MATHEMATICA APPLICANDA
Vol. 40(2) 2012, p. 83–92
doi: 10.14708/ma.v40i2.372

Agata Boratyńska (Warszawa)

Koncepcja odporności według Ryszarda Zielińskiego. Odporność w modelach parametrycznych

Streszczenie W działalności naukowej prof. dr hab. Ryszarda Zielińskiego obszerne miejsce zajmuje badanie zachowania się procedur statystycznych przy zaburzeniu rozważanego modelu statystycznego, czyli sytuacji, gdy obserwowana zmienna losowa nie spełnia założeń modelu. W tej części przedstawione zostaną koncepcje i sposoby badania wrażliwości procedur statystycznych, mierniki ich jakości, metody wyznaczania procedur optymalnych i przykłady wykorzystania w różnych modelach rozważanych w pracach Profesora.

2010 Mathematics Subject Classification: 01A70, 62-03, 62C10, 62F15, 62F35, 62F03, 62F10.

Key words and phrases: funkcja odporności, rozkład wykładniczy, obciążenie estymatora, test analizy wariancji, moc testu, estymator bayesowski, klasy rozkładów a priori.

1. Wstęp Dorobek Prof. Ryszarda Zielińskiego liczy 27 prac poświęconych zagadnieniom odporności procedur statystycznych. Tematyka pojawia się w pracach z lat siedemdziesiątych dwudziestego wieku i towarzyszy Profesorowi przez cały późniejszy okres twórczości. Prace można podzielić na pewne podtematy: prace ogólne związane z definiowaniem pojęć i mierników odporności procedury statystycznej, prace dotyczące odpornej estymacji nieznanych parametrów rozkładu, prace badające odporność testów, głównie dotyczących porównywania średnich, oraz prace związane z odpornością w modelach bayesowskich. Kolejne rozdziały przedstawiają najważniejsze wyniki i poruszane problemy.

2. Odporność — ogólna definicja Pojęcie odporności pojawia się w statystyce matematycznej w latach pięćdziesiątych dwudziestego wieku, wprowadzone zostało przez Boxa i Andersena [3]. Najogólniej mówiąc odporność procedury statystycznej to nieczułość na zmiany wywołane niedokładnością w specyfikacji modelu. Jednak słowa „nieczułość” i „niedokładność” w powyższej definicji były różnie interpretowane. Wymienić tu należy koncepcje Hubera [6], Boxa i Tiao [4], Bickela [2], Hampela [5], Bergera [1].

Profesor R. Zieliński w pracach [R19], [R26], [P7] stara się nadać pojęciu odporności definicję matematyczną, na tyle ogólną, by obejmowała wymienione wyżej koncepcje odporności oraz by mogła być wykorzystana w różnych problemach i zadaniach statystyki matematycznej. Odpowiedź na pytanie o odporność sprowadza do odpowiedzi na dwa pytania:
Odporność przeciw czemu?
Odporność ze względu na co?

Pierwsze z pytań to pytanie o budowę rozszerzonego modelu, który ma obejmować możliwe odejścia od założeń modelu wyjściowego. Rozważając zadanie ze statystyki matematycznej mamy do czynienia z modelem

$$\mathcal{M}_0 = (\mathcal{X}, \mathcal{F}_{\mathcal{X}}, \mathcal{P}_0)\,,$$

gdzie $\mathcal{X}$ oznacza przestrzeń wartości obserwowanej zmiennej losowej, $\mathcal{F}_{\mathcal{X}}$ odpowiednie σ-ciało podzbiorów i $\mathcal{P}_0$ rodzinę rozkładów prawdopodobieństwa, do której (zakładamy) należy rozkład obserwowanej zmiennej losowej X. Model $\mathcal{M}_0$ nazywa się modelem wyjściowym. Celem jest wnioskowanie o pewnych nieznanych charakterystykach rozkładu obserwowanej zmiennej losowej. Wnioskowanie to przeprowadza się korzystając z pewnej statystyki T, którą wybiera się z rozważanej rodziny statystyk $\mathcal{T}$ tak, aby posiadała interesujące nas własności, być może była optymalna ze względu na rozważane kryteria (na przykład estymator nieobciążony o minimalnej wariancji, test jednostajnie najmocniejszy). Niech ρ będzie funkcją opisującą rozpatrywaną własność, zatem ρ jest odwzorowaniem dwóch zmiennych: statystyki $T \in \mathcal{T}$ i rozkładu P obserwowanej zmiennej losowej, o wartościach w przestrzeni metrycznej.

