ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria III: MATEMATYKA STOSOWANA IX (1977)

Ilona Kopocińska (Wrocław)

Uogólnione procesy przedziałami markowskie

(*Praca przyjęta do druku 18.12.1975*)

1. Wprowadzenie. Liczne zagadnienia teorii obsługi masowej można opisywać przy użyciu procesów przedziałami markowskich, które startując od pewnego stanu początkowego zmieniają się w sposób markowski w pewnym segmencie czasu, którego długość jest określona na początku segmentu, w końcu segmentu zmieniają się skokowo i proces jest kontynuowany w sposób markowski w następnym segmencie z nowym warunkiem początkowym. W tych procesach, wprowadzonych przez A. Kuczurę [5], a także przy ogólniejszym podejściu, w procesach semi-regeneratywnych (zob. E. Çinlar [1]), zakłada się, że ewolucje procesu na wszystkich segmentach startujących od tego samego stanu początkowego są probabilistycznymi kopiami. Jednakże liczne zagadnienia priorytetowe w systemach obsługi masowej, awarii linii obsługi itp. prowadzą do rozważania szerszej klasy procesów przedziałami markowskich, o niejednorodnych segmentach. Tym potrzebnym do zastosowań uogólnieniom poświęcona jest niniejsza praca.

2. Definicje i oznaczenia. Niech S będzie dyskretną przestrzenią stanów $0, 1, \ldots, j, \ldots$, skończoną lub przeliczalną. Proces stochastyczny $\{Y(t),\ t \geqslant 0\}$ o wartościach z S nazywamy *uogólnionym procesem przedziałami markowskim*, jeżeli:

(a) istnieje ciąg zmiennych losowych $0 = w_0 \leqslant w_1 < w_2 \leqslant w_3 < w_4 \ldots$ taki, że dla każdego $m = 0, 1, \ldots, a = 0, 1$, proces stochastyczny $\{Y(t),\ w_{2m+a} < t < w_{2m+1+a}\}$ jest jednorodnym procesem Markowa o macierzy intensywności przejścia $(\vartheta_{ij,k}^{(a)})$ zależnej od warunku $\{Y(w_{2m+a}) = k\}$;

(b) w chwilach w_{2m+a}, $m = 0, 1, \ldots, a = 0, 1$, dla których spełniona jest nierówność $w_{2m+a} \neq w_{2m+1-a}$, następuje skokowa zmiana stanu procesu, o macierzy prawdopodobieństw przejścia, której elementami są $p_{ij}^{(1-a)} = \Pr\{Y(w_{2m+a}) = j | Y(w_{2m+a}-0) = i\}$;

(c) w chwilach w_{2m}, $m = 0, 1, \ldots$, dla których spełniona jest równość $w_{2m} = w_{2m+1}$, następuje skokowa zmiana stanu procesu, o macierzy prawdopodobieństw przejścia $\left(\sum p_{il}^{(1)} p_{lj}^{(0)}\right)$(1) będąca sumą dwóch niezależnych kolejnych przejść o macierzach $(p_{ij}^{(1)})$ i $(p_{ij}^{(0)})$;

(1) W przypadku sumy po obszarze S, obszaru sumowania nie będziemy pisali.

(d) dla każdego $m = 1, 2, \ldots$ $\Pr\{w_{2m+1+a} - w_{2m+a} < x | Y(w_{2m+a}) = i\} = F_i^{(a)}(x)$, $x \geqslant 0$, $i \in S$, $a = 0, 1$, są dystrybuantami niezależnymi od m, $F_i^{(1)}(0+) = 0$, $F_i^{(0)}(0+) < 1$.

Chwile w_{2m} albo w_{2m+1}, $m = 0, 1, \ldots$, są chwilami regeneracji procesu. Przedziały $w_{m-1} \leqslant t < w_m$ nazywamy *przedziałami markowskimi*. Zmianę stanu procesu w przedziale $w_{m-1} < t < w_m$ nazywamy *przejściem markowskim*, natomiast zmianę stanu w chwili regeneracji nazywamy *przejściem regeneratywnym*. Jeżeli wartość procesu na początku $2m+a$-tego segmentu jest znana i równa się k, to rozkład prawdopodobieństwa $F_k^{(a)}$ długości segmentu i macierz intensywności przejścia $(\vartheta_{ij,k}^{(a)})$ mogą zależeć od k, a nie zależą od m.

