MATHEMATICA APPLICANDA
Vol. 42(2) 2014, p. 273–276
doi: 10.14708/ma.v42i2.601

Teresa Winiarska (Kraków)

Recenzja książki pt. *Markowe wykłady z matematyki* autorstwa: Marka Zakrzewskiego

"Markowe wykłady z matematyki"[1], trzystu sześćdziesięcio pięcio (365) stronicowa książka autorstwa Marka Zakrzewskiego [1] została podzielona na pięć rozdziałów (w nawiasie podane są tytuły podrozdziałów):

I. Analiza z lotu ptaka: granica, pochodna i całka (Prolog; Granica ciągu; Granica i ciągłość. Eksponenta i logarytm naturalny; Pochodna: pierwsze podejście; Całka: pierwsze podejście)

II. Pochodne i aproksymacje (Obliczanie pochodnych; Funkcje trygonometryczne i kołowe; Kilka twierdzeń o istnieniu; Monotoniczność, ekstrema i wypukłość; Aproksymacje wielomianowe; Przybliżone rozwiązywanie równań)

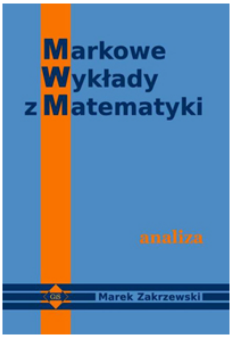
III. Całka: pole, długość i objętość (Całka oznaczona; Techniki całkowania; Całkowanie funkcji wybranych klas; Pola, długości i objętości; Metody przybliżone; Całki niewłaściwe; Objętość kuli i funkcja gamma; Wzór Stirlinga i wzór Wallisa)

IV. Szeregi (Szeregi i iloczyny; Kryteria zbieżności szeregów; Szeregi potęgowe; Operacje na szeregach i wzór Leibniza; Liczby zespolone i funkcje przestępne; Szeregi Fouriera)

V. Krótkie spojrzenie na równania różniczkowe (Równania o zmiennych rozdzielonych; Równanie rozpadu i modele wzrostu populacji; Liniowość i układy drgające; Równania różniczkowe i szeregi; Transformata Laplace'a)

[1] Marek Zakrzewski. *Markowe wykłady z matematyki*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2013, ISBN: 978-83-62780-17-4

2010 Mathematics Subject Classification[2010]: 91-01; 91A05; 91B12; 91B14; 91F10
Słowa kluczowe: granica, pochodna, całka, równanie różniczkowe, szereg liczbowy, szereg Fouriera



Treść książki obejmuje zatem podstawowe zagadnienia z dość szeroko rozumianego zakresu analizy matematycznej i zdaniem Autora „*... może służyć jako podstawowy podręcznik dla studentów uczelni technicznych, a także jako podręcznik uzupełniający dla studentów matematyki, zwłaszcza przyszłych nauczycieli tego przedmiotu*".

W moim odczuciu ta ciekawa, dobrze zredagowana książka nie może być podstawowym podręcznikiem. Poszerzę jednak opinię Autora o fakt, że jest to dobry podręcznik, ale wyłącznie uzupełniający. W powszechnie używanych podręcznikach nie znajdujemy tak fachowej prezentacji genezy powstania prezentowanych pojęć.

Dobrze przemyślany wstęp zachęca do zapoznania się z podręcznikiem. Dowiadujemy się tu, że pewne pojęcia zostały wprowadzone intuicyjnie, bez podania precyzyjnej ich definicji. Zadania rachunkowe ilustrują wprowadzone pojęcia. Dowodzone są tylko te twierdzenia, których dowody są proste i zdaniem Autora służą utrwaleniu i zrozumieniu wykładanego materiału albo odkrywają istotne, głębokie zależności. Zgodną ze stanem faktycznym jest też informacja, że: „*Analiza matematyczna w zakresie przedstawionym w tej książce powstała zasadniczo w XVII-XVIII w., tylko sam język pochodzi z wieku XIX*".

Oprócz podstawowego zakresu analizy matematycznej, w książce znajdujemy elementy równań różniczkowych, szeregów Fouriera i transformaty Laplace'a.

Brak definicji większości prezentowanych pojęć jest w sprzeczności z umieszczonym we wstępie zdaniem: „*Matematyka pozostaje wciąż najskuteczniejszą szkołą ścisłego myślenia*". O czym tu może myśleć początkujący student? Nie ma przecież pełnej możliwości weryfikacji prezentowanych faktów. Miałby szansę, gdyby Autor dodał spis literatury i umieścił w nim przynajmniej jedną pozycję w której znajdują się pełne definicje i dowody prezentowanych twierdzeń.

Tytuł Rozdziału I „*Analiza z lotu ptaka: granica, pochodna i całka*" zachęca do dowiedzenia się jak wygląda analiza matematyczna z lotu ptaka? Pierwszym widzianym z lotu ptaka ważnym obiektem jest zasada indukcji matematycznej. Mam pewne zastrzeżenia do sposobu jej prezentacji. W pierwszym zdaniu $T(n)$ jest nazwane tożsamością dotyczącą dodatnich liczb naturalnych $1, 2, 3, \ldots$. Nie bardzo wiem czy, np. dowodzoną przy pomocy zasady indukcji matematycznej nierówność Bernoulli'ego można nazwać tożsamością dotyczącą dodatnich liczb naturalnych albo własnością liczb naturalnych (zob. TWIERDZENIE 1.1, str 7). Chyba lepiej byłoby rozpocząć od, intuicyjnie jasnej, zasady minimum i z niej wywnioskować zasadę indukcji matematycznej.

