



KRZYSZTOF DOLIŃSKI (Warszawa)

## Oszacowania rozkładu prawdopodobieństwa\* przekształcenia zmiennych losowych

(Praca przyjęta do druku 19.10.1977)

**Wstęp.** Ogólna metoda wyznaczania rozkładu prawdopodobieństwa dowolnego przekształcenia zmiennych losowych jest dobrze znana i przedstawiana w każdym na ogół podręczniku rachunku prawdopodobieństwa. Jednakże jej praktyczne zastosowanie napotyka na znaczne trudności natury rachunkowej, szczególnie w przypadku nieliniowej postaci przekształcenia. Konieczne wielokrotne całkowania skomplikowanych wyrażeń podcałkowych okazują się na ogół analitycznie niewykonalne, a obliczenia numeryczne są bardzo czasochłonne dla maszyny cyfrowej i często nieopłacalne. Dlatego w praktyce poszukuje się prostszych, przybliżonych, lecz bardziej efektywnych niż bezpośrednie całkowanie, metod obliczeniowych.

Najbardziej rozpowszechnione w zastosowaniach są: symulacja numeryczna wraz z metodą Monte Carlo i metoda wyznaczania lub szacowania momentów poszukiwanego rozkładu prawdopodobieństwa. Jednakże wspólnym mankamentem tych metod jest trudność w ocenie błędu otrzymanego przybliżenia.

Ocena błędu jest zawsze istotnym elementem obliczeń i nabiera szczególnego znaczenia przy szacowaniu niezawodności konstrukcji, gdzie zarówno projektant, jak i użytkownik zainteresowani są takimi wartościami prawdopodobieństwa awarii, które nawet pomimo przybliżonego charakteru obliczeń nie mogą budzić żadnych wątpliwości.

Przedstawiona w niniejszej pracy metoda pozwala wyznaczyć górną i dolną granicę obszaru, w którym znajduje się rzeczywista dystrybuanta przekształcenia zmiennych losowych. Przy rozważaniu problemów niezawodności pozwala to określić przedział, w którym znajduje się prawdopodobieństwo awarii danej konstrukcji. Wykorzystano tu klasyczną metodę poszukiwania rozkładu prawdopodobieństwa przekształcenia zmiennych losowych zastępując przekształcenie, którego rozkładu poszukujemy, dwoma innymi przekształceniami pomocniczymi. Wykazuje, że funkcjami szacującymi poszukiwaną dystrybuantę mogą być dystrybuanty

\* Problem Międzyresortowy I. 23.

przekształceń pomocniczych pomniejszane lub powiększone o pewien stały składnik. W wielu przypadkach, a w szczególności dla liniowych przekształceń pomocniczych, daje to znaczne uproszczenia w obliczeniach numerycznych, aż do ich całkowitej eliminacji.

**1. Dystrybuanta przekształcenia zmiennych losowych i jej oszacowania.** Poszukujemy  $m$ -wymiarowej dystrybuanty wektora losowego  $Y = [Y_1, Y_2, \dots, Y_m]$ , którego składowe są pewnymi funkcjami  $n$ -wymiarowego wektora losowego  $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]$ , czyli

$$(1.1) \quad Y_j = \varphi_j(X_1, X_2, \dots, X_n) = \varphi_j(X), \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Zakładamy, że znana jest  $n$ -wymiarowa funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa  $f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_X(\mathbf{x})$  wektora losowego  $X$ . Dystrybuantę wektora losowego  $Y$  możemy zawsze wyrazić w postaci

$$(1.2) \quad F_Y(\mathbf{y}) = \mathbf{P}[X \in (\mathcal{X} - \mathcal{X}) \cap \{\mathbf{x}: Y \leq \mathbf{y}\}] + \mathbf{P}[X \in \mathcal{X} \cap \{\mathbf{x}: Y \leq \mathbf{y}\}],$$

gdzie  $\mathcal{X}$  oznacza dowolny, mierzalny zbiór w przestrzeni  $\mathcal{X}$  realizacji wektora  $X$ , a  $\mathbf{P}[A]$  prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ .

Wprowadźmy teraz pewne nowe przekształcenie wektora losowego  $X$ , a mianowicie

$$(1.3) \quad \overset{\star}{Y}_j = \begin{cases} \psi_j(X_1, X_2, \dots, X_n) = \psi_j(X) & \text{dla } j = 1, 2, \dots, m, \\ X_j & \text{dla } j = m+1, \dots, n; \end{cases}$$

które spełniać będzie  $m$  nierówności

$$(1.4) \quad \psi_j(\mathbf{x}) \geq \varphi_j(\mathbf{x}) \quad \text{dla } \mathbf{x} \in \mathcal{X}_\psi, j = 1, 2, \dots, m,$$

gdzie  $\mathcal{X}_\psi$  jest pewnym mierzalnym obszarem w  $\mathcal{X}$ .

