ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria III: MATEMATYKA STOSOWANA VIII (1976)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

JULIAN MARSZAŁ *

Numeryczne rozwiązywanie zadań brzegowych teorii naprężeń cieplnych płyt izotropowych

(*Praca przyjęta do druku 22.02.1974*)

1. Wstęp. Zagadnienie numerycznego rozwiązywania problemów brzegowych termosprężystości, w dostatecznie ogólnym ujęciu, zostało sformułowane w pracy [3]: podano tam blokowe równania macierzowe, określające przybliżone przemieszczenia w węzłach siatki. Problemami zbieżności i oszacowań rozwiązań przybliżonych nie zajmowano się.

W pracy [5] podano wariacyjno-różnicową metodę rozwiązywania zadania brzegowego pierwszego rodzaju dla równania biharmonicznego. Otrzymane tą metodą przybliżone rozwiązanie, w każdym z prostokątnych obszarów danego obszaru, jest wielomianem 6-tego stopnia i określa rozwiązanie z dokładnością $\|\Delta\|_{L_2} = O(|h|^4)$.

Niżej podano wariacyjno-różnicową metodę rozwiązywania możliwie ogólnie sformułowanych zadań brzegowych dla równania biharmonicznego. Zastosowana metoda polega na wykorzystaniu mnożników Lagrange'a. Stosując tę metodę otrzymuje się przybliżone rozwiązanie zadania brzegowego w postaci funkcji obszarami kwadratowej, określającej rozwiązanie z dokładnością $\|\Delta\|_{W_2^{(2)}} = O(|h|)$.

2. Wariacyjne sformułowanie zadania. Należy znaleźć taką funkcję $w_0(x, y)$, $(x, y) \in \overline{D}$, dla której wartość funkcjonału

$$(2.1)\qquad J(w) = \iint_D \left\{ (\Delta w)^2 - 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right] + 2f(x, y)\,w \right\} dx\,dy + 2\int_L \left[p(x, y)w + m(x, y)\frac{\partial w}{\partial n}\right] dL,$$

przy danych funkcjach $p(x, y)$, $f(x, y)$, $m(x, y)$ oraz danym obszarze D o brzegu L, jest najmniejsza. Przez $\partial w/\partial n$ oznaczono pochodną w kierunku normalnym do brzegu obszaru D.

---

* 1930–1975.

3. Metoda rozwiązywania zadania 2. Metoda wyznaczenia argumentu $w_0(x, y)$ minimalizującego funkcjonał (2.1), którą zastosowano w pracy, polega na przyjęciu za dziedzinę funkcjonału takiego zbioru funkcji, w którym funkcjonał staje się funkcją wielu zmiennych. Takie ograniczenie dziedziny funkcjonału prowadzi do minimalizacji funkcji wielu zmiennych, a to zaś — do rozwiązywania układu równań algebraicznych. Zgodnie z określeniem metody, za dziedzinę funkcjonału przyjęto następujący zbiór funkcji:

$$N_2^{(2)} = \left\{f(x, y)\colon \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in N_2^{(1)}\right\}, \tag{3.1}$$

gdzie

$$N_2^{(1)} = \{f(x, y)\colon f \in C,\ f \text{ — liniowa w trójkątnych obszarach}\}. \tag{3.2}$$

W rozważaniach korzystać będziemy również z funkcji zbioru

$$N_2^{(0)} = \{f(x, y)\colon f \text{ — stała w trójkątnych obszarach}\}. \tag{3.3}$$

4. Wariacyjne sformułowanie zadania 2 odpowiadające parze $\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}\right)$. Ponieważ zbiór (3.2) nie należy do dziedziny funkcjonału (2.1), więc za niewiadomą zadania 2 przyjęto parę

$$\vec{Z} = (z_1, z_2) = \left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}\right). \tag{4.1}$$

W związku z tym należy wykazać, że prawdziwe jest następujące

TWIERDZENIE 4.1. *Zadanie* 2, *sformułowane za pomocą funkcjonału* (2.1), *jest równoważne zadaniu polegającemu na minimalizacji funkcjonału*

$$J(\vec{Z}, \lambda) = W(\vec{Z}) + V(\vec{Z}, \lambda) + l(\vec{Z}), \tag{4.2}$$

gdzie

$$W(\vec{Z}) = \frac{1}{2}\iint\limits_D \left\{\left(\frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial z_2}{\partial y}\right)^2 - 2(1-\nu)\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\frac{\partial z_2}{\partial y} - \frac{\partial z_1}{\partial y}\frac{\partial z_2}{\partial x}\right)\right\} dx\,dy, \tag{4.3}$$

$$V(\vec{Z}, \lambda) = \iint\limits_D \lambda(x, y)\left(\frac{\partial z_1}{\partial y} - \frac{\partial z_2}{\partial x}\right) dx\,dy, \tag{4.4}$$

$$l(\vec{Z}) = \iint\limits_D wf(x, y)\,dx\,dy + \int\limits_L \vec{\varrho}\cdot\vec{Z}\,dL = \iint\limits_D \psi(x, y) z_1\,dx\,dy + \int\limits_L \vec{\varrho}^*\cdot\vec{Z}\,dL. \tag{4.5}$$

Funkcje ψ, $\vec{\varrho}$, $\vec{\varrho}^*$, *występujące w* (4.5), *dla prostokątnego obszaru* $D = (0, a)\times\times(0, b)$, *określają następujące wzory*:

$$\psi(x, y) = \int\limits_x^a f(t, y)\,dt, \qquad \varrho_1(x, 0) = \int\limits_x^a p(t, 0)\,dt + \int\limits_0^b p(a, y)\,dy,$$

$$\varrho_1(a, y) = -m(a, y), \qquad \varrho_1(0, y) = m(0, y), \qquad \varrho_1(x, b) = \int\limits_x^a p(t, b)\,dt,$$

$$\varrho_2(x,0) = m(x,0), \quad \varrho_2(a,y) = \int_y^b p(a,t)\,dt, \quad \varrho_2(0,y) = \int_y^b p(0,t)\,dt + \int_0^a p(x,b)\,dx,$$

$$\varrho_2^*(0,y) = \int_y^b \Big(p(0,t) + \int_0^a f(x,t)\,dx\Big)dt + \int_0^a p(x,b)\,dx,$$

$$\varrho_2(x,b) = -m(x,b); \quad \vec{\varrho}^* \neq \vec{\varrho} \quad \textit{tylko dla} \quad (x,y) = (0,y),$$

$$\vec{\varrho}^* - \vec{\varrho} = \Big(0, \int_y^b dt \int_0^a f(x,t)\,dx\Big).$$

D o w ó d. (a) Dla każdego $w \in W_2^{(2)}$,

$$\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \in W_2^{(1)}$$

i odwrotnie: dla każdej pary $\vec{Z} \in W_2^{(1)}$, takiej że $\dfrac{\partial z_1}{\partial y} = \dfrac{\partial z_2}{\partial x}$, istnieje element $w \in W_2^{(2)}$ spełniający warunki

$$\frac{\partial w}{\partial x} = Z_1, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = Z_2.$$

Można jeszcze dodać, że wyznaczenie funkcji w polega na całkowaniu różniczki zupełnej. Istnienie całki po dowolnym odcinku zawartym w $\bar{D}$ zapewnia twierdzenie 8.2. Przyjęcie $w(0,0) = 0$ dla jednoznacznego określenia w nie jest w sprzeczności z warunkami brzegowymi zadania 2, a to dlatego, że zadane wartości funkcji $w(x,y)$ na brzegu L przyjęto za równe zeru. Jeżeli zaś funkcja $w(x,y)$ jest nieokreślona w żadnym punkcie brzegu L, to (zgodnie z (7.15)) możemy przyjąć $w(0,0) = 0$.

(b) Prawdą jest również, że dla każdego $w \in W_2^{(2)}$ i $\vec{Z} = \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial y}\right)$

$$l(\vec{Z}) = \iint_D fw\,dx\,dy + \int_L \left(p(x,y)w + m(x,y)\frac{\partial w}{\partial n}\right)dL. \tag{4.6}$$

Wynika to z prawdziwości następujących równości:

$$\iint_D fw\,dx\,dy = \int_x^a z_2(0,t)\,dt \int_t^b dy \int_0^a f(x,y)\,dx + \iint_D z_1(t,y)\,dt \int_t^a f(x,y)\,dx\,dy, \tag{4.7}$$

$$\int_{L_1} \left[pw + m\frac{\partial w}{\partial n}\right]dL = \int_0^a \left[z_1(t,0)\int_t^a p(x,0)\,dx + m(t,0)z_2(t,0)\right]dt, \tag{4.8}$$

$$\int_{L_2} \left[pw + m\frac{\partial w}{\partial n}\right]dL = \tag{4.9}$$

$$= \int_0^a z_1(x,0)\,dx \int_0^b p(a,y)\,dy + \int_0^b \left[z_2(a,t)\int_t^b p(a,y)\,dy - m(a,t)z_1(a,t)\right]dt,$$

$$(4.10)\qquad \int_{L_3}\left[pw+m\frac{\partial w}{\partial n}\right]dL =$$

$$= \int_0^b z_2(0,y)\,dy\int_0^a p(x,b)\,dx+\int_0^a\left[-m(t,b)z_2(t,b)+z_1(t,b)\int_t^a p(x,b)\,dx\right]dt,$$

$$(4.11)\qquad \int_{L_4}\left[pw+m\frac{\partial w}{\partial n}\right]dL = \int_0^b\left[z_2(0,t)\int_t^b p(0,y)\,dy+m(0,t)z_1(0,t)\right]dt,$$

gdzie L_i; $i = 1\ (1)\ 4$, są bokami prostokąta D.

