ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria III: MATEMATYKA STOSOWANA IX (1977)

ROBERT BARTOSZYŃSKI (Warszawa)

O pewnym schemacie subiektywnych klasyfikacji przy zmiennych prawdopodobieństwach wyboru

(*Praca przyjęta do druku 27.11.1975*)

1. Wstęp. Niech A będzie zbiorem, którego elementy będą interpretowane jako klasyfikowane obiekty. Przypuśćmy, że z każdą parą $(x, y) \in A \times A$ można związać doświadczenie, w którym badana osoba wybiera ten z elementów x, y, który (według jej oceny) ma wyższą wartość pewnej cechy (np. wybiera element preferowany, itp.). Tego rodzaju sytuacje analizuje się zazwyczaj w terminach tzw. prawdopodobieństw wyboru $p(x, y)$, przy czym ta ostatnia wielkość interpretowana jest jako prawdopodobieństwo, że wybrany zostanie element y jeżeli wybór dokonywany jest z (uporządkowanej) pary (x, y). Można mianowicie pokazać, że przy określonych założeniach, prawdopodobieństwa wyboru indukują skalę użyteczności (por. np. Davidson i Marschak [4]; Marschak [10]; Debreu [5], [6]; Georgescu-Roegen [7]; Luce [8], [9]; Bartoszyński [3]), lub też że można zbudować pewien schemat subiektywnych klasyfikacji (por. Bartoszyński [1], [2]). Ta ostatnia oparta jest na ciągu „standardów" $\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$ spełniającym warunek: jeżeli $0 < p(x, x_j) < 1$ dla jakichś $x \in A$ oraz j, to $p(x_{j-k}, x) = p(x, x_{j+k}) = 1$ dla wszystkich $k \geqslant 1$. Każdy taki ciąg może wobec tego spełniać rolę „granic" między poszczególnymi kategoriami klasyfikacji.

W większości prac dotyczących prawdopodobieństw wyboru, zakłada się, że $p(x, y)$ odnosi się do wyborów dokonywanych przez jedną ustaloną osobę. Ze względu jednak na oczywiste trudności szacowania tych prawdopodobieństw dla pojedynczej osoby, przyjmuje się niekiedy (czasem przemilczając to założenie), że $p(x, y)$ jest jednakowe dla wszystkich osób, i szacuje się te prawdopodobieństwa na podstawie obserwacji wyborów dokonywanych przez grupę osób.

W tej pracy przyjęte będzie założenie, że prawdopodobieństwa wyboru mogą zależeć od osoby wybierającej. W paragrafie 2 zbadane zostaną warunki istnienia schematu klasyfikacji, tj. ciągu standardów spełniającego sformułowane wyżej wymaganie. W paragrafie 3 podana zostanie konstrukcja ciągu standardów o maksymalnej liczbie elementów. Wreszcie, w paragrafie 4 ta sama sytuacja analizowana będzie w terminach zmiennych losowych opisujących wybory, i wskazane będą metody, które mogą dostarczyć informacji o tym, w jakim stopniu prawdopodobieństwa wyboru zależą od osób wybierających; metody te będą przy tym oparte na ograniczonej liczbie obserwacji dla każdej osoby.

2. Ciągi standardów. W dalszym ciągu, A będzie oznaczać zbiór obiektów poddawanych klasyfikacji ze względu na jakąś cechę, a S będzie oznaczać zbiór osób dokonujących wyborów. Założymy, że w ocenach nie dopuszcza się „remisów", tak że jeżeli $p_s(x, y)$ oznacza prawdopodobieństwo wyboru y jako elementu o wyższej wartości cechy przez osobę $s \in S$, gdy wybór dokonywany jest z pary (x, y), to $1-p_s(x, y)$ jest prawdopodobieństwem, że w analogicznej sytuacji osoba ta wybierze element x.

Założymy, że prawdopodobieństwa $p_s(x, y)$ są określone dla wszystkich $x, y \in A$ i $s \in S$, i spełniają następujące postulaty.

POSTULAT 1 (*symetria*). *Dla wszystkich $s \in S$ oraz $x, y \in A$*

$$p_s(x, y)+p_s(y, x) = 1. \tag{1}$$

Zauważmy, że (1) nie jest konsekwencją założenia o braku „remisów". Istotnie, rozważa się tu pary uporządkowane i nie ma żadnych powodów, aby $p_s(x, y)$ i $p_s(y, x)$ były między sobą związane jakąś zależnością. Jasne jest jednak, że w sytuacjach praktycznych można łatwo osiągnąć spełnienie (1) drogą randomizacji kolejności (uporządkowania przestrzennego) prezentacji obiektów x i y.

