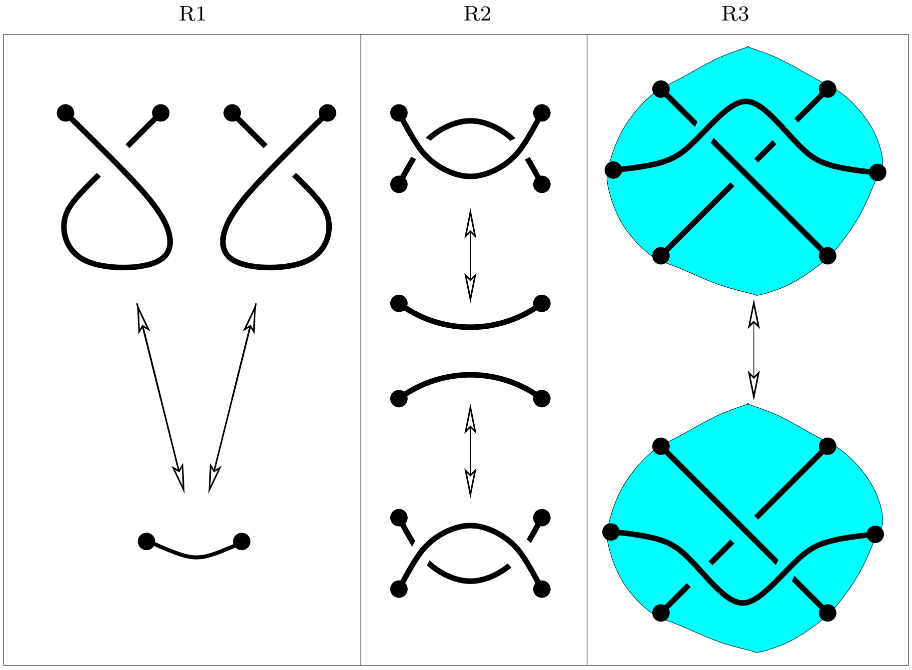
Kolorowe węzły, kolorowe sploty

Paweł TRACZYK, Warszawa*

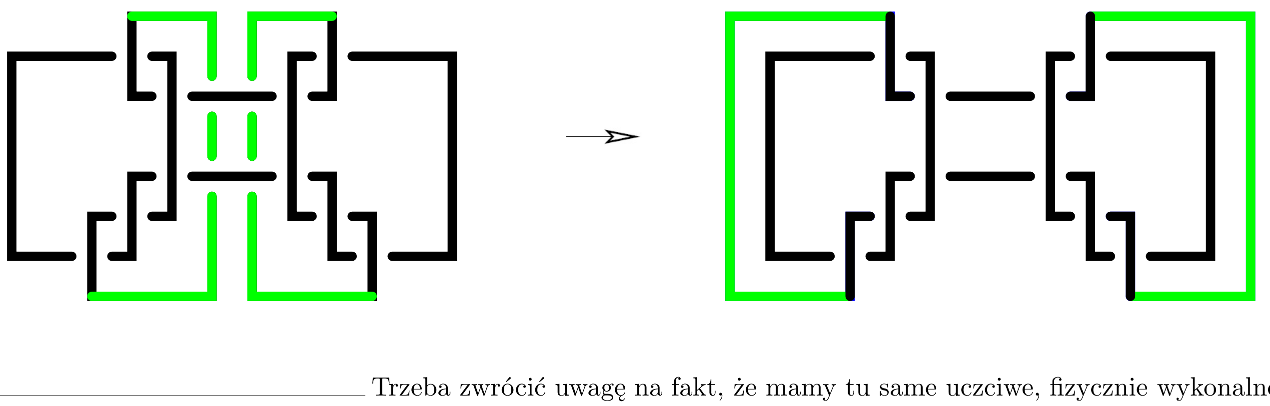
Jest to tekst związany z odczytem wygłoszonym na LIV Szkole Matematyki Poglądowej, *Kolorowa matematyka*, Jachranka, sierpień 2016, za który Autor otrzymał Medal Filca za najlepszy odczyt.
Redakcja

