ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria III: MATEMATYKA STOSOWANA XVII (1981)

Mieczysław Kuczyński (Lublin)

Analiza kowariancji w układach z rozszczepionymi jednostkami eksperymentalnymi

(*Praca przyjęta do druku 1.07.1978*)

Wstęp. Układy eksperymentalne z rozszczepionymi jednostkami eksperymentalnymi (split-plot) zostały wprowadzone przez Yatesa ([17]). Są one szczególnie przydatne, gdy w doświadczeniu występują jednostki eksperymentalne różnych typów (niejednakowe) oraz przy dużej liczbie kombinacji poziomów badanych czynników. W rozważanym w pracy układzie z pojedynczo rozszczepionymi jednostkami eksperymentalnymi wyróżniamy jednostki pierwszego rzędu (dla poziomów czynnika A) oraz jednostki drugiego rzędu (dla poziomów czynnika B). Poziomy czynnika A rozmieszczamy w układzie bloków kompletnie zrandomizowanych, a poziomy czynnika B rozlosowujemy wewnątrz poziomów czynnika A. Wielu autorów przeprowadzało dyskusje dotyczące modelu matematycznego w układzie split-plot. Efekty replikacji są traktowane jako zmienne losowe (Harter [3], Li i Klotz [8], Mendenhall [9], Federer [2]), albo jako parametry stałe (Chakrabarti [1]). Takahashi ([16]), Harter ([3]) i Chakrabarti ([1]) zakładają istnienie korelacji efektów błędów drugiego rzędu, gdy dotyczą one tych samych jednostek eksperymentalnych pierwszego rzędu, a Mendenhall ([9]) zakłada skorelowanie błędów pierwszego rzędu, gdy dotyczą tych samych replikacji. Najbardziej ogólnym podejściem do tego problemu jest założenie istnienia korelacji dla efektów błędów zarówno pierwszego jak i drugiego rzędu (Kempthorne [5], Niedokos [11], Mikos [10]). Kempthorne ([5]) i Chakrabarti ([1]) pokazują (przy wykorzystaniu przekształceń ortogonalnych), że estymatory efektów stałych i funkcje testowe dotyczące parametrów modelu są identyczne zarówno przy założeniu istnienia korelacji efektów błędów jak i przy błędach nieskorelowanych.

W niniejszej pracy rozważany jest model analizy kowariancji z wieloma zmiennymi towarzyszącymi w układzie pojedynczo rozszczepionych jednostek eksperymentalnych ze skorelowanymi efektami błędów. Uwzględnione zostały dwa rodzaje współczynników regresji (dla jednostek pierwszego i drugiego rzędu) zmiennej głównej względem zmiennych towarzyszących. Rozważany jest model losowy (efekty czynników A i B są zmiennymi losowymi) i modele mieszane (efekty A lub B stałe), przy czym w każdym przypadku efekty replikacji są traktowane jako zmienne losowe.

1. Modele liniowe. W doświadczeniach wykonywanych w układzie z pojedynczo rozszczepionymi jednostkami eksperymentalnymi badamy wpływ dwu czynników A i B na wartość zmiennej losowej y_{ijk}. Poziomy czynnika A rozmieszczamy zgodnie z układem bloków kompletnie zrandomizowanych. Jednostki, na których uplasowano poziomy czynnika A, nazywamy jednostkami *pierwszego rzędu* lub *podblokami*. Każdy podblok dzielimy na jednostki drugiego rzędu, na których umieszczamy poziomy czynnika B.

Przyjmujemy następujący model matematyczny:

$$y_{ijk} = \mu+\varrho_i+\alpha_j+d_{ij}+\beta_k+\gamma_{jk}+\sum_{h=1}^{q}[(\bar{z}^h_{ij.}-\bar{z}^h_{i..})\delta_{1h}+(z^h_{ijk}-\bar{z}^h_{ij.})\delta_{2h}]+e_{ijk} \tag{1.1}$$

$$(i=1,2,\ldots,r;\quad j=1,2,\ldots,a;\quad k=1,2,\ldots,b),$$

gdzie y_{ijk} — zmienna losowa o rozkładzie normalnym; μ — średnia populacji (stały parametr); $\varrho_i, \alpha_j, \beta_k, \gamma_{jk}$ — efekty replikacji, czynnika A, czynnika B oraz interakcyjne czynników AB, odpowiednio; z^h_{ijk} — obserwacja h-tej zmiennej towarzyszącej, δ_{1h}, δ_{2h} — współczynniki regresji zmiennej y_{ijk} względem h-tej zmiennej towarzyszącej dla jednostek pierwszego i drugiego rzędu odpowiednio; d_{ij}, e_{ijk} — efekty błędów eksperymentalnych związanych z jednostkami pierwszego i drugiego rzędu;

$$\bar{z}^h_{ij.} = \frac{1}{b}\sum_k z^h_{ijk},\qquad \bar{z}^h_{i..} = \frac{1}{ab}\sum_j\sum_k z^h_{ijk}.$$

Model (1.1) zapiszemy w notacji macierzowej:

$$\mathbf{y} = \mathbf{J}_n\mu+\mathbf{X}_R\boldsymbol{\rho}+\mathbf{X}_A\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{X}_d\mathbf{d}+\mathbf{X}_B\boldsymbol{\beta}+\mathbf{X}_{AB}\boldsymbol{\gamma}+\mathbf{X}_1\mathbf{Z}\boldsymbol{\delta}_1+\mathbf{X}_2\mathbf{Z}\boldsymbol{\delta}_2+\mathbf{e}, \tag{1.2}$$

gdzie:

$$n = rab,\quad \mathbf{y}' = [y_{111}, y_{112}, \ldots, y_{rab}],\quad \boldsymbol{\rho}' = [\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_r],$$
$$\boldsymbol{\alpha}' = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_a],\quad \mathbf{d}' = [d_{11}, d_{12}, \ldots, d_{ra}],\quad \boldsymbol{\beta}' = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_b],$$
$$\boldsymbol{\gamma}' = [\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{ab}],\quad \boldsymbol{\delta}_i' = [\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{iq}]\quad \text{dla}\quad i=1,2,$$
$$\mathbf{e}' = [e_{111}, e_{112}, \ldots, e_{rab}],\quad \mathbf{Z} = [\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2, \ldots, \mathbf{z}^q],\ \text{gdzie}\ \mathbf{z}^i = [z^i_{111}, z^i_{112}, \ldots, z^i_{rab}]',$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \frac{1}{b}(\mathbf{I}_{ra}\otimes\mathbf{E}_b)-\frac{1}{ab}(\mathbf{I}_r\otimes\mathbf{E}_{ab}),\\ \mathbf{X}_2 &= \mathbf{I}_n-\frac{1}{b}(\mathbf{I}_{ra}\otimes\mathbf{E}_b), \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{X}_R = \mathbf{I}_r\otimes\mathbf{J}_{ab},\quad \mathbf{X}_A = \mathbf{J}_r\otimes\mathbf{I}_a\otimes\mathbf{J}_b,\\ \mathbf{X}_d = \mathbf{I}_{ar}\otimes\mathbf{J}_b,\quad \mathbf{X}_B = \mathbf{J}_{ar}\otimes\mathbf{I}_b,\quad \mathbf{X}_{AB} = \mathbf{J}_r\otimes\mathbf{I}_{ab}, \end{gathered} \tag{1.4}$$

przy czym przez $\mathbf{J}_k$ oznaczamy k-wymiarowy, jedynkowy wektor kolumnowy, $\mathbf{I}_k$ — k-wymiarową macierz jednostkową, $\mathbf{E}_k$ — k-wymiarową, kwadratową macierz jedynkową, a przez $\otimes$ oznaczamy iloczyn Kroneckera macierzy.