POSTULAT 2 (*przechodniość*). *Dla wszystkich $s \in S$ oraz x, y, $z \in A$, jeżeli $p_s(x, y) \geqslant 1/2$ i $p_s(y, z) \geqslant 1/2$, to*

$$p_s(x, z) \geqslant \max[p_s(x, y), p_s(y, z)]. \tag{2}$$

Zanim przedstawione zostaną dalsze postulaty, określmy $x \prec_s y$ jeżeli $p_s(x, y) > 1/2$ oraz $x \sim_s y$ jeżeli $p_s(x, y) = 1/2$. Z (1) i (2) wynika natychmiast, że $\sim_s$ jest relacją równoważności w A, oraz że $\prec_s$ indukuje liniowe uporządkowanie wszystkich klas $\sim_s$-równoważności.

Postulat 2 znany jest w literaturze jako *mocna* stochastyczna przechodniość (por. Marschak [10]), w odróżnieniu od *umiarkowanej* i *słabej* stochastycznej przechodniości; pierwsza z nich określona jest przez zastąpienie „max" w (2) przez „min", natomiast w drugiej z nich wymaga się tylko, aby $p_s(x, z) \geqslant 1/2$. Oczywiście relacje $\prec_s$ i $\sim_s$ spełniają sformułowane wyżej warunki przy obu tych typach przechodniości.

Dla $n = 2, 3, \ldots$ będziemy mówić, że $t \leqslant 1$ jest *n-tym pierwiastkiem z progu rozróżnialności* (dla osoby $s \in S$), jeżeli dla dowolnych $x_0, x_1, \ldots, x_n$ warunki

$$p_s(x_0, x_1) \geqslant t, \ldots, p_s(x_{n-1}, x) \geqslant t_n$$

implikują $p_s(x_0, x_n) = 1$.

Niech $B(n, s)$ będzie zbiorem wszystkich n-tych pierwiastków z progu rozróżnialności dla osoby s. Mamy wówczas oczywisty

LEMAT 1. *Wszystkie zbiory $B(n, s)$, $s \in S$, $n = 2, 3, \ldots$ są niepuste i warunki $t \in B(n, s)$, $t \leqslant t' \leqslant 1$ implikują $t' \in B(n, s)$.*

Druga teza wynika bezpośrednio z definicji, podczas gdy niepustość wynika stąd, że $1 \in B(n, s)$ na mocy postulatu 2.

Niech

$$q(n, s) = \inf\{t\colon\ t \in B(n, s)\}. \tag{3}$$

Można przypuszczać, że dla każdego $s \in S$ mamy bądź $q(n, s) = 1$ dla wszystkich n, bądź $q(n, s) < 1$ dla wszystkich n. Tak jednak nie jest, o czym można się przekonać na podstawie następującego przykładu.

Niech $A = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ będzie zbiorem przeliczalnym i przypuśćmy, że prawdopodobieństwa wyboru wynoszą (opuszczając dla uproszczenia wskaźnik s)

$$p(x_i, x_{i+1}) = a_i,$$
$$p(x_i, x_{i+2}) = b_i,$$
$$p(x_i, x_{i+3}) = p(x_i, x_{i+4}) = \ldots = 1,$$

przy czym $p(x_j, x_i)$ dla $j \geqslant i$ otrzymane są na mocy (1); ponadto, niech

$$1/2 < a_1 < a_2 < \ldots \to 1$$

oraz

$$a_{i+1} \leqslant b_i < 1 \qquad \text{dla wszystkich } i.$$

Dwa ostatnie warunki gwarantują spełnienie (2). Łatwo się przekonać, że każda liczba $t \geqslant a_1$ jest pierwiastkiem trzeciego stopnia z progu rozróżnialności, podczas gdy jedynym pierwiastkiem drugiego stopnia z progu rozróżnialności jest 1 (gdyż dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje trójka x_i, x_{i+1}, x_{i+2} taka, że $p(x_i, x_{i+1}) \geqslant 1-\varepsilon$, $p(x_{i+1}, x_{i+2}) \geqslant 1-\varepsilon$ i $p(x_i, x_{i+2}) < 1$).