Jednak w tym miejscu nie kończy się rozwiązywanie problemu. Należy rozważyć możliwe dopuszczalne odstępstwa od przyjętych w modelu założeń dotyczących rodziny rozkładów. Niech

$$\mathcal{M}_1 = (\mathcal{X}, \mathcal{F}_{\mathcal{X}}, \mathcal{P}_1)\,,$$

gdzie

$$\mathcal{P}_1 = \bigcup_{P \in \mathcal{P}_0} \pi(P)$$

i $\pi(P)$ jest pewnym otoczeniem rozkładu P w przestrzeni miar probabilistycznych opisującym możliwe niedokładności w wyznaczeniu rozkładu P. Zachodzi $\pi(P) \cap \mathcal{P}_0 = \{P\}$. Model $\mathcal{M}_1$ nazywa się modelem rozszerzonym.

Pytanie drugie: odporność ze względu na co? — to pytanie o pomiar odporności procedury statystycznej. Procedura wyznaczona przez statystykę T

jest odporna ze względu na własność ρ, jeżeli własność ta nie zmienia się znacząco, gdy przechodzimy z modelu $\mathcal{M}_0$ do $\mathcal{M}_1$. W pracy [R26] zdefiniowana jest funkcja odporności, pozwalająca mierzyć zmiany funkcji ρ.

Definicja 2.1 Funkcją odporności statystyki T ze względu na własność ρ w modelu $\mathcal{M}_0$ (ρ-odpornością statystyki T) nazywamy funkcję rzeczywistą $r_T^\rho : \mathcal{P}_0 \longrightarrow \mathcal{R}$ równą

$$r_T^\rho(P) = \operatorname{diam}\{\rho(T,Q) : Q \in \pi(P)\},$$

gdzie $\operatorname{diam} A$ oznacza średnicę zbioru A.
Jednostronną funkcją odporności statystyki T ze względu na własność ρ w modelu $\mathcal{M}_0$ nazywamy funkcję rzeczywistą $r_T^{\rho,0} : \mathcal{P}_0 \longrightarrow \mathcal{R}$ równą

$$r_T^{\rho,0}(P) = \sup\{\operatorname{dist}(\rho(T,Q), \rho(T,P)) : Q \in \pi(P)\},$$

gdzie $\operatorname{dist}(x,y)$ określa odległość między punktami x i y w przestrzeni metrycznej, do której te punkty należą.

Definicja 2.1 pozwala porównywać procedury ze względu na ich odporność. Statystyka T_1 jest nie mniej odporna niż statystyka T_2 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $P \in \mathcal{P}_0$ zachodzi

$$r_{T_1}^\rho(P) \leqslant r_{T_2}^\rho(P)$$

lub analogicznie

$$r_{T_1}^{\rho,0}(P) \leqslant r_{T_2}^{\rho,0}(P).$$

Statystyka T^* jest jednostajnie najbardziej odporna w klasie statystyk $\mathcal{T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall T \in \mathcal{T} \quad \forall P \in \mathcal{P}_0 \qquad r_{T^*}^\rho(P) \leqslant r_T^\rho(P)$$

lub analogicznie

$$\forall T \in \mathcal{T} \quad \forall P \in \mathcal{P}_0 \qquad r_{T^*}^{\rho,0}(P) \leqslant r_T^{\rho,0}(P).$$

Statystyka T^* jest absolutnie odporna ze względu na własność ρ, gdy

$$\forall P \in \mathcal{P}_0 \qquad r_{T^*}^\rho(P) = 0$$

lub analogicznie

$$\forall P \in \mathcal{P}_0 \qquad r_{T^*}^{\rho,0}(P) = 0.$$

3. Badanie odporności estymatorów Przedstawioną w poprzednim rozdziale definicję Profesor wykorzystuje do pomiaru odporności estymatorów w wielu modelach statystycznych. Wymienić tu należy wyznaczanie najbardziej odpornych estymatorów parametru położenia (patrz prace [R29], [R35],

