\omega_1\omega_2 + a_3 u; \tag{37}$$

здесь $a_1 = \dfrac{A_2 - A_3}{A_1}$, $a_2 = \dfrac{A_3 - A_1}{A_2}$, $a_3 = \dfrac{A_1 - A_2}{A_3}$; A_1, A_2, A_3 *— главные центральные моменты инерции тела;* ω_1, ω_2, ω_3, a_1, a_2, a_3 *— проекции на главные центральные оси вектора угловой скорости и единичного вектора момента реактивной силы,* u *— величина момента реактивной силы.*

В данном случае $\operatorname{rank}\Phi(x, u) \leqslant 2 < 3$ во всем пространстве и вектор скорости представляется в виде суммы вектора $(a_1\omega_2\omega_3, a_2\omega_3\omega_1, a_3\omega_1\omega_2)$ и вектора (a_1, a_2, a_3). Поэтому из третьего условия теоремы 17 следует, что необходимым условием управляемости является отсутствие обращающихся в нуль решений системы уравнений

$$\begin{aligned} G_1 &= a_1\omega_2\omega_3 p_1 + a_2\omega_3\omega_1 p_2 + a_3\omega_1\omega_2 p_2 - \mu_1 w = 0, \\ G_2 &= a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 = 0, \qquad p_i = \partial w/\partial\omega_i \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \tag{38}$$

Для нахождения решения этой системы используем скобки Якоби. Находим

$$\begin{aligned} G_3 = [G_2, G_1] = a_1(a_2\omega_3 + a_3\omega_2)p_1 + a_2(a_3\omega_1 + a_1\omega_3)p_2 + \\ + a_3(a_1\omega_2 + a_2\omega_1)p_3 - \mu_2 w, \end{aligned}$$

здесь μ_1, μ_2, μ_3 — некоторые функции переменных ω_1, ω_2, ω_3.

Определитель Δ системы $G_1 = 0, G_2 = 0, G_3 = 0$, рассматриваемой как система линейных уравнений относительно p_1, p_2, p_3 равен

$$\begin{aligned} \Delta = a_1a_2a_3(a_2\omega_3 - a_3\omega_2)\omega_1^2 + a_2a_3a_1(a_3\omega_1 - a_1\omega_3)\omega_2^2 + \\ + a_3a_1a_2(a_1\omega_2 - a_2\omega_1)\omega_3^2. \end{aligned}$$

При общих предложениях относительно параметров системы (37) имеем $\Delta \not\equiv 0$, поэтому система (38) не имеет обращающихся в нуль решений, и условие 3 теоремы 17 выполнено. Тождество $\Delta \equiv 0$, которое влечет за собой невыполнение указанного условия, имеет место лишь в случае, когда момент реактивной силы направлен по главной оси эллипсоида инерции. В этом случае система (37) неуправляема. При остальных значениях параметров для системы (37) выполнено необходимое условие управляемости. Нетрудно показать, например с помощью функции Грина, что система (37) действительно управляема в последнем случае. Таким образом, полученное условие оказалось не только необходимым, но и достаточным.

Перейдем к рассмотрению вопросов управления ориентацией твердого тела, для чего к динамическим уравнениям (37) добавим кинематические уравнения для углов Эйлера φ, ψ, θ.

Задача 2. *Исследовать управляемость системы*

$$
\begin{gathered}
\dot\omega_1 = a_1\omega_2\omega_3 + \alpha_1 u, \qquad \dot\omega_2 = a_2\omega_3\omega_1 + \alpha_2 u, \qquad \dot\omega_3 = a_3\omega_1\omega_2 + \alpha_3 u,\\
\dot\varphi = -(\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta + \omega_3, \qquad \dot\psi = \frac{1}{\sin\theta}(\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi),\\
\dot\theta = \omega_1\cos\varphi - \omega_2\sin\varphi.
\end{gathered} \tag{39}
$$

Проверим с помощью теоремы 17 выполнение для данной системы необходимых условий управляемости. Повторяя рассуждения, приведенные при решении предыдущей задачи, получаем, что вопрос сводится к анализу решений системы

$$
\begin{aligned}
G_1 &= a_1\omega_2\omega_3 p_1 + a_2\omega_3\omega_1 p_2 + a_3\omega_1\omega_2 p_3 + [-(\omega_1\sin\varphi +\\
&\qquad + \omega_2\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta + \omega_3]q_1 +\\
&\qquad + \frac{1}{\sin\theta}(\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi)q_2 + (\omega_1\cos\varphi - \omega_2\sin\varphi)q_3 - \mu_1 w = 0,\\
G_2 &= \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 - \mu_2 w = 0, \quad \text{где}
\end{aligned}
$$

$$
q_1 = \frac{\partial w}{\partial\varphi}, \qquad q_2 = \frac{\partial w}{\partial\psi}, \qquad q_3 = \frac{\partial w}{\partial\theta}.
$$

