ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria III: MATEMATYKA STOSOWANA VII (1976)

ROMAN ZMYŚLONY (Wrocław)

Kwadratowo dopuszczalne estymatory w modelach losowych

(*Praca przyjęta do druku 20.12.1974*)

1. Wstęp. W niniejszej pracy rozważamy następujący model:

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{X}_i \mathbf{b}_i, \tag{1}$$

gdzie $\mathbf{X}_i$ są znanymi n-wierszowymi macierzami, a $\mathbf{b}_i$, z wyjątkiem $\mathbf{b}_1$, wektorami losowymi. Dodatkowo zakładamy, że $\mathbf{X}_1 = (1, \ldots, 1)' = \mathbf{1}$ oraz $\mathbf{X}_k = \mathbf{I}$ jest macierzą jednostkową. Dla $i = 2, \ldots, k$ wektory losowe $\mathbf{b}_i$ mają wielowymiarowe rozkłady normalne $N(0, \sigma_i^2 \mathbf{V}_i)$, gdzie $\mathbf{V}_i$ są znanymi macierzami, natomiast $\sigma_i^2 \geqslant 0$ dla $i = 2, \ldots, k-1$ oraz $\sigma_k^2 > 0$. Ponadto zakładamy, że $\mathbf{V}_k = \mathbf{I}$ oraz że wektory $\mathbf{b}_i$ są niezależne, tzn. $E(\mathbf{b}_i \mathbf{b}_j') = 0$ dla $i \neq j$. Dla wygody rzeczywisty parametr $\mathbf{b}_1$ zastępujemy przez σ_1. Modele o wyżej opisanej strukturze noszą nazwę *modeli losowych*, a parametry $\sigma_2^2, \ldots, \sigma_k^2$ nazywają się *komponentami wariancyjnymi*.

Dla estymacji komponentów wariancyjnych powszechnie stosowana jest I *metoda Hendersona* [3], zwana inaczej *metodą analizy wariancji*. Otrzymane estymatory są nieobciążone i są formami kwadratowymi wektora $\mathbf{y}$. Przy założeniu, że macierze $\mathbf{V}_i$ są macierzami jednostkowymi, Graybill i Hultquist [1] podali warunki dostateczne na to, aby estymatory otrzymane za pomocą tej metody miały minimalną wariancję w klasie wszystkich estymatorów nieobciążonych.

W pracy [4] podana jest inna metoda, która prowadzi do otrzymania estymatorów nieobciążonych dla komponentów wariancyjnych czy też dowolnych liniowych funkcji parametrów $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_k^2$. Estymatorami dla σ_i^2, $i = 1, \ldots, k$, są funkcje $\hat{\sigma}_i^2 = \varphi_i(\mathbf{y})$, które minimalizują normę macierzy $\mathbf{y}\mathbf{y}' - E(\mathbf{y}\mathbf{y}')$, gdzie norma w przestrzeni $\mathscr{A}$ macierzy symetrycznych $n \times n$ jest indukowana przez iloczyn skalarny $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$ określony jako ślad iloczynu macierzy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$. Estymatorem funkcji postaci $h = \sum_{i=1}^{k} c_i \sigma_i^2$ jest

$$\hat{h} = \sum_{i=1}^{k} c_i \hat{\sigma}_i^2$$

zwany *estymatorem otrzymanym metodą najmniejszych kwadratów* lub krótko *estymatorem* NK. W przypadku, gdy przestrzeń $\mathscr{A}_1$ generowana przez macierze $\mathbf{A}_1 =$

$= \mathbf{1}\mathbf{1}'$, $\mathbf{A}_2 = \mathbf{X}_2\mathbf{V}_2\mathbf{X}_2'$, ..., $\mathbf{A}_k = \mathbf{X}_k\mathbf{V}_k\mathbf{X}_k'$ ma wymiar k, to estymatory NK są estymatorami nieobciążonymi dla dowolnej liniowej funkcji parametrów $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_k^2$. Jeśli ponadto $\mathscr{A}_1$ jest podprzestrzenią kwadratową przestrzeni $\mathscr{A}$, to znaczy, jeśli $\mathbf{A} \in \mathscr{A}_1$ implikuje $\mathbf{A}^2 \in \mathscr{A}_1$, to estymatory NK mają minimalną wariancję w klasie kwadratowych i nieobciążonych estymatorów.