(c) Jednym z warunków koniecznych (5.34) istnienia minimum funkcjonału (4.2) jest warunek $\frac{\partial z_1}{\partial y} = \frac{\partial z_2}{\partial x}$. Oznacza to, że jeżeli jest spełniony warunek konieczny istnienia minimum funkcjonału (4.2), to funkcjonał (4.4) znika.

Wnioskiem z (a), (b), (c) jest twierdzenie 4.1.

5. Własności funkcjonałów (4.3), (4.4), (4.5) oraz warunki konieczne istnienia minimum funkcjonału (4.2). Niech

$$(5.1)\qquad W(\vec{Z}_1,\vec{Z}_2) = \frac{1}{2}\iint_D\left[2\left(\frac{\partial z_{11}}{\partial x}+\frac{\partial z_{21}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z_{12}}{\partial x}+\frac{\partial z_{22}}{\partial y}\right)-\right.$$

$$\left.-2(1-\nu)\left(\frac{\partial z_{11}}{\partial x}\frac{\partial z_{22}}{\partial y}+\frac{\partial z_{12}}{\partial x}\frac{\partial z_{21}}{\partial y}-\frac{\partial z_{11}}{\partial y}\frac{\partial z_{22}}{\partial x}-\frac{\partial z_{12}}{\partial y}\frac{\partial z_{21}}{\partial x}\right)\right]dx\,dy.$$

Przyjmując w (5.1) $\vec{Z}_1 = \vec{Z}_2 = \vec{Z}$, otrzymamy

$$(5.2)\qquad W(\vec{Z},\vec{Z}) = 2W(\vec{Z}).$$

Funkcjonał (5.1) jest tzw. funkcjonałem dwuliniowym. Jest on uogólnieniem funkcjonału kwadratowego (4.3) i jako funkcjonał liniowy względem obydwu argumentów ma następującą własność:

$$(5.3)\qquad W(a\vec{Z}_1+b\vec{Z}_2,\vec{Z}) = aW(\vec{Z}_1,\vec{Z})+bW(\vec{Z}_2,\vec{Z}).$$

Wnioskiem z (5.3) jest tożsamość

$$(5.4)\qquad W(\vec{Z}_1+\vec{Z}_2) = W(\vec{Z}_1)+W(\vec{Z}_2)+W(\vec{Z}_1,\vec{Z}_2).$$

Funkcjonał (5.1) ma również własność przemienności argumentów, to jest

$$(5.5)\qquad W(\vec{Z}_1,\vec{Z}_2) = W(\vec{Z}_2,\vec{Z}_1).$$

Ponieważ (4.4) jest też funkcjonałem kwadratowym, więc uogólnieniem tego funkcjonału jest dwuliniowy funkcjonał, postaci:

$$(5.6)\qquad V(\vec{Z}_1,\lambda_1;\vec{Z}_2,\lambda_2) = \iint_D\left[\lambda_1\left(\frac{\partial z_{12}}{\partial y}-\frac{\partial z_{22}}{\partial x}\right)+\lambda_2\left(\frac{\partial z_{11}}{\partial y}-\frac{\partial z_{21}}{\partial x}\right)\right]dx\,dy.$$

Funkcjonał (5.6) ma również własności (5.2)–(5.5).

Z własności (5.3) wynikają następujące tożsamości:

$$W(\vec{Z}_2)-W(\vec{Z}_1) = \tfrac{1}{2}W(\vec{Z}_2+\vec{Z}_1, \vec{Z}_2-\vec{Z}_1), \tag{5.7}$$

$$V(\vec{Z}_2, \lambda_2)-V(\vec{Z}_1, \lambda_1) = \tfrac{1}{2}V(\vec{Z}_2+\vec{Z}_1, \lambda_2+\lambda_1; \vec{Z}_2-\vec{Z}_1, \lambda_2-\lambda_1), \tag{5.8}$$

$$l(\vec{Z}_2)-l(\vec{Z}_1) = l(\vec{Z}_2-\vec{Z}_1). \tag{5.9}$$

Przyrostom funkcjonałów (4.3), (4.4), (4.5), można nadać również postać

$$W(\vec{Z}_2)-W(\vec{Z}_1) = W(\vec{Z}_1, \vec{Z}_2-\vec{Z}_1)+W(\vec{Z}_2-\vec{Z}_1), \tag{5.10}$$

$$V(\vec{Z}_2, \lambda_2)-V(\vec{Z}_1, \lambda_1) = V(\vec{Z}_1, \lambda_1; \vec{Z}_2-\vec{Z}_1, \lambda_2-\lambda_1)+V(\vec{Z}_2-\vec{Z}_1, \lambda_2-\lambda_1), \tag{5.11}$$

$$l(\vec{Z}_2)-l(\vec{Z}_1) = l(\vec{Z}_2-\vec{Z}_1)+0. \tag{5.12}$$

Pierwsze składniki prawych stron tożsamości (5.10), (5.11), (5.12)

$$\delta W(\vec{Z}) = W(\vec{Z}, \vec{\xi}), \tag{5.13}$$

$$\delta V(\vec{Z}, \lambda) = V(\vec{Z}, \lambda; \vec{\xi}, \Delta\lambda), \tag{5.14}$$

$$\delta l(\vec{Z}) = l(\vec{\xi}), \tag{5.15}$$

gdzie $\vec{\xi} = \vec{Z}_2-\vec{Z}$, $\Delta\lambda = \lambda_2-\lambda$, są wariacjami pierwszego rzędu funkcjonałów (4.3), (4.4), (4.5). Drugie składniki równości (5.10), (5.11), (5.12) są wariacjami drugiego rzędu funkcjonałów (4.3), (4.4), (4.5).

Z prawdziwości tożsamości (5.10), (5.11), (5.12) wynika następujące

TWIERDZENIE 5.1. *Warunkiem koniecznym istnienia minimum funkcjonału* (4.2) *jest prawdziwość następującej tożsamości*:

$$\forall_{\vec{Z}\in B} \forall_{\Delta\lambda\in L_2} \left(\delta J(\vec{Z}, \lambda) = W(\vec{Z}, \vec{\xi})+V(\vec{Z}, \lambda; \vec{\xi}, \Delta\lambda)+l(\vec{\xi}) = 0\right), \tag{5.16}$$

gdzie

$$B = \{\vec{Z}\colon \vec{Z} \in W_2^{(1)}, Z_i|_{\Delta L_i} = a_i(x, y),\ i = 1, 2\}, \tag{5.17}$$

$a_i(x, y)$ *jest daną funkcją określoną na* $\Delta L_i \subset L$.

U w a g a 5.1. Funkcja $a_i(x, y)$ określa wartości funkcji z_i na brzegu ΔL_i. Jest to warunek brzegowy zadania 2.

Jeżeli $\Delta L_i = \theta$, $i = 1, 2$, to $B = W_2^{(1)}$. Jeżeli $a_i(x, y) = 0$, to $\vec{\xi} = \vec{Z}_2-\vec{Z} \in B$.

Jeżeli $\delta J = 0$, to z (5.14) wynika, że $\dfrac{\partial z_1}{\partial y} = \dfrac{\partial z_2}{\partial x}$.

Oznacza to, że $\vec{Z} \in B_1$, gdzie

$$B_1 = \left\{\vec{Z}\colon \vec{Z} \in B, \frac{\partial z_1}{\partial y} = \frac{\partial z_2}{\partial x}\right\}. \tag{5.18}$$

Jeżeli $\vec{Z}_2 \in B_1$, to $\dfrac{\partial \xi_1}{\partial y} = \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x}$ i stąd

$$\delta^2 V = V(\vec{Z}_2-\vec{Z}_1, \lambda_2-\lambda) = 0. \tag{5.19}$$

Po wstawieniu (5.10), (5.11), (5.12), (5.16), (5.19) do przyrostu funkcjonału (4.2), otrzymamy

$$J(\vec{Z}_2, \lambda_2)-J(\vec{Z}, \lambda) = W(\vec{Z}_2-\vec{Z}). \tag{5.20}$$

Ponieważ funkcjonał (5.3) jest (jak wykazano w § 6) dodatnio określony, więc prawdziwa jest nierówność

$$\forall_{Z_2 \in B_1} \forall_{\lambda_2 \in L_2} \left(J(\vec{Z}_2, \lambda_2) - J(\vec{Z}, \lambda) \geqslant 0\right). \tag{5.21}$$

Nierówność (5.21) jest definicją minimum funkcjonału (4.2) w punkcie $(\vec{Z}, \lambda)$, spełniającym warunek (5.16), w zbiorze B_1.