Zakładamy, że ϱ_i, d_{ij}, e_{ijk} są zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych. Ponadto zakładamy, że efekty błędów pierwszego rzędu d_{ij} są skorelowane z tym samym współczynnikiem korelacji ω_d, w przypadku gdy dotyczą tych samych replikacji, a nie są skorelowane, gdy dotyczą różnych replikacji. Podobnie zakładamy, że efekty błędów e_{ijk} są skorelowane ze współczynnikiem ω_e gdy dotyczą tych samych replikacji i tych samych poziomów czynnika A, a różnych poziomów czynnika B. Więc wektory losowe $\boldsymbol{\rho}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$ mają następujące niezależne rozkłady normalne:

$$\boldsymbol{\rho} - N(\mathbf{0}, \sigma_R^2 \mathbf{I}_r), \quad \mathbf{d} - N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_d), \quad \mathbf{e} - N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_e),$$

gdzie macierze kowariancji $\boldsymbol{\Sigma}_d$ i $\boldsymbol{\Sigma}_e$ mają postać (por. Niedokos [11]):

$$\boldsymbol{\Sigma}_d = \omega_d \sigma_d^2 (\mathbf{I}_r \otimes \mathbf{E}_a) + (1 - \omega_d) \sigma_d^2 \mathbf{I}_{ra},$$
$$\boldsymbol{\Sigma}_e = \omega_e \sigma_e^2 (\mathbf{I}_{ra} \otimes \mathbf{E}_b) + (1 - \omega_e) \sigma_e^2 \mathbf{I}_n.$$

Ponadto zakładamy, że macierz $\mathbf{Z}$ jest pełnego rzędu kolumnowego i $\mathrm{rz}(\mathbf{Z}) = = q < (r-1)(a-1)$ oraz

$$R[\mathbf{J}_n : \mathbf{X}_R : \mathbf{X}_A : \mathbf{X}_d : \mathbf{X}_B : \mathbf{X}_{AB}] \cap R[\mathbf{Z}] = \{\mathbf{0}\},$$

gdzie przez $R[\mathbf{X}]$ oznaczamy przestrzeń liniową rozpiętą na kolumnach macierzy $\mathbf{X}$, a $[\mathbf{X} : \mathbf{Y}]$ jest macierzą blokową złożoną z podmacierzy $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$.

Powyższe założenia dotyczyły wszystkich wariantów rozważanego w pracy modelu (1.1). Podamy teraz dodatkowe założenia dla poszczególnych czterech wariantów w zależności od tego czy efekty czynników A i B są parametrami stałymi, czy też zmiennymi losowymi.

Model 1:

— w modelu tym przyjmujemy, że efekty α_j, β_k i γ_{jk} są parametrami stałymi spełniającymi warunki:

$$\mathbf{J}_a' \boldsymbol{\alpha} = 0, \quad \mathbf{J}_b' \boldsymbol{\beta} = 0, \quad (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{J}_b') \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{J}_a' \otimes \mathbf{I}_b) \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}. \tag{1.5}$$

Model 2:

— efekty czynnika A traktujemy jako parametry stałe, a efekty czynnika B są zmiennymi losowymi. Ponadto

$$\boldsymbol{\beta} - N(\mathbf{0}, \sigma_B^2 \mathbf{I}_b), \quad \boldsymbol{\gamma} - N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_\gamma), \quad \mathbf{J}_a' \boldsymbol{\alpha} = 0, \quad (\mathbf{J}_a' \otimes \mathbf{I}_b) \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}, \tag{1.6}$$

gdzie

$$\boldsymbol{\Sigma}_\gamma = \sigma_{AB}^2 \mathbf{I}_{ab} - \frac{1}{a} \sigma_{AB}^2 (\mathbf{E}_a \otimes \mathbf{I}_b).$$

Model 3:

— efekty czynnika A są zmiennymi losowymi, a czynnika B parametrami stałymi, przy czym spełnione są warunki:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\alpha} - N(\mathbf{0}, \sigma_A^2 \mathbf{I}_a), \quad \boldsymbol{\gamma} - N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_\gamma), \\ \mathbf{J}_b' \boldsymbol{\beta} = 0, \quad (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{J}_b') \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}, \end{gathered} \tag{1.7}$$

gdzie

$$\boldsymbol{\Sigma}_\gamma = \sigma_{AB}^2 \mathbf{I}_{ab} - \frac{1}{b} \sigma_{AB}^2 (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{E}_b).$$

Model 4:

— przyjmujemy, że efekty czynników A i B są zmiennymi losowymi oraz że spełnione są warunki:

$$\boldsymbol{\alpha} - N(\mathbf{0}, \sigma_A^2 \mathbf{I}_a), \quad \boldsymbol{\beta} - N(\mathbf{0}, \sigma_B^2 \mathbf{I}_b), \quad \boldsymbol{\gamma} - N(\mathbf{0}, \sigma_{AB}^2 \mathbf{I}_{ab}). \tag{1.8}$$

Oznaczając przez $P[\mathbf{X}]$ operator rzutujący ortogonalnie wektory z przestrzeni R_n na podprzestrzeń $R[\mathbf{X}]$ rozpiętą na kolumnach macierzy $\mathbf{X}$ zapiszemy postać ortogonalnych operatorów rzutowych dla poszczególnych źródeł zmienności (por. Ogasawara i Takahashi [12]):