W niniejszej pracy rozważamy takie modele losowe, dla których $\mathscr{A}_1$ nie jest podprzestrzenią kwadratową przestrzeni $\mathscr{A}$. Przykładem takiego modelu jest model losowy dla jednokierunkowej klasyfikacji z niejednakową liczbą obserwacji w podklasach. Dla tego modelu Harville [2] podał ogólną postać każdego kwadratowo dopuszczalnego estymatora. W niniejszej pracy rozszerzony zostanie wynik Harville'a na dowolne modele losowe. Ponadto udowodnimy, że estymatory NK są kwadratowo dopuszczalne.

2. Estymatory kwadratowe dopuszczalne. W niniejszej pracy będziemy zakładali, że podprzestrzeń $\mathscr{A}_1$ przestrzeni $\mathscr{A}$ nie jest podprzestrzenią kwadratową. W tym przypadku estymatory otrzymane metodą najmniejszych kwadratów nie mają minimalnej wariancji w klasie estymatorów kwadratowych i nieobciążonych (patrz [4], twierdzenie 2). Za kryterium optymalności estymatora przyjmiemy pochodzącą od Harville'a następującą definicję estymatora kwadratowo dopuszczalnego. Niech Ω oznacza podzbiór R^k zdefiniowany w następujący sposób:

$$\Omega = \{\sigma\colon \sigma = (\sigma_1^2, \ldots, \sigma_k^2)',\ \sigma_i^2 \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, k-1,\ \sigma_k^2 > 0\}.$$

DEFINICJA. Funkcję $\mathbf{y}'\mathbf{D}\mathbf{y}$, gdzie $\mathbf{D} \in \mathscr{A}$, nazywamy *kwadratowo dopuszczalnym estymatorem wartości oczekiwanej* $E(\mathbf{y}'\mathbf{D}\mathbf{y})$, jeśli nie istnieje macierz $\mathbf{G} \in \mathscr{A}$ taka, że

$$E\mathbf{y}'\mathbf{G}\mathbf{y} = E\mathbf{y}'\mathbf{D}\mathbf{y} \quad \text{dla każdego } \sigma \in \Omega, \tag{2}$$

oraz

$$\operatorname{Var}(\mathbf{y}'\mathbf{G}\mathbf{y}) \leqslant \operatorname{Var}(\mathbf{y}'\mathbf{D}\mathbf{y}) \quad \text{dla każdego } \sigma \in \Omega \tag{3}$$

z silną nierównością dla co najmniej jednego $\sigma \in \Omega$.

Niech $\mathscr{A}_2 \subset \mathscr{A}$ będzie najmniejszą podprzestrzenią kwadratową zawierającą $\mathscr{A}_1$. Podprzestrzeń taka zawsze istnieje, ponieważ $\mathscr{A}$ jest niewłaściwą podprzestrzenią kwadratową i iloczyn mnogościowy podprzestrzeni kwadratowych jest podprzestrzenią kwadratową.

Poniższe twierdzenie podaje warunek konieczny na to, by estymator był kwadratowo dopuszczalny.

TWIERDZENIE 1. *Jeśli estymator* $\mathbf{y}'\mathbf{D}\mathbf{y}$ *jest kwadratowo dopuszczalny, to* $\mathbf{D} \in \mathscr{A}_2$.

D o w ó d. Załóżmy, że $\mathscr{A}_2$ jest właściwą podprzestrzenią kwadratową przestrzeni $\mathscr{A}$. Wystarczy pokazać, że jeśli $D \notin \mathscr{A}_2$, to istnieje macierz $\mathbf{G}$ spełniająca warunki (2) i (3). Niech $\mathbf{D} = \mathbf{G}+\mathbf{G}_1$, gdzie $\mathbf{G} \in \mathscr{A}_2$, a $\mathbf{G}_1 \perp \mathbf{G}$, tzn. $\langle \mathbf{G}, \mathbf{G}_1\rangle = 0$. Ponieważ $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}_2$, przeto $\mathbf{G}_1 \in \mathscr{A}_1^{\perp}$, czyli jest elementem przestrzeni ortogonalnej do $\mathscr{A}_1$. Stąd, na mocy lematu 2 z pracy [4], otrzymujemy, że $E(\mathbf{y}'\mathbf{G}\mathbf{y}) = E(\mathbf{y}'\mathbf{D}\mathbf{y})$. Aby wykazać (3), wykażemy najpierw, że $\operatorname{Cov}(\mathbf{y}'\mathbf{G}\mathbf{y}, \mathbf{y}'\mathbf{G}_1\mathbf{y}) = 0$ dla każdego $\sigma \in \Omega$.