Przyjmijmy

$$q(n) = \sup_s q(n, s), \tag{4}$$

gdzie $q(n, s)$ określone jest przez (3).

Udowodnimy

LEMAT 2.

$$q(n) \geqslant q(n+1), \qquad n = 2, 3, \ldots \tag{5}$$

D o w ó d. Jeżeli $q(n) = 1$, nierówność (5) jest spełniona; załóżmy więc, że $q(n) = c < 1$ i wybierzmy $\varepsilon > 0$ takie że $c+\varepsilon < 1$.

Wybierzmy następnie dowolne $s_0 \in S$ i przypuśćmy, że

$$p_{s_0}(x_0, x_1) \geqslant c+\varepsilon, \ldots, p_{s_0}(x_{n-1}, x) \geqslant c+\varepsilon \tag{6}$$

oraz

$$p_{s_0}(x_n, x_{n+1}) \geqslant c+\varepsilon. \tag{7}$$

Ponieważ $c+\varepsilon > c = \sup_s q(n, s) \geqslant q(n, s_0)$, więc nierówności (6) implikują $p_{s_0}(x_0, x_n) = 1$ na mocy definicji liczby $q(n, s_0)$. W połączeniu z (7), relacja ta, na mocy (2), daje $p_{s_0}(x_0, x_{n+1}) = 1$, co oznacza że $c+\varepsilon \in B(n+1, s_0)$. Ponieważ

ε jest dowolne, na mocy definicji (3) otrzymujemy $q(n+1, s_0) \leqslant c$, a z dowolności s_0 mamy też

$$q(n+1) = \sup_{s_0} q(n+1, s_0) \leqslant c = q(n),$$

co należało okazać.

Tak więc ciąg $\{q(n)\}$ jest zbieżny; oznaczamy

$$\bar{q} = \lim q(n). \tag{8}$$

Możemy obecnie sformułować dwa następne postulaty.

POSTULAT 3 (*zgodność*). *Istnieje* $\alpha < 1/2$ *takie, że dla wszystkich* $x, y \in A$, *jeżeli* $p_{s_0}(x, y) = t > 1/2$ *dla pewnego* s_0, *to*

$$\inf_s p_s(x, y) \geqslant t - \alpha. \tag{9}$$

Postulat ten implikuje to, że wszystkie wartości $p_s(x, y)$ dla ustalonych x, y leżą w paśmie o szerokości α. W szczególności, jeżeli dla jakiegoś s_0 jest $x \prec_{s_0} y$ przy $p_{s_0}(x, y) > \frac{1}{2} + \alpha$, to $x \prec_s y$ dla wszystkich $s \in S$.

POSTULAT 4 (*pełna rozróżnialność*).

$$\bar{q} < 1 - \alpha, \tag{10}$$

gdzie $\bar{q}$ *jest określona przez* (8), *a* α *jest liczbą występującą w postulacie* 3.

W sytuacjach praktycznych można rozsądnie oczekiwać spełnienia nawet mocniejszego warunku, mianowicie $\lim q(n) = 1/2$; dla naszych celów jednak warunek (10) będzie wystarczający.

Wybierzmy obecnie r takie, aby

$$\bar{q} + \alpha < r < 1 \tag{11}$$

i niech

$$N = \min\{n\colon\ q(n) < r - \alpha\}. \tag{12}$$

Na mocy (8), (10) i (11) jest $N < \infty$.

Udowodnimy teraz twierdzenie opisujące konstrukcję ciągu, który może służyć za standardy w klasyfikacji.

TWIERDZENIE 1. *Niech* $\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$ *będzie skończonym lub nieskończonym ciągiem elementów* A, *takim że* $p_{s_j}(x_j, x_{j+1}) \geqslant r$ *dla pewnego* $s_j \in S$ $(j = 0, \pm 1, \ldots)$.

Dla każdego $s \in S$ *i* $x \in A$, *jeżeli* $0 < p_s(x, x_i) < 1$, *to*

$$p_s(x, x_{i+k}) = p_s(x_{i-k}, x) = 1 \tag{13}$$

dla wszystkich $k \geqslant 2N$.

