NUMERICAL ANALYSIS AND MATHEMATICAL MODELLING
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 24
PWN POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1990

О ПРИМЕНЕНИИ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

ТАДЕУШ ШЕЙБАК

Институт математики и кибернетики АН ЛитССР, Вильнюс, СССР

В заметке исследуется асимптотическая зависимость числа итераций от величины разрыва коэффициентов для некоторых универсальных итерационных методов при численном решении одного класса эллиптических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами. Исследуется поведение решения задачи при возрастании величины разрыва. Предлагается новый итерационный метод для решения такого типа задач, число итераций которого слабо зависит от величины разрыва коэффициентов. Приводятся примеры численных расчетов.

1

Большинство прикладных и теоретических задач современной физики приводят к дифференциальным уравнениям в частных производных эллиптического типа. Среди этих задач можно выделить класс задач эллиптического типа с большими неоднородностями коэффициента диффузии, который терпит разрыв первого рода.

Рассмотрим дифференциальную краевую задачу вида

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} k(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) = -f(x), \quad x \in D_0, \tag{1}$$

$$u(x)|_\Gamma = g(x) \quad (p = 1, 2, 3). \tag{2}$$

Для простоты предположим, что коэффициент $k(x)$ кусочно-постоянен

$$k(x) = \begin{cases} c, & x \in \bar{D}_1, \\ 1, & x \in D_2, \end{cases} \tag{3}$$

$$c > 0, \quad \bar{D}_1 \subset \bar{D}_0, \quad D_2 = \bar{D}_0 \backslash \bar{D}_1.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только случай $c > 1$, так как в случае $c < 1$ можно сделать подстановку $cu = v$ и мы сводим задачу к случаю, когда коэффициент $k(x) \geqslant 1$.

В точках разрыва коэффициента $k(x)$, $x \in \Gamma_1$ ставятся условия сопряжения

$$(4) \qquad [u]|_{\Gamma_1} = 0, \qquad \left[k(x)\frac{\partial u}{\partial n}\right]\Bigg|_{\Gamma_1} = 0,$$

где $[u]|_{\Gamma_1} = u|_{\Gamma_1^+} - u|_{\Gamma_1^-}$ — скачок функции $u(x)$ при переходе через поверхность Γ_1, n — направление нормали к Γ_1. Для большей иллюстративности рассмотрим двумерную задачу (1)–(4) и предположим, что D_0 является прямоугольником.

Одним из основных методов численного решения краевых задач математической физики является метод сеток. В результате построения консервативной разностной схемы, задача решения дифференциальной краевой задачи (1)–(4) сводится к разностной задаче

$$(5) \qquad \Lambda y = \sum_{\alpha=1}^{2} \left(a_\alpha(x) y_{\bar{x}_\alpha}\right)_{x_\alpha} = \varphi(x), \qquad x \in \omega,$$

$$(6) \qquad y(x) = g(x), \qquad x \in \gamma,$$

в прямоугольнике, где $\bar{\omega} = \omega \cup \gamma$ — прямоугольная равномерная сетка с шагами h_1 и h_2

$$(7) \qquad \bar{\omega} = \{x_{ij} = (ih_1, jh_2);\ 0 \leqslant i \leqslant N_1,\ 0 \leqslant j \leqslant N_2 \cdot\ h_\alpha N_\alpha = l_\alpha,\ \alpha = 1,2\}.$$

Коэффициенты разностной схемы (5), (6) удовлетворяют условиям

$$(8) \qquad 1 \leqslant a_\alpha(x) \leqslant c, \qquad x \in \omega,\ \alpha = 1,2.$$

Разностная задача (5), (6) сводится к операторному уравнению

$$(9) \qquad Ay = f,$$

где $Ay = -\Lambda \mathring{y}$, $y \in H$, $\mathring{y} \in \mathring{H}$, H — пространство сеточных функций, заданных на ω со скалярным произведением

$$(u, v) = \sum_{x \in \omega} u(x) v(x) h_1 h_2,$$

$\mathring{H} \subset H$ — пространство сеточных функций, обращающихся в нуль на γ. Правая часть f уравнения (9) отличается от правой части φ задачи (5), (6) лишь в приграничных узлах.

