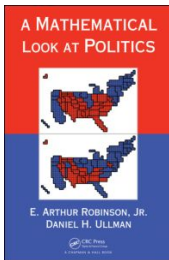


“A Mathematical Look at Politics” by E. Arthur Robinson, Jr., Daniel H. Ullman



The 460-page book “A Mathematical Look at Politics”¹ written by Arthur Robinson and Daniel Ullman [1] consists of four chapters (the descriptions of the chapters are given in parenthesis): I — Voting (the two candidate case, social choice functions, criteria for social choice, which methods are good?, Arrow’s theorem, variations on a theme), II — Apportionment (Hamilton’s Method, Divisor Methods, Criteria and Impossibility, the Method of Balinski and Young, Choosing a Divisor Method, History of Apportionment in the United States), III — Conflict (Strategies and Outcomes, Chance and Expectation, Solving Zero-Sum Games, Conflict, Nash Equilibria, the Prisoner’s Dilemma) and chapter IV — the Electoral College (Weighted Voting and Privileges). At the end of each chapter there are problems and exercises. Finally, solutions to the exercises and problems, bibliography and

index are at the end. Recommendations for instructors are also presented at the end of the preface. In the preface, one may find the declaration of the Authors that this book focuses on mathematical reasoning about politics rather than on mathematics:

- Is there a good way to choose winners of elections?
- Is there a good way to apportion congressional seats?
- Is there a good way to make decisions in situations of conflict and uncertainty?

The book offers an alternative textbook to the usual mathematics courses for liberal arts students seeking to meet a general education requirement in mathematics or quantitative reasoning. *What makes this book mathematical is not numbers or formulas, but rather reasoning. The book requires rather little background in mathematics or political science. Some experience with the American system of government is assumed.*

¹E. Arthur Robinson, Jr. and Daniel H. Ullman. A mathematical look at politics. CRC Press–Taylor and Francis Group, Boca Raton, FL, 2011. ISBN: 978-1-4398-1983-8
2010 Mathematics Subject Classification[2010]: 91-01; 91A05; 91B12; 91B14; 91F10
Keywords and phrases: voting procedures, social choice function, divisor methods, game, conflict, Nash equilibrium, weighting voting, privileges

Each chapter begins with a scenario, which is appropriate for group study and discussion and meant to connect what readers already know with what is presented in the chapter. Chapter I: Voting (the process used to decide on a winner after all the votes have been cast). The authors start from the case of two candidates, introducing a social choice function of the voting method. This idea of voting is consequently in use throughout the book.

In a two-candidate election A, B, the simple majority method is such a social choice function with co-domain set “A wins”, “B wins”, “It is a tie”, which selects the candidate who gets more than half of all the votes cast as the winner. If both candidates get the same number of votes, then the result is a tie. Next, supermajority and weighted voting methods are introduced. At the end, the Authors present criteria helpful in identifying one method of choice for two candidate elections (anonymity, neutrality, decisiveness and monotonicity) and May’s possibility theorem.

Social Choice Functions are aggregations of each voter’s preference ballot (profile) into the set of winners. The Authors consider the following methods: plurality, anti-plurality, the Borda count, Hare method, nomination, Coombs method, Copeland method, Black method. It is a pity that no classification of the previously mentioned methods is done in the book. However, an investigation of the criteria defining a good method of choice are presented in Chapter IV and Arrow’s impossibility theorem in

Chapter V.

Chapter II is about apportionment. The Authors start with the definition of an apportionment method as a function whose domain is the set of all possible values of states (constituencies or stakeholders), total number of seats (the number of identical elements to be shared) and populations of the states and the output is a sequence of nonnegative integers describing the number of seats in each state. Starting with Hamilton’s method (the quota method) based on the concept of divisors, the Authors again consider the criteria of apportionment. Then the Jefferson method (called the d’Hondt method in Europe) is presented as an example of a divisor method leading to methods of: Adams, Webster (in Europe called the Sainte-Lague method), Hill, Dean, Lowndes, and generally to the problem of rounding functions (up, harmonic, geometric, arithmetic, down). Once again, the impossibility theorem of Balinski and Young is introduced. All these considerations are deeply rooted in the reality of the USA with special attention paid to Balinski and Young’s method of apportionment.