Ponieważ (zgodnie z (5.16))

$$V(\vec{Z}, \lambda; \vec{\xi}, \Delta\lambda) = V_1(\lambda; \vec{\xi}) = \iint_D \lambda\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial y} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x}\right) dx\,dy, \tag{5.22}$$

więc, wstawiając (5.22) do (5.16), otrzymamy

$$\forall_{\vec{\xi} \in B_{\vec{\xi}}} \left(W(\vec{Z}, \vec{\xi}) + V_1(\lambda, \vec{\xi}) + l(\vec{\xi}) = 0\right), \tag{5.23}$$

gdzie

$$B_{\vec{\xi}} = \{\vec{\xi}\colon \vec{\xi} + \vec{Z} \in B\}. \tag{5.24}$$

Jeżeli $a_i(x, y) = 0$, $i = 1, 2$, to (zgodnie z uwagą 5.1) do tożsamości (5.23) za $\vec{\xi}$ można wstawić $\vec{Z}$. Otrzymamy wtedy równanie, które spełnia rozwiązanie zadania 2, tj.

$$2W(\vec{Z}) + l(\vec{Z}) = 0. \tag{5.25}$$

Ponieważ $V_1(\lambda; \vec{Z}) = 0$, więc

$$J(\vec{Z}, \lambda) = W(\vec{Z}) + l(\vec{Z}). \tag{5.26}$$

Po wstawieniu (5.25) do (5.26) otrzymamy

$$J(\vec{Z}, \lambda) = -W(\vec{Z}). \tag{5.27}$$

W ten sposób wykazaliśmy prawdziwość lematu:

LEMAT 5.1. *Minimum funkcjonału* (4.2) *w* B_1 *równe minimum funkcjonału* (2.1) *wynosi* $-W(\vec{Z})$, *gdzie* $\vec{Z}$ *spełnia warunek* (5.23).

Z (5.23) wynika również, że prawdziwe jest następujące

TWIERDZENIE 5.2. *Zadanie* 2 *może mieć tylko jedno rozwiązanie.*

D o w ó d. Przypuśćmy, że istnieją dwa rozwiązania $\vec{Z}_1 \neq \vec{Z}_2$; spełniają one tożsamość (5.23), tzn.

$$W(\vec{Z}_i, \vec{\xi}) + V_1(\lambda_i; \vec{\xi}) + l(\vec{\xi}) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{5.28}$$

Odejmując równości (5.28) stronami, otrzymamy

$$W(\vec{Z}_2 - \vec{Z}_1, \vec{\xi}) + V_1(\lambda_2 - \lambda_1, \vec{\xi}) = 0. \tag{5.29}$$

Jeżeli w (5.29) za $\vec{\xi}$ wstawimy $\vec{Z}_2 - \vec{Z}_1$, to otrzymamy równanie

$$2W(\vec{Z}_2 - \vec{Z}_1) = 0. \tag{5.30}$$

Ponieważ funkcjonał (4.3) (zgodnie z § 6) jest dodatnio określony, więc $\vec{Z}_1 = \vec{Z}_2$.

Wnioskiem z powyższych rozważań jest

TWIERDZENIE 5.3. *Jeżeli istnieje $\vec{Z}$ spełniające warunek* (5.23), *to współrzędne wektora Z są pochodnymi funkcji $w_0(x, y)$, będącej rozwiązaniem zadania* 2 *dla prostokątnego obszaru D.*

Tożsamość (5.23) można zastąpić równoważnym układem równań. W związku z tym należy udowodnić następujące

TWIERDZENIE 5.4. *Jeżeli $(\vec{Z}, \lambda)$ spełnia warunek* (5.23), *to $(\vec{Z}, \lambda)$ spełnia następujące równania różniczkowe*:

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \psi, \tag{5.31}$$

$$\nu \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z_2}{\partial y^2} - \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0, \qquad (x, y) \in D; \tag{5.32}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial y} = \frac{\partial z_2}{\partial x}, \qquad (x, y) = \in \bar{D}; \tag{5.33}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} + \nu \frac{\partial z_2}{\partial y} = \varrho_1, \qquad (x, y) \in (L \setminus \Delta L_1) \cap (L_4 \cup L_2); \tag{5.34}$$

$$(1-\nu) \frac{\partial z_1}{\partial y} - \lambda = \varrho_2^*, \qquad (x, y) \in (L \setminus \Delta L_2) \cap (L_4 \cup L_2); \tag{5.35}$$

$$\nu \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial z_2}{\partial y} = \varrho_2, \qquad (x, y) \in (L \setminus \Delta L_2) \cap (L_1 \cup L_3); \tag{5.36}$$

$$(1-\nu) \frac{\partial z_2}{\partial x} + \lambda = \varrho_1, \qquad (x, y) \in (L \setminus \Delta L_1) \cup (L_1 \cap L_3); \tag{5.37}$$

$$z_1 = 0; \quad (x, y) \in \Delta L_1; \quad z_2 = 0, \quad (x, y) \in \Delta L_2 \tag{5.38}$$

lub (*w zapisie operatorowym*) *równanie*

$$A(\vec{Z}, \lambda) = (\emptyset, 0). \tag{5.39}$$

Ponieważ $\vec{Z} \in W_2^{(1)}$, $\lambda \in L_2$, więc drugie pochodne $\vec{Z}$ i pierwsze λ należy rozumieć w sensie dystrybucyjnym [7].

D o w ó d. Załóżmy na razie, że $\vec{Z} \in W_2^{(2)}$ i $\lambda \in W_2^{(1)}$; jeżeli prawą stronę tożsamości (5.23) przekształcimy posługując się wzorem na pochodną iloczynu, to otrzymamy następującą postać wariacji:

$$\begin{aligned} \delta J = -\iint_D \Bigg[& \left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} - \psi \right) \xi_1 + \\ & + \left(\nu \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z_2}{\partial y^2} - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) \xi_2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial y} - \frac{\partial z_2}{\partial x} \right) \Delta \lambda \Bigg] dx\, dy + \\ + \int_L \Bigg[& \left(\frac{\partial z_1}{\partial x} + \nu \frac{\partial z_2}{\partial y} - \varrho_1 \right) \xi_1 + \left((1-\nu) \frac{\partial z_1}{\partial y} - \lambda - \varrho_2^* \right) \xi_2 \Bigg] dy - \\ - \Bigg[& \left(\nu \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial z_2}{\partial y} - \varrho_2 \right) \xi_2 + \left((1-\nu) \frac{\partial z_2}{\partial x} + \lambda - \varrho_1 \right) \xi_1 \Bigg] dx \end{aligned} \tag{5.40}$$

lub

$$(5.41)\qquad \delta J = -\Bigg[\left\langle\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 z_2}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial\lambda}{\partial y}-\psi\right),\xi_1\right\rangle+$$
$$+\left\langle\left(\nu\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z_2}{\partial y^2}-\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right),\xi_2\right\rangle+\iint\limits_D \Delta\lambda\left(\frac{\partial z_1}{\partial y}-\frac{\partial z_2}{\partial x}\right)dx\,dy\Bigg]+$$
$$+\int\limits_L\left[\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}+\nu\frac{\partial z_2}{\partial y}-\varrho_1\right)\xi_1+\left((1-\nu)\frac{\partial z_1}{\partial y}-\lambda-\varrho_2^*\right)\xi_2\right]dy-$$
$$-\int\limits_L\left[\left(\nu\frac{\partial z_1}{\partial x}+\frac{\partial z_2}{\partial y}-\varrho_2\right)\xi_2+\left((1-\nu)\frac{\partial z_2}{\partial x}+\lambda-\varrho_1\right)\xi_1\right]dx,$$

gdzie $\dfrac{\partial^2 Z_i}{\partial x_j\,\partial x_k}$, $\dfrac{\partial\lambda}{\partial x_k}$ występujące w równości (5.41) są dystrybucjami określonymi za pomocą tożsamości

$$(5.42)\qquad \underset{\xi_j\in B_\xi^{\rightarrow}}{\forall}\left(\iint\limits_D\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\frac{\partial\xi_j}{\partial x_m}dx_1\,dx_2=\pm\int\limits_L\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\xi_j\,dx_p-\left\langle\frac{\partial^2 z_i}{\partial x_k\,\partial x_m},\xi_j\right\rangle\right),\qquad p\neq m,$$

$$(5.43)\qquad \underset{\xi_j\in B_\xi^{\rightarrow}}{\forall}\left(\iint\limits_D\lambda\frac{\partial\xi_j}{\partial x_m}dx_1\,dx_2=\pm\int\limits_L\lambda\xi_j\,dx_p-\left\langle\frac{\partial\lambda}{\partial x_m},\xi_j\right\rangle\right),\qquad p\neq m,$$

$i, j, k, m, p = 1, 2$; znak + odpowiada $p = 2$.

Definicja równości dwu dystrybucji, zgodnie z [7], jest następująca

$$(5.44)\qquad (f=q)\Leftrightarrow\underset{\varrho\in Q}{\forall}\left(\langle f,\varrho\rangle=\langle g,\varrho\rangle\right),$$

gdzie Q jest zbiorem funkcji próbnych.

Z definicji (5.44), równości (5.41) oraz z warunku $\delta J = 0$ wynika układ (5.39), przy czym równania (5.31), (5.32) należy traktować jako równania różniczkowe dystrybucji. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia 5.4 jest też prawdziwe. Wynika to z tożsamości (5.40), (5.41).