Уравнение (9) будем решать двухслойным итерационным методом

$$(10) \qquad B\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

2

Скорость сходимости двухслойного итерационного метода зависит от отношения γ_2/γ_1 постоянных энергетической эквивалентности

$$\gamma_1 B \leqslant A \leqslant \gamma_2 B \tag{11}$$

операторов A и B.

Как следует из результатов работ [1], [2], в оценку (11) для явного чебышевского метода ($B = E$) и попеременно-треугольного метода ($B = (E+\omega_0 R_1)(E+\omega_0 R_2)$, $A = R_1+R_2$, $R_1 = R_2^*$, $\omega_0 > 0$) входит отношение максимального и минимального значения коэффициентов $a_\alpha(x)$. Тогда из неравенства (8) следует, что при увеличении значения c, число итераций для этих методов растет как $\sqrt{c}$. Оценка (11) для неявного чебышевского метода (B — диагональная часть оператора A), метода верхней релаксации с оптимальным выбором итерационного параметра ($B = D+\omega_0 L$, $A = D+L+U$), модифицированного попеременно-треугольного метода ($B = (D+\omega_0 R_1)D^{-1}(D+\omega_0 R_2)$, $A = R_1+R_2$, $R_1 = R_2^*$, $D = D^* > 0$ — диагональный оператор), метода переменных направлений зависит от некоторых интегральных характеристик коэффициентов $a_\alpha(x)$ [3]. Поэтому, применяя эти методы, для некоторого класса задач, мы получаем слабую зависимость числа итераций от отношения максимального и минимального значений коэффициентов $a_\alpha(x)$. Это иллюстрирует пример с модельной задачей из [2] (стр. 311–312, 386–387, 417–418, 457–458).

В работе [3] был выделен класс эллиптических дифференциальных задач с разрывными коэффициентами, для которых при решении разностной задачи (9) вышеназванными итерационными методами, сходимость ухудшалась при возрастании величины разрыва c. Рассмотрим этот вопрос более детально.

Пусть коэффициенты разностной схемы $a_\alpha(x)$ удовлетворяют условиям

$$a_\alpha(x) = \begin{cases} 1, & x \notin \bar{\omega}_1, \\ c, & x \in \bar{\omega}_1, \end{cases} \tag{12}$$

$$\bar{\omega}_1 = \{(ih_1, jh_2);\ i = k_1^1+1, \ldots, k_2^1, j = k_1^2+1, \ldots, k_2^2,\ 0 < k_1^\alpha < k_2^\alpha < N_\alpha,\ \alpha = 1,2\}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только задачи (5), (6), у которых коэффициенты $a_\alpha(x)$ имеют вид (12).

Имеет место следующая теорема

Теорема. *Пусть коэффициенты $a_\alpha(x)$ удовлетворяют условиям (12). Тогда при решении уравнения (9), модифицированным попеременно-тре-*

угольным методом (МПТМ), *неявным чебышевским методом* (НЧМ), *методом переменных направлений* (МПН) *для числа итераций n имеют место следующие оценки*: $n \geqslant n_0(\varepsilon)$

$$n_0(\varepsilon) = \sqrt{M_1(h)(c-1) + \sqrt{M_2(h)c}\ln(2/\varepsilon)} \quad \textit{для МПТМ},$$

$$n_0(\varepsilon) = M_1(h)\sqrt{c}\ln(2/\varepsilon), \quad \textit{для НЧМ},$$

$$n_0(\varepsilon) = M_1(h)\sqrt{c}\ln(1/\varepsilon), \quad \textit{для МПН},$$

где $M_1(h)$ *и* $M_2(h)$ *некоторые константы и* $h_1 = h_2 = h$.