Z uwagi na to, że wektor $\mathbf{y}$ ma rozkład normalny z macierzą kowariancji $\mathbf{W}\sigma = \sum_{i=2}^{k} \sigma_i^2 A_i$, prawdziwy jest wzór

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{y}'\mathbf{G}\mathbf{y}, \mathbf{y}'\mathbf{G}_1\mathbf{y}) = 2\langle \mathbf{W}\sigma\mathbf{G}\mathbf{W}\sigma + \sigma_1^2(\mathbf{A}_1\mathbf{G}\mathbf{W}\sigma + \mathbf{W}\sigma\mathbf{G}\mathbf{A}_1), \mathbf{G}_1\rangle.$$

Ponieważ $\mathbf{W}\sigma$, $\mathbf{G}$ i $\mathbf{A}_1$ są elementami podprzestrzeni kwadratowej $\mathscr{A}_2$, więc na mocy lematu 4 z pracy [4] otrzymujemy, że $\mathbf{W}\sigma\mathbf{G}\mathbf{W}\sigma + \sigma_1^2(\mathbf{A}_1\mathbf{G}\mathbf{W}\sigma + \mathbf{W}\sigma\mathbf{G}\mathbf{A}_1)$ również należy do $\mathscr{A}_2$, co wraz z warunkiem $\mathbf{G}_1 \in \mathscr{A}_2^{\perp}$ implikuje, że $\mathrm{Cov}(\mathbf{y}'\mathbf{G}\mathbf{y}, \mathbf{y}'\mathbf{G}_1\mathbf{y}) = 0$. Zatem

$$\mathrm{Var}(\mathbf{y}'\mathbf{D}\mathbf{y}) = \mathrm{Var}(\mathbf{y}'\mathbf{G}\mathbf{y}) + \mathrm{Var}(\mathbf{y}'\mathbf{G}_1\mathbf{y}).$$

Ponieważ $\mathbf{G}_1 \neq \mathbf{0}$ i ponieważ rozkład wektora $\mathbf{y}$ jest nieosobliwy w każdym punkcie $\sigma \in \Omega$, więc stąd wynika, że $\mathrm{Var}(\mathbf{y}'\mathbf{G}\mathbf{y}) < \mathrm{Var}(\mathbf{y}'\mathbf{D}\mathbf{y})$ dla każdego $\sigma \in \Omega$.

W przypadku, gdy $\mathscr{A}_2 = \mathscr{A}$, teza twierdzenia jest w sposób oczywisty spełniona.

Z powyższego twierdzenia wynika natychmiast

WNIOSEK. *Niech* $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_r$ *będzie bazą przestrzeni* $\mathscr{A}_2$. *Wtedy każdy kwadratowo dopuszczalny estymator można przedstawić w postaci*

$$\sum_{i=1}^{r} \mathbf{b}_i \mathbf{y}'\mathbf{B}_i\mathbf{y},$$

gdzie $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_r)'$ *jest pewnym wektorem z* $\boldsymbol{R}^r$.

PRZYKŁAD. Pokażemy teraz, jak z twierdzenia powyższego można otrzymać rezultat Harville'a.

Rozważmy model losowy dla jednokierunkowej klasyfikacji

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}, \quad i = 1, \ldots, a, \; j = 1, \ldots, n_i. \tag{4}$$

Tutaj μ jest parametrem stałym, natomiast α_i, e_{ij}, $i = 1, \ldots, a$, $j = 1, \ldots, n_i$ niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych. Ponadto zakładamy, że $\alpha_i \sim N(0, \sigma_\alpha^2)$, $e_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2)$, przy czym $\sigma_\alpha^2 \geqslant 0$, $\sigma_e^2 > 0$ oraz $a \geqslant 2$ i $n_1 + \ldots + n_a > a$.

