ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria III: MATEMATYKA STOSOWANA VI (1976)

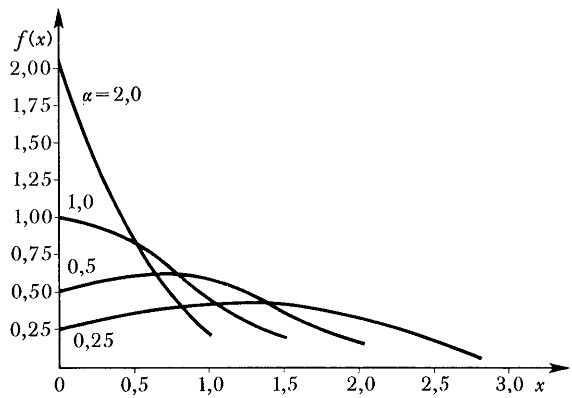
Andrzej Dobrogowski (Poznań)

O pewnej własności podwójnego rozkładu wykładniczego

Lloyd i Lipov [1] podają podwójny rozkład wykładniczy, którego funkcja gęstości jest określona wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0, \\ \alpha\beta e^{\beta x} e^{-\alpha(e^{\beta x}-1)} & \text{dla} \quad x \geqslant 0, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $\alpha > 0$ i β są parametrami rozkładu.



Rys. 1. Podwójny rozkład wykładniczy dla $\beta = 1$ (według [1])

Na rysunku 1 przedstawiono zależność (1) dla kilku wartości parametru α i dla $\beta = 1$. Parametr β w rozważanym rozkładzie odgrywa rolę parametru skali.

Postawmy hipotezę, że rozkład o postaci (1) jest rozkładem badanej zmiennej losowej X. Sąd ten poddajemy weryfikacji statystycznej w oparciu o dane w próbie o liczebności N, pogrupowane w k przedziałach.

Dla oszacowania parametrów rozkładu posłużymy się metodą największej wiarygodności. Funkcja wiarygodności podwójnego rozkładu wykładniczego dla rozważanej próby ma postać:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_k, \alpha, \beta) = \alpha^N \beta^N e^{\beta \sum_{i=1}^{k} n_i x_i} e^{-\alpha\left(\sum_{i=1}^{k} n_i e^{\beta x_i} - N\right)}, \tag{2}$$

gdzie $i = 1, 2, \ldots, k$, n_i — liczebność i-tego przedziału, przy czym $\sum_{i=1}^{k} n_i = N$, x_i — współrzędna środka i-tego przedziału.

Dalej

$$\ln L = N\ln\alpha + N\ln\beta + \beta\sum_{i=1}^{k} n_i x_i - \alpha\Big(\sum_{i=1}^{k} n_i e^{\beta x_i} - N\Big). \tag{3}$$

Różniczkując $\ln L$ względem α i β uzyskujemy:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{N}{\alpha} - \sum_{i=1}^{k} n_i e^{\beta x_i} + N, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \frac{N}{\beta} + \sum_{i=1}^{k} n_i x_i - \alpha \sum_{i=1}^{k} n_i x_i e^{\beta x_i}. \tag{5}$$

Przyrównując (4) i (5) do zera otrzymujemy równania wiarygodności, które mogą być przekształcone do postaci:

$$\hat{\alpha} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{k} n_i e^{\hat{\beta} x_i} - N}, \tag{6}$$

$$\hat{\beta} = \frac{N\Big(\sum_{i=1}^{k} n_i e^{\hat{\beta} x_i} - N\Big)}{N\sum_{i=1}^{k} n_i x_i e^{\hat{\beta} x_i} - \Big(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{k} n_i e^{\hat{\beta} x_i} - N\Big)}, \tag{7}$$

gdzie $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$ są estymatorami parametrów α i β rozkładu.

Z uwagi na (6) i warunek $\alpha > 0$ wynika $\beta \geqslant 0$.

Zauważmy, że $\hat{\beta} = 0$ stanowi rozwiązanie równania (7). Pomnóżmy stronami równania (6) i (7):

$$\hat{\alpha}\hat{\beta} = \frac{N^2}{N\sum_{i=1}^{k} n_i x_i e^{\hat{\beta} x_i} - \Big(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{k} n_i e^{\hat{\beta} x_i} - N\Big)}.$$

Stąd wynika, że

$$\lim_{\hat{\beta} \to 0_+} \hat{\alpha}\hat{\beta} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}. \tag{8}$$

Przyjmijmy zatem, że parametry rozkładu (1) spełniają następujący związek:

$$\alpha = \alpha(\beta),$$

przy czym zachodzi warunek:

(9) jeżeli $\beta \to 0_+$, to $\alpha \to +\infty$ oraz $\lim_{\beta \to 0_+} \alpha\beta = \gamma$, gdzie $\gamma > 0$.