Nierówności (1.4) implikują w oczywisty sposób inkluzję

$$(1.5) \quad \{\mathbf{x}: \overset{\star}{Y} \leq \mathbf{y}\} \cap \mathcal{X}_\psi \subset \{\mathbf{x}: Y \leq \mathbf{y}\} \cap \mathcal{X}_\psi,$$

która prowadzi do dolnego oszacowania dystrybuanty (1.2) przekształcenia (1.1) wektora losowego  $X$

$$(1.6) \quad F_Y(\mathbf{y}) \geq \mathbf{P}[X \in \{\mathbf{x}: \overset{\star}{Y} \leq \mathbf{y}\} \cap \mathcal{X}_\psi].$$

Aby wyznaczyć górne oszacowanie dystrybuanty przekształcenia  $\varphi$ , dobieramy pewne nowe przekształcenie wektora losowego  $X$

$$(1.7) \quad \overset{\circ}{Y}_j = \begin{cases} \theta_j(X_1, X_2, \dots, X_n) = \theta_j(X) & \text{dla } j = 1, 2, \dots, m, \\ X_j & \text{dla } j = m+1, \dots, n, \end{cases}$$

tak, aby spełniało ono  $m$  nierówności

$$(1.8) \quad \theta_j(\mathbf{x}) \leq \varphi_j(\mathbf{x}) \quad \text{dla } \mathbf{x} \in \mathcal{X}_\theta, j = 1, 2, \dots, m,$$

gdzie  $\mathcal{X}_\theta$  jest pewnym obszarem mierzalnym w  $\mathcal{X}$ .

Szacując od góry pierwszy składnik w (1.2) przez

$$(1.9) \quad \mathbf{P}[X \in (\mathcal{X} - \mathcal{X}_\theta) \cap \{\mathbf{x}: Y \leq \mathbf{y}\}] \leq \mathbf{P}[X \in (\mathcal{X} - \mathcal{X}_\theta)] = 1 - \mathbf{P}[X \in \mathcal{X}_\theta]$$

oraz uwzględniając wynikającą z (1.8) inkluzję

$$(1.10) \quad \{x: \mathring{Y} \leq y\} \cap \mathcal{X}_\theta \supset \{x: Y \leq y\} \cap \mathcal{X}_\theta$$

otrzymujemy następującą nierówność, określającą górne oszacowanie dystrybuanty (1.2)

$$(1.11) \quad F_Y(y) \leq 1 - \mathbf{P}[X \in \mathcal{X}_\theta] + \mathbf{P}[X \in \{x: \mathring{Y} \leq y\} \cap \mathcal{X}_\theta].$$

Uwzględniając otrzymane powyżej wyniki możemy sformułować następujące twierdzenie:

Jeżeli przekształcenia  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m]$ ,  $\varphi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m]$  oraz  $\psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m]$  wektora losowego  $X$  spełniają nierówności

$$\theta_j(x) \leq \varphi_j(x) \quad \text{dla} \quad x \in \mathcal{X}_\theta, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

oraz

$$\psi_j(x) \geq \varphi_j(x) \quad \text{dla} \quad x \in \mathcal{X}_\psi, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

to  $m$ -wymiarowa dystrybuanta  $F_Y(y)$  wektora losowego  $Y = \varphi(X)$  może być oszacowana od dołu przez (1.6) i od góry przez (1.11).

**2. Wykorzystanie dystrybuant wektorów losowych  $\mathring{Y}$  i  $\mathring{Y}$  do szacowania rozkładu prawdopodobieństwa  $F_Y(y)$ .** Sformułowane w poprzednim punkcie twierdzenie daje, dzięki bardzo słabemu założeniu, dużą swobodę w doborze funkcji aproksymujących  $\theta_j$  i  $\psi_j$  oraz obszarów  $\mathcal{X}_\theta$  i  $\mathcal{X}_\psi$ . Umożliwia to znaczne uproszczenie obliczeń przy zachowaniu dobrej zbieżności oszacowań dystrybuanty losowego wektora  $Y$ . Bardziej szczegółowa dyskusja na ten temat zawarta jest w [1].

Szacowanie dystrybuanty  $F_Y$  staje się szczególnie proste, gdy znane są a priori dystrybuanty  $F_{\mathring{Y}}$  i  $F_{\mathring{Y}}$  wektorów  $\mathring{Y}$  i  $\mathring{Y}$ . Ma to miejsce np. wtedy, gdy argumentami funkcji  $\varphi_j$  są normalne niezależne zmienne losowe  $X_i$ , a funkcje aproksymujące  $\theta_j$  i  $\psi_j$  mogą być przyjęte w postaci kombinacji liniowych tych zmiennych, co gwarantuje normalność rozkładów prawdopodobieństwa  $F_{\mathring{Y}}$  i  $F_{\mathring{Y}}$  o łatwych do obliczenia wartościach parametrów.