Дополняя систему скобками Якоби, приходим к системе

$$
G_2 = 0, \quad G_4 = 0, \quad G_6 = 0, \quad G_1 = 0, \quad G_3 = 0, \quad G_5 = 0, \tag{40}
$$

здесь

$$
\begin{aligned}
G_3 &= [G_2, G_1] = a_1(\alpha_2\omega_3 + \alpha_3\omega_2)p_1 + a_2(\alpha_3\omega_1 + \alpha_1\omega_3)p_2 +\\
&\qquad + a_3(\alpha_1\omega_2 + \alpha_2\omega_1)p_3 + [-(\alpha_1\sin\varphi + \alpha_2\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta + \alpha_3]q_1 +\\
&\qquad + \frac{1}{\sin\theta}(\alpha_1\sin\varphi + \alpha_2\cos\varphi)q_2 + (\alpha_1\cos\varphi - \alpha_2\sin\varphi)q_3 - \mu_3 w,\\
G_4 &= [G_2, G_3] = 2a_1\alpha_2\alpha_3 p_1 + 2a_2\alpha_1\alpha_3 p_2 + 2a_3\alpha_1\alpha_2 p_3 - \mu_4 w,\\
G_5 &= [G_4, G_1] = 2a_1\alpha_1(a_2\alpha_3\omega_3 + a_3\alpha_2\omega_2)p_1 + 2a_2\alpha_2(a_3\alpha_1\omega_1 +\\
&\qquad + a_1\alpha_3\omega_3)p_2 + 2a_3\alpha_3(a_1\alpha_2\omega_2 + a_2\alpha_1\omega_1)p_3 + 2[-\alpha_3(a_1\alpha_2\sin\varphi +\\
&\qquad + a_2\alpha_1\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta + a_3\alpha_1\alpha_2]q_1 + \frac{2\alpha_3}{\sin\theta}(a_1\alpha_2\sin\varphi + a_2\alpha_1\cos\varphi)q_2 +\\
&\qquad + 2\alpha_3(a_1\alpha_2\cos\varphi - a_2\alpha_1\sin\varphi)q_3 - \mu_5 w,\\
G_6 &= [G_4, G_3] = 2a_1\alpha_1(a_2\alpha_3^2 + a_3\alpha_2^2)p_1 + 2a_2\alpha_2(a_3\alpha_1^2 + a_1\alpha_3^2)p_2 +\\
&\qquad + 2a_3\alpha_3(a_1\alpha_2^2 + a_2\alpha_1^2)p_3 - \mu_6 w,
\end{aligned}
$$

$\mu_1, \ldots, \mu_6$ — некоторые функции переменных $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \varphi, \psi, \theta$. Определитель Δ системы (40), рассматриваемой как система линейных уравнений относительно $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$, равен

$$\Delta = \frac{8}{\sin\theta}(a_2a_1^2 - a_1a_2^2)(a_3a_2^2 - a_2a_3^2)(a_1a_3^2 - a_3a_1^2)[a_1(a_2a_3^2 - a_3a_2^2)\omega_1 + \\ + a_2(a_3a_1^2 - a_1a_3^2)\omega_2 + a_3(a_1a_2^2 - a_2a_1^2)\omega_3].$$

Тождество $\Delta \equiv 0$ выполнено лишь при условии $a_1a_2^2 - a_2a_1^2 = 0$ (123) (символ (123) означает круговую перестановку индексов). В этом случае система (39) неуправляема. При остальных значениях параметров для системы (39) выполнено необходимое условие управляемости. Ясно, и это следует из полученного условия, что система (39) неуправляема, если момент реактивной силы направлен по главной оси эллипсоида инерции.

Рассмотрим задачу управления ориентацией твердого тела в ограниченной постановке.

Задача 3. *Исследовать управляемость системы*

$$\dot\omega_1 = a_1\left(\omega_2\omega_3 - \frac{3\mu}{R^3}\gamma_2\gamma_3\right) + a_1u, \qquad \dot\omega_2 = a_2\left(\omega_3\omega_1 - \frac{3\mu}{R^3}\gamma_3\gamma_1\right) + a_2u,$$

$$\dot\omega_3 = a_3\left(\omega_1\omega_2 - \frac{3\mu}{R^3}\gamma_1\gamma_2\right) + a_3u,$$

(41)

$$\dot\varphi = -(\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta + \omega_3,$$

$$\dot\psi = \frac{1}{\sin\theta}(\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi) - \omega, \qquad \dot\theta = \omega_1\cos\varphi - \omega_2\sin\varphi,$$

где $\gamma_1 = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta$, $\gamma_2 = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta$, $\gamma_3 = \sin\theta\sin\psi$, ω — угловая скорость вращения центра масс по круговой орбите, R — радиус орбиты, μ — постоянная, характеризующая силовое поле.

В силу того, что орбита является круговой, величины R, ω являются постоянными, система (41) автономна, и для получения необходимых условий управляемости может быть применена теорема 17. Аналогично решению первых двух задач с помощью скобок Якоби получаем пополненную систему, определитель которой тождественно равен нулю лишь при условии $a_1a_2^2 - a_2a_1^2 = 0$. В этом случае система (41) неуправляема. При остальных значениях параметров для системы (41) вывыполнено необходимое условие управляемости.