Доказательство этой теоремы опубликовано в [4]. В качестве иллюстрации можно привести результаты вычислений модельной задачи из [4]. В таблице приведено количество итераций $n_0(\varepsilon)$ для различных методов и различных значений c.

c	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
МПТМ	14	35	104	318	996	3137	9909
НЧМ	70	149	438	1374	4340	13723	43395
МПН	33	103	326	1030	3257	10298	32561

Из таблицы видно, что при возрастании величины разрыва c число итераций $n_0(\varepsilon)$ увеличивается как $\sqrt{c}$. Следовательно, применение вышеназванных итерационных методов для рассматриваемых задач может стать неэффективным при возрастании c.

3

Рассмотрим как ведет себя решение уравнения (1)–(4) при возрастании величины разрыва коэффициента $k(x)$ для выделенного нами класса задач. Для большей наглядности рассмотрим одномерное уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) = -f(x), \quad 0 < x < l, \qquad u(0) = a_0, \quad u(l) = a_1, \tag{13}$$

$$k(x) = \begin{cases} c \gg 1, & l_1 \leqslant x \leqslant l_2, \\ 1, & 0 \leqslant x < l_1,\ l_2 < x \leqslant l. \end{cases} \tag{14}$$

Имеет место

Лемма. *Если выполнены условия*

$$\left|\int_0^l f(t)\,dt\right| < M, \quad |a_0| < M, \quad |a_1| < M, \tag{15}$$

(*здесь* M — *некоторая константа и* $M \ll c$), *то решение краевой задачи*

(13), (14) *можно представить в виде*

(16) $$u(x) = A + N(x)/c, \quad l_1 \leqslant x \leqslant l_2,$$

где $|N(x)| \leqslant N$, A *и* N — *некоторые константы*, $c \gg 1$.

Доказательство. Задачу (13), (14), учитывая вид коэффициента $k(x)$ можно разбить на три задачи

(17) $$\begin{cases} \dfrac{d^2u_1}{dx^2} = -f(x), \\ u_1(0) = a_0, \quad u_1(l_1) = u_2(l_1), \end{cases}$$

(18) $$\begin{cases} c\dfrac{d^2u_2}{dx^2} = -f(x), \\ c\dfrac{du_2}{dx}\Big|_{x=l_1} = \dfrac{du_1}{dx}\Big|_{x=l_1}, \quad u_2(l_2) = u_3(l_2), \end{cases}$$

(19) $$\begin{cases} \dfrac{d^2u_3}{dx^2} = -f(x), \\ \dfrac{du_3}{dx}\Big|_{x=l_2} = c\dfrac{du_2}{dx}\Big|_{x=l_2}, \quad u_3(l) = a_1, \end{cases}$$

Тогда решение задачи (13), (14) можно записать в виде

(20) $$u(x) = \begin{cases} u_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant l_1, \\ u_2(x), & l_1 \leqslant x \leqslant l_2, \\ u_3(x), & l_2 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

После несложных вычислений, находим решения задач (17)–(19)

(21) $$u_1(x) = -\int_0^x\int_0^z f(t)\,dt\,dz + c_1x + a_0,$$

(22) $$u_2(x) = -\frac{1}{c}\int_{l_1}^x\int_{l_1}^z f(t)\,dt\,dz + \frac{c_2}{c}(x-l_1) + c_3,$$

(23) $$u_3(x) = -\int_{l_2}^x\int_{l_2}^z f(t)\,dt\,dz + c_4(x-l_2) + c_5,$$

где

$$c_1 = \frac{1}{l_1}\Big(u_2(l_1) - a_0 + \int_0^{l_1}\int_0^z f(t)\,dt\,dz\Big),$$

$$c_2 = -\int_0^{l_1} f(t)\,dt + c_1,$$

$$c_3 = u_3(l_2) + \frac{1}{c}\int_{l_1}^{l_2}\int_{l_1}^z f(t)\,dt\,dz - \frac{c_2}{c}(l_2 - l_1),$$