D o w ó d. Rozważmy najpierw przypadek $1/2 \leqslant p_s(x, x_i) < 1$. Ponieważ $p_{s_j}(x_j, x_{j+1}) \geqslant r$ dla wszystkich j, możemy napisać, używając postulatu 3 i relacji (12) i (4):

$$p_s(x_j, x_{j+1}) \geqslant r - \alpha > q(N) \geqslant q(N, s).$$

Mamy zatem następujący ciąg nierówności

(14) $$p_s(x, x_i) \geqslant 1/2,$$

(15) $$p_s(x_i, x_{i+1}) > q(N, s), \ldots, p_s(x_{i+N-1}, x_{i+N}) > q(N, s),$$

i w konsekwencji, na podstawie definicji $q(N, s)$ i ze względu na to, że nierówności (15) są ostre,

$$p_s(x, x_i) \geqslant 1/2, \quad p_s(x, x_{i+N}) = 1,$$

a zatem na mocy (2)

$$p_s(x, x_{i+N}) = 1.$$

Stosując wielokrotnie relację (2) otrzymujemy teraz

$$p_s(x_i, x_{i+k}) = 1 \quad \text{dla wszystkich } k \geqslant N,$$

co dowodzi pierwszej części tezy (13).

Następnie, musimy mieć

(16) $$p_s(x_{i-N}, x) > \frac{1}{2},$$

gdyż w przypadku przeciwnym, $p_s(x, x_{i-N}) \geqslant 1/2$, mielibyśmy $p_s(x, x_i) = 1$ na mocy udowodnionej już tezy, wbrew założeniu twierdzenia. Postępując jak poprzednio, mamy

$$p_s(x_{i-2N}, x_{i-2N+1}) > q(N, s),$$

$$p_k(x_{i-N-1}, x_{i-N}) > q(N, s),$$

a zatem $p_s(x_{i-2N}, x_{i-N}) = 1$. Używając (16), na mocy (2) mamy $p_s(x_{i-2N}, x) = 1$, i wielokrotne zastosowanie (2) daje drugą część tezy (13).

Dowód w przypadku $0 < p_s(x, x_i) \leqslant 1/2$ jest analogiczny.

Tak więc, dla otrzymania ciągu standardów klasyfikacji, wystarcza zbudować dowolny ciąg $\{x_j\}$ spełniający założenia twierdzenia dla pewnego r, dla którego zachodzi relacja (11), a następnie wybrać podciąg wyrazów odległych o co najmniej $2N$ wskaźników.

3. Maksymalne ciągi standardów. W tym paragrafie przyjęte będą dodatkowe postulaty dla prawdopodobieństw wyboru i podana będzie charakteryzacja ciągów klasyfikacyjnych (tj. ciągów $\{x_{2N}\}$ wybranych z ciągów spełniających założenia twierdzenia 1), o maksymalnej liczbie elementów.

POSTULAT 5 (*identyczność relacji porządkujących*). *Dla każdych* $x, y \in A$, *jeżeli* $p_{s_0}(x, y) > 1/2$ *dla pewnego* $s_0 \in S$, *to* $p_s(x, y) > 1/2$ *dla wszystkich* $s \in S$.

Tak więc, wszystkie relacje $\sim_s$, i wobec tego także wszystkie relacje $\prec_s$, pokrywają się. W dalszym ciągu będziemy więc opuszczali wskaźnik s.

Można rozsądnie oczekiwać, że postulat 5 będzie spełniony w tych sytuacjach praktycznych, gdy oceny dotyczą jakiejś cechy fizycznej elementów zbioru A.

Dla $r > 1/2$ i $x \in A$ określmy

$$(17)\qquad \begin{aligned} A_r^+(x) &= \{y\colon p_s(x, y) \geqslant r \text{ dla pewnego } s \in S\}, \\ A_r^-(x) &= \{y\colon p_s(y, x) \geqslant r \text{ dla pewnego } s \in S\}. \end{aligned}$$

Mamy wówczas

LEMAT 3 *Jeżeli* $y \in A_r^+(x)$ *i* $y \prec y'$, *to* $y' \in A_r^+(x)$, *i podobnie, jeżeli* $y \in A_r^-(x)$; $y' \prec y$, *to* $y' \in A_r^-(x)$.

Istotnie, jeżeli $p_s(x, y) \geqslant r$ i $p_s(y, y') \geqslant 1/2$, to na mocy (2) mamy $p_s(x, y') \geqslant r$, czyli $y' \in A_r^+(x)$, i podobnie dla zbioru $A_r^-(x)$.

Tak więc, zbiory $A_r^+(x)$ i $A_r^-(x)$ są, w pewnym sensie, „półprostymi" w uporządkowaniu $\prec$.