8. Достаточные условия наблюдаемости

Задача нахождения фазовых координат движущегося объекта возникает при решении самых различных технических проблем. Часто встречается ситуация, когда измерительные устройства дают информацию лишь о части фазовых координат, и встает задача восстановления по данной информации полного фазового вектора. С этим вопросом сталкиваются в теории управления при решении задачи о синтезе системы с обратной связью, когда закон управления ищется в виде некоторой функции фазовых координат. Этот вопрос имеет и самостоятельное значение, позволяя уменьшить число измерителей, повысить точность и надежность измерительных систем. Указанная проблема определения текущих координат движущегося объекта на основании данных измерения в определенные моменты времени некоторых функций координат известна как задача наблюдения механической системы и может быть сформулирована следующим образом.

Дана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{42}$$

и функция

$$\varphi = \varrho(x, t), \tag{43}$$

где $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ — вектор фазовых координат объекта, $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m)$ $(m \leqslant n)$ — измеряемая функция. В случае управляемого объекта предполагается, что управление u задано как некоторая функция времени, и явная зависимость от $u(t)$ в формулах (42), (43) не указывается.

Система (42) и функция (43) рассматриваются в области $D \subseteq R^n$ при $t \in T = [t_0, t_1] \subseteq R^1$. Считаем, что область D и промежуток T таковы, что решения $x(t)$ системы (42) с начальными данными $x(t_0) = x_0 \in D$ определены для $t \in T$. Множество этих решений обозначим через X.

Определение 8. Система (42) *наблюдаема в области $D \times T$ по функции* (43), если для любых двух решений $x_1(t), x_2(t) \in X$ существует момент $t \in T$ такой, что $\varrho(x_1(t), t) \neq \varrho(x_2(t), t)$.

На практике важен случай, когда функция (43) задана на некотором подмножестве $T_0 \subseteq T$, которое назовем *множеством моментов измерений*.

Определение 9. Система (42) *наблюдаема в области $D \times T$ по функции* (43) *при измерениях на множестве T_0*, если для любых двух решений $x_1(t), x_2(t) \in X$ существует момент $t \in T_0$ такой, что $\varrho(x_1(t), t) \neq \varrho(x_2(t), t)$.

Связь между наличием у системы свойства наблюдаемости и возможностью определения фазового вектора такова: если система наблюдаема, то фазовый вектор может быт вычислен при непрерывном поступлении сигнала; если система наблюдаема при измерениях на дискретном множестве T_0, то фазовый вектор может быть вычислен при дискретном поступлении сигнала. Таким образом, принятые определения 8, 9 охватывают два наиболее важных случая в задаче наблюдения: наблюдение по непрерывному и дискретному сигналам.

Для исследования свойства наблюдаемости применим метод инвариантных соотношений. В предположении, что в области $D\times T$ функции $f(x, t)$, $\varrho(x, t)$ $n+1$ раз непрерывно дифференцируемы, введем типичную для этого метода цепочку последовательных производных от измеряемой функции в силу уравнений движения

$$(44)\quad y_1^i(x,t) = \varrho^i(x,t); \quad y_j^i(x,t) = \frac{\partial y_{j-1}^i(x,t)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_{j-1}^i(x,t)}{\partial x^k} f^k(x,t).$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 2, \ldots, n)$$

Отметим, что в задаче наблюдения нелинейных систем эти функции впервые были использованы Ю. М.-Л. Костюковским [14].

Выбирая из совокупности (44) n различных функций $z_k^1 = y_{j_1}^{i_1}(x, t), \ldots$ $\ldots, z_k^n = y_{j_n}^{i_n}(x, t)$, составим n-мерные векторы $z_k = (z_k^1, z_k^2, \ldots, z_k^n)$, каждый из которых определяет отображение $B_k(t)$ области D на $z_k(D, t)$. Справедлива следующая теорема, дающая глобальные достаточные условия наблюдаемости системы в области.

Теорема 18. *Система* (42) *наблюдаема в области* $D\times T$ *по функции* (43), *если существуют отображение* $B_k(t)$ *и момент* t_* *такие, что отображение* $B_k(t_*)$: $D\to z_k(D, t_*)$ *взаимно однозначно.*

Доказательство. Предположим, что вопреки утверждению теоремы система (42) не наблюдаема в $D\times T$ по функции (43), т. е. существуют два различных ее решения $x_1(t), x_2(t) \in X$ такие, что $\varrho(x_1(t), t) = \varrho(x_2(t), t)$ для всех $t \in T$. Продифференцировав это тождество $n-1$ раз по t, получаем $z_k(x_1(t), t) = z_k(x_2(t), t)$ при $t \in T$ для любого вектора z_k. Следовательно, для любого вектора z_k и $t \in T$ двум различным точкам $x_1(t), x_2(t)$ области D соответствует при отображении $B_k(t)$ одна и та же точка множества $z_k(D, t)$, что противоречит условиям теоремы. Данное противоречие и доказывает теорему.