Procesem awarii związanym z uogólnionym procesem przedziałami markowskim nazywamy proces stochastyczny

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, & w_{2m} \leqslant t < w_{2m+1}, \\ 1, & w_{2m+1} \leqslant t < w_{2m+2}, \end{cases} \qquad m = 0, 1, \ldots$$

W dalszym ciągu dla prostoty będziemy zakładali, że dla każdego $a = 0, 1$ długości segmentów $w_{2m+1+a} - w_{2m+a}$, $m = 1, 2, \ldots$, są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie prawdopodobieństwa oraz, że macierze intensywności przejścia markowskiego nie zależą od k:

$$F_k^{(a)}(x) = F^{(a)}(x), \ x \geqslant 0, \qquad (P_{ij,k}^{(a)}) = (P_{ij}^{(a)}), \qquad k \in S, \ a = 0, 1.$$

Przy tych założeniach i oznaczeniach uogólniony proces przedziałami markowski jest kompletnie opisany przez $\big(\{F^{(a)}\}, (p_{ij}^{(a)}), (\vartheta_{ij}^{(a)}), a = 0, 1\big)$.

3. Włożone łańcuchy Markowa. Niech $\{Y(t), t \geqslant 0\}$ będzie uogólnionym procesem przedziałami markowskim. Niech $Y^-(w_{2m+a})$ oznacza wartość rozważanego procesu w chwili w_{2m+a} przed przejściem regeneratywnym. Ponieważ zakładamy, że $w_{2m} > w_{2m-1}$, więc $Y^-(w_{2m}) = Y(w_{2m} - 0)$, natomiast w punktach w_{2m+1}, dla których $w_{2m+1} = w_{2m}$, w których zmiana procesu jest sumą dwóch niezależnych przejść, $Y^-(w_{2m+1})$ jest wartością procesu po przejściu o macierzy prawdopodobieństw $(p_{ij}^{(1)})$, a przed przejściem o macierzy prawdopodobieństw przejścia $(p_{ij}^{(0)})$.

Weźmy pod uwagę następujące cztery ciągi zmiennych losowych:

$$R_{2m+a}^{(a)} = Y^-(w_{2m+a}), \qquad S_{2m+a}^{(a)} = Y(w_{2m+a}), \qquad m = 1, 2, \ldots, a = 0, 1.$$

Łatwo zauważyć, że są to jednorodne łańcuchy Markowa, gdyż $\{w_{2m+a}\}$ dla każdego $a = 0, 1$ jest ciągiem chwil regeneracji procesu $\{Y(t), t \geqslant 0\}$. Oznaczmy przez $(r_{ij}^{(a)})$ macierze prawdopodobieństw przejścia dla łańcucha $\{R_{2m+a}^{(a)}\}$ oraz przez $\{\varrho_j^{(a)}\}$ oznaczmy rozkład graniczny prawdopodobieństwa stanów tego łańcucha. Analogiczne wielkości dla łańcucha Markowa $\{S_{2m+a}^{(a)}\}$ oznaczymy przez $(s_{ij}^{(a)})$ i $\{\sigma_j^{(a)}\}$. Łatwo znaleźć jawne wzory na prawdopodobieństwa przejścia oraz układy równań liniowych dla granicznych rozkładów, czego tu nie będziemy robili. Zauważmy jedynie, że zmienne losowe $R_{2m+a}^{(a)}$ i $S_{2m+a}^{(a)}$ są związane przejściem regeneratywnym, a więc zachodzi związek

$$(1) \qquad \sigma_j^{(a)} = \sum_i \varrho_i^{(a)} p_{ij}^{(1-a)}, \qquad j \in S, \ a = 0, 1,$$

4. Rozkłady graniczne. Weźmy pod uwagę graniczne prawdopodobieństwa stanu procesu $\{Y(t),\, \alpha(t),\, t \geqslant 0\}$

$$q_j^{(a)} = \lim_{t\to\infty} \Pr\{Y(t) = j,\ \alpha(t) = a\}, \quad j \in S,\ a = 0, 1.$$