Chapter III is devoted to modeling conflict. In general, the elements of zero-sum game theory are presented. The Authors present some famous games: the Battle of the Sexes, the Chicken game, the Prisoner’s Dilemma and they analyze the concept of equilibrium (especially Nash Equilibrium). Chapter III is relatively much more advanced in mathematical notation and may present some

difficulties to readers to whom the book is addressed. One clear omission is the lack of attention paid to cooperative game theory. Of course, cooperation is in opposition to conflict, but development of this chapter by adding such a point of view to the problems presented would give the reader a much more general picture (the book by Straffin [4] is a recommended text).

Chapter IV is devoted to the electoral college. The basic method of voting presented here is weighted voting, which therefore leads to coalitional analysis. The Authors present the concept of a power index, using two of them (the Shapley–Shubik and Banzhaf indices) to illustrate chosen cases of defining power in weighted voting games. This part of the book is probably the weakest, without any deep reasoning as to why we have two (in fact many more than two) power indices and what their purpose is. A bibliography is included at the end of the book. In a very American way, it includes mostly papers and books by American authors. This is rather a consequence of the readership targeted: students of arts and humanities departments at American universities. Nearly all the examples and analysis are directly connected with the USA system of governance. There are very few examples outside of this area: the United Nations Security Council, the Council of Ministers of the European Union (but at the very

initial stage of 1958) among them. So, an appropriate title of the book would be “A Mathematical Look at (American) Politics”. This is not only a problem of the lack of representation of researchers from Europe, but a much more significant problem regarding the differences between political systems: European political systems are mostly multi-party systems, which makes analysis much more complicated. The books [2], [3] may be recommended for students in Europe.

REFERENCES

- [1] Robinson, E.A. Jr. and Ullman, D.H. . *A mathematical look at politics*. CRC Press–Taylor and Francis Group, Boca Raton, FL, xviii+459 pages, 2011, ISBN: 978-1-4398-1983-8. [MR 2722002](#), [Zbl 1205.91011](#)
- [2] Turnovec, F. *Public Choice: Models, Methods and Applications*. The Karolinum Press, Prague, 178 pages, 2003 ISBN: 80-246-0450-7.
- [3] Hołubiec J., Mercik J.W. *Inside voting procedures*. Studies in economics and social sciences, Vol. 2, ACCEDO Verlagsgesellschaft, Munich, 185 pages, 1994 ISBN: 3892650160 9783892650164 (Polish edition: *Techniki i tajniki głosowania*. Seria: *Problemy Współczesnej Nauki, Teoria i Zastosowania. Badania Operacyjne i Systemowe*, Warszawa : Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, cop., 139 pages, 2006 ISBN: 83-60434-08-5).
- [4] Straffin, Ph.D.. *Game theory and strategy*, volume 36. New Mathematical Library, Washington, DC: MAA, The Mathematical Association of America, x+244 pages, 1993, ISBN: 0-88385-637-9. [MR 1249934](#), [Zbl 0948.91502](#)

**O książce “Matematyczne spojrzenie na politykę” autorstwa
E. Arthura Robinsona, Jr. i Daniela H. Ullmana**

Streszczenie 460-stronicowa książka *E. Arthura Robinson, Jr. i Daniela H. Ullmana* [1] składa się z czterech rozdziałów (opisy rozdziałów podano w nawiasach):

- I Głosowanie (przypadek dwóch kandydatów, funkcje społeczne procedury wyborczej, kryteria wyborcze, które metody są dobre?, Twierdzenie Arrowa, wariacje na temat),
- II Podział (metoda Hamiltona, metody cięcia, kryteria i brak możliwości podziału, metoda Balińskiego i Younga, wybór metody podziału, historia podziału miejsc we władzach ustawodawczych Stanów Zjednoczonych),
- III Konflikt (strategie i wyniki, czynnik losowy, zmienna losowa i jej wartość oczekiwana, rozwiązywanie gry o sumie zerowej, model matematyczny konfliktu, równowaga Nasha, dylemat więźnia),
- IV o procedurach wyborczych (ważenie głosów i głosy uprzywilejowane).