Na początek obejrzyjmy ciąg diagramów węzłów (właściwie jednego węzła). Zaczyna się od czegoś dosyć skomplikowanego, a na końcu wychodzi trywialny diagram węzła trywialnego. Przykład pochodzi z książki V. Manturova (Vassily Manturov, *Knot Theory*, 2004 CRC Press). Gdyby ktoś się uparł, to te stopniowe zmiany diagramów można by rozbić na bardziej elementarne przeróbki za pomocą tak zwanych ruchów Reidemeistera, które pokażę jeszcze przed zapowiedzianym ciągiem diagramów.



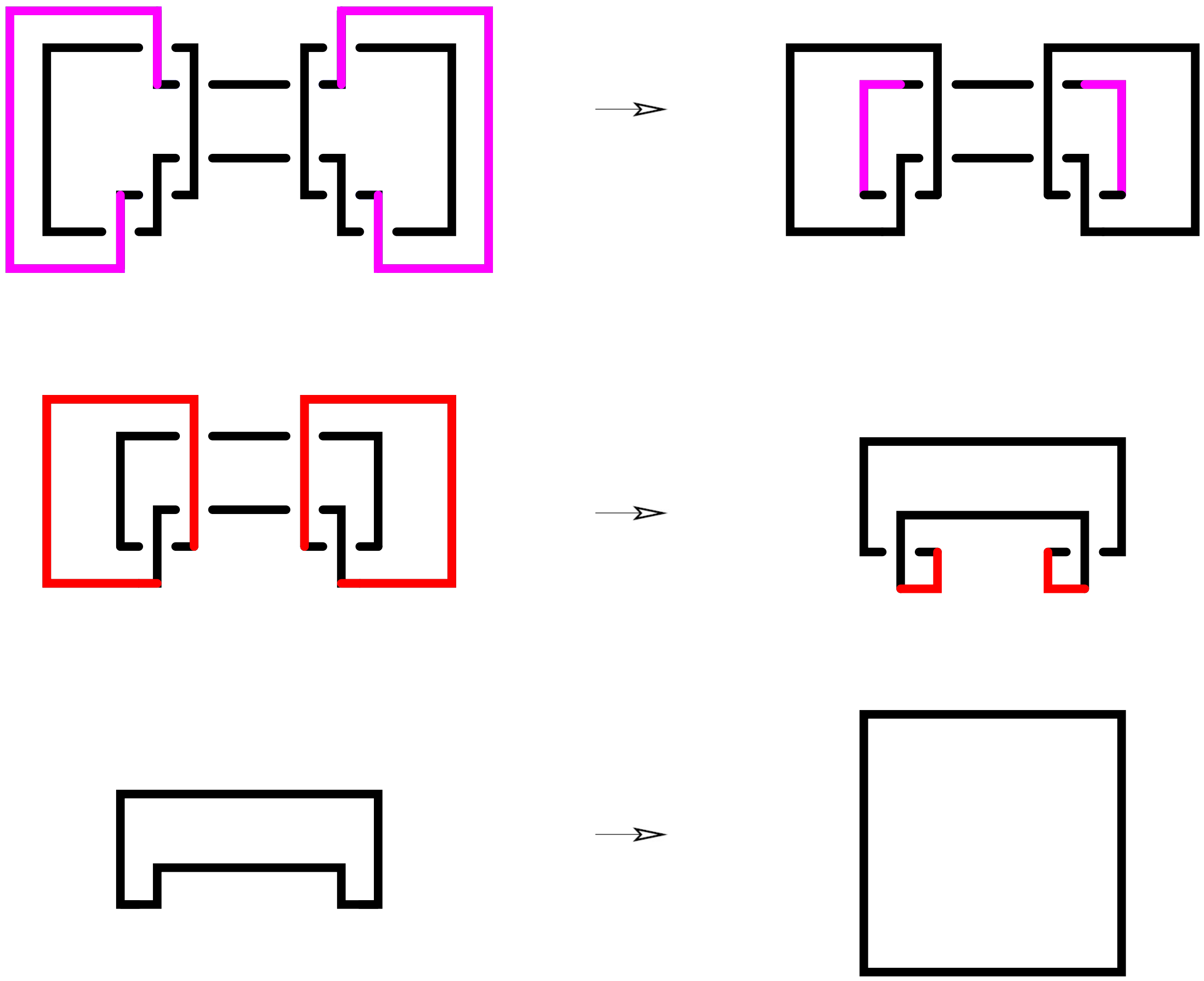
Ruchy Reidemeistera. Dwa diagramy reprezentują ten sam splot wtedy i tylko wtedy, gdy można przerobić jeden na drugi za pomocą takich ruchów i deformacji płaszczyzny.

