ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria III: MATEMATYKA STOSOWANA XVII (1981)

Stefania Ginalska (Częstochowa)

Algebraizacja podstaw teorii systemu kont

(*Praca przyjęta do druku 24.02.1979*)

1. Wstęp. Poniższa praca poświęcona jest omówieniu pewnego ujęcia podstaw teorii systemu kont, wywodzi się z uprawianej przede wszystkim przez T. Pechego i W. Brzezina teorii modeli ewidencyjnych oraz czerpie terminologię (w większej części) z rachunkowości i dla niej — to znaczy z myślą o zastosowaniach konstruowanego ujęcia — jest napisana.

Przyjęto zasadę podwójnego zapisu (której pewna forma jest tu proponowana) oraz zasadę połączeń tylko „poziomych" (tak zwane usztywnienie systemu), polegającą na tym, że nie wszystkie połączenia między kontami są dopuszczalne.

Zakłada się ponadto, że podmiot (przedsiębiorstwo) działa w czasie od α do β, w ustalonym przedziale I domkniętym.

Nowością ujęcia jest — jak mi się wydaje — także wprowadzenie funkcji $f(a, x)$, $g(a, x)$, $h(a, x)$ i $\Omega(R, x)$, określających stan (aktualny) obrotów stron konta a, stan salda konta a oraz stan obrotów systemu R — w dowolnej chwili $x \in I$ (bilansowanie ciągłe).

Istotne fakty podstaw teorii rachunkowości ujęto w formie założeń, co umożliwiło dedukcyjną budowę przedstawianych rozważań i faktów.

Kilkanaście definicji dotyczy takich pojęć jak: konto (odpowiedniego rodzaju), system kont, zdarzenie cząstkowe, zdarzenie, chronologia zdarzeń, zapis, zdarzenie księgowe, strumień (lewy i prawy), strona konta, obroty stron konta, obroty systemu, stan sald i obrotów oraz bilans sald i obrotów i bilans końcowy.

W kilku twierdzeniach ujęto następujące fakty: relacja $\prec$: „być zdarzeniem wcześniejszym" jest przechodnia, uporządkowanie zdarzeń cząstkowych według tej relacji jest możliwe, strumień jest sumą zapisów, obroty systemu i suma obrotów lewych (prawych) stron są równe oraz suma sald równa się zero.

Panu doc. drowi W. Brzezinowi z WSP w Częstochowie dziękuję za cenne uwagi o pisanym tekście.

W tej pracy stosować będziemy następujące oznaczenia:

$\emptyset$ — zbiór pusty,
E — zbiór liczb rzeczywistych,
N — zbiór liczb naturalnych,

$$A_0 = A \cup \{0\} \quad \text{dla} \quad A \subset E,$$
$$A^2 = A \times A,$$
$$N(s) = \{1, 2, \ldots, s\} \quad \text{dla} \quad s \in N,$$
$$A_+ = \{(a, a) \colon a \in A\},$$
$$A^2_- = A^2 - A_+,$$

$I(A)$ — liczba elementów zbioru skończonego A,

jeśli istnieje odwzorowanie $\sigma \colon A \to B$, to

$$A \circ B = \{(a, b) \colon (a, b) \in (A \times B) \wedge b = \sigma(a)\},$$
$$T(x) = \{t \colon t \in T \wedge t \leqslant x \in E\}.$$

2. Teoretyczne podstawy systemu kont.

ZAŁOŻENIE A1. Dana jest rodzina skończona zbiorów skończonych rozłącznych:

$$R = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}, \quad m \in N,$$
$$A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in_i}\}, \quad n_i \in N,\ i \in N(m),$$
$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{dla} \quad i \neq j,\ i, j \in N(m).$$

Widać, że rodzina R oraz zbiory A_i są niepuste.

DEFINICJA 1. Każdy element a zbioru $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ nazywamy *kontem*, przy tym: jeśli $a \in A_s$, $s \in N(m)$, to mówimy, że a jest kontem *s-tego rodzaju*.

Rodzinę R nazywamy *systemem kont*.