W wykładzie 2 (str. 19) podane są wzory przybliżone:

$$1^k + 2^k + \cdots + n^k \approx \frac{n^{k+1}}{k+1}.$$

Szkoda, że nie dodano tu uwagi, że to przybliżenie można stosować gdy n jest „dostatecznie duże”, gdyż stosowny iloraz zmierza do jedynki. Doświadczony czytelnik domyśli się o co chodzi czytając następny paragraf. Początkujący czytelnik może się zdziwić, gdy zauważy, że biorąc $n = 1$ i np. $k = 4$ otrzyma, że $1 \approx \frac{1}{5}$.

Warto tu podkreślić, że pomimo braku pełnej precyzji, analizując prezentowane przykłady oraz komentarze Autora, początkujący matematyk może poprawić swoje intuicyjne rozumienie podstawowych zagadnień analizy matematycznej jednej zmiennej rzeczywistej. Duża liczba, dobrze dobranych przykładów może wyrobić u czytelnika poprawną intuicję matematyczną. Mam jednak wątpliwość, czy podawane przykłady „aproksymacji” wyrabiają poprawną intuicję związaną z tym pojęciem. Dla przykładu, argumentacja Autora (str. 38) prowadząca do tego, że

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \approx \frac{1}{2}$$

może doprowadzić czytelnika do wniosku, że np. dla x bliskich zera mamy aproksymację: $\sqrt{|x|} \approx 0$. Moim zdaniem, tak dalekie od precyzyjnego ujęcia, pojęcie aproksymacji może prowadzić do niepoprawnych rozumowań lub nieprawdziwych wniosków. Sam Autor uzasadniając regułę de l’Hospitala (str. 106) pisze, że „ *... jest ona zasadniczo konsekwencją aproksymowalności funkcji przez funkcję liniową*” i na szczęście dodaje: „*Powyższe rozumowanie jest jednak nieścisłe, gdyż ...*”.

Stosowane wcześniej pojęcie aproksymacji liniowej nabiera sensu dopiero na str. 124 (zob. Twierdzenie 10.1 (o aproksymacji liniowej)). Wzór Taylora daje bowiem możliwość oszacowania błędu przybliżenia, tzn. różnicy pomiędzy wartością rzeczywista a wartością przybliżoną. Tymczasem wcześniej podane przykłady prowadzą do błędnego wniosku, że chodzi tu o iloraz. Zbytnie zaufanie intuicji może prowadzić do błędnych wniosków. Przykładowo na str. 125 czytamy: „*Im wyższy stopień wielomianu (chodzi tu o wielomian Taylora), tym lepsze przybliżenie*”. Bez dodatkowych informacji o funkcji takie zdanie nie jest prawdziwe. Dobrym przykładem może być funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$$

której wszystkie pochodne znikają w punkcie 0.

Przykłady te uzasadniają opinię, że recenzowana książka nie może być podstawowym podręcznikiem, z którego można nauczyć się poprawnego rozumienia prezentowanego tu aparatu matematycznego. Polecam ją jednak wykładowcom matematyki oraz studentom jako wyłącznie podręcznik uzupełniający. Jest to interesujące opowiadanie o matematyce i niestety może stać się powodem do dalszego zmniejszania liczby godzin przeznaczonych na zajęcia z matematyki na uczelniach technicznych.

Literatura

[1] Zakrzewski, M. *Markowe wykłady z matematyki*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2013, 356 pages, ISBN: 978-83-62780-17-4).

On the book "Branded lectures in mathematics[2]" by Marek Zakrzewski

Abstract The reviewed book is divided into five chapters (in brackets are the titles of subsections):

I. The analysis of aerial: limit, derivative and integral (Prologue; the limit of sequence, the limit and the continuity; the exponent and the natural logarithm; a derivative and an antiderivative (primitive integral): the first approach)
II. Derivatives and approximations (Calculation of derivatives, trigonometric functions and their inverse; the existence theorems, monotonicity, extremes and convexity; polynomial approximations; approximate solutions of equations)
III. Integral: field area, length, and volume (Definite integral, techniques of integration, Integration of functions of selected classes, field area, length and volume; approximate methods; improper integrals, volume of a sphere and the gamma function; Stirling's formula and the formula Wallis)
IV. Series (Series and intersections; criteria for convergence of series, power series; operations ranks and pattern Leibniz Complex numbers and functions leap; Fourier series)
V A look at the differential equations (equations with separated variables, equation degradation and population growth models, linearity and vibrating systems, differential equations and series, Laplace transform)

The content of the book thus covers the basic issues of a fairly broadly defined field of mathematical analysis and in the author's opinion, „*... can serve as a basic textbook for students of technical universities, as well as a supplemental textbook for students of mathematics, especially future teachers of this subject matter*".

2010 Mathematics Subject Classification: 26-XX; 30-XX; 34-XX.

Key words and phrases: calculus, differential equations, Fourier series, Laplace transform.

Teresa Winiarska
Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyki
Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki
ul. Warszawska 24, PL-31-155 Kraków
E-mail: twiniars@pk.edu.pl

(Received: 19th July 2014)

[2] "Mark's lectures in mathematics" (*In Polish mark and Mark has different meaning.*)