Sformułujemy obecnie ostatni postulat:

POSTULAT 6 (*zamkniętość*). *Jeżeli* $A_r^+(x) \neq \emptyset$, *to istnieje* $y^+ \in A_r^+(x)$ *taki, że* $p_s(y^+, y) \geqslant 1/2$ *dla wszystkich* s *i wszystkich* $y \in A_r^+(x)$. *Podobnie, jeżeli* $A_r^-(x) \neq \emptyset$, *to istnieje* $y^- \in A_r^-(x)$ *takie, że* $p_s(y, y^-) \geqslant 1/2$ *dla wszystkich* s *i wszystkich* $y \in A_r^-(x)$.

Mamy następujący oczywisty

LEMAT 4. *Elementy* y^+ *i* y^- *są jednoznaczne z dokładnością do równoważności* $\sim$.

Niech teraz r będzie liczbą spełniającą (11) i ustalmy $z_0 \in A$. Oznaczmy przez $L(z_0, r)$ klasę wszystkich ciągów $\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$ (skończonych lub nie), dla których

(a) $x_0 \sim z_0$,

(b) $p_{s_j}(x_j, x_{j+1}) \geqslant r$ dla pewnego $s_j \in S$ $(j = 0, \pm 1, \ldots)$

(innymi słowy, $L(z_0, r)$ jest klasą wszystkich ciągów spełniających założenia twierdzenia 1, o ustalonym elemencie x_0).

Określmy teraz ciąg $\ldots, x_{-1}^*, x_0^*, x_1^*, \ldots$ w sposób następujący:

(1) Jako x_0^* wybierzmy jakikolwiek element równoważny z_0.

(2) Przypuśćmy, że $k \geqslant 0$ i że element x_k^* został już skonstruowany. Jeżeli zbiór $A_r^+(x_k^*)$ jest pusty, ciąg $\{x_j^*\}$ kończy się na x_k^*. W przypadku przeciwnym, jako x_{k+1}^* należy wybrać dowolny element równoważny y^+, określonemu w postulacie 5.

(3) W kierunku ujemnych wskaźników, ciąg $\{x_k^*\}$ rozszerza się przez analogiczną procedurę indukcyjną jak w (2).

Mamy wówczas

LEMAT 5. *Ciąg* $\{x_j^*\}$ *określony jest jednoznacznie z dokładnością do równoważności* $\sim$ *i jest elementem klasy* $L(z_0, r)$.

Dowód. Druga część tezy wynika bezpośrednio z definicji (17) zbiorów $A_r^+(x)$ i $A_r^-(x)$. Dla dowodu jednoznaczności należy pokazać, że wybór x_{k+1}^* (dla $k \geqslant 0$) jest ten sam (z dokładnością do równoważności) dla każdego wyboru x_k^*. Na mocy lematu 4, wystarcza w tym celu pokazać, że $x \sim y$ pociąga za sobą $A_r^+(x) = A_r^+(y)$. Ta ostatnia własność wynika z kolei stąd, że warunek $x \sim y$ implikuje $p_s(x, z) = p_s(y, z)$ dla wszystkich $s \in S$ i $z \in A$.

Istotnie, przypuśćmy że $p_s(x, y) = 1/2$. Bez zmniejszenia ogólności można założyć, że $p_s(y, z) \geqslant 1/2$. Na mocy (2) mamy wówczas

(18) $$p_s(x, z) \geqslant \max[p_s(x, y), p_s(y, z)] \geqslant p_s(y, z).$$

Następnie, na mocy (1) mamy też $p_s(y, x) = 1/2$, i ponieważ $p_s(x, z) \geqslant 1/2$ z uwagi na (18), możemy napisać

$$p_s(y, z) \geqslant \max[p_s(y, x), p_s(x, z)] \geqslant p_s(x, z),$$

skąd wynika $p_s(x, z) = p_s(y, z)$, co należało okazać.