ZAŁOŻENIE A2. Dany jest skończony zbiór (niepusty)

$$T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\} \subset \langle \alpha, \beta \rangle,$$
$$\alpha, \beta \in E, \quad \alpha < \beta, \quad n \in N,$$
$$\alpha = t_1 < t_2 \ldots < t_n = \beta.$$

Elementy zbioru T nazywamy *chwilami wyróżnionymi*.

ZAŁOŻENIE A3. Dane jest odwzorowanie

$$\sigma \colon T \to B,$$

gdzie

$$B = \bigcup_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{m} (A_i \times A_j).$$

DEFINICJA 2. Niech $B^* = \sigma(T)$. *Zdarzeniem cząstkowym* z nazywamy każdy element zbioru $T \circ B^*$:

$$z = (t, p), \quad t \in T,\ p = \sigma(t) \in B^*.$$

Zbiór $Z = T \circ B^*$ wszystkich zdarzeń cząstkowych jest podzbiorem zbioru $T \times B$, gdyż $B^* \subset B$.

Ponieważ nie prowadzi to do nieporozumień, więc zamiast $(t, (a, b))$ będziemy pisać (t, a, b).

Z definicji 2 wynika teraz, że zdarzeniem cząstkowym jest uporządkowana trójka elementów, złożona z chwili wyróżnionej oraz dwóch kont (tworzących obraz tej chwili przy odwzorowaniu σ):

$$z = (t, a, b), \quad t \in T, \ (a, b) = \sigma(t) \in B^*.$$

Definicja 3. Jeśli $t, u \in T, p, q \in B^*, p = \sigma(t), q = \sigma(u)$ oraz $t < u$, to mówimy, że zdarzenie cząstkowe $z = (t, p)$ jest *wcześniejsze* od zdarzenia cząstkowego $w = (u, q)$ i piszemy

$$(t, p) \prec (u, q) \quad \text{lub} \quad z \prec w.$$

Z definicji 3 wynikają następujące dwa twierdzenia.

Twierdzenie 1. *Dla każdej pary zdarzeń cząstkowych różnych:*

$$z, w \in Z, \quad z \neq w,$$

zachodzi dokładnie jedna z relacji „być zdarzeniem wcześniejszym”:

$$z \prec w \quad \textit{lub} \quad w \prec z.$$

Twierdzenie 2. *Istnieje sposób ponumerowania zdarzeń cząstkowych zbioru Z taki, że dla każdej pary zdarzeń cząstkowych $z_i, z_j \in Z$, gdzie $i, j \in N(m)$, spełniona jest równoważność*

$$i \prec j \Leftrightarrow z_i \prec z_j.$$

Z założeń A2 i A3 wynika istnienie odwzorowania różnowartościowego

$$\tau\colon Z \to N(n),$$

takiego, że dla $t_s \in T$, $s \in N(n)$ i $p \in B^*$:

(1) $$\tau(t_s, p) = s.$$

Definicja 4. Odwzorowanie (1) nazywamy *chronologią* zdarzeń cząstkowych zbioru Z.

Z przechodniości relacji $\prec$ w zbiorze E wynika

Twierdzenie 3. *Dla każdej trójki $z, w, u \in Z$ zdarzeń cząstkowych zachodzi implikacja*

$$z \prec w \wedge w \prec u \Rightarrow z \prec u,$$

to znaczy relacja $\prec$ jest przechodnia w zbiorze Z.

Dla ustalonej uporządkowanej pary kont $p \in B^*$ określamy podzbiór zbioru Z:

$$Z_p = \{z\colon z \in Z \wedge z = (t, p) \wedge t \in T\}$$

i wprowadzamy oznaczenie

(2) $$W = \{Z_p\colon p \in B^*\}.$$

Z powyższego widać, że elementami zbioru W są podzbiory zbioru Z zdarzeń cząstkowych oraz że zachodzą relacje:

$$Z = \bigcup_{p \in B^*} Z_p,$$

$$(p, q \in B^* \wedge p \neq q) \Rightarrow Z_p \cap Z_q = \emptyset,$$

$$(t, q) \in Z_p \Leftrightarrow p = q \quad \text{dla} \quad p, q \in B^*.$$

DEFINICJA 5. Każdy element w zbioru W (określonego równością (2)) nazywamy *zdarzeniem.*

Ponieważ $\sigma(T) = B^*$ oraz $l(W) = l(B^*)$, więc istnieje odwzorowanie (różnowartościowe)

$$\nu: W \to B^*$$

takie, że

$$\nu(Z_p) = p.$$

Znaczy to, że między elementami $p \in B^*$ (parami kont) oraz zbiorami Z_p (zdarzeniami) zachodzi odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna.