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}_M = P[\mathbf{J}_n], \quad \mathbf{P}_R = P[\mathbf{X}_R] - \mathbf{P}_M, && \mathbf{P}_A = P[\mathbf{X}_A] - \mathbf{P}_M, \\ &\mathbf{P}_d = P[\mathbf{X}_d] - P[\mathbf{X}_R] - P[\mathbf{X}_A] + \mathbf{P}_M, && \mathbf{P}_B = P[\mathbf{X}_B] - \mathbf{P}_M, \\ &\mathbf{P}_{AB} = P[\mathbf{X}_{AB}] - P[\mathbf{X}_A] - P[\mathbf{X}_B] + \mathbf{P}_M, && \mathbf{P}_e = \mathbf{I}_n - P[\mathbf{X}_{AB}] - P[\mathbf{X}_d] + P[\mathbf{X}_A], \end{aligned} \tag{1.9}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} &P[\mathbf{J}_n] = \frac{1}{n}\mathbf{E}_n, && P[\mathbf{X}_R] = \frac{1}{ab}(\mathbf{I}_r \otimes \mathbf{E}_{ab}), \\ &P[\mathbf{X}_A] = \frac{1}{br}(\mathbf{E}_r \otimes \mathbf{I}_a \otimes \mathbf{E}_b), && P[\mathbf{X}_d] = \frac{1}{b}(\mathbf{I}_{ra} \otimes \mathbf{E}_b), \\ &P[\mathbf{X}_B] = \frac{1}{ar}(\mathbf{E}_{ra} \otimes \mathbf{I}_b), && P[\mathbf{X}_{AB}] = \frac{1}{r}(\mathbf{E}_r \otimes \mathbf{I}_{ab}). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Operatory rzutowe dane wzorami (1.9) są parami ortogonalne i spełniają równość:

$$\mathbf{P}_M + \mathbf{P}_R + \mathbf{P}_A + \mathbf{P}_d + \mathbf{P}_B + \mathbf{P}_{AB} + \mathbf{P}_e = \mathbf{I}_n.$$

LEMAT 1.1. *Macierze* $\mathbf{X}_1$ *i* $\mathbf{X}_2$ *występujące w modelu* (1.2) *możemy przedstawić w postaci*:

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{P}_d + \mathbf{P}_A, \quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{P}_e + \mathbf{P}_{AB} + \mathbf{P}_B. \tag{1.11}$$

Dowód. Korzystając ze wzorów (1.3), (1.9) i (1.10) otrzymujemy:

$$\mathbf{P}_d + \mathbf{P}_A = \mathbf{P}[\mathbf{X}_d] - P[\mathbf{X}_R] = \mathbf{X}_1,$$
$$\mathbf{P}_e + \mathbf{P}_{AB} + \mathbf{P}_B = \mathbf{I}_n - P[\mathbf{X}_d] = \mathbf{X}_2.$$

TWIERDZENIE 1.1 (por. Mikos [10]). *Macierze kowariancji* $\mathbf{V}_t$ $(t = 1, 2, 3, 4)$ *wektora obserwacji* $\mathbf{y}$ *możemy przedstawić w postaci*:

$$\mathbf{V}_t = w_{tM}\mathbf{P}_M + w_{tR}\mathbf{P}_R + w_{tA}\mathbf{P}_A + w_{td}\mathbf{P}_d + w_{tB}\mathbf{P}_B + w_{tAB}\mathbf{P}_{AB} + w_{te}\mathbf{P}_e, \tag{1.12}$$

gdzie odpowiednie operatory rzutowe dane są wzorami (1.9), *a współczynniki* w_{ti} $(i = M, R, A, d, B, AB, e)$ są zawarte w tablicy 1.1.

Z uwagi na ortogonalność operatorów rzutowych (1.9) otrzymujemy wzory na macierze odwrotne do macierzy kowariancji (1.12):

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_t^{-1} = {} & \frac{1}{w_{tM}}\mathbf{P}_M + \frac{1}{w_{tR}}\mathbf{P}_R + \frac{1}{w_{tA}}\mathbf{P}_A + \\ & + \frac{1}{w_{td}}\mathbf{P}_d + \frac{1}{w_{tB}}\mathbf{P}_B + \frac{1}{w_{tAB}}\mathbf{P}_{AB} + \frac{1}{w_{te}}\mathbf{P}_e \end{aligned} \tag{1.13}$$

Tablica 1.1. Współczynniki macierzy kowariancji

efekty czynnika A — stałe		efekty czynnika A — losowe	
efekty B — stałe	efekty B — losowe	efekty B — stałe	efekty B — losowe
$w_{1M} = w^2+ab\sigma_R^2+ +ab\omega_d\sigma_d^2$ gdzie $w^2 = b(1-\omega_d)\sigma_d^2+ +[1+(b-1)\omega_e]\sigma_e^2$	$w_{2M} = w_{1M}+ar\sigma_B^2$	$w_{3M} = w_{1M}+br\sigma_A^2$	$w_{4M} = w_{1M}+br\sigma_A^2+ +ar\sigma_b^2+r\sigma_{AB}^2$
$w_{1R} = w_{1M}$	$w_{2R} = w_{1M}$	$w_{3R} = w_{1M}$	$w_{4R} = w_{1M}$
$w_{1A} = w^2$	$w_{2A} = w^2+r\sigma_{AB}^2$	$w_{3A} = w^2+br\sigma_A^2$	$w_{4A} = w^2+br\sigma_A^2+r\sigma_{AB}^2$
$w_{1d} = w^2$	$w_{2d} = w^2$	$w_{3d} = w^2$	$w_{4d} = w^2$
$w_{1B} = s^2 = (1-\omega_e)\sigma_e^2$	$w_{2B} = s^2+ar\sigma_B^2$	$w_{3B} = s^2+r\sigma_{AB}^2$	$w_{4B} = s^2+ar\sigma_B^2+r\sigma_{AB}^2$
$w_{1AB} = s^2$	$w_{2AB} = s^2+r\sigma_{AB}^2$	$w_{3AB} = s^2+r\sigma_{AB}^2$	$w_{4AB} = s^2+r\sigma_{AB}^2$
$w_{1e} = s^2$	$w_{2e} = s^2$	$w_{3e} = s^2$	$w_{4e} = s^2$

oraz następujące równości:

$$\mathbf{P}_i\mathbf{V}_t = w_{ti}\mathbf{P}_i \quad \text{dla} \quad i = R, A, d, B, AB, e. \tag{1.14}$$

2. Estymacja efektów stałych. Modele omawiane w paragrafie 1 możemy przedstawić w ogólnej postaci:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_f\mathbf{u}_f+\mathbf{X}_p\mathbf{u}_p, \tag{2.1}$$

gdzie $\mathbf{u}_f$ jest wektorem efektów stałych, $\mathbf{u}_p$ — wektorem efektów losowych, $\mathbf{X}_f$ i $\mathbf{X}_p$ są znanymi macierzami blokowymi odpowiadającymi określonym efektom zawartym odpowiednio w $\mathbf{u}_f$ i $\mathbf{u}_p$.

Równania normalne służące do wyznaczenia estymatorów $\hat{\mathbf{u}}_f$ otrzymane metodą najmniejszych kwadratów są postaci (por. Searle [14]):

$$\mathbf{X}_f'\mathbf{V}_t^{-1}\mathbf{X}_f\hat{\mathbf{u}}_f = \mathbf{X}_f'\mathbf{V}_t^{-1}\mathbf{y} \quad \text{dla} \quad t = 1, 2, 3, 4, \tag{2.2}$$

gdzie $\mathbf{V}_t^{-1}$ są określone wzorem (1.13). Estymatory uzyskane z układu (2.2) są najlepsze (z minimalną wariancją) w klasie liniowych, nieobciążonych estymatorów (por. Searle [15]).