Применяя различные критерии взаимной однозначности отображения, из данной теоремы можно получить различные условия наблюдаемости. Так, например, используя теорему о неявных функциях, получаем следующий локальный критерий наблюдаемости.

Теорема 19. *Если* $\operatorname{rank} I(x, t) = n$ *в точке* $(x_*, t_*) \in D\times T$, *то система* (42) *наблюдаема по функции* (43) *в области* $U\times T$, *где* U — *некоторая подобласть области* D, *содержащая точку* x_*.

Здесь через $I(x, t)$ обозначена якобиева матрица

$$I(x, t) = \frac{\partial(y_1^1, y_1^2, \ldots, y_n^m)}{\partial(x^1, x^2, \ldots, x^n)}.$$

Важное значение, особенно для практических приложений, имеет следующая теорема, устанавливающая связь между свойствами наблюдаемости по непрерывному и дискретному сигналам.

Теорема 20. *Если* $\operatorname{rank} I(x, t) = n$ *в некоторой точке* $(x_*, t_*) \in D\times T$, *то существуют положительные числа* h, h_0, *момент времени* $t_{**} \in T$ *и подобласть* U *области* D *такие, что система* (42) *наблюдаема по функции* (43) *в области* $U\times T$ *при измерениях на любом дискретном множестве* T_0 *точек* $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ промежутка $T_h = \{t\colon |t-t_*| < h\}$, удовлетворяющих условию $t_n - t_1 < h_0$.

Идея доказательства состоит в получении дифференциального уравнения, которому удовлетворяет измеряемая функция (43) на траекториях системы (42), и последующем применении теоремы Валле-Пуссена об однозначности решения краевой задачи для дифференциальных уравнений.

В связи с этой теоремой необходимо отметить работы В. Н. Брандина, Г. Н. Разоренова [3, 4], изучавших наблюдаемость системы по дискретному сигналу вне связи со свойством наблюдаемости.

Трудности, связанные с исследованием вопроса о взаимной однозначности отображений в области, создают существенные препятствия для получения достаточных условий ненаблюдаемости, особенно в тех случаях, когда рассматриваемое отображение является конечнозначным. Когда отображение бесконечнозначно, а система и измеряемая функция аналитичны, ненаблюдаемость системы устанавливается довольно легко.

Теорема 21. *Пусть в области* $D\times T$ *функции* $f(x, t)$, $\varrho(x, t)$ *являются аналитическими функциями своих аргументов. Система* (42) *ненаблюдаема в области* $D\times T$ *по функции* (43), *если* $\operatorname{rank} I(x, t) < n$ *для всех* $(x, t) \in D\times T$.

Следующая теорема носит геометрический характер. Прежде чем переходить к ее формулировке, введем необходимые понятия.

Определение 10. *Система* $\dot{x} = f(x, t)$ называется *инвариантной относительно группы преобразований* $x^* = \theta(x, a)$, если $\dot{x}^* = f(x^*, t)$.

Определение 11. *Функция* $f(x, t)$ *называется инвариантной относительно группы преобразований* $x^* = \theta(x, a)$, если $f(x, t) = f(\theta(x, a), t)$.

Теорема 22. *Система* (42) *ненаблюдаема в области* D *по функции* (43), *если существует группа преобразований* $x^* = \theta(x, a)$, *относительно которой система* (42) *и измеряемая функция* (43) *инвариантны.*

Несмотря на сложность отыскания группы преобразований, относительно которых данная система и функция инвариантны, в прикладных задачах их можно обнаружить, исходя из различных физических соображений. Примерами систем могут служить системы, описывающие движение материальной точки в центральном или осесимметричном поле сил, а примерами функций — скалярные произведения различных векторов. Группами преобразований здесь являются группы вращений.

9. Определение фазовых координат твердого тела, движущегося в поле притяжения неподвижного центра

Применим полученные условия наблюдаемости для исследования задачи о нахождении фазовых координат твердого тела, движущегося в поле притяжения неподвижного центра, сформулировав ее как задачу наблюдения. Рассмотрим различные измеряемые функции и различные формы уравнений, начиная с простейших

$$\ddot{x}_1 = -\mu \frac{x_1}{R^3}, \quad \ddot{x}_2 = -\mu \frac{x_2}{R^3}, \quad \ddot{x}_3 = -\mu \frac{x_3}{R^3} \quad (R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2), \tag{45}$$

$$A_1\dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3, \quad A_2\dot{\omega}_2 = (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1, \quad A_3\dot{\omega}_3 = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2, \tag{46}$$

где x_1, x_2, x_3 — координаты центра масс в инерциальной системе координат, остальные величины имеют значение, указанное ранее.