Wobec tego z definicji 5 wynika, że wzajemnie jednoznacznym obrazem zdarzenia (w pewnym sensie: zdarzeniem) jest każdy element zbioru $B^* = \sigma(T)$, czyli uporządkowana para $p = (a, b) \in B^*$ kont, dla której istnieje liczba $t \in T$ (lub więcej takich liczb), że $p = \sigma(t)$.

ZAŁOŻENIE A4. Dane jest odwzorowanie

$$\varphi: Z \to U \subset N_0.$$

Dla każdego $z \in Z$ istnieją takie $t \in T$ i $p \in B^*$, że $z = (t, p)$, czyli (po zastosowaniu przyjętych oznaczeń) $z = (t, a, b)$, gdzie a, b są elementami pewnych różnych zbiorów A_i, A_j rodziny R.

Korzystając z symboliki przyjętej w założeniach A1 i A2 można stwierdzić, że istnieją wtedy takie wskaźniki s, i, j, k, l, że $s \in N(n)$, $i, j \in N(m)$, $i \neq j$, $k \in N(n_i)$, $l \in N(n_j)$, $n_i, n_j \in N$ oraz $t = t_s$, $a = a_{ik}$, $b = a_{jl}$, więc

$$z = (t, a, b) = (t_s, a_{ik}, a_{jl}) \in Z.$$

Jeśli dane jest odwzorowanie φ, to dla wyżej podanego z będziemy oznaczać

$$\varphi(z) = u_{sij}^{kl}.$$

DEFINICJA 6. *Zdarzeniem księgowym cząstkowym* nazywamy każdą parę

$$(z, \varphi), \quad z \in Z.$$

Każdą liczbę postaci

$$\varphi(z) = u_{sij}^{kl} \in U \quad \text{dla} \quad z \in Z$$

nazywamy *zapisem księgowym typu* (s, i, j, k, l), przy tym: zapis ten nazywa się *lewy* dla konta $a_{ik} \in A_i$ oraz *prawy* dla konta $a_{jl} \in A_j$.

DEFINICJA 7. Odwzorowanie

$$\Phi: B \to V \subset N_0$$

określamy następująco: jeśli istnieją $t \in T$ i $p = (a_{ik}, a_{jl}) = \sigma(t) \in B^*$, $(i, j) \in N^2_-(m)$, $k \in N(n_i)$, $l \in N(n_j)$, $n_i, n_j \in N$, to

$$\Phi(p) = \sum_{t \in T} \varphi((t, p)) = v_{ij}^{kl} \in V. \tag{3}$$

DEFINICJA 8. *Zdarzeniem księgowym* nazywamy każdą parę

$$(p, \Phi), \quad p \in B^*.$$

Każdą liczbę postaci $\Phi(p) = v_{ij}^{kl}$ dla $p \in B^*$ nazywamy *strumieniem rodzaju* (i, j, k, l) — *lewym* dla konta $a_{ik} \in A_i$ oraz *prawym* dla konta $a_{jl} \in A_j$.

TWIERDZENIE 4. *Dla każdej piątki* (s, i, j, k, l) *liczb naturalnych* $s \in N(n)$, $i, j \in N(m)$, $i \neq j$, $k \in N(n_i)$, $l \in N(n_j)$, n_i, $n_j \in N$ *strumień rodzaju* (i, j, k, l) *jest sumą wszystkich zapisów księgowych typu* (s, i, j, k, l), *obliczoną ze względu na wszystkie* $s \in N(n)$ *takie, że* $\sigma(t_s) = (a_{ik}, a_{jl})$:

$$v_{ij}^{kl} = \sum_{t_s \in T} u_{sij}^{kl}.$$

D o w ó d. Z równości (3) mamy

$$v_{ij}^{kl} = \Phi((a_{ik}, a_{jl})) = \sum_{t \in T} \varphi((t, a_{ik}, a_{jl})) = \sum_{t_s \in T} = \varphi((t_s, a_{ik}, a_{jl})) = \sum_{t_s \in T} u_{sij}^{kl}.$$