Przy rozwiązywaniu układów równań (2.2) wykorzystujemy łatwe do wykazania zależności:

$$\mathbf{J}_n'\mathbf{V}_t^{-1} = \frac{1}{w_{tM}}\mathbf{J}_n', \quad \mathbf{X}_A'\mathbf{V}_t^{-1} = \frac{1}{w_{tA}}\mathbf{X}_A'+\frac{1}{a}\left(\frac{1}{w_{tM}}-\frac{1}{w_{tA}}\right)\mathbf{J}_a\mathbf{J}_n', \tag{2.3}$$

$$\mathbf{X}_B'\mathbf{V}_t^{-1} = \frac{1}{w_{tB}}\mathbf{X}_B' + \frac{1}{b}\left(\frac{1}{w_{tM}} - \frac{1}{w_{tB}}\right)\mathbf{J}_b\mathbf{J}_n',$$

$$\mathbf{X}_{AB}'\mathbf{V}_t^{-1} = \frac{1}{w_{tAB}}\mathbf{X}_{AB}' + \frac{1}{b}\left(\frac{1}{w_{tA}} - \frac{1}{w_{tAB}}\right)(\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{J}_b)\mathbf{X}_A' + \tag{2.4}$$
$$+\frac{1}{a}\left(\frac{1}{w_{tB}} - \frac{1}{w_{tAB}}\right)(\mathbf{J}_a \otimes \mathbf{I}_b)\mathbf{X}_B' + \frac{1}{ab}\left(\frac{1}{w_{tM}} - \frac{1}{w_{tA}} - \frac{1}{w_{tB}} + \frac{1}{w_{tAB}}\right)\mathbf{J}_{ab}\mathbf{J}_n',$$

$$\mathbf{X}_z'\mathbf{V}_t^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}'\left(\frac{1}{w_{td}}\mathbf{P}_d + \frac{1}{w_{tA}}\mathbf{P}_A\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{Z}'\left(\frac{1}{w_{te}}\mathbf{P}_e + \frac{1}{w_{tB}}\mathbf{P}_B + \frac{1}{w_{tAB}}\mathbf{P}_{AB}\right) \end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

gdzie

$$\mathbf{X}_z = [\mathbf{X}_1\mathbf{Z}:\mathbf{X}_2\mathbf{Z}].$$

Wzór (2.5) wynika bezpośrednio z lematu 1.1 i wzoru (1.13).

Dla modelu 1 (efekty czynników A i B są parametrami stałymi) rozwiązujemy układ (2.2) dla $t = 1$ oraz:

$$\mathbf{X}_f = [\mathbf{J}_n:\mathbf{X}_A:\mathbf{X}_B:\mathbf{X}_{AB}:\mathbf{X}_z] \quad \text{i} \quad \mathbf{u}_f' = [\mu:\boldsymbol{\alpha}':\boldsymbol{\beta}':\boldsymbol{\gamma}':\boldsymbol{\delta}'],$$

gdzie

$$\boldsymbol{\delta}' = [\boldsymbol{\delta}_1':\boldsymbol{\delta}_2'].$$

Rozpisując układ (2.2) na równania dla poszczególnych wektorów parametrów (por. Kuczyński [6]) otrzymujemy rozwiązania:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\mathbf{J}_n'\mathbf{y}, \tag{2.6}$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{1}{br}\mathbf{X}_A'\mathbf{P}_A(\mathbf{y} - \mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\delta}}_1), \tag{2.7}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{ar}\mathbf{X}_B'\mathbf{P}_B(\mathbf{y} - \mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\delta}}_2), \tag{2.8}$$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{1}{r}\mathbf{X}_{AB}'\mathbf{P}_{AB}(\mathbf{y} - \mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\delta}}_2), \tag{2.9}$$

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_1 = (\mathbf{Z}'\mathbf{P}_d\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{P}_d\mathbf{y}, \tag{2.10}$$

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_2 = (\mathbf{Z}'\mathbf{P}_e\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{P}_e\mathbf{y}. \tag{2.11}$$

Dla modelu 2 (efekty czynnika A stałe, czynnika B — losowe) w układzie równań (2.2) podstawiamy $t = 2$ oraz:

$$\mathbf{X}_f = [\mathbf{J}_n:\mathbf{X}_A\mathbf{X}_z], \quad \mathbf{u}_f' = [\mu:\boldsymbol{\alpha}':\boldsymbol{\delta}'].$$

Postać estymatorów $\hat{\mu}$, $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ oraz $\hat{\boldsymbol{\delta}}_1$ określona jest w tym modelu wzorami (2.6), (2.7) i (2.10) odpowiednio, natomiast dla $\hat{\boldsymbol{\delta}}_2$ otrzymujemy:

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_2 = (\mathbf{Z}'\mathbf{G}_1\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{G}_1\mathbf{y}, \tag{2.12}$$

gdzie

$$\mathbf{G}_1 = \frac{1}{w_{2e}}\mathbf{P}_e + \frac{1}{w_{2B}}\mathbf{P}_B + \frac{1}{w_{2AB}}\mathbf{P}_{AB}.$$

W modelu 3 (efekty A losowe, efekty B stałe) do układu (2.2) podstawiamy $t = 3$, $\mathbf{X}_f = [\mathbf{J}_n : \mathbf{X}_B : \mathbf{X}_z]$, $\mathbf{u}_f' = [\mu : \boldsymbol{\beta}' : \boldsymbol{\delta}']$, skąd otrzymujemy postać $\hat{\mu}$ daną wzorem (2.6) oraz:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{ar}\mathbf{X}_B'\mathbf{P}_B(\mathbf{y} - \mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\delta}}_2), \tag{2.13}$$

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_1 = (\mathbf{Z}'\mathbf{G}_2\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{G}_2\mathbf{y}, \tag{2.14}$$

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_2 = (\mathbf{Z}'\mathbf{G}_3\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{G}_3\mathbf{y}, \tag{2.15}$$

gdzie

$$\mathbf{G}_2 = \frac{1}{w_{3d}}\mathbf{P}_d + \frac{1}{w_{3A}}\mathbf{P}_A, \quad \mathbf{G}_3 = \frac{1}{w_{3e}}\mathbf{P}_e + \frac{1}{w_{3AB}}\mathbf{P}_{AB}.$$

Dla modelu losowego w układzie równań (2.2) podstawiamy $t = 4$, $\mathbf{X}_f = [\mathbf{J}_n : \mathbf{X}_z]$, $\mathbf{u}_f' = [\mu : \boldsymbol{\delta}']$, skąd otrzymujemy wzór (2.6) dla $\hat{\mu}$ oraz:

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_1 = (\mathbf{Z}'\mathbf{G}_4\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{G}_4\mathbf{y}, \tag{2.16}$$

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_2 = (\mathbf{Z}'\mathbf{G}_5\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{G}_5\mathbf{y}, \tag{2.17}$$

gdzie

$$\mathbf{G}_4 = \frac{1}{w_{4d}}\mathbf{P}_d + \frac{1}{w_{4A}}\mathbf{P}_A, \quad G_5 = \frac{1}{w_{4e}}\mathbf{P}_e + \frac{1}{w_{4B}}\mathbf{P}_B + \frac{1}{w_{4AB}}\mathbf{P}_{AB}.$$

Estymatory w modelach mieszanych i losowym określone wzorami (2.12)–(2.17) zależą od parametrów macierzy kowariancji wektora obserwacji i są one najlepsze przy ustalonych wartościach tych parametrów (najlepsze w danym punkcie).