В простейшем случае, как видно из формул (45), (46), уравнения движения разделяются, и задачи навигации и ориентации решаются отдельно. Для нахождения координат и скорости центра масс применим метод зондовой навигации, который состоит в том, что из объекта M_0, движущегося в поле притяжения Земли, в некоторый момент времени, принимаемый за начальный, выбрасываются искусственные тела $M_1, M_2, \ldots, M_n$ — зонды. На объекте установлены датчики, измеряющие расстояние до зондов, углы между направлениями от объекта на зонды, а также углы между фиксированным в инерциальном пространстве направлением и направлениями на зонды. По поступающей с датчиков информации с помощью вычислительного устройства находят значения координат и скорости центра масс в начальный момент времени. Математически задача формулируется как задача нахождения фазового вектора системы $n+1$ невзаимодействующей между собой материальной точки, движущейся в поле притяжения неподвижного центра согласно уравнений

$$(47) \qquad \dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i, \quad \dot{\vec{v}}_i = -\mu \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \quad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

по измерениям функции, зависящей от векторов относительных положений

$$(48) \qquad \varphi = \varphi(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{r}_2 - \vec{r}_0, \ldots, \vec{r}_n - \vec{r}_0).$$

Изучим наблюдаемость системы (47) по функции (48). Система (47) оказывается ненаблюдаемой, если в качестве измеряемой функции (48) используется только информация об относительном положении зондов (например, относительные расстояния $\varphi_i = (\vec{r}_i - \vec{r}_0)^2 = r_{i0}^2$, углы между зондами $\psi_{ij} = \cos(\widehat{\vec{r}_{i0}, \vec{r}_{j0}})$), либо дополнительно к ней информация об одном фиксированном в инерциальном пространстве направлении, определяемом вектором $\vec{e}$ (например, углы между векторами $\vec{r}_{i0}$ и $\vec{e}$: $\beta_i = \cos(\widehat{\vec{e}, \vec{r}_{i0}})$). Для установления этого факта можно воспользоваться теоремами 21, 22. Наиболее просто это сделать с помощью теоремы 22. Действительно, в первом случае уравнения движения и измеряемые функции допускают группу преобразований координат, осуществляющую поворот трехмерного пространства вокруг начала координат. Во втором случае допустимой является группа преобразований, осуществляющая поворот вокруг вектора $\vec{e}$. По теореме 22 система (47) в этих случаях является ненаблюдаемой. Фазовый вектор системы, если и может быть определен, то только с точностью до указанных поворотов, т. к. информация о них отсутствует. Это и означает, что восстановить полный фазовый вектор в инерциальном пространстве в указанных случаях невозможно, т. е. система (47) является ненаблюдаемой. Данное рассуждение наводит на мысль, что наличие, в дополнение к рассмотренной, информации еще об одном фиксированном в инерциальном пространстве направлении даст возможность определить фазовый вектор системы (47). Отметим, что эта информация полностью определяет в инерциальном пространстве векторы относительного положения $\vec{r}_{i0}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Имеет место результат.

Утверждение 1. *Система* (47) *локально наблюдаема по функциям*

$$(49) \qquad \vec{\varphi}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Доказательство проведем для случая одного зонда в декартовой системе координат $Oxyz$. Поскольку функции $\varphi, \bar{\varphi}$ не зависят от скоростей $\vec{v}_0$, $\vec{v}_1$, достаточно ограничиться рассмотрением якобиана $\Delta =$

$= \det \dfrac{\partial(\varphi, \ddot{\varphi})}{\partial(\vec{r}_0, \vec{r}_1)}$. Тогда

$$\Delta = \mu^3 \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}\right)\left\{2\left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}\right)^2 + \frac{9}{r_0^5 r_1^5}\left[(x_0y_1 - x_1y_0)^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + (y_0z_1 - y_1z_0)^2 + (z_0x_1 - z_1x_0)^2\right]\right\}.$$

Отсюда, на основании теоремы 19, заключаем, что система (47) локально наблюдаема по функции (49) для $i = 1$ в некоторой окрестности любой точки $x = (x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1) \in R^6$, в которой $\Delta(x) \neq 0$. Вывод справедлив и для системы (47) в общем случае.

Практический вывод, следующий из полученных результатов, состоит в том, что метод зондовой навигации применим, когда измеряются векторы относительного положения объекта и зондов, и меньшей информации для реализации этого метода недостаточно.

Рассмотрим теперь, исходя из уравнений (46), задачу определения проекций угловой скорости тела на подвижные оси. Справедливо утверждение.