DEFINICJA 9. Zbiór wszystkich lewych (prawych) zapisów konta $a \in A$ nazywamy *lewą (prawą) stronę tego konta.*

Zbiór wszystkich lewych (prawych) strumieni konta $a \in A$ nazywamy *lewą (prawą) stroną strumieni tego konta.*

Z definicji tej wynika, że jeśli L_{ik}, P_{ik} oznaczają odpowiednio lewą i prawą stronę konta a_{ik}, a L^{ik}, P^{ik} — lewą i prawą stronę strumieni konta a_{ik}, to

$$\begin{aligned} L_{ik} &= \{u_{sij}^{kl}: s \in N(n),\ j \in N(m),\ l \in N(n_j)\}, \\ P_{ik} &= \{u_{sij}^{lk}: s \in N(n),\ j \in N(m),\ l \in N(n_j)\}, \\ L^{ik} &= \{v_{ij}^{kl}: j \in N(m),\ l \in N(n_j)\}, \\ P^{ik} &= \{v_{ji}^{lk}: j \in N(m),\ l \in N(n_j)\}. \end{aligned}$$

Ponieważ liczba 0 może być elementem zbioru $\varphi(Z)$, więc można założyć, że strony lewe i prawe (a zatem i strony strumieni) wszystkich kont są zbiorami niepustymi.

DEFINICJA 10. *Obrotami strony lewej (prawej) konta* $a_{ik} \in A_i$ nazywamy sumę wszystkich lewych (prawych) zapisów tego konta.

Jeśli $\lambda(a_{ik})$, $\pi(a_{ik})$ oznaczają odpowiednio obroty lewej i prawej strony konta a_{ik}, to zachodzą równości

$$\lambda(a_{ik}) = \sum_{a \in N(n)} \sum_{j \in N(m)} \sum_{l \in N(n_j)} u_{sij}^{kl},$$

$$\pi(a_{ik}) = \sum_{s \in N(n)} \sum_{j \in N(m)} \sum_{l \in N(n_j)} u_{sji}^{lk}.$$

DEFINICJA 11. *Saldem konta* a_{ik} nazywamy liczbę

$$r(a_{ik}) = \lambda(a_{ik}) - \pi(a_{ik}).$$

Na ogół saldo definiuje się inaczej ([9]), tu jednak uwzględniono fakt, że chwila $t_1 = \alpha$ jest początkiem działalności podmiotu gospodarującego.

Przy użyciu symbolu odwzorowania φ zapisy powyższe mają dla każdego ustalonego konta $a \in A$ postać następującą:

$$\lambda(a) = \sum_{t \in T} \sum_{b \in A} \varphi((t, a, b)),$$

$$\pi(a) = \sum_{t \in T} \sum_{b \in A} \varphi((t, b, a)),$$

$$r(a) = \lambda(a) - \pi(a),$$

gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich takich elementach zbiorów T i A, dla których $\varphi(z)$ jest określone.

DEFINICJA 12. *Obrotami oR* systemu R nazywamy sumę

$$oR = \sum_{p \in B^*} \Phi(p).$$

TWIERDZENIE 5. *Suma obrotów lewych (prawych) stron wszystkich kont równa się obrotom systemu*:

$$\sum_{a \in A} \mu(a) = oR,$$

gdzie w miejsce operatora μ *należy wstawić* λ *lub* π.

D o w ó d. Na podstawie równości (3) oraz definicji 12 mamy

$$\sum_{a \in A} \lambda(a) = \sum_{a \in A} \sum_{t \in T} \sum_{b \in A} \varphi((t, a, b)) = \sum_{a \in A} \sum_{b \in A} \Big(\sum_{t \in T} \varphi((t, a, b)) \Big) =$$

$$= \sum_{a \in A} \sum_{b \in A} \Phi((a, b)) = \sum_{p \in B^*} \Phi(p) = oR.$$

Dla operatora π rozumowanie przebiega tak samo.