3. Estymacja komponentów wariancyjnych. Do wyznaczania estymatorów komponentów wariancyjnych w rozważanych wariantach modelu (1.2) będą użyte średnie kwadraty następującej postaci:

$$MS_i = \frac{\mathbf{y}'\mathbf{Q}_i\mathbf{y}}{\nu_i}, \tag{3.1}$$

gdzie $i = 1, 2, A, d, B, AB, e$, oraz

$$\begin{gathered} \nu_1 = \nu_2 = q, \quad \nu_A = a-1, \quad \nu_d = (r-1)(a-1)-q, \quad \nu_B = b-1, \\ \nu_{AB} = (a-1)(b-1), \quad \nu_e = a(r-1)(b-1)-q \end{gathered} \tag{3.2}$$

są stopniami swobody dla odpowiednich źródeł zmienności, a macierze $\mathbf{Q}_i$ wyrażają się wzorami:

$$\mathbf{Q}_i = P[\mathbf{P}_i\mathbf{Z}] = \mathbf{P}_i\mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{P}_i\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{P}_i \quad \text{dla} \quad i = 1, 2; \tag{3.3}$$

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{P}_i - P[\mathbf{P}_i\mathbf{Z}] \quad \text{dla} \quad i = d, e; \tag{3.4}$$

$$\mathbf{Q}_A = \mathbf{P}_A - P[(\mathbf{P}_A + \mathbf{P}_d)\mathbf{Z}] + P[\mathbf{P}_d\mathbf{Z}] = \mathbf{P}_A - (\mathbf{P}_A + \mathbf{P}_d)\mathbf{Z}\mathbf{T}_A\mathbf{Z}'(\mathbf{P}_A + \mathbf{P}_d) + \mathbf{Q}_1, \tag{3.5}$$

gdzie

$$\mathbf{T}_A = [\mathbf{Z}'(\mathbf{P}_A+\mathbf{P}_d)\mathbf{Z}]^{-1};$$

(3.6) $$\mathbf{Q}_i = \mathbf{P}_i - P[(\mathbf{P}_i+\mathbf{P}_e)\mathbf{Z}] + P[\mathbf{P}_e\mathbf{Z}] = \mathbf{P}_i - (\mathbf{P}_i+\mathbf{P}_e)\mathbf{Z}\mathbf{T}_i\mathbf{Z}'(\mathbf{P}_i+\mathbf{P}_e) + \mathbf{Q}_2$$

$$\text{dla} \quad i = B, AB,$$

gdzie

$$\mathbf{T}_i = [\mathbf{Z}'(\mathbf{P}_i+\mathbf{P}_e)\mathbf{Z}]^{-1}.$$

TWIERDZENIE 3.1. *Macierze* $\mathbf{Q}_i$ *dane wzorami* (3.3)–(3.6) *są idempotentne, ich iloczyny są macierzami zerowymi, a rzędy są określone wzorami* (3.2).

D o w ó d. Z ortogonalności operatorów rzutowych (1.9) wynika, że dla macierzy (3.3)–(3.6) zachodzi

$$\mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_j = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{dla} \quad i \neq j, \\ \mathbf{Q}_i & \text{dla} \quad i = j. \end{cases}$$

Ze względu na idempotentności rozważanych macierzy, ich rząd jest równy śladowi, więc dla $i = 1, 2$ otrzymujemy:

$$\mathrm{rz}(\mathbf{Q}_i) = \mathrm{tr}[\mathbf{P}_i\mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{P}_i\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{P}_i] = \mathrm{tr}[(\mathbf{Z}'\mathbf{P}_i\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{P}_i\mathbf{Z}] = q,$$

$$\mathrm{rz}(\mathbf{Q}_A) = \mathrm{tr}(\mathbf{P}_A) - \mathrm{tr}[(\mathbf{P}_A+\mathbf{P}_d)\mathbf{Z}\mathbf{T}_A\mathbf{Z}'(\mathbf{P}_A+\mathbf{P}_d)] + \mathrm{tr}(\mathbf{Q}_1) =$$
$$= \mathrm{tr}(\mathbf{P}_A) - \mathrm{tr}(\mathbf{I}_q) + \mathrm{tr}(\mathbf{I}_q) = a-1,$$

gdyż $\mathbf{P}_A$ jest znanym operatorem z analizy wariancji, dla którego $\mathrm{tr}(\mathbf{P}_A) = a-1$ (por. Mikos [10]). Analogicznie wyznaczamy rzędy pozostałych macierzy.

Nieobciążone estymatory komponentów wariancyjnych otrzymamy rozwiązując układy równań, które powstają z przyrównania średnich kwadratów (3.1) do ich wartości oczekiwanych. Do wyznaczania wartości oczekiwanych form kwadratowych stosujemy wzór:

(3.7) $$\mathscr{E}(\mathbf{y}'\mathbf{Q}\mathbf{y}) = \mathscr{E}(\mathbf{y}')\mathbf{Q}\mathscr{E}(\mathbf{y}) + \mathrm{tr}(\mathbf{Q}\mathbf{\Sigma}_y).$$

Ze wzorów (1.4), (1.9), (1.11), (1.12), (1.14) oraz (3.4) i (3.7) wyznaczamy wartości oczekiwane form kwadratowych $\mathbf{y}'\mathbf{Q}_d\mathbf{y}$ i $\mathbf{y}'\mathbf{Q}_e\mathbf{y}$, które są jednakowe dla wszystkich rozważanych w pracy wariantów modelu:

(3.8) $$\mathscr{E}(\mathbf{y}'\mathbf{Q}_d\mathbf{y}) = w^2\nu_d, \qquad \mathscr{E}(\mathbf{y}'\mathbf{Q}_e\mathbf{y}) = s^2\nu_e,$$

gdzie $w^2 = b(1-\omega_d)\sigma_d^2 + [1+(b-1)\omega_e]\sigma_e^2$, $s^2 = (1-\omega_e)\sigma_e^2$ (por. tablica 1.1). Więc nieobciążone estymatory $\hat{w}^2$ i $\hat{s}^2$ mają postać:

(3.9) $$\hat{w}^2 = MS_d, \qquad \hat{s}^2 = MS_e.$$

Z uwagi na przyjęte założenia o istnieniu korelacji efektów błędów, nie możemy znaleźć oddzielnych ocen $\hat{\sigma}_d^2$ i $\hat{\sigma}_e^2$, a jedynie oceny ich kombinacji liniowych:

(3.10) $$(1-\omega_e)\hat{\sigma}_e^2 = MS_e, \qquad (1-\omega_d)\hat{\sigma}_d^2 + \omega_e\hat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{b}(MS_d - MS_e).$$

Przy założeniu, że współczynniki korelacji ω_d i ω_e są zerowe, wzory (3.10) dają postać $\hat{\sigma}_d^2$ i $\hat{\sigma}_e^2$.