Określmy dla $x \geqslant 0$ funkcję $p(x)$ wzorem:

$$p(x) = \lim_{\beta \to 0_+} f(x), \tag{10}$$

zatem

$$p(x) = \lim_{\beta \to 0_+} \alpha\beta e^{\beta x} e^{-\alpha(e^{\beta x}-1)}.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{\beta \to 0_+} \alpha(e^{\beta x}-1) = \lim_{\beta \to 0_+} \alpha\beta \frac{e^{\beta x}-1}{\beta} = \lim_{\beta \to 0_+} \alpha\beta \lim_{\beta \to 0_+} \frac{e^{\beta x}-1}{\beta} =$$

$$= \gamma \lim_{\beta \to 0_+} \frac{e^{\beta x}-1}{\beta} \underset{\mathrm{H}}{=} \gamma \lim_{\beta \to 0_+} \frac{xe^{\beta x}}{1} = \gamma x.$$

Litera H pod znakiem równości oznacza zastosowanie reguły de l'Hôspitala.

Stąd

$$\lim_{\beta \to 0_+} \alpha\beta e^{\beta x} e^{-\alpha(e^{\beta x}-1)} = \gamma e^{-\gamma x}.$$

Tak więc

$$p(x) = \gamma e^{-\gamma x} \quad \text{dla} \quad x \geqslant 0. \tag{11}$$

Otrzymana funkcja jest funkcją gęstości rozkładu wykładniczego.

Lloyd i Lipov [1] podają za B. Epsteinem przykład procesu związanego z korozją, w którego opisie pojawia się podwójny rozkład wykładniczy. Przykład ten można uogólnić w następujący sposób. Załóżmy, że odległość pomiędzy punktami A i B wynosi D. Pomiędzy tymi punktami znajduje się M obiektów, przy czym M jest dużą liczbą. Odległość d_j od punktu A j-tego obiektu w chwili $x = 0$ jest zmienną losową opisaną uciętym rozkładem wykładniczym o parametrze λ. Począwszy od chwili $x = 0$ obiekty poruszają się ze stałą i równą dla wszystkich prędkością v. Czas x_j, po którym j-ty obiekt dotrze do punktu B, wynosi:

$$x_j = \frac{1}{v}(D - d_j).$$

Można dowieść, że zmienna losowa

$$X = \min_j X_j \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, \ldots, M$$

posiada podwójny rozkład wykładniczy o postaci (1).

Parametry rozkładu określone są wzorami [1]:

$$\alpha = \frac{M}{e^{\lambda D}-1}, \tag{12}$$

$$\beta = v\lambda. \tag{13}$$

Zauważmy, że opisane wyżej przejście graniczne odpowiada spełnieniu w przedstawionym procesie warunku $\lambda \to 0_+$. Ucięty rozkład wykładniczy, opisujący pierwotne położenie obiektów pomiędzy punktami A i B w chwili $x = 0$, przechodzi wtedy w rozkład równomierny. Łatwo stwierdzić na podstawie wzorów (12) i (13), że jeżeli $\lambda \to 0_+$, to $\alpha \to +\infty$ i $\beta \to 0_+$, przy czym

$$\lim_{\lambda \to 0_+} \alpha\beta = \frac{Mv}{D} = \gamma.$$

W tym przypadku zmienna losowa X posiada rozkład wykładniczy o parametrze γ.

P o d s u m o w a n i e. Wykazano, że rozkład wykładniczy jest szczególnym przypadkiem podwójnego rozkładu wykładniczego. Podano związek, jaki wtedy spełniają parametry podwójnego rozkładu wykładniczego. Pokazano, że na istnienie takiego związku wskazują równania na estymatory parametrów uzyskane w metodzie największej wiarygodności. Przedstawiono model zjawiska, którego własności statystyczne można opisać podwójnym rozkładem wykładniczym. Na tym modelu objaśniono znaczenie przejścia granicznego opisanego w pracy.

Literatura

[1] D. K. L l o y d, M. L i p o v, *Reliability: Management, Methods and Mathematics*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1962; tłum. ros.: *Надежность: организация исследования, методы, математический аппарат*, Москва 1964.