Wykorzystując więc dystrybuantę  $F_{\mathring{Y}}$  wektora losowego  $\mathring{Y}$

$$(2.1) \quad F_{\mathring{Y}}(y) = \mathbf{P}[X \in \{x: \mathring{Y} \leq y\}]$$

i porównując ją z oszacowaniem (1.11) możemy napisać nierówność

$$(2.2) \quad F_Y(y) \leq F_{\mathring{Y}}(y) + 1 - \mathbf{P}[X \in \mathcal{X}_\theta].$$

Chcąc wykorzystać dystrybuantę  $F_{\mathring{Y}}$  wektora losowego  $\mathring{Y}$

$$(2.3) \quad F_{\mathring{Y}}(y) = \mathbf{P}[X \in \{x: \mathring{Y} \leq y\}]$$

dla określenia dolnego oszacowania rozkładu  $F_Y$  musimy porównać ją z oszacowaniem (1.6). Łatwo zauważyć, że zawsze spełniona jest nierówność

$$(2.4) \quad F_{\mathring{Y}}(y) \leq \mathbf{P}[X \in \{x: \mathring{Y} \leq y\} \cap \mathcal{X}_\psi] + \mathbf{P}[X \in (\mathcal{X} - \mathcal{X}_\psi)],$$

z której otrzymujemy oszacowanie

$$(2.5) \quad F_Y(y) \geq F_{\mathring{Y}}(y) - 1 + \mathbf{P}[X \in \mathcal{X}_\psi].$$

Powyżej przedstawiony sposób szacowania dystrybuanty funkcji zmiennych losowych został wykorzystany w [1] do oszacowania rozkładu prawdopodobieństwa nośności granicznej prefabrykowanej płyty żelbetowej stosowanej w budownictwie przemysłowym i do określenia jej niezawodności przy założeniu losowej wielkości obciążeń. Nośność

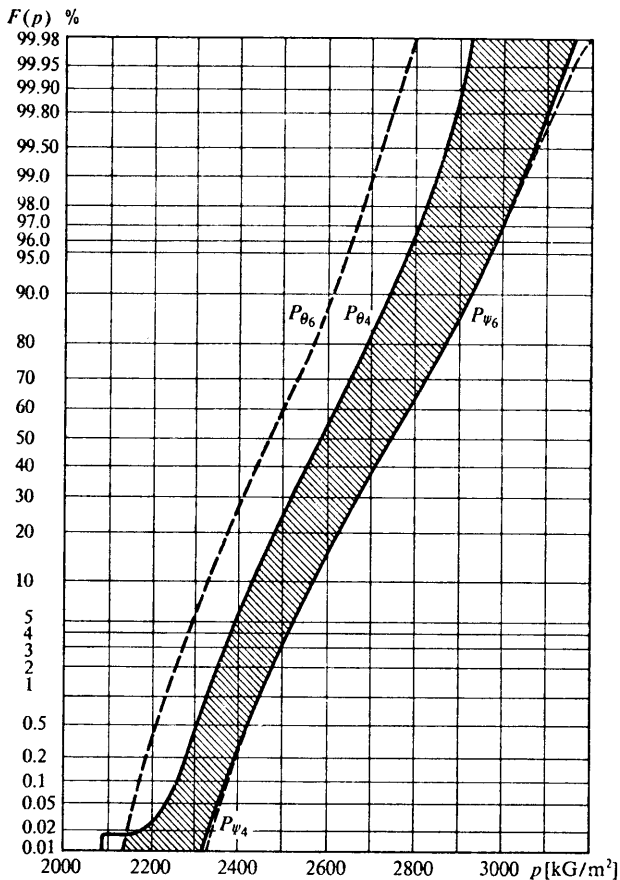
$$P = \frac{96a^2 M_{0y}^2}{b^2 (\sqrt{b^2 M_{0x} + 12a^2 M_{0y}} - b \sqrt{M_{0x}})^2},$$

gdzie

$$M_{0x} = A_x \left( H_{1x} - \frac{A_x}{180R_w} \right), \quad M_{0y} = A_y \left( H_{1y} - \frac{A_y}{180R_w} \right),$$

$$H_{1x} = H_{1y} - 0,6; \quad a, b \text{ — stałe wymiary płyty,}$$

wyrażała się tam przez funkcję  $P = \varphi(A_x, A_y, R_w, H_{1y})$  czterech niezależnych zmiennych losowych  $A_x, A_y, R_w, H_{1y}$ , z których trzy pierwsze miały rozkłady normalne, a czwarta rozkład beta.