Wyprowadzimy teraz postać estymatorów komponentów wariancyjnych σ_A^2, σ_B^2 i σ_{AB}^2 w modelu 4 (efekty A losowe, efekty B losowe). Ze wzorów (1.12), (1.14), (3.5) i (3.6) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_A\mathbf{V}_4 &= w^2\mathbf{Q}_A+(br\sigma_A^2+r\sigma_{AB}^2)[\mathbf{P}_A-(\mathbf{P}_A+\mathbf{P}_d)\mathbf{Z}\mathbf{T}_A\mathbf{Z}'\mathbf{P}_A],\\
\mathbf{Q}_B\mathbf{V}_4 &= s^2\mathbf{Q}_B+(ar\sigma_B^2+r\sigma_{AB}^2)[\mathbf{P}_B-(\mathbf{P}_B+\mathbf{P}_e)\mathbf{Z}\mathbf{T}_B\mathbf{Z}'\mathbf{P}_B],\\
\mathbf{Q}_{AB}\mathbf{V}_4 &= s^2\mathbf{Q}_{AB}+r\sigma_{AB}^2[\mathbf{P}_{AB}-(\mathbf{P}_{AB}+\mathbf{P}_e)\mathbf{Z}\mathbf{T}_{AB}\mathbf{Z}'\mathbf{P}_{AB}].
\end{aligned}$$

Z uwagi na twierdzenie 3.1, wzory (3.1), (3.2), (3.7) i zależności

$$\mathscr{E}(\mathbf{y}')\mathbf{Q}_i\mathscr{E}(\mathbf{y}) = 0 \quad \text{dla} \quad i = A, B, AB$$

wyznaczamy:

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}(MS_A) &= w^2+(br\sigma_A^2+r\sigma_{AB}^2)\frac{\nu_A-m_A}{\nu_A},\\
\mathscr{E}(MS_B) &= s^2+(ar\sigma_B^2+r\sigma_{AB}^2)\frac{\nu_B-m_B}{\nu_B},\\
\mathscr{E}(MS_{AB}) &= s^2+r\sigma_{AB}^2\frac{\nu_{AB}-m_{AB}}{\nu_{AB}},
\end{aligned}$$

gdzie

(3.11) $$m_i = \mathrm{tr}(\mathbf{T}_i\mathbf{Z}'\mathbf{P}_i\mathbf{Z}) \quad \text{dla} \quad i = A, B, AB.$$

Dla $q = 1$ (jedna zmienna towarzysząca) wzór (3.11) możemy zapisać:

$$m_i = \frac{\mathbf{z}'\mathbf{P}_i\mathbf{z}}{\mathbf{z}'(\mathbf{P}_i+\mathbf{P}_e)\mathbf{z}} \quad \text{dla} \quad i = B, AB,$$

$$m_A = \frac{\mathbf{z}'\mathbf{P}_A\mathbf{z}}{\mathbf{z}'(\mathbf{P}_A+\mathbf{P}_d)\mathbf{z}}.$$

Przyrównując średnie kwadraty (3.1) do ich wartości oczekiwanych oraz uwzględniając wzory (3.9) otrzymujemy nieobciążone estymatory:

(3.12) $$\hat{\sigma}_{AB}^2 = \frac{\nu_{AB}}{r(\nu_{AB}-m_{AB})}(MS_{AB}-MS_e),$$

(3.13) $$\hat{\sigma}_A^2 = \frac{\nu_A}{br(\nu_A-m_A)}(MS_A-MS_d)-\frac{1}{b}\hat{\sigma}_{AB}^2,$$

(3.14) $$\hat{\sigma}_B^2 = \frac{\nu_B}{ar(\nu_B-m_B)}(MS_B-MS_e)-\frac{1}{a}\hat{\sigma}_{AB}^2.$$

Analogicznie wyprowadzamy postać estymatorów komponentów wariancyjnych w modelach 2 i 3. W modelu 2 (efekty A stałe, efekty B losowe) uzyskujemy estymator $\hat{\sigma}_{AB}^2$ dany wzorem (3.12) oraz

(3.15) $$\hat{\sigma}_B^2 = \frac{\nu_B}{ar(\nu_B-m_B)}(MS_B-MS_e),$$

a dla modelu 3 (efekty A losowe, efekty B stałe) postać $\hat{\sigma}_{AB}^2$ określone jest w (3.12) i

$$\hat{\sigma}_A^2 = \frac{v_A}{br(v_A - m_A)} (MS_A - MS_d), \tag{3.16}$$

gdzie m_A i m_B dane są wzorem (3.11).

4. Weryfikacja hipotez. Do weryfikacji hipotez (4.4)–(4.8) dotyczących nieistotności parametrów modelu (1.2) użyte zostaną średnie kwadraty określone wzorami (3.1) (por. Kaczmarek [4]). Dla modelu 1 (efekty A stałe, efekty B stałe) wartości oczekiwane poszczególnych form kwadratowych są postaci (por. Kuczyński [6]):

$$\mathscr{E}(\mathbf{y}'\mathbf{Q}_i\mathbf{y}) = w^2(v_i + 2\lambda_i) \quad \text{dla} \quad i = 1, d, A, \tag{4.1}$$

$$\mathscr{E}(\mathbf{y}'\mathbf{Q}_i\mathbf{y}) = s^2(v_i + 2\lambda_i) \quad \text{dla} \quad i = 2, e, B, AB, \tag{4.2}$$

gdzie

$$\lambda_d = \lambda_e = 0, \quad \lambda_1 = \frac{1}{2w^2} \boldsymbol{\delta}_1' \mathbf{Z}' \mathbf{P}_d \mathbf{Z} \boldsymbol{\delta}_1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2s^2} \boldsymbol{\delta}_2' \mathbf{Z}' \mathbf{P}_e \mathbf{Z} \boldsymbol{\delta}_2,$$

$$\begin{aligned} \lambda_A &= \frac{1}{2w^2} \{br\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}'\mathbf{X}_A'\mathbf{P}[(\mathbf{P}_A + \mathbf{P}_d)\mathbf{Z}]\mathbf{X}_A\boldsymbol{\alpha}\}, \\ \lambda_B &= \frac{1}{2s^2} \{ar\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}_B'\mathbf{P}[(\mathbf{P}_B + \mathbf{P}_e)\mathbf{Z}]\mathbf{X}_B\boldsymbol{\beta}\}, \\ \lambda_{AB} &= \frac{1}{2s^2} \{r\boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}'\mathbf{X}_{AB}'\mathbf{P}[(\mathbf{P}_{AB} + \mathbf{P}_e)\mathbf{Z}]\mathbf{X}_{AB}\boldsymbol{\gamma}\}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