DEFINICJA 13. Dla każdego elementu $(x, a) \in (I \times A)$ określamy cztery funkcje o wartościach całkowitych nieujemnych:

$$f(x, a) = \sum_{t \in T(x)} \sum_{b \in A} \varphi((t, a, b)),$$

$$g(x, a) = \sum_{t \in T(x)} \sum_{b \in A} \varphi((t, b, a)),$$

$$h(x, a) = f(x, a) - g(x, a),$$

$$\Omega(x, R) = \sum_{t \in T(x)} \sum_{p \in B^*} \varphi((t, p))$$

i nazywamy odpowiednio: *stanem obrotów strony lewej konta a, stanem obrotów strony prawej konta a, stanem salda konta a* oraz *stanem obrotów systemu R* — w chwili x.

Ponieważ funkcje f, g, h określone są w produkcie $I \times A$, więc dla ustalonego konta $a \in A$, mamy

$$f(x, a) = F(x),$$
$$g(x, a) = G(x),$$
$$h(x, a) = H(x).$$

Odwzorowujące przedział I w zbiór $N^* \subset N_0$ funkcje F, G, H są przedziałami stałe, a w punktach nieciągłości (skoków) są prawostronnie ciągłe ([1]).

Podobne własności ma funkcja $K(x) = \Omega(x, R)$.

Z definicji 10–13 wynika, że dla konta $a \in A$ obroty (saldo) są to stany obrotów (stan salda) w chwili $x = \beta$:

$$\lambda(a) = f(\beta, a),$$
$$\pi(a) = g(\beta, a),$$
$$r(a) = h(\beta, a).$$

Jest również

$$oR = \Omega(\beta, R).$$

DEFINICJA 14. *Bilansem obrotów w chwili* $x \in I$ nazywamy parę (P, Q) zbiorów

$$P = \{f(x, a) \colon a \in A\},$$
$$Q = \{g(x, a) \colon a \in A\}.$$

Bilansem końcowym obrotów nazywamy bilans obrotów w chwili $x = \beta$, to znaczy parę zbiorów $(\{\lambda(a) \colon a \in A\}, \{\pi(a) \colon a \in A\})$.

TWIERDZENIE 6. *Dla każdej chwili $x \in I$ prawdziwe jest tak zwane równanie bilansowe:*

$$\sum_{a \in A} f(x, a) = \sum_{a \in A} g(x, a). \tag{4}$$

D o w ó d. Z definicji 13 mamy

$$\sum_{a \in A} f(x, a) = \sum_{a \in A} \sum_{t \in T(x)} \sum_{b \in A} \varphi\big((t, a, b)\big) = \sum_{t \in T(x)} \sum_{(a,b) \in B^*} \varphi\big((t, a, b)\big) =$$
$$= \sum_{t \in T(x)} \sum_{(a,b) \in B^*} \varphi\big((t, b, a)\big) = \sum_{a \in A} \sum_{t \in T(x)} \sum_{b \in A} \varphi\big((t, b, a)\big) = \sum_{a \in A} g(x, a).$$

Widać, że równość (4) wynika z tak zwanej zasady podwójnego zapisu: liczba $\varphi\big((t, a, b)\big)$ jest równocześnie zapisem lewym dla konta a oraz — prawym dla konta b.

([1]) Analogicznie jak dystrybuanta zmiennej losowej dyskretnej.

Zachodzi następująca równość dla stanów w chwili x:

$$\sum_{a\in A} f(x,a) = \sum_{a\in A} g(x,a) = \Omega(x,R),$$

która jest podobna do równości wymienionej w twierdzeniu 5 i która tę równość implikuje.

DEFINICJA 15. *Bilansem sald w chwili $x \in I$* nazywamy zbiór

$$S = \{h(x,a)\colon a\in A\}.$$

Bilansem końcowym sald nazywamy zbiór $\{h(\beta,a)\colon a\in A\}$.

TWIERDZENIE 7. *Dla każdej chwili $x \in I$ prawdziwe jest tak zwane równanie bilansowe sald*:

$$\sum_{a\in A} h(x,a) = 0. \tag{5}$$

Dowód. Równość (5) wynika z równości (4), gdyż $h = f-g$ w zbiorze $I\times A$.