$$c_4 = c_2 - \int_{l_1}^{l_2} f(t)\,dt,$$

$$c_5 = a_1 + \int_{l_2}^{l}\int_{l_2}^z f(t)\,dt\,dz - c_4(l - l_2).$$

Из (21)–(23) найдем

$$(24)\quad u_2(l_1)=\frac{l}{l-l_2+l_1+(l_2-l_1)/c}\left(a_1+\int_{l_2}^{l}\int_{l_2}^{z}f(t)\,dt\,dz+\right.$$
$$+(l-l_2)\int_{l_1}^{l_2}f(t)\,dt+\frac{1}{c}\int_{l_1}^{l_2}\int_{l_1}^{z}f(t)\,dt\,dz+\left(l-l_2+\frac{l_2-l_1}{c}\right)\int_{0}^{l_1}f(t)\,dt+$$
$$\left.+\left(l-l_2+\frac{l_2-l_1}{c}\right)\frac{a_0}{l_1}-\left(l-l_2+\frac{l_2-l_1}{c}\right)\int_{0}^{l_1}\int_{0}^{z}f(t)\,dt\,dz\right).$$

Учитывая неравенства (15) и тот факт, что $c\gg 1$ получим

$$(25)\quad \begin{aligned} c_1&=\tilde{c}_1+O(c^{-1}),\\ c_2&=\tilde{c}_2+O(c^{-1}),\\ c_3&=\tilde{c}_3+O(c^{-1}),\\ c_4&=\tilde{c}_4+O(c^{-1}),\\ c_5&=\tilde{c}_5+O(c^{-1}),\end{aligned}$$

где $\tilde{c}_i (i=1,\ldots,5)$ некоторые константы.

Тогда из (22) и (25) следует оценка (16). Лемма доказана.

Следовательно, при $c\gg 1$ решение в интервале $l_1\leqslant x\leqslant l_2$ близко к константе с точностью $O(c^{-1})$. Аналогичный результат можно получить для расностной задачи [8]. Полученный результат можно обобщить для двумерных и трехмерных задач. Для доказательства можно воспользоваться функцией Грина.

4

Полученные в теореме оценки показывают, что многие универсальные итерационные методы плохо сходятся для задач вида (5), (6), (12) при $c\gg 1$. Более детальный анализ показывает, что сходимость более медленная в точках $x\in\bar{\omega}_1$, чем в остальных точках области. С другой стороны, из результатов леммы следует, что решение задачи (5), (6), (12) изменяется более медленно в точках $x\in\bar{\omega}_1$ чем в остальных точках. Следовательно, если бы нам было известно хотя бы одно значение решения в точках $x\in\bar{\omega}_1$ то взяв его в качестве начального приближения во всей области $\bar{\omega}_1$ мы получили бы хорошее начальное приближение во всех точках $\bar{\omega}$ и на решение задачи (5), (6), (12) нам потребовалось бы намного меньше итераций, чем это следует из оценок теоремы. Поэтому в работе [5] был предложен алгоритм, как найти это хорошее начальное приближение для задачи (5), (6), (12). Суть этого метода заключается в том, что на границе области $\bar{\omega}_1$ фиксируем некоторую точку x_c выбираем произвольно некоторое значение p и задаем $y(x_c) = p$. Поскольку мы фиксировали точку $x_c \in \bar{\omega}_1$, то полученная задача не принадлежит к классу задач, для которых рассмотренные выше итерационные методы плохо сходятся при $c \gg 1$. Затем в области ω, при фиксированном значении $y(x_c) = p$, одним из итерационных методов (нпр. неявным чебышевским методом) находим приближенное решение $y(x)$, $x \in \omega$, которое зависит от параметра p. Поскольку параметр p выбран произвольно, то не выполняются условия сопряжения (4) в точке x_c. Чтобы найти параметр p, при котором выполняются условия сопряжения (4), необходимо решить уравнение

$$\varphi(p) = \sum_{\alpha=1}^{2} \beta_\alpha (a_\alpha^{+1}(x) y_{x_\alpha} - a_\alpha(x) y_{\bar{x}_\alpha})|_{x=x_c} = 0. \tag{26}$$