Za chwilę zapowiedziany przykład. Zobaczymy cztery pary diagramów. W każdej parze pierwszy z diagramów jest przed kolejną przeróbką, a drugi po przeróbce. Zaznaczone kolorowo fragmenty diagramów mają zwracać uwagę na to, jaki fragment diagramu chcemy zmodyfikować i co z niego zostaje po modyfikacji.



Trzeba zwrócić uwagę na fakt, że mamy tu same uczciwe, fizycznie wykonalne na modelu z drutu operacje: nic nie trzeba oszukiwać, nie trzeba rozcinać modelu i łączyć go znowu, tylko giąć, ciągnąć i deformować.

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW, P.Traczyk@mimuw.edu.pl

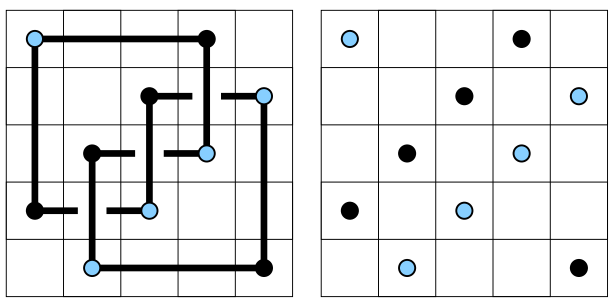


Kto się dobrze przyjrzy początkowemu diagramowi, ten zobaczy, że nie da się do niego zastosować ruchu Reidemeistera zmniejszającego liczbę skrzyżowań. Tak więc ruchy Reidemeistera nie pozwalają na monotoniczne rozpoznawanie węzła trywialnego – monotoniczne, czyli takie, że liczba skrzyżowań w kolejnych diagramach nigdy się nie zwiększa.

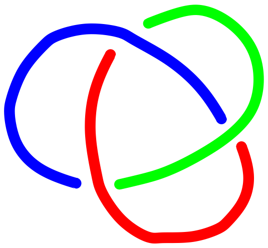
I. A. Dynnikov, *Arc-presentations of links: monotonic simplification.* Fund. Math. 190 (2006), 29–76

Grid diagrams. Ale nie tak dawno temu I. Dynnikow wynalazł pewien specjalny rodzaj diagramu, który pozwala na właśnie monotoniczne rozpoznawanie węzła trywialnego (szczegóły na końcu). Chodzi o bardzo szczególne diagramy rysowane na kwadratowej siatce, takiej jak w zeszycie w kratkę.

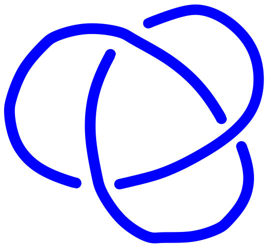
1. Cały diagram składa się z pewnej liczby pionowych i pewnej liczby poziomych kresek (które są w ramach kratek położone centralnie).
2. W każdej kolumnie jest jedna kreska pionowa, a w każdym wierszu jedna kreska pozioma.
3. W każdym skrzyżowaniu pionowa kreska jest mostem, a pozioma tunelem.