Jeżeli wprowadzimy oznaczenia

$$(5.45)\qquad \begin{aligned}&\frac{\partial z_1}{\partial x}+\nu\frac{\partial z_2}{\partial y}=\tau_{11},\qquad (1-\nu)\frac{\partial z_2}{\partial x}+\lambda=\tau_{21},\\&(1-\nu)\frac{\partial z_1}{\partial y}-\lambda=\tau_{12},\qquad \nu\frac{\partial z_1}{\partial x}+\frac{\partial z_2}{\partial y}=\tau_{22},\end{aligned}$$

to układ równań (5.39) przyjmie następującą postać:

$$(5.46)\qquad \frac{\partial\tau_{11}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{21}}{\partial y}=\psi,$$

$$(5.47)\qquad \frac{\partial\tau_{12}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{22}}{\partial y}=0,$$

$$(5.48)\qquad \frac{\partial z_1}{\partial y}-\frac{\partial z_2}{\partial x}=0,$$

$$\sum_{i,k=1}^{2} e_k \tau_{ik} \cos(\vec{n}, x_i) = \vec{\varrho}^*, \tag{5.49}$$

$$z_1 = 0, \ (x, y) \in \Delta L_1; \quad z_2 = 0, \ (x, y) \in \Delta L_2, \tag{5.50}$$

gdzie $x_1 = x$, $x_2 = y$.

6. Dodatnia określoność funkcjonału (4.3). Warunki brzegowe zadania 2 są takie, że można przyjąć $w(P_0) = 0$, $Z_1(P_1) = Z_2(P_2) = 0$, gdzie $P_0, P_1, P_2 \in L$. To zaś oznacza, iż prawdziwy jest następujący

LEMAT 6.1. *Jeżeli w_1, w_2 spełniają warunki brzegowe zadania 2, to*

$$w_2 - w_1 \neq ax + by + c, \tag{6.1}$$

gdzie $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

D o w ó d. Załóżmy, że jest przeciwnie, tzn.

$$w_1(P_0) - w_2(P_0) = 0 = ax_0 + by_0 + c, \tag{6.2}$$

$$\left.\frac{\partial(w_1 - w_2)}{\partial x}\right|_{P_1} = 0 = a, \tag{6.3}$$

$$\left.\frac{\partial(w_1 - w_2)}{\partial y}\right|_{P_2} = 0 = b. \tag{6.4}$$

Z (6.2), (6.3), (6.4) wynika, że a, b, c, są równe zeru. Oznacza to, że lemat 6.1 jest prawdziwy. Ponieważ funkcje spełniające warunki brzegowe zadania 2 nie mogą się różnić wielomianem pierwszego stopnia, więc pozwala to, zgodnie z [6], na przyjęcie następującej normy:

$$||w||^2_{W_2^{(2)}} = ||\vec{Z}||_{W_2^{(1)}} = \iint_D \sum_{i,j=1}^{2} \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j}\right)^2 dx_1 dx_2. \tag{6.5}$$

Prawdziwa jest również następująca nierówność:

$$\forall_{\nu \in [0,1]} \ \forall_{a,b,c \in R} \left((a+b)^2 - 2(1-\nu)(ab - c^2) \geqslant \frac{1-\nu^2}{2}(a^2 + b^2 + 2c^2)\right). \tag{6.6}$$

Wnioskiem z (6.6) oraz (4.3) jest nierówność

$$W(\vec{Z}) \geqslant \frac{1-\nu^2}{2} \iint_D \sum_{i,j=1}^{2} \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j}\right)^2 dx_1 dx_2, \tag{6.7}$$

lub

$$W(\vec{Z}) \geqslant M||\vec{Z}||^2_{W_2^{(1)}}. \tag{6.8}$$

W ten sposób wykazaliśmy, że prawdziwe jest

TWIERDZENIE 6.1. *Funkcjonał* (4.3) *jest dodatnio określony w zbiorze funkcji spełniających warunki brzegowe zadania* 2.

7. Dwa rodzaje zadania 2. W zadaniu 2 można wyróżnić dwa przypadki:

(a) liczba 0 nie jest wartością własną operatora zadania 2,

(b) liczba 0 jest wartością własną operatora zadania 2.

Operatorem zadania 2 będziemy nazywać operator A równania (5.39).

Z przypadkiem (b) mamy do czynienia wtedy, gdy funkcja $w(x, y)$ zadana jest co najwyżej na zbiorze punktów należących do odcinka prostego. Zerowej wartości własnej odpowiadają następujące funkcje własne: 1, x, y.

Możliwe są również wszystkie kombinacje funkcji własnych:

(1) Jeżeli zadana jest pochodna normalna funkcji $w(x, y)$ na zbiorze różnym od odcinka prostego, to funkcją własną jest tylko 1;

(2) Jeżeli zadana jest funkcja $w(x, y)$ na odcinku prostym, np. $x = 0$ ($y = 0$), to funkcją własną jest funkcja $w(x, y) = x$ ($w = y$);

(3) Jeżeli zadana jest wartość $w(P_0)$, to funkcjami własnymi są funkcje $w = x$, $w = y$;

(4) Jeżeli zadana jest pochodna $\dfrac{\partial w(P_0)}{\partial y}$, to funkcjami własnymi są funkcje $w = 1$, $w = x$;

(5) Jeżeli zadana jest pochodna $\dfrac{\partial w(P_0)}{\partial x}$, to funkcjami własnymi są funkcje $w = 1$, $w = y$;

(6) Jeżeli zadana jest funkcja w na zbiorze różnym od odcinka prostego, to wtedy wartości własnej 0 odpowiada tylko funkcja tożsamościowo równa zeru.

Przypadek (b) będziemy nazywać zadaniem drugiego rodzaju, przypadek (a) — zadaniem pierwszego rodzaju.

W przypadku zadania drugiego rodzaju zadanie 2 może mieć wiele lub brak rozwiązań. Należy więc podać warunki istnienia rozwiązań oraz warunki jednoznaczności zadania 2.

Warunkiem rozwiązalności równania

$$A_1 w = F, \tag{7.1}$$

w przypadku zerowej wartości własnej operatora A_1, jest ortogonalność danej funkcji F (w naszym przypadku — f, p, m) do funkcji własnych operatora A_1, odpowiadających zerowej wartości własnej.

W przypadku zadania 2 warunki rozwiązalności będą miały postać:

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy + \int_L p(x, y)\,dL = 0 \tag{7.2}$$

(ortogonalność danych do funkcji $w = 1$),

$$\iint_D xf(x, y)\,dx\,dy + \int_L xp(x, y)\,dL - \int_L m(x, y)\,dy = 0 \tag{7.3}$$

(ortogonalność danych do funkcji $w = x$),

$$\iint_D yf(x, y)\,dx\,dy + \int_L yp(x, y)\,dL + \int_L m(x, y)\,dx = 0 \tag{7.4}$$

(ortogonalność danych do funkcji $w = y$).

Jeżeli $f(x, y)$, $p(x, y)$ byłyby gęstościami sił oraz $m(x, y)$ — gęstością momentu, to warunki rozwiązalności (7.2)–(7.3) są tylko równaniami równowagi statycznej płyty. W przypadku zadania 2, funkcje

$$f(x, y) = q(x, y) - \gamma \Delta T, \tag{7.5}$$

$$p(x, y) = g(x, y) + \gamma \frac{\partial T}{\partial n}, \tag{7.6}$$

$$m(x, y) = M(x, y) + \gamma T, \tag{7.7}$$

gdzie $q(x, y)$, $g(x, y)$, $M(x, y)$, spełniają równania (7.2)–(7.3) jako równania równowagi statycznej płyty. Drugie składniki w (7.5)–(7.7) są składnikami termicznymi, tzn.

$$T = \frac{T_2 - T_1}{H}, \tag{7.8}$$

gdzie H jest grubością płyty, T_1, T_2 — temperaturami obydwu płaszczyzn płyty. Aby sprawdzić czy funkcje f, p, m, spełniają warunki rozwiązalności (7.2)–(7.3), należy udowodnić, że $-\Delta T$, $\frac{\partial T}{\partial n}$, T spełniają warunki (7.2)–(7.3).

Z twierdzenia Greena wynikają następujące równości:

$$\int_L \frac{\partial T}{\partial n} dL = \iint_D \Delta T dx dy, \tag{7.9}$$

$$\int_L x \frac{\partial T}{\partial n} dL = \iint_D x \Delta T dx dy + \int_L T dy, \tag{7.10}$$

$$\int_L y \frac{\partial T}{\partial n} dL = \iint_D y \Delta T dx dy - \int_L T dx. \tag{7.11}$$

Wstawiając (7.9)–(7.11) do (7.2)–(7.3) stwierdzamy, że $-\Delta T$, $\frac{\partial T}{\partial n}$, T spełniają warunki (7.2)–(7.3). Oznacza to, że funkcje f, p, m, czynią zadość warunkom rozwiązalności (7.2)–(7.3).