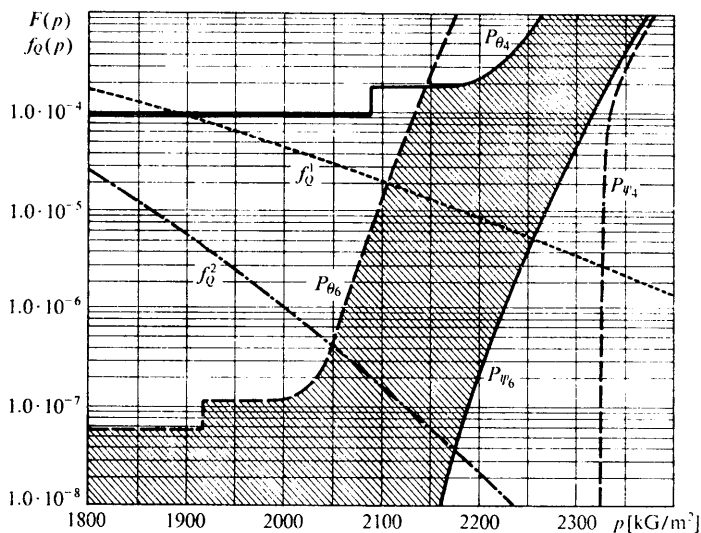
Rys. 1. Oszacowania dystrybuanty nośności prefabrykowanej płyty żelbetowej.  $P_{\theta_4}$  i  $P_{\theta_6}$  — oszacowania górne,  $P_{\psi_4}$  i  $P_{\psi_6}$  — oszacowania dolne (skala regularna i gaussowska)

Przyjmując liniowe funkcje  $\theta_4$  i  $\theta_6$  aproksymująca funkcję  $\varphi$  od dołu i dwie, także liniowe,  $\psi_4$  i  $\psi_6$ , aproksymujące od góry, każda w odpowiednim obszarze  $\mathcal{X}_\alpha$ ,  $\alpha = \theta_4, \theta_6, \psi_4, \psi_6$ , wyznaczono, w sposób analityczny cztery dystrybuanty i wykorzystując zależności (2.2) i (2.5) otrzymano cztery oszacowania  $P_\alpha(p)$  rozkładu prawdopodobieństwa nośności granicznej rozpatrywanej płyty — rys. 1 i 2.

Niezawodność obliczamy na podstawie znanej zależności [2]

$$(2.6) \quad R = \mathbf{P}[P > Q] = 1 - \int_0^{\infty} f_Q(p) \cdot F_P(p) dp,$$

gdzie  $Q$  oznacza losowe obciążenie o gęstości prawdopodobieństwa  $f_Q(q)$  działające na płytę, której losowa nośność  $P$  (niezależna od  $Q$ ) scharakteryzowana jest przez dystrybuantę  $F_P(p)$ .



Rys. 2. Oszacowania dystrybuanty nośności prefabrykowanej płyty żelbetowej i funkcje gęstości prawdopodobieństwa obciążenia,  $P_{\theta_4}$  i  $P_{\theta_6}$  — oszacowania górne;  $P_{\psi_4}$  i  $P_{\psi_6}$  — oszacowania dolne;  $f_Q^1, f_Q^2$  — gęstości prawdopodobieństwa obciążenia dla współczynników zmienności, odpowiednio  $\nu_1 = 0,2$ ,  $\nu_2 = 0,13$  (skala regularna i logarytmiczna)

Przyjmując rozkład gamma dla obciążenia  $Q$  i poprzednio wyznaczone oszacowania  $P_\alpha(p)$  zamiast  $F_P(p)$  otrzymujemy dolną  $R^b$  i górną  $R^u$  granicę niezawodności rozpatrywanej płyty

$$R^b = 1 - 3,736 \cdot 10^{-5} < R < 1 - 8,381 \cdot 10^{-6} = R^u$$

dla współczynnika zmienności obciążenia  $\nu = \frac{\sigma_Q}{Q} = 0,20$  oraz

$$R^b = 1 - 6,425 \cdot 10^{-8} < R < 1 - 2,034 \cdot 10^{-10} = R^u$$

dla  $\nu = 0,13$ . W obu przypadkach oszacowania górne i dolne są podobnego rzędu, co dla wielkości tak bardzo bliskich jedności należy uznać za rezultat w pełni zadowalający.

#### Prace cytowane

- [1] K. Doliński, *Stochastyczna analiza konstrukcji plastycznych*, Praca doktorska, Zeszyty IPPT PAN, nr 25 (1977).
  - [2] A. Freundenthal, *Safety and probability of structural failure*, ASCE Trans. 121 (1956).
-