Rozważać będziemy tylko ten przypadek, kiedy nie wszystkie n_i są jednakowe. Oznaczmy przez $\eta_1, \ldots, \eta_{a^*}$ liczby, które powtarzają się co najmniej dwa razy w ciągu $n_1, \ldots, n_a$, a przez $\eta_{a^*+1}, \ldots, \eta_{a'}$ liczby, które w tym ciągu występują dokładnie jeden raz. Niech $S_i = \{j\colon n_j = \eta_i\}$ dla $i = 1, \ldots, a'$ oraz niech ζ_i oznacza liczbę elementów zbioru S_i. Oczywiście, $\zeta_i > 1$ dla $i = 1, \ldots, a^*$ oraz $\zeta_i = 1$ dla $i = a^*+1, \ldots, a'$.

Harville [2] udowodnił, że przy powyższych założeniach każdy kwadratowo dopuszczalny estymator można przedstawić w postaci

$$c\sum_{i,j} y_{ij}^2 + \sum_{u=1}^{a^*} b_u \sum_{i \in S_u} \bar{y}_{i.}^2 + \sum_{u=1}^{a'} \sum_{r \geqslant u} e_{ur}\bar{y}_u^* \bar{y}_r^*, \tag{5}$$

gdzie

$$\bar{y}_{i.} = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}, \quad y_i^* = \frac{1}{\zeta_i}\sum_{j\in S_i} \bar{y}_{j.},$$

podczas gdy c, b_u, e_{ur} są pewnymi liczbami rzeczywistymi.

Przedstawimy teraz dowód tego faktu, korzystając z udowodnionych poprzednio twierdzenia i wniosku. W tym celu wprowadzimy wektor $\mathbf{y}$ określony w następujący sposób. Niech $y_i = (y_{i1}, \ldots, y_{in_i})$, $i = 1, \ldots, a$, oraz niech $z_k = (y_{i_1}, \ldots \ldots, y_{i_{\zeta_k}})$, $k = 1, \ldots, a'$, gdzie $i_j \in S_k$ dla $j = 1, \ldots, \zeta_k$. Kolejność elementów w ciągu $(y_{i_1}, \ldots, y_{i_{\zeta_k}})$ może być dowolna. W końcu, niech

$$\mathbf{y} = (z_1, \ldots, z_{a^*}, z_{a^*+1}, \ldots, z_{a'})'. \tag{6}$$

Zauważmy, że wektor $\mathbf{y}$ zawiera wszystkie y_{ij}, $i = 1, \ldots, a$, $j = 1, \ldots, n_i$, oraz że każdy y_{ij} występuje w wektorze $\mathbf{y}$ dokładnie jeden raz.

Niech $N_i = \eta_i\zeta_i$ oraz niech $\mathbf{J}_{ij}$ oznacza macierz jedynek o wymiarze $N_i \times N_j$, $i, j = 1, \ldots, a'$, natomiast $\mathbf{J}_i$ macierz jedynek o wymiarze $\eta_i \times \eta_i$ dla $i = 1, \ldots, a^*$. Następnie niech $D_i = \mathrm{diag}_{\zeta_i}(J_i, \ldots, J_i)$, dla $i = 1, \ldots, a^*$, gdzie symbol $\mathrm{diag}_p(B_1, \ldots \ldots, B_p)$ oznacza macierz

$$\begin{bmatrix} B_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & B_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & B_p \end{bmatrix}.$$

Łatwo zauważyć, że przestrzeń $\mathscr{A}_1$ dla modelu (4), przy kolejności y_{ij} określonej przez (6), jest generowana przez macierze

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{1}\mathbf{1}',$$
$$\mathbf{A}_2 = \mathrm{diag}_{a'}(D_1, \ldots, D_{a^*}, J_{a^*+1, a^*+1}, \ldots, J_{a'a'}),$$
$$\mathbf{A}_3 = I.$$

Jeżeli nie wszystkie n_i są jednakowe, to $\mathscr{A}_1$ nie jest podprzestrzenią kwadratową przestrzeni $\mathscr{A}$, gdyż $A_1^2 \notin \mathscr{A}_1$.