Związek między rozkładami prawdopodobieństwa $\{q_j^{(a)}\}$ i rozkładami prawdopodobieństwa $\{\varrho_j^{(a)}\}$ i $\{\sigma_j^{(a)}\}$ włożonych łańcuchów Markowa daje następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 1. *W uogólnionym procesie przedziałami markowskim* $\{Y(t),\ t \geqslant 0\}$ *scharakteryzowanym przez* $\big(F^{(a)},\ (p_{ij}^{(a)}),\ (\vartheta_{ij}^{(a)}),\ a = 0, 1\big)$ *zachodzi związek*

$$\nu\varrho_j^{(1-a)} + q_j^{(a)}\vartheta_j^{(a)} = \nu\sigma_j^{(a)} + \sum_{i\neq j} q_i^{(a)}\vartheta_{ij}^{(a)}, \quad j \in S, \tag{2}$$

gdzie $\dfrac{1}{\nu} = \mu^{(0)} + \mu^{(1)}$, *przy czym* $\mu^{(a)}$ *jest średnią w rozkładzie* $F^{(a)}$, $a = 0, 1$.

Dowód. Niech $X(t)$ oznacza czas od chwili t do najbliższego punktu regeneracji po chwili t. Proces stochastyczny $\{Y(t), \alpha(t), X(t), t \geqslant 0\}$ jest procesem Markowa. Przy badaniu własności granicznych tego procesu wystarczy ograniczyć się do procesów stacjonarnych, które definiuje się przez odpowiednią modyfikację przebiegu procesu w dwóch pierwszych segmentach. Oznaczmy:

$$P_j^{(a)}(x) = \Pr\{Y(t) = j,\ \alpha(t) = a,\ X(t) < x\}, \quad x > 0,\ j \in S,\ a = 0, 1.$$

Analogicznie jak dla procesów przedziałami markowskich [3], znajdujemy

$$\begin{aligned} P_j^{(a)}(x) = {} & [P_j^{(a)}(x+h) - P_j^{(a)}(h)](1 - \vartheta_j^{(a)}h) + \\ & + \sum_i P_i^{(1-a)}(h)p_{ij}^{(1-a)}[F^{(a)}(x) - F^{(a)}(h)] + \\ & + \sum_i P_i^{(a)}(h)\sum_k p_{ik}^{(a)}F^{(1-a)}(h)p_{kj}^{(1-a)}F^{(a)}(x) + \\ & + \sum_{i\neq j}[P_i^{(a)}(x+h) - P_i^{(a)}(h)]\vartheta_{ij}^{(a)}h + o(h), \quad h \to 0,\ j \in S,\ a = 0, 1, \end{aligned}$$

gdzie $\vartheta_i^{(a)} = \sum_{j\neq i}\vartheta_{ij}^{(a)}$.

Po przejściu do granicy z $h \to 0$, a następnie z $x \to \infty$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} P_j^{(a)\prime}(0) + q_j^{(a)}\vartheta_j^{(a)} = {} & \sum_i P_i^{(1-a)\prime}(0)p_{ij}^{(1-a)}\big(1 - F^{(a)}(0+)\big) + \\ & + \sum_i P_i^{(a)\prime}(0)\sum_k p_{ik}^{(a)}F^{(1-a)}(0+)p_{kj}^{(1-a)} + \sum_{i\neq j} q_i^{(a)}\vartheta_{ij}^{(a)}, \quad j \in S,\ a = 0, 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Korzystając ze stacjonarności procesu awarii $\{\alpha(t),\ t \geqslant 0\}$ znajdujemy (zob. [4])

$$\begin{aligned} P_j^{(a)\prime}(0) = {} & \lim_{h\to 0}\Pr\{\alpha(t) = a\}\frac{1}{h}\Pr\{X(t) < h \mid \alpha(t) = a\} \times \\ & \times \Pr\{Y(t) = j \mid \alpha(t) = a,\ X(t) < h\} = \frac{\mu^{(a)}}{\mu^{(0)} + \mu^{(1)}}\,\frac{1}{\mu^{(a)}}\,\varrho_j^{*(1-a)} = \nu\varrho_j^{*(1-a)}, \end{aligned}$$

bo z przyjętych założeń wynika, że $\mu^{(a)} > 0$.