3. Zakończenie. Zasada podwójnego zapisu przetrwała od XV wieku (L. Pacioli, [5]) do czasów obecnych, jednak teoria rachunkowości po zastosowaniu w niej zapisów macierzowych znacznie się rozwinęła ([7], [11], [12]). W związku z nowymi zadaniami — uzyskiwania i analizowania wieloprzekrojowych informacji — jakie się teorii rachunkowości stawia, rozwija się tę teorię, definiuje pojęcia i bada się jej logiczną strukturę ([4], [6]) oraz powiązania i analogie z innymi naukami. Wobec tego formalne ujęcie podstaw rachunkowości wydaje się celowe zarówno ze względów teoretycznych, jak i praktycznych (to znaczy zastosowań do opisu i badania zjawisk gospodarczych).

Przedstawiona tu praca stanowi próbę teoretycznego zbudowania podstaw rachunkowości, jednak nie odbiega (w stopniu znaczącym) od sfery zastosowań i natychmiastowa interpretacja pojęć i faktów jest możliwa. Dla przykładu: rodzina R pokrywa się z systemem kont ([1], [2], [9]) w swoim szczególnym przypadku, a dla $m=2$, $n_1=3$, $n_2=2$ została omówiona w pracy [3].

W świetle różnych — spotykanych w literaturze — określeń takich pojęć jak: konto, zdarzenie księgowe, bilans i inne, traktowanie zdarzenia jako pary kont czy zdarzenia księgowego jako zdarzenia wspartego odwzorowaniem, a bilansu jako pary zbiorów liczbowych wydaje się dopuszczalne.

Praca stanowi część początkową planowanego szerszego ujęcia problemu, którego podstawy zostały tu zarysowane.

Ujęcie zagadnień teorii rachunkowości za pomocą wielowskaźnikowych macierzy [10] (co przy pewnej modyfikacji występujących tu macierzy nieregularnych — mających kolumny o różnej długości — może nastąpić) ułatwić powinno opisywanie zjawisk gospodarczych oraz badanie ich własności za pomocą obliczeń komputerowych wspierających metody algebraiczne.

Prace cytowane

[1] W. Brzezin, *Problemy przebudowy teorii rachunkowości w Polsce Ludowej*, Zesz. Nauk. Polit. Częst. nr 96, Nauki Społeczno-Ekonomiczne, 1975, str. 5–32.

[2] —, *Teoretyczne podstawy rachunkowości*, UMK, Toruń 1975.

[3] S. Ginalska, *Algebraiczne ujęcie modelu ewidencyjnego T. Pechego*, Zesz. Nauk. Polit. Częst., Nauki Podst. (w druku).

[4] Yuji Ijiri, *Axioms and structures of conventional accounting measurement*, The Accounting Review, 1965, str. 36–53.

[5] A.P. Juszkiewicz (red.), *Historia matematyki*, t. 1, PWN, Warszawa 1975.

[6] W. Lewczyński, B. Piłat, *Algebraiczna interpretacja teoretycznych podstaw rachunkowości*, Zesz. Nauk. Inst. Org. i Zarz. Wyższ. Szk. Inż. w Lublinie, Lublin 1976, str. 235–261.

[7] R. Mattessich, *Accounting and Analytical Methods*, R.D. Irvin, Inc., Homewood, Illinois 1964.

[8] В. Немчинов (ред.), *Межотранслевой баланс производства и распределения продукции в народном хозяйстве*, Москва 1962.

[9] T. Peche, *Podstawy współczesnej ewidencji gospodarczej*, PWN, Warszawa 1976.

[10] R. Sikorski, *Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje wielu zmiennych*, PWN, Warszawa 1967.

[11] R.H. Stehli, *Über die Mathematischen Grundlagen der Doppelbuchhaltung Schulthess und C O.A.G.*, Zurich 1947.

[12] L.C. Young, *Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, W.B. Sanders Company, Philadelphia, London, Toronto 1969.

POLITECHNIKA CZĘSTOCHOWSKA
INSTYTUT MATEMATYKI