[R36], [R38], [R69], szerzej omówione przez Rychlika w następnej części - poświęconej estymacji kwantylowej), konstrukcję najbardziej odpornego estymatora nieobciążonego wariancji ze względu na wariancję estymatora w modelu liniowym przy wahaniu kurtozy rozkładu wyjściowego (praca [R30]), badanie odporności estymatora otrzymanego metodą najmniejszych kwadratów ze względu na obciążenie w modelu autoregresji przy ε-zaburzeniu rozkładu normalnego błędu ([R54]). Poniżej przedstawione zostaną wyniki dotyczące najbardziej odpornych estymatorów parametru skali w modelu wykładniczym.

Model wyjściowy to model wykładniczy postaci

$$\mathcal{M}_0 = (\mathcal{R}, \mathcal{B}, \{P_{\lambda,1} : \lambda > 0\})^n \,,$$

gdzie $\mathcal{B}$ oznacza σ-ciało zbiorów borelowskich, a $P_{\lambda,1} = P_\lambda$ rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej λ. Rozważany jest problem nieobciążonej estymacji parametru λ. Klasą $\mathcal{T}$ estymatorów jest rodzina estymatorów nieobciążonych będących kombinacjami liniowymi statystyk pozycyjnych o nieujemnych współczynnikach. Estymatorem nieobciążonym o minimalnej wariancji w tym modelu jest średnia z próby. Rozważane są dwa modele rozszerzone:

$$\mathcal{M}_1 = \left(\mathcal{R}, \mathcal{B}, \bigcup_{\lambda>0} \pi_1(\lambda)\right)^n \,,$$

gdzie

$$\pi_1(\lambda) = \{P_{\lambda,p} : \ p \in [p_1, p_2]\}$$

i $P_{\lambda,p}$ oznacza rozkład o gęstości $p_{\lambda,p} \propto \exp(-(x/\lambda)^p)$ i $p_1 < 1 < p_2$ są ustalonymi liczbami dodatnimi,

$$\mathcal{M}_2 = \left(\mathcal{R}, \mathcal{B}, \bigcup_{\lambda>0} \pi_2(\lambda)\right)^n \,,$$

gdzie

$$\pi_2(\lambda) = \{F_\lambda : \forall t > 0 \ h_\lambda^G(t) \leqslant h_\lambda^F(t) \leqslant h_\lambda^H(t)\}$$

i h_λ^F jest funkcją hazardu dla rozkładu o dystrybuancie $F_\lambda(x) = F(x/\lambda)$, a G i H są takimi dwiema ustalonymi dystrybuantami, że

$$h_\lambda^G(t) < h_\lambda^P(t) < h_\lambda^H(t).$$

W modelach rozszerzonych badane jest obciążenie $\rho(T, Q) = E_Q T - \lambda$, gdzie $Q \in \pi_i(\lambda)$, $i = 1, 2$. Główne wyniki przedstawiają poniższe twierdzenia.

Twierdzenie 3.1 (Zieliński [R27]) *Jeżeli rozszerzonym modelem jest model $\mathcal{M}_1$, to w klasie $\mathcal{T}$ jednostajnie najbardziej odpornym estymatorem parametru λ ze względu na obciążenie jest statystyka postaci $nX_{1:n}$, gdzie $X_{1:n}$ oznacza pierwszą statystykę pozycyjną.*

Twierdzenie 3.2 (Zieliński i Bartoszewicz [R31]) *Jeżeli rozszerzonym modelem jest model* $\mathcal{M}_2$ *i* G *jest dystrybuantą o malejącej funkcji hazardu (DFRA) a* H *dystrybuantą o rosnącej funkcji hazardu (IFRA), to w klasie* $\mathcal{T}$ *jednostajnie najbardziej odpornym estymatorem parametru* λ *ze względu na obciążenie jest statystyka postaci* $nX_{1:n}$*.*