Jeżeli spełnione są warunki (7.2)–(7.3), to zadanie 2 może mieć wiele rozwiązań różniących się pomiędzy sobą o liniową kombinację funkcji własnych. Jednoznaczność rozwiązania zadania drugiego rodzaju można uzyskać przyjmując dodatkowe warunki, tzw. warunki jednoznaczności: np. ortogonalność rozwiązania do funkcji własnych, to jest

$$\iint_D w dx dy = 0, \tag{7.12}$$

$$\iint_D x w dx dy = 0, \tag{7.13}$$

$$\iint_D y w dx dy = 0, \tag{7.14}$$

lub przyjęcie następujących wartości:

$$w(P_0) = 0, \tag{7.15}$$

$$\frac{\partial w(P_1)}{\partial x} = 0, \tag{7.16}$$

$$\frac{\partial w(P_2)}{\partial y} = 0. \tag{7.17}$$

Punkty P_0, P_1, P_2 mogą być identyczne, poza tym warunków jednoznaczności ma być tyle i takie, jakie funkcje własne w danym zadaniu odpowiadają zerowej wartości własnej.

Przy czym równościom (7.15)–(7.17) odpowiadają kolejno funkcje własne 1, x, y.

8. Istnienie rozwiązania zadania 2. Niech zbiór $\bar{D}_h$ będzie zbiorem punktów prostokątnego obszaru $\bar{D}$ o wymiarach a, b. Elementy $\bar{D}_h$ są wierzchołkami prostokątnych obszarów o bokach $h = (h_1, h_2) = (a/N_1, b/N_2)$, gdzie N_1, N_2 są liczbami naturalnymi.

Zbiór punktów $P \in \bar{D}_h$, $P \notin L$, oznaczać będziemy symbolem D_h, zaś $\bar{D}_h \setminus D_h = L_h$ — brzeg zbioru $\bar{D}_h$.

Dla ustalonych N_1, N_2 funkcjonały (4.3), (4.4) dla $\lambda \in N_2^{(0)}(h)$, $\vec{Z} \in N_2^{(1)}(h)$ będą funkcjami kwadratowymi, natomiast (4.5) — funkcją liniową wielu zmiennych. Argumentami tych funkcji są wartości λ w poszczególnych trójkątnych obszarach obszaru D i wartości $\vec{Z}$ w punktach zbioru $\vec{D}_h$.

Jeżeli następnie oznaczymy

$$J_{\substack{\vec{Z} \in N_2^{(1)}(h) \\ \lambda \in N_2^{(0)}(h)}} = G(\vec{Z}^*, \vec{\lambda}), \tag{8.1}$$

gdzie

$$\vec{Z}^* = \{\vec{Z}_{ij}\}, \quad \begin{matrix} i = 0(1)N_1 \\ j = 0(1)N_2 \end{matrix}; \quad \vec{\lambda} = \begin{cases} \{\vec{\lambda}_{ij}\}, & \begin{matrix} i = 1(1)N_1, \\ j = 1(1)N_2, \end{matrix} \\ \{\lambda_{ij}\}, & \begin{matrix} i = 0(1)N_1 - 1, \\ j = (0)1N_2 - 1, \end{matrix} \end{cases} \tag{8.2}$$

to warunek konieczny istnienia minimum funkcjonału (4.2) w $N_2^{(1)}(h)$, $N_2^{(0)}(h)$ ma postać

$$\operatorname{grad} G(\vec{Z}^*, \vec{\lambda}) = 0. \tag{8.3}$$

Warunek (6.8) zapewnia rozwiązalność i jednoznaczność układu (8.3) w przypadku zadania pierwszego rodzaju, natomiast w przypadku zadania drugiego rodzaju układ (8.3) ma jedno rozwiązanie, jeżeli spełnione są jeszcze dodatkowo warunki (7.2)–(7.3) oraz (7.12)–(7.14) lub (7.15)–(7.17).

Należy również zauważyć, że różniczka zupełna funkcji G jest równocześnie wariacją funkcjonału (4.2) w zbiorach $N_2^{(1)}(h)$, $N_2^{(0)}(h)$.

W związku z tym $\vec{Z}(h)$ określone za pomocą równania (8.3) spełnia równanie (5.25), tzn.

$$\forall_{h>0}\left(2W(\vec{Z}(h))+l(\vec{Z}(h)) = 0\right). \tag{8.4}$$

Ponieważ będziemy korzystać z twierdzenia o zanurzaniu, więc podajemy je zgodnie z [6].

TWIERDZENIE 8.1. *Jeżeli $\varrho \in W_p^{(l)}$ oraz $n < pl$, to $\varrho \in C$ i*

$$\|\varrho\|_C \leqslant M\|\varrho\|_{W_p^{(l)}}, \tag{8.5}$$

gdzie M — stała (niezależna od ϱ), n — wymiar dziedziny funkcji ϱ.

TWIERDZENIE 8.2. *Jeżeli $\varrho \in W_p^{(l)}$ oraz $n \geqslant pl$, to $\varrho \in L_{q*}$ na każdej s-wymiarowej hiperpłaszczyźnie zawartej w dziedzinie funkcji ϱ, gdzie $s > n-lp$ i $q^* < q = Sl/(n-lp)$, poza tym*

$$\|\varrho\|_{L_{q*}} \leqslant M\|\varrho\|_{W_p^{(l)}}. \tag{8.6}$$

Z twierdzeń 8.1, 8.2 wynikają następujące wnioski:

WNIOSEK 8.1.

$$\forall_{\varepsilon>0}\left(\left|\iint_D fw\,dx\,dy\right| \leqslant M_1\left(\frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_{L_2}^2+\varepsilon\|w\|_{W_2^{(2)}}^2\right)\right). \tag{8.7}$$

D o w ó d. Z twierdzenia 8.1 wynika, że $W_2^{(2)} \subset C$ dla $n = 2$. Ponieważ $C \subset L_2$, więc prawdziwa jest nierówność

$$ab\|w\|_C \geqslant \|w\|_{L_2}. \tag{8.8}$$

Prawdziwa jest również nierówność iloczynu skalarnego

$$\left|\iint_D fw\,dx\,dy\right| \leqslant \|f\|_{L_2}\|w\|_{L_2} \tag{8.9}$$

oraz

$$\forall_{a,b\in R}\ \forall_{\varepsilon>0}\left(|ab| \leqslant \frac{1}{4\varepsilon}a^2+\varepsilon b^2\right). \tag{8.10}$$

Wstawiając (8.8) i (8.10) do (8.9) otrzymamy (8.7).

WNIOSEK 8.2.

$$\forall_{\varepsilon>0}\left(\left|\int_L \varrho Z_i\,dL\right| \leqslant M\left(\frac{1}{4\varepsilon}\|\varrho\|_{L_2}'^2+\varepsilon\|Z_i\|_{W_2^{(1)}}^2\right),\ i = 1,2\right), \tag{8.11}$$

gdzie $\|\cdot\|_{L_2}'$ oznacza normę funkcji, której dziedziną jest brzeg L.

D o w ó d. Ponieważ L jest brzegiem prostokąta D, więc prawdziwe jest twierdzenie 8.2, tzn. nierówność (8.6). Prawdziwa jest również nierówność iloczynu skalarnego

$$\left|\int_L \varrho Z_i\,dL\right| \leqslant \|\varrho\|_{L_2}'\|Z_i\|_{L_2}'. \tag{8.12}$$

Wstawiając (8.6) i (8.10) do (8.12) otrzymamy (8.11). Z równania (8.4) oraz (5.25) i nierówności (8.7), (8.11) wynika następujące

TWIERDZENIE 8.3.

$$\forall_{h>0} \left(\|\vec{Z}(h)\|_{W_2^{(1)}} \leqslant M^*(\|f\|_{L_2}^2 + \|\vec{\varrho}\|_{L_2}'^2)\right), \tag{8.13}$$

$$\|\vec{Z}\|_{W_2^{(1)}} \leqslant M^*(\|f\|_{L_2}^2 + \|\vec{\varrho}\|_{L_2}'^2),$$

gdzie $\vec{Z} \in W_2^{(1)}$ *i spełnia warunek* (5.16), $\vec{Z}(h) \in N_2^{(1)}(h)$ *i spełnia warunek* (8.3).

D o w ó d. Z nierówności (8.7), (8.11) wynikają następujące oszacowania

$$|l(\vec{Z})| \leqslant M_2\left(\frac{1}{4\varepsilon}(\|f\|_{L_2}^2 + \|\vec{\varrho}\|_{L_2}'^2) + 2\varepsilon\|\vec{Z}\|_{W_2^{(1)}}^2\right), \tag{8.14}$$

$$|l(\vec{Z}(h)| \leqslant M_2\left(\frac{1}{4\varepsilon}(\|f\|_{L_2}^2 + \|\vec{\varrho}\|_{L_2}'^2) + 2\varepsilon\|\vec{Z}(h)\|_{W_2^{(1)}}\right).$$

Następnie, wstawiając (6.8) oraz (8.14) do (5.25) i (8.4), otrzymamy (8.13).

Z powyższego twierdzenia wynika, że skoro istnieje rozwiązanie $\vec{Z}$ zadania 2, to rozwiązanie to należy do $W_2^{(1)}$.

Ponieważ układ (8.3) jest układem oznaczonym, więc istnieje możliwość konstruowania ciągu $\{\vec{Z}_n\}$ minimalizującego funkcjonał (4.2) w B_1.