Na zakończenie tego paragrafu udowodnimy, że ciąg $\{x_j^*\}$ jest, w pewnym sensie, najdłuższy w klasie $L(z_0, r)$. Mamy mianowicie

TWIERDZENIE 2. *Niech $\{x_j\}$ będzie dowolnym ciągiem z klasy $L(z_0, r)$. Jeżeli $\{x_j\}$ ma k-ty wyraz, dla $k \geqslant 0$, to x_k^* jest także określone i $p_s(x_k^*, x_k) \geqslant 1/2$ dla wszystkich s, i podobnie, jeżeli $\{x_j\}$ ma n-ty wyraz dla $n \leqslant 0$, to x_n^* jest określone i $p_s(x_n, x_n^*) \geqslant 1/2$ dla wszystkich s.*

D o w ó d. Ze względu na symetrię, wystarcza udowodnić twierdzenie dla $k \geqslant 0$. Teza jest prawdziwa dla $k = 0$ na mocy konstrukcji. Załóżmy, że jest ona spełniona dla pewnego $k \geqslant 0$; wobec tego element x_k^* istnieje i mamy $p_s(x_k^*, x_k) \geqslant 1/2$ dla wszystkich s.

Przypuśćmy, że x_{k+1} jest następnym wyrazem ciągu $\{x_j\}$. Mamy wówczas $p_{s_k}(x_k, x_{k+1}) \geqslant r$ dla pewnego s_k i na mocy (2) możemy napisać

$$p_{s_k}(x_k^+, x_{k+1}) \geqslant \max[p_{s_k}(x_k^+, x_k), p_{s_k}(x_k, x_{k+1})] \geqslant p_{s_k}(x_k, x_{k+1}) \geqslant r,$$

co dowodzi, że $x_{k+1} \in A_r^+(x_k^*)$. Tak więc, zbiór $A_r^+(x_k^*)$ jest niepusty i x_{k+1}^* istnieje na mocy postulatu 6. Relacja $p_s(x_{k+1}^*, x_{k+1}) \geqslant 1/2$ wynika obecnie z definicji elementu x_{k+1}^*.

4. Zagadnienia estymacji. W tym paragrafie rozważymy pewne problemy estymacji związane ze schematem klasyfikacji. Tak więc, przypuśćmy, że mamy rodzinę zmiennych losowych

(19) $$\mathscr{F} = \{T_s^{(i)}(x, y):\ x, y \in A,\ s \in S,\ i = 1, 2, \ldots\},$$

gdzie każda $T_s^{(i)}(x, y)$ przyjmuje jedną z wartości x, y. Rodzina $\mathscr{F}$ reprezentuje obserwowalne wybory: zdarzenie $T_s^{(i)}(x, y) = x$ będzie interpretowane jako „przy i-tej prezentacji pary $\langle x, y\rangle$, osoba s wybrała x jako element o mniejszej wartości badanej cechy".

Niech $I \subset \{1, 2, \ldots\}$. Założymy, że rodzina $\mathscr{F}$ spełnia następujące warunki:

(i) Jeżeli U, V są rozłącznymi podzbiorami $A \times A \times S \times I$, to podrodziny

$$\mathscr{F}_U = \{T_s^{(i)}(x, y):\ (x, y, s, i) \in U\}$$

oraz

$$\mathscr{F}_V = \{T_s^{(i)}(x, y):\ (x, y, s, i) \in V\}$$

są niezależne;

(ii) dla $i = 1, 2, \ldots$

$$P\{T_s^{(i)}(x, y) = y\} = p_s(x, y).$$

Wynika stąd w szczególności, że jeżeli $i_1 \neq i_2$, to dla wszystkich x, y oraz s zmienne losowe $T_s^{(i_1)}(x, y)$ oraz $T_s^{(i_2)}(x, y)$ są niezależne i mają jednakowy rozkład.

Dla dużych zbiorów I, założenia (i) oraz (ii) są oczywiście nierealistyczne, i chodzi wobec tego o zbudowanie metod wnioskowania o prawdopodobieństwach $p_s(x, y)$, które nie wykorzystują „w pełni" tych założeń. Pokażemy mianowicie, że można zbudować metody wnioskowania oparte na dwóch obserwacjach wyboru z danej pary dla każdej osoby.

Metody te zawarte są w następujących twierdzeniach (por. Bartoszyński [2]).

Niech $\mathcal{G} = \{G_1, \ldots, G_n\}$ będzie układem niezależnych eksperymentów. Załóżmy, że każdy z tych eksperymentów może prowadzić do „sukcesu" lub „porażki", i niech a_i oznacza prawdopodobieństwo sukcesu w eksperymencie G_i. Oznaczmy

(20) $$\bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i, \qquad \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i-\bar{a})^2.$$

Załóżmy, że można przeprowadzić tylko dwie niezależne obserwacje dla każdego z eksperymentów G_i, i niech $X_i = 1$ lub 0, w zależności od tego, czy pierwsze doświadczenie dla eksperymentu G_i dało sukces czy porażkę. Podobnie, niech $Y_i = 1$ lub 0 w zależności od wyników drugiego doświadczenia.