Утверждение 2. *Система* (46) *локально наблюдаема по функции*

(50) $$\varphi = n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + n_3\omega_3 \quad (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1).$$

Как и в задаче 1, обозначим $a_1 = (A_2 - A_3)/A_1$, $a_2 = (A_3 - A_1)/A_2$, $a_3 = (A_1 - A_2)/A_3$ и выпишем элементы a_{ij} определителя

$$I = \det \frac{\partial(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})}{\partial(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}.$$

$$a_{11} = n_1, \quad a_{12} = n_2, \quad a_{13} = n_3, \quad a_{21} = a_3n_3\omega_2 + a_2n_2\omega_3,$$
$$a_{22} = a_3n_3\omega_1 + a_1n_1\omega_3, \quad a_{23} = a_2n_2\omega_1 + a_1n_1\omega_2,$$
$$a_{31} = 2a_2a_3\omega_1(n_2\omega_2 + n_3\omega_3) + a_1n_1(a_3\omega_2^2 + a_2\omega_3^2),$$
$$a_{32} = 2a_3a_1\omega_2(n_3\omega_3 + n_1\omega_1) + a_2n_2(a_1\omega_3^2 + a_3\omega_1^2),$$
$$a_{33} = 2a_1a_2\omega_3(n_1\omega_1 + n_2\omega_2) + a_3n_3(a_2\omega_1^2 + a_1\omega_2^2).$$

Для определителя I находим следующее выражение

$$I = a_1(a_3\omega_2^2 - a_2\omega_3^2)[2n_1\omega_1(a_2n_2^2 + a_3n_3^2 - a_1n_1^2) -$$
$$- n_2n_3(a_2n_2\omega_3 + a_3n_3\omega_2)] +$$
$$+ a_2(a_1\omega_3^2 - a_3\omega_1^2)[2n_2\omega_2(a_3n_3^2 + a_1n_1^2 - a_2n_2^2) -$$
$$- n_3n_1(a_3n_3\omega_1 + a_1n_1\omega_3)] +$$
$$+ a_3(a_2\omega_1^2 - a_1\omega_2^2)[2n_3\omega_3(a_1n_1^2 + a_2n_2^2 - a_3n_3^2) -$$
$$- n_1n_2(a_1n_1\omega_2 + a_2n_2\omega_1)].$$

Применяя теорему 19, заключаем, что система (46) локально наблюдаема по функции (50) в некоторой окрестности точек $(\omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0)$, в которых $I(\omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0) \neq 0$.

Этот результат указывает на возможность построения алгоритма вычисления трех проекций вектора угловой скорости по измерениям одной проекции на связанную с объектом ось с использованием самых простых динамических уравнений (46). Данный алгоритм может быть применен на объектах, оборудованных бесплатформенными инерциальными системами, при отказе двух из трех датчиков угловой скорости.

В задаче определения углового положения тела в ограниченной постановке, когда его центр масс движется по известной кеплеровской орбите, можно показать локальную наблюдаемость соответствующей системы дифференциальных уравнений, когда измеряются проекции на связанные с телом оси вектора угловой скорости, либо вектора вертикали. И, наконец, в задаче совместного определения координат и скорости центра масс и угловой скорости вращения тела относительно центра масс на основе уравнений поступательно-вращательного движения можно доказать возможность их нахождения, если измеряются проекции на подвижные оси вектора угловой скорости, либо радиуса-вектора центра масс.

10. Задача параметрической идентификации

Способ, с помощью которого получены условия наблюдаемости нелинейных механических систем, может быть применен и к решению задачи идентификации механических систем, возникающей при определении неизвестных параметров системы по измерениям в заданные моменты времени некоторых функций фазовых координат. Среди параметров будем различать параметры $b^1(t), b^2(t), \dots, b^l(t)$, зависящие от времени, и постоянные $a^1, a^2, \dots, a^k$. Сформулируем задачу параметрической идентификации.

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f\big(x, a, b(t), t\big) \tag{51}$$

и функция

$$\varphi = \varrho\big(x, a, b(t), t\big), \tag{52}$$

где $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ — вектор фазовых координат объекта, $a = (a^1, a^2, \dots, a^k)$, $b(t) = \big(b^1(t), b^2(t), \dots, b^l(t)\big)$ — неизвестные параметры системы (51), $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m)$ — измеряемая функция.

Система (51) и функция (52) рассматриваются в области $x \in D \subseteq R^n$ при $t \in T = [t_0, t_1]$. Область изменения параметров a, b предполагается заданной: $(a, b) \in D_1 \subseteq R^{k+l}$. Функции $f\big(x, a, b(t), t\big)$, $b(t)$ считаются такими, чтобы для системы (51) выполнялись условия существования и единственности решения для любых $(x_0, t_0) \in D \times T$. Считаем, что область D и промежуток T таковы, что решения системы (51) с начальными данными $x(t_0) = x_0 \in D$ определены для всех $t \in T$. Множество этих решений обозначим через X.

Задача идентификации системы (51) по функции (52) состоит в том, чтобы по значениям функции $\varrho(x, a, b(t), t)$ в определенные моменты времени найти значения параметров a, b для $t \in T$. Следующее определение выделяет множество систем, для которых эта задача имеет решение.

Определение 12. Система (51) называется *идентифицируемой в области $D \times D_1$ по функции* $\varrho(x, a, b(t), t)$, если для любых двух вектор-функций $(a_1, b_1(t))$, $(a_2, b_2(t)) \in D_1$ и любых двух решений $x_1(t), x_2(t) \in X$ системы (51), в которой a, b принимают соответственно значения $a_1, b_1(t)$ и $a_2, b_2(t)$, существует момент $t \in T$ такой, что $\varrho(x_1(t), a_1, b_1(t), t) \neq \varrho(x_2(t), a_2, b_2(t), t)$.