W związku z tym należy udowodnić następujące

TWIERDZENIE 8.4. *Ciąg*

$$\{\vec{Z}_n\} = \left\{\vec{Z}\left(\frac{h}{2^n}\right)\right\} \tag{8.15}$$

dla każdego $h > 0$, *jest ciągiem zbieżnym w przestrzeni* $W_2^{(1)}$.

D o w ó d. Zgodnie z przyjętym podziałem $h/2^n$, prawdą jest, że

$$N_2^{(1)}\left(\frac{h}{2^n}\right) \subset N_2^{(1)}\left(\frac{h}{2^{n+1}}\right). \tag{8.16}$$

Z (8.16) wynika, iż

$$\forall_n \forall_{h>0} \left(J(\vec{Z}_n, \lambda_n) \geqslant J(\vec{Z}_{n+1}, \lambda_{n+1})\right). \tag{8.17}$$

Oznacza to, że ciąg

$$\{J_n\} = \{J(\vec{Z}_n, \lambda_n)\} \tag{8.18}$$

jest ciągiem malejącym. Z twierdzenia 8.3 wynika, iż całka kwadratu każdej pochodnej ciągu $\{\vec{Z}_n\}$ jest ograniczona. Ponieważ (zgodnie z równaniem (5.27))

$$\forall_n \forall_{h>0} \left(J_n = -W(\vec{Z}_n)\right), \tag{8.19}$$

więc ciąg $\{J_n\}$ jest ciągiem ograniczonym, a tym samym zbieżnym. Jeżeli za $\vec{Z}_1 + \vec{Z}_2$ do (5.4) wstawimy $\vec{Z}_k - \vec{Z}_m$, to otrzymamy

$$W(\vec{Z}_k - \vec{Z}_m) = W(\vec{Z}_k) + W(\vec{Z}_m) - W(\vec{Z}_k, \vec{Z}_m). \tag{8.20}$$

Następnie, jeżeli $k < m$, to $\vec{Z}_k \in N_2^{(1)}(h/2^m)$. Wtedy, po wstawieniu do (5.23) $\vec{Z}_m$ za $\vec{Z}$ oraz $\vec{Z}_k$ za $\vec{\xi}$, otrzymamy równanie

$$W(\vec{Z}_m, \vec{Z}_k) + l(\vec{Z}_k) = 0. \tag{8.21}$$

Jeżeli zaś $\vec{Z}_k$ wstawimy do (5.25) za $\vec{Z}$, to

$$2W(\vec{Z}_k) + l(\vec{Z}_k) = 0. \tag{8.22}$$

Po wstawieniu (8.21) i (8.22) do (8.20), otrzymamy

$$W(\vec{Z}_k - \vec{Z}_m) = W(\vec{Z}_m) - W(\vec{Z}_k). \tag{8.23}$$

Ponieważ ciąg $\{J_n\}$ jest ciągiem malejącym, więc (zgodnie z (8.19)) ciąg $W(\vec{Z}_n)$ jest ciągiem rosnącym, zbieżnym, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} W(\vec{Z}_n) = W_0. \tag{8.24}$$

Jeżeli wstawimy (6.8) i (8.24) do (8.23), to otrzymamy

$$\forall_{h>0} \forall_{\varepsilon>0} \exists_N \left[(k, m > N) \Rightarrow \left(\|\vec{Z}_k - \vec{Z}_m\|_{W_2^{(1)}} \leqslant (2\varepsilon/M) = \varepsilon_1\right)\right]. \tag{8.25}$$

Ponieważ przestrzeń $W_2^{(1)}$ jest zupełna, więc z (8.25) wynika, że $\{\vec{Z}_n\}$ jest ciągiem zbieżnym w $W_2^{(1)}$.

Ciągłość funkcjonału (4.2) w punkcie $(\vec{Z}, \lambda)$ wynika z lematu:

LEMAT 8.1.

$$|W(\vec{Z}_1, \vec{Z}_2)| \leqslant M\|\vec{Z}_1\|_{W_2^{(1)}} \|\vec{Z}_2\|_{W_2^{(1)}}. \tag{8.26}$$

D o w ó d. Z określenia iloczynu skalarnego w L_2 mamy

$$\left|\iint_D \frac{\partial z_1}{\partial x_i} \frac{\partial z_2}{\partial x_j} dx_1 dx_2\right| \leqslant \left\|\frac{\partial z_1}{\partial x_i}\right\|_{L_2} \left\|\frac{\partial z_2}{\partial x_j}\right\|_{L_2}, \qquad i, j = 1, 2. \tag{8.27}$$

Z definicji norm w L_2 i $W_2^{(1)}$ wynika nierówność

$$\left\|\frac{\partial z_k}{\partial x_i}\right\|_{L_2} \leqslant \left\|\vec{Z}\right\|_{W_2^{(1)}}, \qquad i, k = 1, 2. \tag{8.28}$$

Ponieważ $W(\vec{Z}_1, \vec{Z}_2)$ jest sumą całek występujących po lewej stronie nierówności (8.27), więc, korzystając z (8.27) i (8.28), otrzymamy (8.26).

Z lematu 8.1 wynika następujące

TWIERDZENIE 8.4.

$$\lim_{n\to\infty} J_n = J(\vec{Z}, \lambda). \tag{8.29}$$

D o w ó d. Po wstawieniu (5.27), (8.19) do (5.7) oraz skorzystaniu z (8.26) otrzymamy

$$|J_n - J(\vec{Z}, \lambda)| \leqslant M\|\vec{Z}_n - \vec{Z}\|_{W_2^{(1)}} \|\vec{Z}_n + \vec{Z}\|_{W_2^{(1)}} \underset{n\to\infty}{\to} 0, \tag{8.30}$$

czyli (8.29).

9. Rząd zbieżności ciągu $\{\vec{Z}_n\}$. W § 8 wykazano zbieżność ciągu $\{\vec{Z}_n\}$ do $\vec{Z} \in W_2^{(1)}$. Nie wiadomo tylko, jak „szybko" wyrazy ciągu $\{Z_n\}$ zbliżają się do granicy. Miarą tej szybkości jest rząd zbieżności ciągu. Ponieważ ze zbieżności ciągu $\{\vec{Z}_n\}$ wynika, że granica $\vec{Z} \in W_2^{(1)}$, więc informacja $\vec{Z} \in W_2^{(1)}$ nie może determinować rzędu zbieżności ciągu $\{\vec{Z}_n\}$. Należy założyć coś więcej o rozwiązaniu, by można było określać rząd zbieżności. Przypuśćmy więc, że $\vec{Z} \in C^2$. Jeżeli $\vec{Z} \in C^2$, to ile wynosi rząd zbieżności ciągu $\{Z_n\}$?

Aby znaleźć odpowiedź na postawione pytanie, należy badać różnice $\{\vec{Z}-\vec{Z}_n\}$. $\vec{Z}, \vec{Z}_n$, jako funkcje minimalizujące funkcjonał (4.2), spełniają następujące tożsamości

$$\underset{\vec{\xi} \in B_{\vec{\xi}}}{\forall} \left(W(\vec{Z}, \vec{\xi})+V_1(\lambda; \vec{\xi})+l(\vec{\xi}) = 0\right),$$

$$\underset{\vec{\xi} \in N_{2\vec{\xi}}^{(1)}(h/2^n)}{\forall} \left(W(\vec{Z}_n, \vec{\xi})+V_1(\lambda_n; \vec{\xi})+l(\vec{\xi}) = 0\right). \tag{9.1}$$

Ponieważ $N_{2\vec{\xi}}^{(1)} \subset B_{\vec{\xi}}$, więc odejmując tożsamości (9.1) dla $\vec{\xi} \in N_{2\vec{\xi}}^{(1)}$ otrzymamy

$$\underset{\vec{\xi} \in N_{2\vec{\xi}}^{(1)}}{\forall} \left(W(\vec{Z}-\vec{Z}_n, \vec{\xi})+V_1(\lambda-\lambda_n; \vec{\xi}) = 0\right). \tag{9.2}$$

Jeżeli przez $\hat{\vec{Z}}_n$ oznaczymy funkcję należącą do $N_2^{(1)}(h/2^n)$ i taką, że $\hat{\vec{Z}}_n = \vec{Z}$ w punktach zbioru $\bar{D}_h$, następnie przez $\overline{\Delta Z}$ funkcję określoną równością

$$\vec{Z} = \hat{\vec{Z}}_n+\overline{\Delta Z}, \tag{9.3}$$

to, wprowadzając powyższe oznaczenia do (9.2), otrzymamy

$$\underset{\vec{\xi} \in N_{2\vec{\xi}}^{(1)}}{\forall} \left(W(\hat{\vec{Z}}_n-\vec{Z}_n, \vec{\xi})+W(\overline{\Delta Z}, \vec{\xi})+V_1(\lambda-\lambda_n; \vec{\xi}) = 0\right). \tag{9.4}$$

Ponieważ $\hat{\vec{Z}}_n-Z_n \in N_{2\vec{\xi}}^{(1)}$, więc za ξ w (9.4) można podstawić $\hat{\vec{Z}}_n-\vec{Z}_n$. Postępując w ten sposób otrzymamy równanie

$$2W(\hat{\vec{Z}}_n-\vec{Z}_n)+W(\overline{\Delta Z}, \hat{\vec{Z}}_n-\vec{Z}_n)+V_1(\lambda-\lambda_n; \hat{\vec{Z}}_n) = 0. \tag{9.5}$$