Na rysunku obok pokazany jest trójlistnik w postaci grid diagramu. Na tym rysunku mamy diagram tak zwanego trójlistnika, narysowany właśnie w stylu Dynnikova. Kreski są właściwie niepotrzebne, bo i tak wiadomo, która idzie górą, a która dołem. Kratki właściwie też. W zasadzie pełna informacja jest zadana przez układ kropek zaznaczających końce kresek.

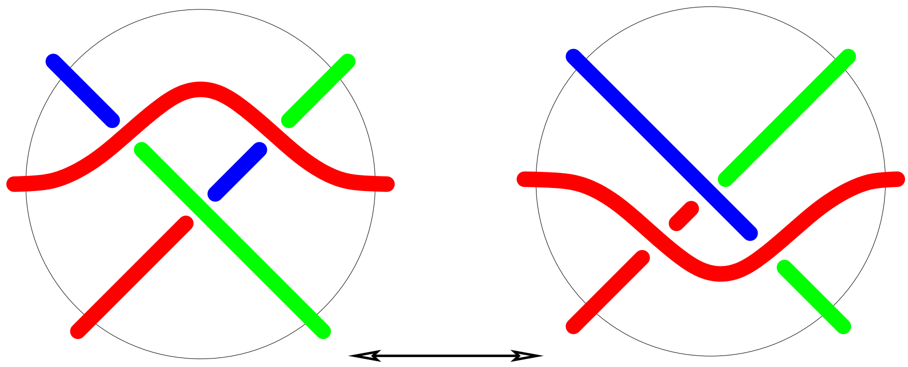


Po lewej mamy inną wersję diagramu trójlistnika. W zasadzie to jest ten sam diagram, tylko nie ma tych kratek, jest trochę zdeformowany, nie składa się z pionowych i poziomych odcinków. No i ma coś, czego tam nie było: jest pokolorowany na RGB.



Następny rysunek to jeszcze inna wersja diagramu trójlistnika, która różni się istotnie sposobem pokolorowania. Różni się istotnie, to znaczy zmiana jest poważniejsza niż tylko permutacja kolorów. Ale jednak te kolorowania mają coś wspólnego: w każdym skrzyżowaniu spotykają się albo trzy kolory, albo jest użyty tylko jeden.

Takie kolorowania diagramu (że w każdym skrzyżowaniu spotykają się albo trzy kolory, albo jest użyty tylko jeden) nazywają się *kolorowaniami Foxa*. Trudno w to na pierwszy rzut oka uwierzyć, ale liczba kolorowań Foxa jest niezmiennikim węzła. Dla ilustracji pokażę jeden fragment z dowodu.

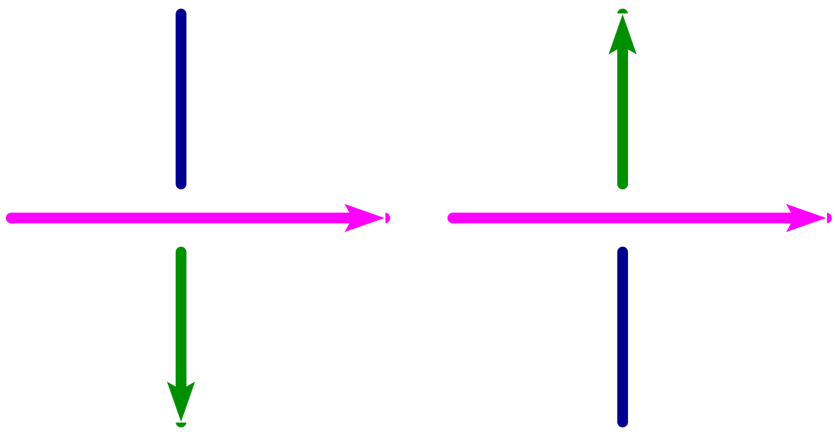


Na tym obrazku chodzi o rzecz następującą. Po lewej stronie mamy pewien fragment całego kolorowania. Chodzi o to, czy po wykonaniu R3 da się odtworzyć kolorowanie, nie zmieniając nic poza kolorami lokalnie (w tym dużym kółku), a jeżeli się da, to czy jednoznacznie. Rysunek jasno pokazuje, że się da, a że jednoznacznie, to trzeba się chwilę zastanowić. No i tak wygląda cały dowód: kolorowanie (wymaganego typu) jest dla każdego ruchu Reidemeistera wyznaczone przez kolorowanie poza obszarem działania tego ruchu. Dlatego liczba kolorowań przed ruchem Reidemeistera i po jest taka sama. Czyli ta liczba jest niezmiennikiem węzła.