Niech teraz $Z_{ij} = X_i Y_j$ i

(21) $$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i,$$
$$\eta = \frac{1}{2}\bar{X}+\bar{Y}, \qquad \xi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_{ii}-\bar{X}\bar{Y}.$$

Mamy wówczas

TWIERDZENIE 3. *Zmienne losowe η i ξ są nieobciążonymi estymatorami parametrów $\bar{a}$ i σ^2. Ponadto, $D^2(\eta) \leqslant 1/8n$ i $D^2(\xi) \leqslant \alpha_n \sim 3/4n$.*

Przypuśćmy teraz, że system $\mathcal{G}$ został rozbity na rozłączne podsystemy $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_k$, gdzie $\mathcal{G}_i$ składa się z n eksperymentów (tak, że $n = n_1 + \ldots + n_k$). Niech $\bar{a}^{(r)}$ i σ_r^2 oznaczają parametry określone przez (20) i niech ξ_r będzie określone przez (21) dla podsystemu $\mathcal{G}_r$. Mamy wówczas

TWIERDZENIE 4. *Zmienna losowa*

$$K = \xi - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} n_j \xi_j$$

spełnia warunek $E(K) \geqslant 0$, przy czym $E(K) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $\bar{a}^{(1)} = \ldots$ $\ldots = \bar{a}^{(k)}$, Ponadto, jeżeli $\min(n_1, \ldots, n_k) \to \infty$, to $D^2(K) \leqslant \beta_n \sim 145/54n$.

Twierdzenia 3 i 4 mogą być użyte dla oceny zmienności międzyosobniczej prawdopodobieństw wyboru, bez konieczności szacowania tych prawdopodobieństw oddzielnie dla każdej z osób. Wystarcza mianowicie dla ustalonej pary $x, y \in A$ i zbioru n osób $s_1, \ldots, s_n$ traktować wybór z pary $\langle x, y\rangle$ przez osobę s_i jako eksperyment G_i, gdzie sukcesem jest wybór y. Wówczas prawdopodobieństwo sukcesu wynosi

$p_{s_i}(x, y)$, i mając obserwacje dwóch niezależnych wyborów dla każdej osoby można oszacować wielkości

$$\bar{p}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_{s_i}(x, y)$$

oraz

$$\sigma^2(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [p_{s_i}(x, y) - \bar{p}(x, y)]^2,$$

przy czym wariancje estymatorów tych wielkości maleją przy zwiększaniu liczebności próbki osób.

Podobnie, twierdzenie 4 może być użyte dla testowania hipotezy o jednakowej przeciętnej zdolności dyskryminacji dla dwóch lub więcej próbek osób.

Prace cytowane

[1] R. Bartoszyński, *A note on subjective classifications*, Rev. Internat. Statist. Inst. 39 (1971), str. 39–45.

[2] — *On the construction and evaluation of subjective classifications*, Applicationes Mathematicae 12 (1971), str. 1–21.

[3] — *A metric structure derived from subjective judgments: scaling under perfect and imperfect discrimination*, Econometrica 42 (1974), str. 55–71.

[4] D. Davidson i J. Marschak, *Experimental tests of a stochastic decision theory*, w: *Measurement: Definition and Theories*, C. W. Churchman i P. Ratoosh ed., Wiley, New York 1969.

[5] G. Debreu, *Stochastic choice and cardinal utility*, Econometrica 26 (1958), str. 440–444.

[6] — *Topological methods in cardinal utility theory*, w: *Mathematical Methods in the Social Sciences*, K. J. Arrow, S. Karlin i P. Suppes ed., Stanford University Press 1960.

[7] N. Georgescu-Roegen *Threshold in choice and the theory of demand*, Econometrica 26 (1958), str. 157–168.

[8] R. D. Luce, *A probabilistic theory of utility*, Econometrica 26 (1958), str. 193–224.

[9] — *Individual choice behavior*, Wiley, New York 1959.

[10] J. Marschak, *Binary choice constraints and random utility indicators*, w: *Mathematical Methods in the Social Sciences*, K. J. Arrow, S. Karlin i P. Suppes ed., Stanford University Press 1960.