Aksjomatem normy jest nierówność

$$||\vec{Z}-\vec{Z}_n||_{W_2^{(1)}} \leqslant ||\overline{\Delta Z}||_{W_2^{(1)}}+||\hat{\vec{Z}}_n-\vec{Z}_n||_{W_2^{(1)}}. \tag{9.6}$$

Aby podać oszacowanie $||\vec{Z}-\vec{Z}_n||$ należy (zgodnie z (9.6)) oszacować $||\overline{\Delta Z}||_{W_2^{(1)}}$ i $||\vec{Z}_n-\vec{Z}_n||_{W_2^{(1)}}$. Ponieważ $\overline{\Delta Z} = 0$ w punktach $\vec{D}_h$, a w poszczególnych trójkątach obszaru D jest funkcją wektorową klasy C^2, więc dla każdego trójkąta, np. o wierzchołkach $(0,0)$, $(h_1, 0)$, $(0, h_2)$, istnieją punkty $(C_1, 0)$, $(0, C_2)$ $(C_1 \in (0, h_1)$, $C_2 \in (0, h_2))$, w których

$$\frac{\partial \overline{\Delta Z}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \overline{\Delta Z}}{\partial y} = 0. \tag{9.7}$$

Z (9.7) oraz z tego, że $\frac{\partial \overrightarrow{\Delta Z}}{\partial x}, \frac{\partial \overrightarrow{\Delta Z}}{\partial y} \in C^1$ wynika równość

$$\|\overrightarrow{\Delta Z}\|_{W_2^{(1)}} = O(|h|). \tag{9.8}$$

Po wstawieniu $\overrightarrow{\Delta Z}$, $\hat{\vec{Z}}_n - \vec{Z}_n$ za $\vec{Z}_1, \vec{Z}_2$ do (8.26) otrzymamy

$$|W(\overrightarrow{\Delta Z}, \hat{\vec{Z}}_n - \vec{Z}_n)| \leqslant M \|\overrightarrow{\Delta Z}\|_{W_2^{(1)}} \|\hat{\vec{Z}}_n - \vec{Z}_n\|_{W_2^{(1)}}. \tag{9.9}$$

Jeżeli następnie skorzystamy z nierówności (8.10), to z (9.9) otrzymamy

$$\forall_{\varepsilon>0} \; |W(\overrightarrow{\Delta Z}, \hat{\vec{Z}}_n - \vec{Z})| \leqslant M \left(\frac{1}{4\varepsilon} \|\overrightarrow{\Delta Z}\|^2_{W_2^{(1)}} + \varepsilon \|\hat{\vec{Z}}_n - \vec{Z}_n\|_{W_2^{(1)}} \right). \tag{9.10}$$

Ze zbieżności $\{\vec{Z}_n\}$ wynika zbieżność $\{\lambda_n\}$, z równań (5.31), (5.32) wynika, że $\lambda \in C^1$, a więc

$$\Delta \lambda_n = \lambda - \lambda_n \underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{9.11}$$

Ponieważ $\hat{\vec{Z}}_n$ jest aproksymacją liniową funkcji $\vec{Z}$, więc prawdziwa jest równość

$$\left| \frac{\partial \hat{z}_{1n}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{z}_{2n}}{\partial x} \right| = O(|h|). \tag{9.12}$$

Z (9.11) i (9.12) wynika równość

$$|V_1(\Delta \lambda_n; \hat{\vec{Z}}_n)| = O(|h|). \tag{9.13}$$

Wstawiając (9.10), (6.8) oraz (9.13) do (9.5) otrzymamy

$$\|\hat{\vec{Z}}_n - \vec{Z}_n\|_{W_2^{(1)}} = O(|h|^{1/2}). \tag{9.14}$$

Jeżeli następnie (9.14) i (9.8) wstawimy do (9.4), to otrzymamy następującą informację o zbieżności $\{\Delta \lambda_n\}$

$$|\Delta \lambda_n| = O(|h|^{1/2}). \tag{9.15}$$

Wstawiając (9.15) oraz (9.12) do (9.13) otrzymamy

$$|V_1(\Delta \lambda_n; \hat{\vec{Z}}_n)| = O(|h|^{3/2}). \tag{9.16}$$

Z (9.16) wynika, że równość (9.14) jest postaci

$$\|\hat{\vec{Z}}_n - \vec{Z}_n\|_{W_2^{(1)}} = O(|h|^{3/4}). \tag{9.17}$$

Postępując tak dalej otrzymamy indukcyjny dowód lematu:

LEMAT 9.1.

$$(\vec{Z} \in C^2) \Rightarrow (|\Delta \lambda_n| = O(|h|)) \wedge (\|\hat{\vec{Z}}_n - \vec{Z}_n\|_{W_2^{(1)}} = O(|h|)). \tag{9.18}$$

Wstawiając następnie (9.8) oraz (9.18) do (9.6) otrzymamy następujące

TWIERDZENIE 9.1.

$$(\vec{Z} \in C^2) \Rightarrow (\|\vec{Z}-\vec{Z}_n\|_{W_2^{(1)}} = O(|h|)) \tag{9.19}$$

10. Ciągłość rozwiązania zadania 2 względem funkcji danych. Aby rozwiązać układ równań (8.3), należy najpierw wyznaczyć wyrazy wolne tego układu; są one określone następującymi wzorami:

$$\iint_{\Delta_{ij}} (x-x_{ij})\psi\, dx\, dy; \quad \iint_{\Delta_{ij}} (y-y_{ij})\psi\, dx\, dy; \quad \iint_{\Delta_{ij}} \psi\, dx\, dy; \tag{10.1}$$

$$\int_{\Delta L_{ij}} (x-x_{ij})\varrho_k dL; \quad \int_{\Delta L_{ij}} (y-y_{ij})\varrho_k dL; \quad \int_{\Delta L_{ij}} \varrho_k dL; \quad k = 1, 2,$$

gdzie Δ_{ij}, $\bar{\Delta}_{ij}$ są trójkątami danego podziału obszaru D, i, j są to wskaźniki punktów zbioru $\bar{D}_h$ i $\bar{\Delta}_{ij}+\Delta_{i-1,j-1}$ jest prostokątem o wierzchołkach (x_{i-1}, y_{j-1}), (x_i, y_j), ΔL_{ij}, $\Delta\bar{L}_{ij}$ są to odcinki brzegu L, których końce należą do L_h.

Z wzorów (10.1) wynika, że wyrazy wolne układu (8.3) — ogólnie rzecz biorąc — mogą być wyznaczone w sposób przybliżony obraną metodą wyznaczania całek. W związku z tym powstaje pytanie: jaki wpływ może mieć przybliżone wyznaczenie wyrażeń danych układu (8.3) na różnicę $\vec{Z}-\vec{Z}_n$?

Na to pytanie daje odpowiedź

TWIERDZENIE 10.1.

$$\|\vec{Z}_2-\vec{Z}_1\|_{W_2^{(1)}} \leqslant M(\|\Delta f\|_{L_2}^2+\|\Delta\vec{\varrho}\|_{L_2}'^2), \tag{10.2}$$

gdzie $\Delta f = f_2-f_1$, $\Delta\vec{\varrho} = \vec{\varrho}_2-\vec{\varrho}_1$, $\vec{Z}_i$ — *rozwiązanie zadania* 2 *odpowiadające funkcjonałowi* $l_i(\vec{Z})$ *postaci* (4.5), *określonemu za pomocą* $f_i(x, y)$ *i* $\vec{\varrho}(x, y)$, $i = 1, 2$.

D o w ó d. Rozwiązania $\vec{Z}_1$, $\vec{Z}_2$ odpowiadające funkcjonałom l_1, l_2 zgodnie z (5.23) spełniają następujące tożsamości

$$\forall_{\vec{\xi} \in B_{\vec{\xi}}} \left(W(\vec{Z}_1, \vec{\xi})+V_1(\lambda_1; \vec{\xi})+l_1(\vec{\xi}) = 0\right), \tag{10.3}$$

$$\forall_{\vec{\xi} \in B_{\vec{\xi}}} \left(W(\vec{Z}_2, \vec{\xi})+V_1(\lambda_2; \vec{\xi})+l_2(\vec{\xi}) = 0\right). \tag{10.4}$$

Odejmując (10.3) od (10.4) otrzymamy

$$\forall_{\vec{\xi} \in B_{\vec{\xi}}} \left(W(\vec{Z}_2-\vec{Z}_1, \vec{\xi})+V_1(\Delta\lambda; \vec{\xi})+\Delta l(\vec{\xi}) = 0\right). \tag{10.5}$$

Po wstawieniu $\vec{Z}_2-\vec{Z}_1$ za $\vec{\xi}$ w (10.5) powstanie

$$2W(\vec{Z}_2-\vec{Z}_1)+\Delta l(\vec{Z}_2-\vec{Z}_1) = 0. \tag{10.6}$$

Nierówność (8.13) odpowiadająca równaniu (10.6) jest dowodzonym twierdzeniem.