Twierdzenie 3.3 (Zieliński i Bartoszewicz [R31]) *Jeżeli rozszerzonym modelem jest model* $\mathcal{M}_2$ *i* G *jest IFRA a* H *jest DFRA, to w klasie* $\mathcal{T}$ *jednostajnie najbardziej odpornym estymatorem parametru* λ *ze względu na obciążenie jest statystyka postaci*

$$\frac{X_{n:n}}{1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n},$$

gdzie $X_{n:n}$ *oznacza* n*-tą statystykę pozycyjną w próbie* n*-elementowej.*

Twierdzenie 3.2 jest uogólnieniem Twierdzenia 3.1 w tym sensie, że rodzina rozkładów z modelu $\mathcal{M}_1$ jest zawarta w rodzinie rozkładów z modelu $\mathcal{M}_2$ przy odpowiednim dobraniu dystrybuant G i H. Z kolei rodzina rozkładów z modelu $\mathcal{M}_2$, gdy G i H spełniają założenia Twierdzenia 3.3, zawiera rodzinę rozkładów gamma z parametrem kształtu $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, gdzie $\alpha_1 < 1 < \alpha_2$.

W pracy [R28] rozważano szerszą klasę estymatorów dopuszczając kombinacje liniowe statystyk pozycyjnych o dowolnych współczynnikach, co pozwoliło otrzymać estymatory absolutnie odporne ze względu na obciążenie. Badano tam również odporność ze względu na błąd średniokwadratowy estymatorów.

4. Badanie odporności testów Prace poświęcone odporności testów dotyczą głównie badania rozmiaru i mocy testów hipotezy o równości średnich w dwóch lub więcej populacjach przy różnego typu zaburzeniach modelu wyjściowego. W przypadku porównywania dwóch średnich w modelu wyjściowym rozważa się dwie niezależne próby losowe, pierwsza $X_1, X_2, \ldots, X_m$ z rozkładu o dystrybuancie $F_{\mu_X}(x) = F(x - \mu_X)$, druga $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ o dystrybuancie $F_{\mu_Y}(x) = F(x - \mu_Y)$, gdzie F jest pewną ustaloną dystrubuantą. Dla weryfikacji hipotezy $H_0: \ \mu_X = \mu_Y$ przy alternatywie $H_1: \ \Delta = \mu_X - \mu_Y > 0$ rozważane są test t, test Wilcoxona-Manna-Whitneya (WMW) i test znaków różnic w parach (P). Przy założeniu, że F jest dystrybuantą rozkładu normalnego w pracy [R39] Profesor bada odporność wymienionych testów ze względu na rozmiar i moc przy dopuszczeniu zależności w parach, a zatem przy założeniu, że pewne pary obserwacji (X_i, Y_i) mają rozkład normalny o współczynniku korelacji ρ różnym od 0. Wyniki uzyskane drogą symulacji pokazują, że rozmiar testu t i testu WMW są malejącymi funkcjami współczynnika korelacji, zachowanie mocy obu testów zależy od wielkości Δ, dla małych Δ moc obu testów jest malejącą funkcją ρ, dla dużych rosnącą funkcją ρ.

Test znaków różnic w parach jest testem absolutnie odpornym ze względu na rozmiar, ale interesujące jest zachowanie mocy tego testu w stosunku do mocy testów t i WMW. Funkcja mocy tego testu jest rosnącą funkcją parametru ρ dla $\Delta > 0$. Kończąc artykuł Profesor pisze: "*Reasumując nie wydaje się, aby - pomimo absolutnej odporności ze względu na rozmiar - test P był poważnym konkurentem dla testu t lub testu WMW.*"

Problem testowania wyżej wymienionej hipotezy przy założeniu, że dystrybuanta F jest nieznana poruszany jest w pracy [R41], gdzie badany jest maksymalny rozmiar testu WMW przy zaburzeniu modelu wyjściowego poprzez dopuszczenie zależności między obserwacjami. Jeżeli dopuszczone są wszystkie zależności wewnątrz poszczególnych prób jak i między dwiema próbami, to rozmiar testu WMW może przyjmować wartości dowolnie bliskie 1. Przy dopuszczeniu tylko zależności w parach (X_i, Y_i) praca podaje pewne górne oszacowanie na maksymalny rozmiar istotnie mniejsze od 1. Autor podsumowując pisze: "*The results show that the WMW test must be used with care if certain dependencies between observations are suspected*".