Предположим, что в области $D \times T$ функции $f(x, a, b(t), t)$, $\varrho(x, a, b(t), t)$ $b(t)$ являются $n+k$ раз непрерывно дифференцируемыми. Определим функции y_j^i, полагая

$$y_1^i(x, a, b, t) = \varrho^i(x, a, b, t), \qquad y_j^i(x, a, b, \dot{b}, \ldots, b^{(j-1)}, t) = \tag{53}$$

$$= \frac{\partial y_{j-1}^i}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial y_{j-1}^i}{\partial x^s} f^s(x, a, b, t) + \sum_{\substack{s=1\\p=0}}^{\substack{l\\j-2}} \frac{\partial y_{j-1}^i}{\partial b^{s(p)}} b^{s(p+1)}.$$

Введем в рассмотрение векторы w, z, размерность которых изменяется от $k+l$ до $(n+k)(l+1)$, составляя их различным образом из $x, a, b, \dot{b}, \ldots, b^{(n+k-1)}$ и $y_1^1, y_2^1, \ldots, y_{n+k}^m$, соответственно. Причем у всех векторов w первыми $k+l$ компонентами являются $a^1, a^2, \ldots, a^k, b^1, b^2, \ldots \ldots, b^l$. Соответствия $w \to z$ определяют с помощью формул (53) семейство отображений $B(t)$ области S на $z(S, t)$, где область S определяется промежутками изменения входящих в вектор w переменных. Справедлива теорема.

Теорема 23. *Система* (51) *идентифицируема в области $D \times D_1$ по функции* (52), *если существуют отображение $B(t)$ и момент t_* такие, что отображение $B(t_*)$: $S \to z(S, t_*)$ является взаимооднозначным.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 18.

Приняв $w = (x, a, b, \dot{b}, \ldots, b^{(n+k-1)})$, $z = (y_1^1, y_1^2, \ldots, y_1^m, y_2^1, \ldots, y_{n+k}^m)$ из теоремы 23 с помощью теоремы о неявных функциях получаем локальный критерий идентифицируемости нелинейных механических систем.

Теорема 24. *Если* $\operatorname{rank} I = (n+k)(l+1)$ *в некоторой точке* $(x_*, a_*, b_*, t_*) \in D\times D_1\times T$, *то система* (51) *идентифицируема по функции* (52) *в области* $U\times T$, *где* $U\subseteq D\times D_1$ — *некоторая подобласть области* $D\times D_1$, *содержащая точку* (x_*, a_*, b_*).

Здесь через I обозначена якобиева матрица

$$I = \frac{\partial(y_1^1, y_1^2, \ldots, y_{n+k}^m)}{\partial(x, a, b, \dot{b}, \ldots, b^{(n+k-1)})}.$$

Из вида якобиевой матрицы I следует, что теорема 24 применима, если $(n+k)(l+1)\leqslant m(n+k)$, т. е. $m\geqslant l+1$: размерность измеряемой функции превышает число неизвестных параметров, зависящих от времени. В случае, если $m\leqslant l$, вопрос об идентифицируемости системы (51) в ряде случаев может быть решен непосредственным применением теоремы 23, где для анализа взаимной однозначности отображений могут быть использованы локальные или глобальные критерии.

Отметим в заключение, что задача идентификации существенно сложнее задачи наблюдения, причиной чего, в нервую очередь, является наличие в системе параметров, зависящих от времени. Значительно затрудняет исследование также то обстоятельство, что даже в случае постоянных неизвестных параметров задача идентификации является задачей наблюдения, но не по всем фазовым параметрам, а лишь по их части, именно, по переменным $a^1, a_2, \ldots, a^k$.

В качестве приложения полученных результатов к конкретным системам укажем на задачу определения аэродинамических характеристик твердого тела, движущегося в сопротивляющейся среде [11, 12].

Литература

[1] Арнольд, В. И., *Об устойчивости положений равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае*, Докл. АН СССР 137, № 2 (1961), 255–257.

[2] —, *Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона*, Успехи математических наук 18, вып. 5 (1963), 13–40.

[3] Брандин, В. Н., Разоренов, Г. Н., *Об условиях наблюдаемости нелинейных динамических систем*, Автоматика и телемеханика, № 9 (1973), 5–11.

[4] Брандин, В. Н., Разоренов, Г. Н., *Определение траекторий космических аппаратов*, М., Машиностроение, 1978, 216 с.

[5] Калман, Р. Е., *Об общей теории систем управления*, В кн.: *Тр. I Междунар. конгр. ИФАК. М.*, Изд-во АН СССР, т. 2, 1961, 521–546.

[6] Ковалев, А. М., *Сохранение интегралов движения при малом изменении функции Гамильтона в некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гиростата*, Прикл. математика и механика 35, вып. 4 (1971), 718–722.