Przykład 1. Liczba trójkolorowań Foxa węzła trywialnego = 3.
Przykład 2. Liczba trójkolorowań Foxa trójlistnika = 9.
Wniosek 3. Trójlistnik i węzeł trywialny to nie jest to samo.

Kolorowanie węzłów za pomocą quandli.

Popatrzmy na dwa typy skrzyżowań w zorientowanym diagramie, takie jak na poniższym rysunku:



Zrobiliśmy tak, żeby strzałka od mostu pokazywała w prawo – to się zawsze da. Wówczas możemy otrzymać skrzyżowanie takie jak po lewej albo takie jak po prawej. Oznaczmy kolory literami: H dla poziomej kreski, N dla górnej pionowej, S dla dolnej pionowej. Chcielibyśmy rozpatrywać takie kolorowania, żeby N było wyznaczone przez H i S, co zapiszemy za pomocą wzoru

$$N = S * H.$$

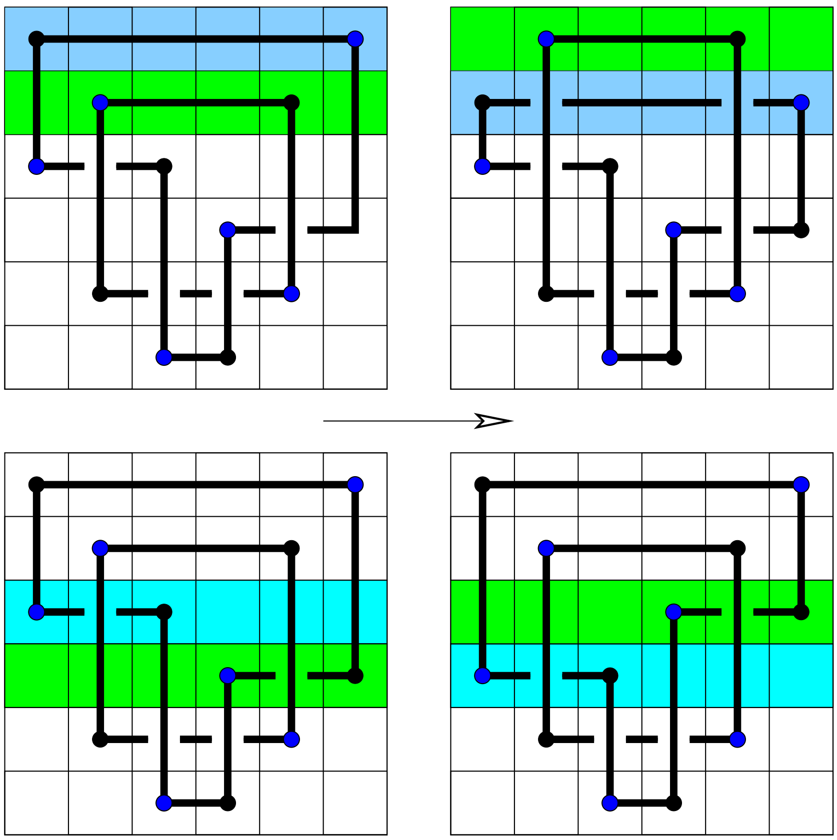
No i jeszcze chcielibyśmy, żeby to było uogólnienie kolorowań Foxa, to znaczy żeby liczba kolorowań zgodnych z tą zasadą była niezmiennikiem. Czyli żeby ruchy Reidemeistera ją zachowywały.
Okazuje się, że do tego są potrzebne następujące trzy warunki:

1. $a * a = a$
2. Dla każdych a, b istnieje dokładnie jedno c, takie że $a = c * b$
3. $(a * b) * c = (a * c)(b * c)$.