W pracy [R50] Profesor polemizuje z pewnym szeroko przyjętym poglądem, że test jednoczynnikowej analizy wariancji jest niewrażliwy na zaburzenia założenia o rozkładzie normalnym obserwowanych zmiennych losowych (por. Scheffé [8], Seber [8], Lehmann [7]). Rozważając ε-zaburzenie rozkładu normalnego błędu postaci

$$(1-\varepsilon)N(0,\sigma^2) + \varepsilon N(0,(\alpha\sigma)^2),$$

gdzie $\varepsilon \in (0, 1/2)$ i $\alpha > 1$, otrzymał wyniki symulacyjne prowadzące między innymi do następujących wniosków.

- Test ANOVA jest konserwatywny i jego moc maleje przy ustalonym ε i rosnącym α.
- Przy ustalonym α rozmiar testu nie jest monotoniczną funkcją ε, zatem w konsekwencji wahanie rozmiaru testu może być większe przy mniejszych prawdopodobieństwach pojawienia się obserwacji odstającej.
- Testy konkurencyjne: test Kruskala–Wallisa i test L (test o statystyce testowej zbudowanej analogicznie jak w teście ANOVA, jedynie z zamianą wszystkich średnich na odpowiednie mediany i kwadratów odchyleń na moduły odchyleń) mogą być alternatywą bardziej odporną ze względu na rozmiar i moc.

Efekt wpływu parametru α i ε jest analogiczny jak w przypadku rozważania wahania obciążenia estymatora otrzymanego metodą najmniejszych kwadratów w modelu autoregresji AR(1) przy tego typu zaburzeniu (por. [R54]).

W pracy [R55] podany jest maksymalny rozmiar testu ANOVA w sytuacji, gdy pojawia się dokładnie jedna obserwacja zaburzająca. W przypadku testowania hipotezy o średniej w modelu normalnym (jedna populacja), problem pojedynczej obserwacji zaburzającej i jej wpływu na rozmiar badany jest w pracy [R53]. Wyniki symulacyjne w pracy [R70] pokazują, że w modelu autoregresji AR(1) postaci

$$X_0 = 0, \quad X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad |\rho| < 1, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2), \quad t = 1, 2, \ldots, n,$$

(σ jest nieznane), przy pojawieniu się jednej obserwacji odstającej, w problemie testowania hipotezy

$$H_0: \ \rho = 0, \qquad \text{vs.} \qquad H_1: \ \rho \neq 0,$$

test oparty na estymatorze uzyskanym metodą najmniejszych kwadratów jest mniej odporny ze względu na moc i rozmiar niż testy oparte na statystykach

$$\hat{\rho}_2 = Med\{X_2/X_1, X_3/X_2, \ldots, X_n/X_{n-1}\}$$

oraz

$$\hat{\rho}_3 = \frac{Med\{X_1X_2, X_2X_3, \ldots, X_{n-1}X_n\}}{Med\{X_1^2, X_2^2, \ldots, X_n^2\}}.$$

5. Odporność w modelach bayesowskich W modelach bayesowskich, oprócz rodziny rozkładów na przestrzeni obserwowanej zmiennej losowej, pojawia się rozkład prawdopodobieństwa na przestrzeni parametru nazywany rozkładem a priori. W swej interpretacji opisuje on wstępną wiedzę o nieznanym parametrze. Wybierany jest często mniej lub bardziej arbitralnie, a zatem istotne jest badanie jego wpływu na wynik wnioskowania. Prace Zielińskiego związane z odpornością bayesowską poświęcone są bardzo różnym zagadnieniom.