[7] Ковалев, А. М., Савченко, А. Я., *Устойчивость равномерных вращений твердого тела вокруг главной оси,* ibidem 39. вып. 4 (1975), 650–660.

[8] Ковалев, А. М., Чудненко, А. Н., *К устойчивости положения равновесия двумерной гамильтоновой системы в случае равных частот,* Докл. АН УССР. Сер. А № 11, (1977), 1011–1014.

[9] Ковалев, А. М., *Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем,* Киев, Наук. думка, 1980, 175 с.

[10] —, *Устойчивость равномерных вращений тяжелого гиростата вокруг главной оси,* Прикл. математика и механика 44, вып. 6, (1980), 994–998.

[11] Ковалев, А. М., Савченко, А. Я., *О возможности идентификации силы и момента Магнуса, действующих на тело в сопротивляющейся среде,* Математическая физика, вып. 29 (1980), 35–40.

[12] Ковалев, А. М., Щербак, В. Ф., *О возможности определения переменных коэффициентов силы и момента Магнуса методом теории идентификации,* Механика твердого тела, 1981, 124–127.

[13] Колмогоров, А. Н., *О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона,* Докл. АН СССР 98, № 4 (1954), 527–530.

[14] Костюковский, Ю. М.-Л., *О наблюдаемости нелинейных управляемых систем,* Автоматика и телемеханика № 9, (1968), 29–42.

[15] Красовский, Н. Н., *Шеория управления движением,* М., Наука, 1968, 476 с.

[16] Леви-Чивита, Т., Амальди, У., *Курс теоретической механики,* В 2 т., М., Изд-во иностр. лит. Т. 2, Ч. 2. (1951), 555 с.

[17] Ляпунов, А. М., *О постоянных винтовых движениях тела в жидкости,* В кн.: *Сообщения Харьковск. мат. об-ва. Сер.* 2, Т. 1, № 1, 2, (1888), 7–60.

[18] Маркеев, А. П., *Об устойчивости треугольных точек либрации в круговой ограниченной задаче трех тел,* Прикл. математика и механика, 33, вып. I, (1969), 112–114.

[19] —, *Точки либрации в небесной механике и космодинамике,* М., Наука, 1978, 312 с.

[20] Мозер, Ю., *Лекции о гамильтоновых системах,* М., Мир, 1973, 168 с.

[21] Рубановский, В. Н., *О бифуркации и устойчивости стационарных движений систем с известными первыми интегралами,* В кн.: *Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения,* М., Изд-во АН СССР, 1975, вып. 1, 121–200.

[22] Румянцев, В. В., *Об устойчивости движения гиростатов,* Прикл. математика и механика, 25, вып. 1 (1961), 9–16.

[23] Савченко, А. Я., *Устойчивость стационарных движений механических систем,* Киев, Наук. думка, 1977, 160 с.

[24] Сергеев, В. С., *Об устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки,* Прикл. математика и механика, 40, вып. 3 (1976), 408–416.

[25] —, *Об устойчивости перманентного вращения гиростата вокруг главной оси инерции,* Теоретична и приложна механика 9, № 3 (1978), 30–35.

[26] Сокольский, А. Г., *Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае равных частот,* Прикл. математика и механика, 38, вып. 5, (1974), 791–799.

[27] Харламов, П. В., *О равномерных вращениях тела, имеющего неподвижную точку,* ibidem 29, вып. 2 (1965), 373–375.

[28] Харламов, П. В., *Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений,* Механика твердого тела, вып. 6 (1674), 15-24.

[29] Четаев, Н. Г., *О фигурах равновесия, производных от эллипсоидов*, В кн.: *Устойчивость движения. Работы по аналитической механике*, М., Изд-во АН СССР, 1962.
[30] —, *Устойчивость движения*, М., Гостехиздат, 1954, 207 с.
[31] Чудненко, А. Н., *К устойчивости равномерных вращений твердого тела вокруг главной оси*, Прикл. математика и механика, 44, вып. 2 (1980), 245–253.
[32] Яковенко, Г. Н., *Необходимое условие управляемости*, В кн.: *Вопросы прикладной математики*, Иркутск, Изд-во СОАН СССР, 1975, с. 108–119.
[33] Poincaré, H., *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, Paris 1902.
[34] Popp, K., Müller, P. C., *First integrals of controlled mechanical systems*, Gyrodynamics, Berlin e.a., 1974, pp. 141–147.
[35] Routh, E. I., *A treatise on the dynamics of a system of rigid bodies, The advanced part*, London, Macmillan, 1884, 343 pp.
[36] Staude, O., *Über permanente Rotationsaxen bei der Bewegung eines schweren Korpers um einen festen Punkt*, I. reine und angew. Math. 113, H. 4 (1894), 318–334.
[37] Volterra, V., *Sur la théorie des variations des latitudes*, Acta math. 22 (1899), 201–358.

Presented to the semester
Mathematical Models and Methods
in Mechanics