Znajdziemy teraz bazę dla najmniejszej podprzestrzeni kwadratowej $\mathscr{A}_2$ zawierającej podprzestrzeń $\mathscr{A}_1$. Rozbijmy w tym celu macierz $\mathbf{1}\mathbf{1}'$ na a'^2 podmacierzy

$$\begin{bmatrix} J_{11} & \ldots & J_{1a'} \\ J_{21} & \ldots & J_{2a'} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ J_{a'1} & \ldots & J_{a'a'} \end{bmatrix}.$$

Niech $\mathbf{C}_{ij}$, dla $i \geqslant j$, będzie macierzą kwadratową $n \times n$ otrzymaną z macierzy $\mathbf{1}\mathbf{1}'$ przez zastąpienie wszystkich podmacierzy $\mathbf{J}_{kl}$ macierzami zerowymi z wyjątkiem $\mathbf{J}_{ij}$ oraz $\mathbf{J}_{ji}$. Następnie, niech $\mathbf{C}_i$ dla $i = 1, \ldots, a^*$ oznacza macierz otrzymaną z $\mathbf{A}_2$ przez zastąpienie wszystkich podmacierzy $\mathbf{J}_{ii}$ oraz $\mathbf{D}_k$, z wyjątkiem $\mathbf{D}_i$, macierzami zerowymi. Macierze $\mathbf{C}_{ij}$, $\mathbf{C}_i$ oraz $\mathbf{I}$ są liniowo niezależne, gdyż żadna z nich nie da się przedstawić jako liniowa kombinacja pozostałych. Ponadto, korzystając z własności podprzestrzeni kwadratowych, łatwo można udowodnić, że przestrzeń generowana przez te macierze jest kwadratową podprzestrzenią przestrzeni $\mathscr{A}$ i zawiera $\mathscr{A}_1$. Aby udowodnić, że przestrzeń ta pokrywa się z przestrzenią $\mathscr{A}_2$, wystarczy sprawdzić, że $\mathbf{C}_{ij}$ oraz σ_i należą do $\mathscr{A}_2$. Wykażemy najpierw, że $\mathbf{C}_{ii} \in \mathscr{A}_2$ dla $i = a^*+1, \ldots, a'$ oraz że $\mathbf{C}_i \in \mathscr{A}_2$ dla $i = 1, \ldots, a^*$. Ponieważ $\mathbf{A}_2 \in \mathscr{A}_2$, przeto dla $i = 1, \ldots, a'$ macierze $\mathbf{B}_i = \eta_i \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_2^2$ należą do $\mathscr{A}_2$. Ponadto można łatwo udowodnić, że macierze $\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_j$ dla $i, j = 1, \ldots, a'$ komutują, a stąd i na mocy lematu 4 z pracy [4] dowolny skończony iloczyn tych macierzy należy do $\mathscr{A}_2$. Co więcej, $i \neq j$ implikuje, że $\eta_i \neq \eta_j$, a w takim razie macierze

$$\mathbf{G}_i = \Big(\prod_{j\neq i} \mathbf{B}_j\Big)\Big(\eta_i^{a'-1} \prod_{j\neq i} (\eta_i - \eta_j)\Big)^{-1}, \qquad i = 1, \ldots, a',$$

są dobrze określone i należą do $\mathscr{A}_2$.

Nietrudno zauważyć, że

$$\mathbf{G}_i = \begin{cases} \mathbf{C}_i & \text{dla} \quad i = 1, \ldots, a^*, \\ \mathbf{C}_{ii} & \text{dla} \quad i = a^*+1, \ldots, a'. \end{cases}$$

Udowodnimy teraz, że $\mathbf{C}_{ii} \in \mathscr{A}_2$ dla $i = 1, \ldots, a^*$ oraz że $\mathbf{C}_{ij} \in \mathscr{A}_2$ dla $i > j$, $j = 1, \ldots, a'$.