Поскольку мы не можем получить явного выражения зависимости решения $y(x)$ от параметра p, то явный вид уравнения (26) неизвестен. Однако, значение функции $\varphi(p)$ можно вычислить для любого значения параметра p. Для решения уравнения (26), применим метод пристрелки. Тогда, значение параметра p уточняется по формуле

$$p^{s+1} = p^s - \varphi(p^s)/\varphi', \tag{27}$$

где

$$\varphi' = \sum_{\alpha=1}^{2} \beta_\alpha (a_\alpha^{+1}(x) z_{x_\alpha} - a_\alpha(x) z_{\bar{x}_\alpha})|_{x=x_c}, \tag{28}$$

а $z(x)$ — решение задачи (5), (6), (12) с однородными краевыми условиями (6), правой частью уравнения (5) равной нулю и фиксированным значением $z(x_c) = 1$. Эту задачу достаточно решить вначале один раз.

Следовательно, алгоритм однопараметрического метода пристрелки [5] можно записать так:

1. при шаге $s = 0$ задается начальное приближение $y^0(x_c) = p^0$, где $x_c \in \bar{\omega}_1$.
2. В области ω при фиксированном $y^s(x_c) = p^s$ одним из итерационных методов находится приближенное решение $y^s(x)$, $x \in \omega$.
3. Методом пристрелки, по формуле (27), используя условия сопряжения (4) (или некоторое другое условие [5]), уточняем решение в точке x_c. Получаем новое приближение p^{s+1}.
4. Если не выполнено условие окончания итерационного процесса

$$|p^{s+1} - p^s| < \varepsilon,$$

то переходим к пункту 2.

Для полученного хорошего начального приближения решаем задачу (5), (6), (12).

В качестве иллюстрации приведем результаты расчета модельной трехмерной задачи из [6] при различных значениях c, n_c — число внешних итераций уточнения парметра p^s, $\sum n_i$ – общее число внутренних итераций при решении задачи методом верхней релаксации.

c	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
n_e	3	3	4	11	9	8	8
$\sum n_i$	85	176	374	393	233	153	153

Все расчеты проводились на ЭВМ БЭСМ-6.

Приведенный выше алгоритм можно обобщить для случая переменных коэффициентов, нелинейных задач [7] и сложных областей.

Литература

[1] А. А. Самарский, *Теория разностных схем*, Наука, Москва 1983.

[2] А. А. Самарский, Е. С. Николаев, *Методы решения сеточных уравнений*, Наука, Москва 1978.

[3] Р. Чегис, Т. Шейбак, *О применении итерационных методов для решения задач с разрывными коэффициентами*, В сб.: Дифференциальные уравнения и их применение, Вильнюс, ИМК АН ЛитССР вып. 37, 1985, 68–81.

[4] –, –, *О применении итерационных методов для решения одного класса эллиптических сеточных уравнений в прямоугольнике*, В сб.: Дифференциальные уравнения и их применение, Вильнюс. ИМК АН ЛитССР, вып. 38, 100–111.

[5] –, –, *О применении специальных итерационных методов для решения одного класса эллиптических задач с разрывными коэффициентами*, Liet. mat. rink. 26, 3, 1986, 574–581.

[6] –, –, *Эффективные алгоритмы решения трехмерной эллиптической задачи с разрывными коэффициентами*, В сб.: Дифференциальные уравнения и их применение, Вильнюс, ИМК АН ЛитССР, бып. 39, 1986, 85–92.

[7] Т. С. Шейбак, *О модификации одного метода для решенил нелинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами*, Liet. mat. rink. 25, 4, 1985, 177–181.

[8] Р. Ю. Чегис, В. В. Буда, Т. С. Шейбак, *Об итерационных методах для решения эллиптических задач с разрывными коэффициентами*, Liet. mat. rink. 27, 2, 1987, 362–368.

Presented to the Semester
Numerical Analysis and Mathematical Modelling
February 25—May 29, 1987