W ten sposób znaleźliśmy charakterystyki procesu $\{Y(t),\ t \geqslant 0\}$ bezpośrednio przed chwilami regeneracji procesu. Ponieważ zakładamy, że $F^{(1)}(0) = 0$, więc $Y(w_{2m}-0) = R_{2m}^{(0)}$ i wobec tego

$$\varrho_j^{*(0)} = \varrho_j^{(0)}, \quad j \in S.$$

Z tego, że $w_{2m+1} = w_{2m}$ zachodzi z prawdopodobieństwem $F^{(0)}(0+)$, wynika, że

$$\varrho_j^{(1)} = \varrho_j^{*(1)} + F^{(0)}(0+) \sum_k \varrho_k^{*(0)} p_{kj}^{(1)},$$

czyli

$$\varrho_j^{*(1)} = \varrho_j^{(1)} - \sigma_j^{(0)} F^{(0)}(0+).$$

Po podstawieniu do (3) i wykorzystaniu (1) otrzymujemy (2), co kończy dowód twierdzenia 1.

Uwaga. Jeżeli $F^{(0)}(0+) = 1$, to $\mu^{(0)} = 0$, $\Pr\{\alpha(t) = 0\} = 0$, a więc $q_j^{(0)} = 0$, $P^{(0)\prime}(0) = 0$, $P^{(1)\prime}(0) = \frac{1}{\mu^{(1)}} \varrho_j^{(0)}$, $j \in S$. Po podstawieniu do (3) i wykorzystaniu (1) dla $a = 1$ otrzymujemy

$$\nu \varrho_j^{(0)} + q_j^{(1)} \vartheta_j^{(1)} = \nu \sum_k \sigma_k^{(0)} p_{kj}^{(0)} + \sum_{i \neq j} q_i^{(1)} \vartheta_{ij}^{(1)}, \quad j \in S, \tag{4}$$

gdzie $\nu = 1/\mu^{(1)}$.

Jeżeli ponadto mamy $(p_{ij}^{(0)}) = (\delta_{ij})$, to z (4) mamy

$$\nu \varrho_j^{(0)} + q_j^{(1)} \vartheta_j^{(1)} = \nu \sigma_j^{(0)} + \sum_{i \neq j} q_j^{(1)} \vartheta_{ij}^{(1)}, \quad j \in S$$

(por. A. Kuczura [5]).

5. Zastosowanie. Uogólnione procesy przedziałami markowskie znajdują zastosowanie w analizie systemów obsługi masowej z priorytetami. Rozważmy system obsługi masowej z dwoma klasami priorytetowymi jednostek, przy czym priorytet niech będzie absolutny, a przerwane obsługi są dokończane po zakończeniu obsługi jednostek o wyższym priorytecie. Przy analizie liczby jednostek o niższym priorytecie, obecność w systemie jednostek o wyższym priorytecie możemy traktować jako awarię linii obsługi. Rozkład czasu awarii linii jest więc rozkładem okresu zajętości systemu obsługą jednostek o wyższym priorytecie.

Przykład. Rozważmy system $M/M/1$ z awarią linii obsługi i niech $Y(t)$ oznacza liczbę jednostek w systemie w chwili t oraz niech $\{\alpha(t),\ t \geqslant 0\}$ będzie procesem awarii linii obsługi. Załóżmy, że rozkłady czasu pracy i czasu awarii linii są dowolne, o skończonych wartościach oczekiwanych. Niech λ będzie intensywnością strumienia zgłoszeń oraz μ będzie intensywnością obsługi. Łatwo zauważyć, że proces stochastyczny $\{Y(t),\ t \geqslant 0\}$ jest uogólnionym procesem przedziałami markowskim. Charakterystyki tego procesu będziemy oznaczali podobnie jak w poprzednich ustępach tej pracy.