Na końcu każdego rozdziału są problemy i ćwiczenia, a ich rozwiązania oraz bibliografia i indeks są na końcu. Zalecenia i rady dla wykładowców są również prezentowane na końcu przedmowy.

W przedmowie, można znaleźć oświadczenie Autorów, iż ta książka skupia się na myśleniu matematycznym o polityce, a nie na samej matematyce:

- Czy istnieje *dobry sposób* na wskazanie zwycięscy w procedurze elekcji?
- Czy jest dobry sposób podziału miejsc w kongresie (wybieranym gremium)?
- Czy głosowanie jest dobrym sposobem na podejmowanie decyzji w sytuacjach konfliktu i niepewności?

Książka jest podręcznikiem do standardowego kursu matematyki dla studentów kierunków sztuk pięknych (kierunków umiejętności godnych człowieka wolnego–humanistyki, nauk społecznych, przyrodniczych i ścisłych) pragnących spełniać ogólne wymagania kształcenia w zakresie matematyki i rozumowania ilościowego. *To sprawia, że ta książka nie jest matematyką liczb i wzorów, lecz wprowadzeniem do myślenia matematycznego. Do jej lektury wystarczy wiedza z matematyki na poziomie liceum i elementarna znajomość nauk politycznych. Zakłada się w niektórych zagadnieniach znajomość amerykańskiego systemu sprawowania władzy.*

Każdy rozdział zaczyna się od scenariusza, który jest odpowiedni do pracy grupowej i dyskusji, a ma na celu połączyć to, co czytelnicy już wiedzą, z tym, co przedstawiono w rozdziale. I tak, w rozdziale I mamy głosowanie (proces stosowany w celu wyłonienia zwycięscy po uwzględnieniu wszystkich głosów). Autorzy zaczynają od przypadku dwóch kandydatów, wprowadzając funkcję zbiorowego wyboru metody głosowania. Ten pomysł prezentacji problemów jest następnie używany w całej książce.

W wyborach z dwóch kandydatów $\{A, B\}$, za prostą metodę większości uznaje się taką społeczną funkcję wyboru ze zbioru wyników $\{\text{”wygrywa A”}, \text{”wygrywa B”}, \text{”jest remis”}\}$, która wskazuje, iż zwyciężkim kandydatem jest ten, który dostaje więcej niż połowę wszystkich oddanych głosów. Jeśli obaj kandydaci uzyskują taką samą liczbę głosów, to wynikiem jest remis. Następnie wprowadzane są inne metody rozstrzygnięcia o wyniku głosowania. Na koniec autorzy przedstawiają dodatkowe kryteria, które pomagają wybrać metodę przeprowadzenia głosowania, takie jak: anonimowość, neutralność, decyzyjność i monotoniczność.

W ordynacji wyborczej, którą można nazwać funkcją społecznych wyborów, agregowane są preferencje biorących udział w głosowaniu. Autorzy analizują kilka znanych metod agregacji, takich jak: plurality, anti-plurality, metoda Bordy, metoda Hare’a, nominacji, metody Coombs’a, Copelanda i Blacka. W książce nie podano jednak klasyfikacji tych metod. Analiza kryteriów określających *dobre, akceptowalne* metody jest zawarta w rozdziale IV, a twierdzenie Arrow’a o sprzeczności (niemożliwości rozstrzygnięcia) w rozdziale V.

Rozdział II jest o dzieleniu. Autorzy zaczynają od definicji rozdziału miejsc za pomocą funkcji, której domeną jest zbiór wszystkich możliwych podzbiorów przestrzeni

stanów (przykładowo są to okręgi wyborcze czy też posiadacze akcji), całkowita liczba miejsc (liczba identycznych elementów do podziału) oraz populacja poszczególnych okręgów, a wartością jest ciąg liczb całkowitych nieujemnych opisujących liczbę mandatów w każdym stanie.