TWIERDZENIE 4.1. *Jeśli wektor obserwacji* $\mathbf{y}$ *ma rozkład normalny z wektorem wartości oczekiwanych*

$$\mathscr{E}(\mathbf{y}) = \mathbf{J}_n\mu + \mathbf{X}_A\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{X}_B\boldsymbol{\beta} + \mathbf{X}_{AB}\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{X}_1\mathbf{Z}\boldsymbol{\delta}_1 + \mathbf{X}_2\mathbf{Z}\boldsymbol{\delta}_2$$

i macierzą kowariancji $\mathbf{V}_1$ *określoną wzorem* (1.12), *to formy kwadratowe*

$$\frac{1}{w^2}\mathbf{y}'\mathbf{Q}_1\mathbf{y}, \quad \frac{1}{w^2}\mathbf{y}'\mathbf{Q}_d\mathbf{y}, \quad \frac{1}{w^2}\mathbf{y}'\mathbf{Q}_A\mathbf{y}, \quad \frac{1}{s^2}\mathbf{y}'\mathbf{Q}_2\mathbf{y}, \quad \frac{1}{s^2}\mathbf{y}'\mathbf{Q}_e\mathbf{y},$$

$$\frac{1}{s^2}\mathbf{y}'\mathbf{Q}_B\mathbf{y}, \quad \frac{1}{s^2}\mathbf{y}'\mathbf{Q}_{AB}\mathbf{y}$$

mają niezależne rozkłady chi-kwadrat ze stopniami swobody określonymi wzorami (3.2) *oraz parametrami niecentralności danymi wzorami* (4.3).

D o w ó d. Pokażemy, że formy kwadratowe $\frac{1}{w^2}\mathbf{y}'\mathbf{Q}_d\mathbf{y}$ i $\frac{1}{w^2}\mathbf{y}'\mathbf{Q}_A\mathbf{y}$ mają rozkłady χ^2 oraz są niezależne. W tym celu wystarczy pokazać, że macierze $\frac{1}{w^2}\mathbf{Q}_d\mathbf{V}_1$ i $\frac{1}{w^2}\mathbf{Q}_A\mathbf{V}_1$ są idempotentne oraz $\mathbf{Q}_d\mathbf{V}_1\mathbf{Q}_A = \mathbf{0}$ (por. Rao [13]). Ze wzorów (1.14), (3.4) i (3.5) wynika bezpośrednio, że $\frac{1}{w^2}\mathbf{Q}_d\mathbf{V}_1 = \mathbf{Q}_d$, $\frac{1}{w^2}\mathbf{Q}_A\mathbf{V}_1 = \mathbf{Q}_A$, $\mathbf{Q}_d V_1\mathbf{Q}_A = w^2\mathbf{Q}_d\mathbf{Q}_A$, a z twierdzenia 3.1 wynika, że $\mathbf{Q}_d$ i $\mathbf{Q}_A$ są idempotentne oraz $\mathbf{Q}_d\mathbf{Q}_A = \mathbf{0}$. Parametry niecentralności rozkładu χ^2 wyznaczamy ze wzorów

$$\lambda_d = \frac{1}{2w^2}\mathscr{E}(\mathbf{y}')\mathbf{Q}_d\mathscr{E}(\mathbf{y}), \quad \lambda_A = \frac{1}{2w^2}\mathscr{E}(\mathbf{y}')\mathbf{Q}_A\mathscr{E}(\mathbf{y}),$$

co w konsekwencji daje wyniki określone w (4.3) (por. Kuczyński [6]). Stopnie swobody określono w twierdzeniu 3.1 jako rzędy odpowiednich macierzy $\mathbf{Q}_i$. W analogiczny sposób dowodzimy to twierdzenie dla pozostałych form kwadratowych.

W oparciu o wzory (4.1)–(4.3) oraz twierdzenie 4.1 tworzymy funkcje testowe służące do weryfikacji hipotez o nieistotności parametrów stałych modelu. Podajemy postać hipotez i odpowiadające im funkcje testowe, które przy założeniu prawdziwości hipotez zerowych mają centralne rozkłady F-Snedecora.

$$H_0^1\colon \boldsymbol{\delta}_1 = \mathbf{0}; \quad F_{\delta_1}^0 = MS_1\colon MS_d, \tag{4.4}$$

$$H_0^2\colon \boldsymbol{\delta}_2 = \mathbf{0}; \quad F_{\delta_2}^0 = MS_2\colon MS_e, \tag{4.5}$$

$$H_0^A\colon \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}; \quad F_A^0 = MS_A\colon MS_d, \tag{4.6}$$

$$H_0^B\colon \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}; \quad F_B^0 = MS_B\colon MS_e, \tag{4.7}$$

$$H_0^{AB}\colon \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}; \quad F_{AB}^0 = MS_{AB}\colon MS_e, \tag{4.8}$$

gdzie średnie kwadraty MS_i wraz z odpowiadającymi im stopniami swobody określone są wzorami (3.1).

W pozostałych wariantach modelu (1.2) (efekty A lub B losowe) funkcje testowe dla hipotez H_0^1, H_0^2 oraz H_0^{AB}: $\sigma_{AB}^2 = 0$ są także określone odpowiednio wzorami (4.4), (4.5) i (4.8). Natomiast w modelu 2 (A stałe, B losowe) dla hipotezy H_0^B: $\sigma_B^2 = 0$ oraz w modelu 3 (A losowe, B stałe) przy testowaniu hipotezy H_0^A: $\sigma_A^2 = 0$ odpowiednie funkcje testowe dane są wzorami (4.7) i (4.6). W pozostałych przypadkach (H_0^A: $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ w modelu 2, H_0^B: $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ w modelu 3, H_0^A: $\sigma_A^2 = 0$ i H_0^B: $\sigma_B^2 = 0$ w modelu 4) funkcje testowe określone wzorami (4.6) i (4.7) mają centralne rozkłady χ^2 tylko przy warunku $\sigma_{AB}^2 = 0$.