Twierdzenie 2. *W systemie $M/M/1$ z awariami linii obsługi związki między granicznymi rozkładami prawdopodobieństwa stanu kolejki rozpatrywanego w czasie* *ciągłym i włożonych łańcuchów Markowa zdefiniowanych w chwilach zmiany stanu procesu awarii są następujące:*

$$\nu\varrho_j^{(0)}+\big(\lambda+(1-\delta_{i0})\mu\big)q_j^{(1)} = \nu\sigma_j^{(1)}+\lambda q_{j-1}^{(1)}+\mu q_{j+1}^{(1)}, \tag{5}$$

$$\nu\varrho_j^{(1)}+\lambda q_j^{(0)} = \nu\sigma_j^{(0)}+\lambda q_{j-1}^{(0)}, \quad j = 0, 1, \ldots \; (q_{-1}^{(a)} = 0, \ a = 0, 1), \tag{6}$$

$$\sigma_j^{(a)} = \varrho_j^{(a)}, \quad a = 0, 1, \tag{7}$$

$$\varrho_j^{(1)} = \sum_{i=0}^{j} \varrho_i^{(0)} p_{j-i}, \tag{8}$$

gdzie

$$p_n = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x} dF^{(0)}(x), \quad n = 0, 1, \ldots$$

D o w ó d. Jak już zauważyliśmy, w rozważanym systemie proces $\{Y(t),\ t \geqslant 0\}$ jest uogólnionym procesem przedziałami markowskim. W szczególności, $\{Y(t),\ t\colon \alpha(t) = 0\}$ jest procesem narodzin, natomiast $\{Y(t),\ t\colon \alpha(t) = 1\}$ jest procesem narodzin i śmierci. Macierze intensywności przejścia na segmentach markowskich są więc następujące:

$$\vartheta_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \lambda, & j-i = 1, \\ -\lambda\delta_{ij}, & j-i \neq 1, \end{cases} \tag{9}$$

$$\vartheta_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \lambda, & j-i = 1, \\ \mu, & j-i = -1,\ i > 0, \\ -\lambda, & i = j = 0, \\ -(\lambda+\mu)\delta_{ij}, & |j-i| \neq 1,\ i > 0,\ i,j = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

Przejścia regeneratywne w chwilach zmiany stanu procesu awarii są przejściami tożsamościowymi:

$$(p_{ij}^{(a)}) = (\delta_{ij}), \quad a = 0, 1. \tag{10}$$

Podstawiając (9) i (10) do (2) otrzymujemy (5) i (6). Z (1) mamy (7). Na segmencie awarii proces $\{Y(t),\ t \geqslant 0\}$ jest procesem narodzin, a więc rozkłady prawdopodobieństwa $\{\varrho_j^{(1)}\}$ i $\{\varrho_j^{(0)}\}$ są związane równościami $\varrho_j^{(1)} = \sum_i \varrho_i^{(0)} p_{ij}$, $j = 0, 1, \ldots$, gdzie p_{ij} są prawdopodobieństwami przejścia procesu na segmencie awarii. Oczywiście, $p_{ij} = p_{j-i}$ dla $j \geqslant i$ oraz $p_{ij} = 0$ poza tym. To dowodzi (8) i kończy dowód twierdzenia 2.

WNIOSEK. *Weźmy pod uwagę graniczne prawdopodobieństwa liczby jednostek w systemie:* $q_j = q_j^{(0)}+q_j^{(1)}$, $j = 0, 1, \ldots$ *Z* (5) *i* (6) *po podstawieniu* (7) *i dodaniu stronami otrzymujemy*

$$\lambda q_0 = \mu q_1^{(1)},$$

$$\lambda q_j+\mu q_j^{(1)} = \lambda q_{j-1}+\mu q_{j+1}^{(1)},$$

a więc

$$q_{j+1}^{(1)} = \frac{\lambda}{\mu} q_j, \quad j = 0, 1, \ldots, \quad q_0^{(1)} = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \tag{11}$$

(por. M. Jankiewicz [2]).

Prace cytowane

[1] E. Çinlar, *Markov renewal theory: a survey*, Manag. Sci. 21, 7 (1975), str. 727–752.
[2] M. Jankiewicz, *Cyclic systems with preemptive priority*, Zastos. Mat. 14 (1974), str. 165–176.
[3] I. Kopocińska, B. Kopociński, *Włożone łańcuchy Markowa dla pewnych rozbudowanych procesów obsługi masowej*, Matematyka Stosowana 5 (1975), str. 103–127.
[4] B. Kopociński, *Zarys teorii odnowy i niezawodności*, Warszawa 1973.
[5] A. Kuczura, *Piecewise Markov processes*, SIAM J. Appl. Math. 24.2 (1973), str. 169–181.