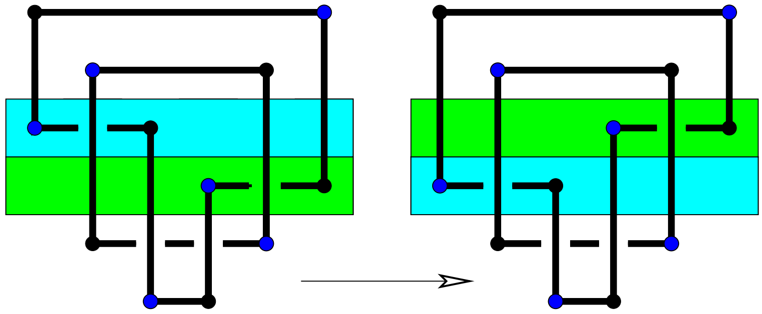
Taka algebra nazywa się quandle. Chociaż tutaj została zdefiniowana z użyciem tylko jednego działania i nie wygląda na algebrę definiowalną równościowo, to jednak definicję można łatwo przerobić na równościową.
Istnieje mnóstwo całkiem różnych quandli skończonych. Dzięki temu istnieje mnóstwo całkiem różnych niezmienników pochodzących od tych quandli.
Na zakończenie części o quandlach uwaga na temat skuteczności skończonych quandli jako narzędzia do klasyfikacji węzłów. Przytoczę tylko cytat z pewnej pracy.
W. Edwin Clark, Mohamed Elhamdadi, Masahico Saito, Timothy Yeatman (2014): *We present a set of 26 finite quandles that distinguish (up to reversal and mirror image) by number of colorings, all of the 2977 prime oriented knots with up to 12 crossings.*

I jeszcze na sam już koniec: (Dynnikov) grid diagrams pozwalają rozpoznać w sposób monotoniczny węzeł trywialny. Monotoniczny znaczy tyle, że na każdej planszy trzeba sprawdzić tylko skończenie wiele operacji niezmieniających klasy węzła i nigdy nie trzeba przechodzić do większej planszy. Dalej przedstawiona została lista tych niepozornych operacji.

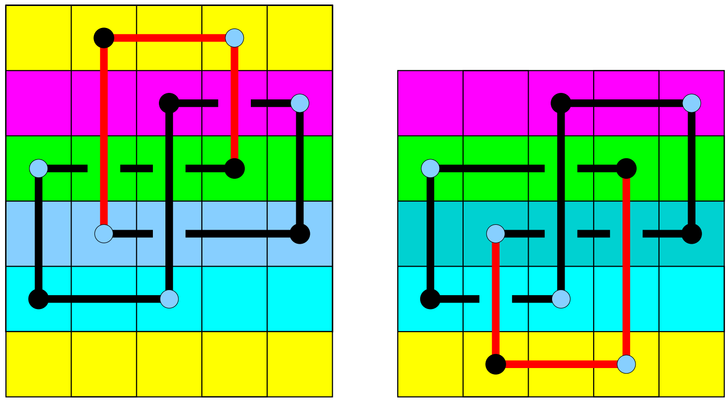
Przestawienie pary sąsiednich wierszy/kolumn.



Nie jest tak, że takie przestawienie kolumn/wierszy zawsze zachowuje klasę węzła. Ale wiadomo, kiedy zachowuje.
Może w skrócie tak: wolno to zrobić, jeżeli skutek jest tożsamy z R2 lub w ogóle żaden. W ogóle żaden to znaczy, że nastąpiła tylko deformacja diagramu na płaszczyźnie. Tak jak na rysunku, tym razem bez widocznej kratki, bo może tak lepiej widać.



Cykliczna rotacja wierszy/kolumn.



I ostatni typ, tak zwana stabilizacja