Wnioskiem z twierdzenia 10.1 jest następująca równość:

$$(\|\vec{Z}_1-\vec{Z}_2\|_{W_2^{(1)}} = O(|h|)) \Rightarrow (\|\vec{Z}_{2n}-\vec{Z}_1\|_{W_2^{(1)}} = O(|h|)). \tag{10.7}$$

D o w ó d.

$$\|\vec{Z}_{2n}-\vec{Z}_1\|_{W_2^{(1)}} \leqslant \|\vec{Z}_{2n}-\vec{Z}_2\|_{W_2^{(1)}}+\|\vec{Z}_2-\vec{Z}_1\|_{W_2^{(1)}} = O(|h|).$$

Z twierdzenia 10.1 wynika następująca uwaga dla rozwiązującego układ (8.3): całki (10.1) występujące w układzie (8.3) wystarczy obliczać z dokładnością takiego rzędu jakiego rzędu przybliżeniem jest rozwiązanie $\{\vec{Z}_n\}$ określone układem (8.3).

Z powyższych rozważań wynikają następujące wnioski:

(a) Zadanie 2 jest zadaniem z teorii aproksymacji, w tym sensie, że tworząc w podany sposób ciąg $\{\vec{Z}_n\}'$ możemy określić jego rząd zbieżności, jeżeli znamy oszacowanie $\|\Delta\vec{Z}\|_{W_2^{(1)}}$, a to właśnie należy do teorii aproksymacji.

(b) Jeżeli rozwiązanie zadania 2 ma wysoką gładkość, to chcąc otrzymać możliwie wysoki rząd zbieżności ciągu $\{\vec{Z}_n\}$, wystarczy zmienić zbiory $N_2^{(1)}$, $N_2^{(0)}$ na zbiory funkcji wielomianowych odpowiedniego stopnia w poszczególnych trójkątach podziału obszaru D.

11. Dodatek

1. Postać wyraźna układu (8.3):

$$
\begin{aligned}
&\tau^+_{11\bar{x}}+\tau^-_{11x}+\tau^+_{21\bar{y}}+\tau^-_{21y} = \psi^-_{ij}+\psi_{ij}, \\
&\tau^+_{11\bar{x}}+\tau^-_{12x}+\tau^+_{22\bar{y}}+\tau^-_{22y} = 0, \qquad (x_i, y_j) \in D_h; \\
&z_{1y}-z_{2x} = 0, \\
&z_{1\bar{y}}=z_{2\bar{x}} = 0, \qquad (x_i, y_j) \in \overline{D}_h.
\end{aligned} \tag{11.1}
$$

Przypuśćmy, że brzeg $y = 0$ jest brzegiem swobodnym płyty. Wtedy równania odpowiadające punktom tego brzegu są następujące:

$$
\left.\begin{aligned}
&\tau^+_{11\bar{x}}+\frac{1}{h_2}(\tau^+_{21}+\tau^-_{21}) = \psi_{i,0}+\psi^-_{i,1}+\varrho_{1i,0} \\
&\tau^+_{12\bar{x}}+\frac{1}{h_2}(\tau^+_{22}+\tau^-_{22}) = \varrho_{2i,0}
\end{aligned}\right\} \quad i = 1(1)N_1-1, j = 0 \tag{11.2}
$$

$$
\frac{1}{h_1}\tau^+_{11}+\frac{1}{h_2}\tau^-_{21} = \psi_{N_1-1,0}+\psi^-_{N_1,1}+\varrho_{1N_1-1,0}-\varrho^-_{1N_1,1}, \qquad i = N_1, j = 0.
$$

Niech brzeg $x = a$ będzie brzegiem podparcia płyty (tzn. $Z_2 = 0$), wtedy drugi warunek ma postać

$$
\frac{1}{h_1}(\tau^+_{11}+\tau^-_{11})+\tau^-_{21y} = \psi_{N_1-1,j}+\psi_{N_1,j}+\varrho_{1N_1,j}-\varrho^-_{1N_1,j+1}. \tag{11.3}
$$

Na brzegach $y = b$, $x = 0$ płyta niech będzie utwierdzona, a to oznacza, że

$$
(z_1, z_2) = (0, 0). \tag{11.4}
$$

Gdy warunki brzegowe zadania zostaną zmienione, wówczas zmieniony zostanie też układ równań odpowiadających punktom brzegu L_h.

2. Oznaczenia.

$$\psi_{ij} = \frac{2}{h_1 h_2}\left[\iint\limits_{\Delta_{ij}} \psi\, dx\, dy - \frac{1}{h_1}\left(\iint\limits_{\Delta_{ij}} (x-x_{ij})\psi\, dx\, dy - \iint\limits_{\Delta_{i-1,j}} (x-x_{i-1,j})\psi\, dx\, dy\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{h_2}\left(\iint\limits_{\Delta_{ij}} (y-y_{ij})\psi\, dx\, dy - \iint\limits_{\Delta_{i,j-1}} (y-y_{i,j-1})\psi\, dx\, dy\right)\right],$$

$$\psi_{\bar{i}j} = \frac{2}{h_1 h_2}\left[\iint\limits_{\Delta_{ij}} \psi\, dx\, dy + \frac{1}{h_1}\left(\iint\limits_{\Delta_{ij}} (x-x_{ij})\psi\, dx\, dy - \iint\limits_{\Delta_{i+1,j}} (x-x_{i+1,j})\psi\, dx\, dy\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{h_2}\left(\iint\limits_{\Delta_{ij}} (y-y_{ij})\psi\, dx\, dy - \iint\limits_{\Delta_{i,j+1}} (y-y_{i,j+1})\psi\, dx\, dy\right)\right]; \tag{11.5}$$

$$\vec{\varphi}^*_{i0} = \frac{2}{h_1 h_2}\left[\iint\limits_{\Delta L_{i0}} \vec{\varrho}^* dL - \frac{1}{h_1}\left(\int\limits_{\Delta L_{i0}} (x-x_{i0})\vec{\varrho}^* dL - \int\limits_{\Delta L_{i-1,0}} (x-x_{i-1,0})\vec{\varrho}^* dL\right)\right],$$

$$\vec{\varphi}^*_{iN_1} = \frac{2}{h_1 h_2}\left[\int\limits_{\Delta L_{iN_2}} \vec{\varrho}^* dL - \frac{1}{h_1}\left(\int\limits_{\Delta L_{i+1,N_2}} (x-x_{i+1,N_2})\vec{\varrho}^* dL - \int\limits_{\Delta L_{iN_2}} (x-x_{iN_2})\vec{\varrho}^* dL\right)\right],$$

$$\vec{\varrho}^*_{0j} = \frac{2}{h_1 h_2}\left[\int\limits_{\Delta L_{0j}} \vec{\varrho}^* dL - \frac{1}{h_2}\left(\int\limits_{\Delta L_{0j}} (y-y_{0j})\vec{\varrho}^* dL - \int\limits_{\Delta L_{0,j-1}} (y-y_{0,j-1})\vec{\varrho}^* dL\right)\right],$$

$$\vec{\varrho}^*_{N_1 j} = \frac{2}{h_1 h_2}\left[\int\limits_{\Delta L_{N_1 j}} \vec{\varrho}^* dL + \frac{1}{h_2}\left(\int\limits_{\Delta L_{N_1 j}} (y-y_{N_1 j})\vec{\varrho}^* dL - \int\limits_{\Delta L_{N_1,j+1}} (y-y_{N_2,j+1})\vec{\varrho}^* dL\right)\right].$$

Jeżeli w powyższych wzorach nie istnieje element o danych wskaźnikach, to należy przyjąć, że jest on równy zeru. Zgodnie z [1]

$$\begin{gathered} \tau^+_{11} = z_{1x} + \nu z_{2y}, \quad \tau^-_{11} = z_{1\bar{x}} + \nu z_{2\bar{y}}, \quad \tau^+_{21} = (1-\nu) z_{2x} + \lambda, \\ \tau^-_{21} = (1-\nu) z_{2\bar{x}} + \lambda^-, \quad \tau^+_{22} = \nu z_{1x} + z_{2y}, \quad \tau^-_{22} = \nu z_{1\bar{x}} + z_{2\bar{y}}, \\ \tau^+_{12} = (1-\nu) z_{1y} - \lambda, \quad \tau^-_{12} = (1-\nu) z_{1\bar{y}} - \lambda^-. \end{gathered} \tag{11.6}$$

Literatura

[1] И. Г. Белухина, *Разностные схемы для решения некоторых статических задач теории упругости*, Ж. Выч. Мат. и Мат. Физ. 4 (8) (1968), str. 808–823.

[2] S. Borkowski, *Przegląd prac dotyczących naprężeń termicznych w ciałach stałych (lata 1965–1967)*, Mech. Teoret. i Stos. 2.7 (1969), str. 107–154.

[3] — *Numeryczne rozwiązanie równań termosprężystości*, Rozpr. Inż. 1.18 (1970), str. 23–36.

[4] С. Г. Михлин, *Проблема минимума квадратичного функционала*, Москва–Ленинград 1952.

[5] Л. А. Оганесян, *Вариационно-разностные методы решения первой краевой задачи для бигармоничного уравнения*, Ж. Выч. Мат. и Мат. Физ. 1 (12) (1972), str. 1234–1244.

[6] S. L. Sobolew, *Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen* Physik, Berlin 1964.

[7] A. H. Zemanion, *Teoria dystrybucji i analiza transformat*, Warszawa 1969.