Wychodząc od metody Hamiltona (metoda oparta na udziałach) opartej na koncepcji dzielników, autorzy ponownie rozważają kryteria podziału. Następnie przedstawiają metodę Jeffersona (w Europie zwana metodą d'Hondta) jako przykład sposobu prowadzącego do metody dzielników: Adamsa, Webstera (w Europie nazywanej metodą Sainte-Lague'a), Hilla, Deana, Lowndesa, oraz problem zaokrąglania funkcji (do góry, harmonicznie, geometrycznie, arytmetycznie, w dół). Po raz kolejny przedstawiane jest twierdzenie o niemożności Balińskiego and Younga. Wszystkie te rozważania są głęboko zakorzenione w realiach USA, ze szczególnym zwróceniem uwagi na metodę podziału Balińskiego i Younga.

Rozdział III poświęcony jest modelowaniu konfliktu jako gry o sumie zerowej. Przedstawiono kilka przykładów takich jak: walka płci, gra "w tchórza" (chicken game), dylemat więźnia. Na tych przykładach omawiane jest pojęcie równowagi (zwłaszcza równowagi Nasha). Ten fragment książki jest stosunkowo bardziej zaawansowany w notacji matematycznej i może stanowić pewną trudność dla czytelników, do których książka jest skierowana. Nie jest jasne dla czytelnika pominięcie teorii gier kooperacyjnych. Oczywiście, współpraca jest w opozycji do konfliktu, ale rozwój badań gier kooperacyjnych stanowi istotny wkład w modelowanie podejmowania decyzji przez wielu uczestników. Uzupełnienie książki o te elementy dałoby lepszy pogląd na całość technik matematycznych stosowanych w naukach politycznych i społecznych (można w tym celu zalecić [4]).

Rozdział IV poświęcony jest analizie wyborów pośrednich z kolegium elektorów. Podstawową analizę jest ważenie głosów, a to prowadzi do analizy koalicji. Przedstawiono koncepcję indeksu siły. Ilustrację definiowania zwycięzcy w ważonych grach głosowania pokazano z wykorzystaniem indeksów Shapley – Shubika i Banzhafa. Ta część książki jest chyba najslabsza, bez głębokich uzasadnień, dlaczego stosujemy dwa (w rzeczywistości dużo więcej) wskaźniki siły i jakie jest ich przeznaczenie.

Bibliografia znajduje się na końcu książki. Książki bardzo amerykańskiej gdyż zawiera głównie artykuły i książki napisane przez autorów amerykańskich. To jest zapewne konsekwencją tego, że autorzy kierują książkę do studentów wydziałów humanistycznych i społecznych na uniwersytetach amerykańskich. Prawie wszystkie przykłady i analizy są bezpośrednio związane z systemem sprawowania władzy w Stanach Zjednoczonych Ameryki Północnej. Podano niewiele przykładów spoza tego obszaru, jak przykładowo: Rada Bezpieczeństwa ONZ, Rada Ministrów Unii Europejskiej (ale na bardzo wstępnym etapie z 1958 roku). Właściwym tytułem tej książki byłoby zatem "Mathematical Look at (American) Politics". Wynika to głównie z różnic między systemami politycznymi a nie brakiem badań prowadzonych w tym zakresie w innych krajach. Europejskie systemy polityczne są w większości wielopartyjne, co sprawia, że i analizy są bardziej skomplikowane. Książki [2], [3] można zalecić dla studentów w Europie.

2010 *Klasyfikacja tematyczna AMS (2010)*: 91-01; 91A05; 91B12; 91B14; 91F10.

Słowa kluczowe: głosowanie, konflikt, gra, strategia, polityka, podział.

JACEK MERCIK
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE AND MANAGEMENT
WROCLAW UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, 5 ŁUKASIEWICZA ST., PL-50-371 WROCLAW, POLAND
E-mail: Jacek.Mercik@pwr.wroc.pl

(Received: 25th February 2013)