W pracy [R44] przedstawiony jest problem poszukiwania estymatora najbardziej odpornego (stabilnego) ze względu na ryzyko a posteriori przy rozważanym zaburzeniu rozkładu a priori. W modelu wyjściowym obserwowana jest próba losowa z rozkładu Poissona o nieznanym parametrze λ, o którym zakłada się, że ma rozkład a priori gamma $Gamma(\alpha_0, \beta_0)$ o ustalonych parametrach α_0 i β_0. Celem jest estymacja parametru λ przy kwadratowej funkcji straty. Estymator bayesowski w tym modelu jest równy

$$\hat{\lambda}^{Bay} = \frac{\alpha_0 + S_n}{\beta_0 + n},$$

gdzie S_n jest sumą obserwacji w próbie n-elementowej. W modelu rozszerzonym zakłada się, że rozkład a priori należy do rodziny rozkładów

$$\Gamma = \{Gamma(\alpha, \beta_0) : \ \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]\},$$

gdzie $\alpha_1 < \alpha_0 < \alpha_2$ są ustalone. Funkcją odporności dowolnego estymatora $\hat{\lambda}$ jest dla każdej wartości próby losowej oscylacja ryzyka a posteriori tego estymatora, gdy rozkłady a priori należą do rodziny Γ. Estymator najbardziej odporny (minimalizujący tę oscylacje dla każdej wartości próby losowej) jest równy

$$\hat{\lambda}_\infty = \frac{\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + 1) + S_n}{\beta_0 + n}.$$

W pracy [R58] rozważany jest jednorodny proces Poissona o nieznanej intensywności λ na przedziale $(0, \tau]$. Celem jest estymacja parametru λ przy asymetrycznej funkcji straty LINEX i dodatkowym koszcie związanym z czasem τ obserwowania procesu będącym liniową funkcją τ. Przy rozważaniu rodziny rozkładów a priori postaci

$$\Gamma_1 = \{Gamma(\alpha, \beta) : \ \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2] \wedge \beta \in [\beta_1, \beta_2]\},$$

gdzie $\alpha_1 < \alpha_2$ i $\beta_1 < \beta_2$ są ustalone, wyznaczono τ^* minimalizujące oczekiwaną łączną stratę (w postaci sumy straty LINEX i kosztu obserwowania procesu). Za estymator parametru λ przy ustalonym τ przyjęto estymator bayesowski (przy funkcji straty LINEX) z klasy estymatorów bayesowskich

$$\{\hat{\lambda}^{Bay}_{\alpha,\beta} : \ \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2] \wedge \beta \in [\beta_1, \beta_2]\},$$

dla którego ryzyko bayesowskie osiąga maksimum, gdy rozkłady a priori należą do rodziny Γ_1. Optymalne τ^* nie zależy od wyboru α_1 i β_2. W pracy podano algorytm na wyznaczenie τ^*.

Model liniowy $Y = Xb + \varepsilon$, gdzie wektor $Y \sim N(Xb, I)$ oraz wektor b jest nieznany i a priori ma rozkład należący do rodziny

$$\Gamma_2 = \{N(0, \Sigma) : \ \Sigma_1 \leqslant \Sigma \leqslant \Sigma_2\},$$

gdzie macierze Σ_1, Σ_2 są ustalonymi macierzami dodatnio określonymi, rozważany jest w pracy [R56]. Przy ustalonym rozkładzie a priori i kwadratowej funkcji straty estymatorem bayesowskim wektora b jest wartość oczekiwana w rozkładzie a posteriori. Przy niedokładności w wyznaczeniu rozkładu a priori zbiór estymatorów bayesowskich należy do pewnej elipsoidy. Celem jest wybór planu eksperymentu X tak, by średnica otrzymanej elipsoidy albo objetość były najmniejsze. W pracy wprowadza się tak zwane plany: D-dopuszczalny (dla minimalizacji objętości) i E-dopuszczalny (dla minimalizacji średnicy).

Praca [R49] poświęcona jest badaniu odległości dystrybuant rozkładów a posteriori w metryce Kołmogorowa jako funkcji odległości odpowiednich dystrybuant rozkładów a priori. Główny wynik jest następujący.