Istotnie, ponieważ $\mathbf{A}_1 \in \mathscr{A}_2$ oraz dla $i = 1, \ldots, a^*$

$$\mathbf{C}_{ii} = \frac{1}{\eta_i^2} \mathbf{C}_i \mathbf{A}_1 \mathbf{C}_i,$$

przeto na mocy wyżej cytowanego lematu macierze te należą do $\mathscr{A}_2$. Podobnie łatwo można sprawdzić, że dla $i > j$, $i, j = 1, \ldots, a'$,

$$\mathbf{C}_{ij} = \frac{1}{2\mathbf{N}_i \mathbf{N}_j} (\mathbf{C}_{ii} \mathbf{A}_1 \mathbf{C}_{jj} + \mathbf{C}_{jj} \mathbf{A}_1 \mathbf{C}_{ii}),$$

więc macierze te również należą do $\mathscr{A}_2$.

Z wniosku otrzymujemy, że każdy kwadratowo dopuszczalny estymator da się przedstawić w postaci

$$c\mathbf{y}'\mathbf{I}\mathbf{y} + \sum_{u=1}^{a^*} b_u' \mathbf{y}'\mathbf{C}_u \mathbf{y} + \sum_{u=1}^{a'} \sum_{r \geqslant u} e_{ru} \mathbf{y}'\mathbf{C}_{ru} \mathbf{y}, \tag{7}$$

gdzie c, b_u, e_{ru} są ustalonymi liczbami rzeczywistymi.

Teraz z (7) otrzymujemy wynik Harville'a z uwagi na oczywiste równości

$$\mathbf{y}'\mathbf{I}\mathbf{y} = \sum_{i,j} \mathbf{y}_{ij}^2, \qquad \mathbf{y}'\mathbf{C}_u\mathbf{y} = \eta_u^2 \sum_{i \in S_u} \bar{y}_{i.}^2,$$

$$\mathbf{y}'\mathbf{C}_{uu}\mathbf{y} = \mathbf{N}_u^2 (\bar{\mathbf{y}}_i^*)^2, \qquad \mathbf{y}'\mathbf{C}_{ur}\mathbf{y} = 2\mathbf{N}_u \mathbf{N}_r \bar{\mathbf{y}}_u^* \mathbf{y}_r^*$$

dla $u > r$.

Udowodnimy, że estymatory NK są kwadratowo dopuszczalne.

TWIERDZENIE 2. *Każdy estymator* NK *jest kwadratowo dopuszczalny.*

D o w ó d. Niech $\mathbf{y}'\mathbf{F}\mathbf{y}$ będzie estymatorem NK dla swojej wartości oczekiwanej $E(\mathbf{y}'\mathbf{F}\mathbf{y})$. Z lematu 2 z pracy [4] wynika, że każdy inny nieobciążony estymator funkcji $E(\mathbf{y}'\mathbf{F}\mathbf{y})$ jest postaci $\mathbf{y}'(\mathbf{F}+\mathbf{G})\mathbf{y}$, gdzie $\mathbf{G} \in \mathscr{A}_1^{\perp}$. Stąd dla $\sigma = (0, \ldots, 0, 1)'$ otrzymujemy $\mathrm{Var}(\mathbf{y}'(\mathbf{F}+\mathbf{G})\mathbf{y}) = 2\langle \mathbf{F}, \mathbf{F}\rangle + 4\langle \mathbf{F}, \mathbf{G}\rangle + 2\langle \mathbf{G}, \mathbf{G}\rangle = 2\langle \mathbf{F}, \mathbf{F}\rangle + 2\langle \mathbf{G}, \mathbf{G}\rangle = \mathrm{Var}(\mathbf{y}'\mathbf{F}\mathbf{y}) + \mathrm{Var}(\mathbf{y}'\mathbf{G}\mathbf{y}) > \mathrm{Var}(\mathbf{y}'\mathbf{F}\mathbf{y})$, co oznacza, że $\mathbf{y}'\mathbf{F}\mathbf{y}$ jest estymatorem kwadratowo dopuszczalnym.

Prace cytowane

[1] F. A. G r a y b i l l and R. A. H u l t q u i s t, *Theorem concerning Eisenhart's Model II* Ann. Math. Statist. 32 (1961), str. 261–269.

[2] H a r v i l l e, *Quadratic unbiased estimation of variance components for the one-way classification*, Biometrika 56 (1969), str. 313–326.

[3] C. R. H e n d e r s o n, *Estimation of variance components*, Biometrics 9 (1951), str. 226–252

[4] R. Z m y ś l o n y, *Estimation of variance components in random models*, Applicationes Mathematicae 13.4 (1973), str. 521–527.