5. Przykład liczbowy. Dane liczbowe uzyskano z doświadczenia przeprowadzonego w Instytucie Uprawy Roli i Roślin Akademii Rolniczej w Lublinie. Badano zależność oporów rozklinowania gleby piaskowej od sposobów uprawy i wielkości dawek odpadów krzemionkowych. Doświadczenie przeprowadzono w 8 replikacjach (blokach) przy zastosowaniu 2 sposobów uprawy ($a = 2$) oraz czterech dawek krzemionki ($b = 4$). Zmienną towarzyszącą była wilgotność gleby, przy czym zastosowano regresję kwadratową, więc macierz zmiennych towarzyszących ma postać $\mathbf{Z} = [\mathbf{z}^1 : \mathbf{z}^2]$ gdzie $\mathbf{z}^2$ jest kwadratem zmiennej $\mathbf{z}^1$. Wyniki obliczeń uzyskano na e.m.c. Odra 1325. Problemy numeryczne omówionej teorii i szczegółową analizę średnich obiektowych omówiono w pracach Kuczyńskiego [6] i [7].

W tablicy 5.2 F^0 oznacza wartość obliczoną zmiennej F-Snedecora, a $P(F > F^0)$ oznacza prawdopodobieństwo uzyskania wartości większej od F^0. Jeśli $P(F > F^0) < \alpha$, gdzie α jest ustalonym poziomem istotności, to hipotezę zerową dotyczącą nieistotności odpowiednich efektów odrzucamy.

Tablica 5.1. Opory rozklinowania i wilgotność gleby

A	B	R 1		R 2		R 3		R 4		R 5		R 6		R 7		R 8	
		y	z	y	z	y	z	y	z	y	z	y	α	y	z	y	z
1	1	68.8	27.0	76.2	26.1	81.1	23.1	71.2	25.8	57.5	28.3	88.7	22.9	49.1	28.6	70.2	25.8
1	2	68.5	26.2	75.8	26.3	85.3	24.9	64.9	25.3	50.4	28.5	79.2	25.4	47.3	28.7	69.3	26.2
1	3	63.2	27.4	67.3	26.8	81.7	20.9	56.8	27.8	51.7	29.2	71.7	26.3	50.6	29.0	64.1	27.2
1	4	56.5	27.4	64.2	25.4	80.5	21.6	50.5	28.3	42.8	29.8	67.3	25.2	40.5	30.2	68.3	25.3
2	1	50.3	26.9	57.3	26.4	44.0	26.8	52.4	26.5	49.0	28.7	68.8	23.1	42.4	29.6	55.1	26.4
2	2	48.0	26.2	51.5	25.9	45.5	26.2	45.5	26.8	41.0	29.6	55.9	24.6	40.6	30.4	48.3	27.1
2	3	45.8	27.3	50.6	26.4	46.6	26.8	43.9	26.9	40.7	28.4	62.9	22.4	40.1	31.2	47.6	27.0
2	4	48.8	26.7	50.9	26.8	53.9	25.3	45.4	27.8	42.4	29.1	65.5	20.3	48.1	25.9	50.4	27.1

Tablica 5.2. Wyniki analizy kowariancji

Źródło zmienności	Stopnie swobody	Średnie kwadraty	F^0	$P(F > F^0)$
A	1	1680.99	33.171	0.0022
Błąd I	5	50.68	—	—
B	3	117.96	14.942	0.0000
AB	3	211.06	26.733	0.0000
Błąd II	40	7.89	—	—
Regresja I	2	454.03	8.959	0.0222
Regresja II	2	90.12	11.415	0.0001

Oceny parametrów:

(a) współczynniki regresji:

— dla jednostek pierwszego rzędu (czynnika *A*):

$$\hat{\delta}_{11} = -24.455, \quad \hat{\delta}_{12} = 0.375,$$

— dla jednostek drugiego rzędu (czynnika *B*):

$$\hat{\delta}_{21} = -1.245, \quad \hat{\delta}_{22} = 0.011;$$

(b) efekty czynników:

$$\hat{\alpha}_1 = 5.978, \quad \hat{\alpha}_2 = -5.978,$$

$$\hat{\beta}_1 = 3.606, \quad \hat{\beta}_2 = 0.371, \quad \hat{\beta}_3 = -1.131, \quad \hat{\beta}_4 = -2.846,$$

$$\hat{\gamma}_{11} = 0.688, \quad \hat{\gamma}_{12} = 2.026, \quad \hat{\gamma}_{13} = 0.358, \quad \hat{\gamma}_{14} = -3.072,$$

$$\hat{\gamma}_{21} = -0.688, \quad \hat{\gamma}_{22} = -2.026, \quad \hat{\gamma}_{23} = -0.358, \quad \hat{\gamma}_{24} = 3.072,$$

$$\hat{\mu} = 57.163.$$

Prace cytowane

[1] M. C. Chakrabarti, *Mathematics of design and analysis of experiments*, Asia Publishing House, Bombay 1962.

[2] W. T. Federer, *Sampling, blocking, and model considerations for split plot and split block designs*, Biom. J. 19 (1977), str. 181–200.

[3] H. L. Harter, *On the analysis of split plot experiments*, Biometrics 17 (1961), str. 144–149.

[4] Z. Kaczmarek, *Wielozmienna analiza kowariancji i jej niektóre zastosowania*, Mat. Stos. 5 (1975), str. 139–156.

[5] O. Kempthorne, *The design and analysis of experiments*, New York 1952.

[6] M. Kuczyński, *Estymacja parametrów i weryfikacja hipotez w analizie kowariancji w układzie z rozszczepionymi jednostkami eksperymentalnymi*, Szóste Colloquium Metodologiczne z Agro-Biometrii, PAN, Warszawa 1976, str. 102–119.

[7] —, *Przedziały ufności w analizie kowariancji w układzie z rozszczepionymi jednostkami eksperymentalnymi*, Siódme Colloquium Metodologiczne z Agro-Biometrii, PAN, Warszawa 1977, str. 283–297.

[8] S. Li, J. H. Klotz, *Components of variance estimation for the split-plot design*, Technical Report 451 (1976), Department of Statistics, University of Visconsin.

[9] W. Mendenhall, *Introduction to linear models and the design and analysis of experiments*, Belmont, California, 1968.
[10] H. Mikos, *Modele matematyczne układów rozszczepionych jednostek ze skorelowanymi błędami*, Czwarte Colloquium Metodologiczne z Agro-Biometrii, PAN, Warszawa 1974, str. 57–78.
[11] E. Niedokos, *On mathematical models of split-plot design*, Ann. UMCS, A 18 (1964), str. 123–136.
[12] M. Ogasawara, M. Takahashi, *Ortohogonality relation in the analysis of variance I*, J. Science Hiroshima Univ. A 16 (1953), str. 457–470.
[13] C.R. Rao, *Linear statistical inference and its applications*, New York 1965.
[14] S.R. Searle, *Linear models*, New York 1971.
[15] —, *Topics in variance component estimation*, Biometrics 27 (1971), str. 1–76.
[16] M. Takahashi, *On analysis of variance for the split-plot designs*, J. Science Hiroshima Univ. A 19 (1955), str. 321–325.
[17] F. Yates, *Complex experiments*, J. Roy. Stat. Soc. Suppl. 2 (1935), str. 181–247.