Twierdzenie 5.1 . *Niech F i G będą dystrybuantami rozkładów a priori na przestrzeni Θ, x ustaloną wartością a $l_x()$ funkcją wiarogodności obserwowanej zmiennej losowej X. Niech F_x i G_x będą dystrybuantami odpowiednich rozkładów a posteriori. Wtedy*

$$\rho(F_x, G_x) \leqslant \frac{\rho(F, G)}{\max\{m_x(F), m_x(G)\}} \left(s(x) + u(x)\right),$$

gdzie ρ oznacza odległość w metryce Kołmogorowa, $s(x) = \sup_{\theta\in\Theta} l_x(\theta)$, $m_x(F)$ oznacza rozkład brzegowy zmiennej X w punkcie x przy rozkładzie a priori F, a $u(x) = \int dl_x^*(\theta)$, gdzie $l_x^*(\theta) = l_x^+(\theta) + l_x^-(\theta)$ i l_x^+, l_x^- stanowią składniki dekompozycji Jordana funkcji l_x. Istnieje funkcja wiarogodności, dla której nierówność jest dokładna.

Powyższe twierdzenie pozwala wyznaczać górne ograniczenie na odległość rozkładów a posteriori, gdy odległość rozkładów a priori jest ograniczona, pozwala też badać zdefiniowaną przez Hampela odporność infinitezymalną i otrzymać warunki na jednostajną, ze względu na wartość x obserwowanej zmiennej losowej X, ciągłość odwzorowania, które rozkładowi a priori przyporządkowuje rozkład a posteriori, gdy w przestrzeni rozkładów wprowadzona jest metryka Kołmogorowa.

Literatura

[1] J. O. Berger. *Statistical decision theory: foundations, concepts, and methods*. Springer-Verlag, New York, 1980. Springer Series in Statistics. MR 580664

[2] P. J. Bickel. Another look at robustness: a review of reviews and some new developments. *Scand. J. Statist.*, 3(4):145–168, 1976. With discussion by Sture Holm, Bengt Rosén, Emil Spjøtvoll, Steffen Lauritzen, Søren Johansen, Ole Barndorff-Nielsen and a reply by the author. MR 0428589

[3] G. Box and S. Anderson. Permutation theory in the derivation of robust criteria and the study of departures from assumption. *J. R. Stat. Soc., Ser. B*, 17:1–34, 1955. Zbl 0065.12402

[4] G. E. P. Box and G. C. Tiao. *Bayesian inference in statistical analysis*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1973. Addison-Wesley Series in Behavioral Science: Quantitative Methods. MR 0418321

[5] F. R. Hampel. A general qualitative definition of robustness. *Ann. Math. Statist.*, 42:1887–1896, 1971. MR 0301858

[6] P. J. Huber. *Robust statistics*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1981. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. MR 606374

[7] E. L. Lehmann. *Testing statistical hypotheses*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, second edition, 1986. MR 852406

[8] H. Scheffé. *The analysis of variance*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1959. MR 0116429

Concept of Robustness by Ryszard Zieliński.
Robustness in Parametric Models

Abstract. The concept of robustness of statistical procedures is one of the most important subjects in Zieliński's papers. In this article the development of the idea of robustness as introduced in Zieliński's papers is presented. The definitions of a supermodel and a robustness function are given. The problem of the robust estimation of a scale parameter in an exponential model and the robustness of tests for the comparison of means in two or more populations are described. Robustness in Bayesian statistical models is connected with an inexactly specified prior distribution. Here the following results of Zieliński in Bayesian robustness are presented: the most stable estimator in the Poisson model and the Bayes optimal stopping rule in a homogeneous Poisson process with conjugate classes of priors, the optimal experimental designs in Bayesian linear models under variation in the prior, an upper bound for the Kolmogorov distance between the posterior distributions in terms of that between the prior distributions.

Key words: robustness, exponential distribution, bias of estimator, test ANOVA, power of a test, Bayes estimator, classes of priors, Kolmogorov distance.

Agata Boratyńska
Szkoła Główna Handlowa, Instytut Ekonometrii
Al. Niepodległości 162, 00-556 Warszawa
E-mail: aborata@sgh.waw.pl

(Received: 17 października 2012)