ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA III: MATEMATYKA STOSOWANA V (1975)

Anna NALBACH-LENIEWSKA (Warszawa)

Probabilistyczny model fluktuacji jasności światła galaktyk

1. Opis sytuacji. Jednym z problemów, których rozwiązaniem zaczęto się zajmować w latach trzydziestych XX-ego wieku jest zagadnienie fluktuacji jasności światła pochodzącego od galaktyk tworzących Drogę Mleczną. Badając widmo światła, astronomowie zauważyli istotne odchylenia od średniej barwy w różnych częściach Drogi Mlecznej. Odchylenia te tłumaczono specyficzną atomową strukturą materii. Okazało się, że nie wystarcza to do pełnego wyjaśnienia zjawiska. Postanowiono rozpatrzeć zagadnienie z probabilistycznego punktu widzenia stosując teorię procesów stochastycznych.

Pierwszym zadaniem było zbudowanie modelu matematycznego pozwalającego na ścisłe określenie procesu stochastycznego odpowiadającego zjawisku fluktuacji jasności światła oraz zbadanie ogólnych własności tego modelu. W tym celu przyjęto następujące postulaty (por. [1], str. 335–336):

1°. Punkt obserwacyjny, w którym przeprowadzane są badania, znajduje się w środku kuli o dowolnie dużym promieniu. Na powierzchni każdej kuli o tym środku i dowolnym promieniu występują gwiazdy i chmury. Przyjęto, że ich rozkład jest tam równomierny. Dzięki temu spełniono konieczny postulat, że badanie jasności światła nie zależy od kierunku obserwacji.

2°. Każdy element przestrzeni promieniuje ze stałą intensywnością β, inaczej mówiąc jasność światła zmienia się liniowo w zależności od odległości. Jeśli więc jasność światła mierzona w punkcie obserwacyjnym była równa u_0, to w odległości t od obserwatora jasność ta osiągnie wartość $u_0 + \beta t$, $\beta \geqslant 0$. Ten przyrost jasności światła wywołany jest przez gwiazdy pośrednie.

3°. Wzdłuż linii obserwacji pojawiają się chmury pochłaniające światło. Liczba $N(t)$ chmur występujących na odcinku długości t opisana jest procesem Poissona $\{N(t)\}_{t\in[0,+\infty)}$, w szczególności

$$P\{N(t) = n\} = \frac{e^{-\alpha t}(\alpha t)^n}{n!}. \tag{1}$$

We wzorze tym α oznacza średnią liczbę chmur przypadających na jednostkę długości.

4°. Chmury występujące w przestrzeni mogą mieć zróżnicowaną strukturę atomową, od której zależy absorbcja przechodzącego przez nie światła. Aby uregulować to zjawisko wprowadzono pojęcie współczynnika przezroczystości. Mówimy, że chmura ma *przezroczystość* q, jeśli jasność u światła po przejściu przez chmurę wynosi $q \cdot u$, gdzie $0 \leqslant q \leqslant 1$ Założono, że współczynnik przezroczystości jest zmienną losową Q o gęstości $\psi(q)$.

2. Proces stochastyczny opisujący zjawisko fluktuacji jasności światła. Rozważmy rodzinę jednowymiarowych zmiennych losowych $\{U(t)\}_{t\in[0,\ +\infty)}$. Jeśli $U(t) = u$, to mówimy, że jasność światła, mierzona w odległości t od obserwatora, jest równa u. Zakładamy, że każda ze zmiennych losowych $U(t)$ ma gęstość, którą oznaczać będziemy $g_t(u)$. W dalszym ciągu postaramy się wyznaczyć tę gęstość.

Rozważmy łańcuch $\{S_n\}_{n=0,1,\dots}$, w którym zmienna losowa S_n określa jasność światła po przejściu przez n chmur. Naturalnym jest przyjąć, że jasność światła po przejściu przez k chmur zależy tylko od jasności światła po przejściu przez $k-1$ chmur. Absorbcyjny wpływ wcześniejszych chmur nie jest tu istotny. Dlatego przyjmujemy, że ciąg zmiennych losowych $\{S_n\}_{n=0,1,\dots}$ jest łańcuchem Markowa. Zauważmy również, że $\{S_n\}_{n=0,1,\dots}$ jest łańcuchem jednorodnym, gdyż jasność zależy tylko od ilości chmur, jakie światło napotka na swej drodze, tzn. dla każdego zbioru borelowskiego $A \subset R^1$:

$$\mathrm{P}\{S_{n+m} \in A \mid S_n = u\} \qquad \text{nie zależy od } n.$$

Utwóżmy teraz proces $\{S_{N(t)}\}_{t\in[0,\ +\infty)}$, gdzie dla każdego $t_0 \in [0,\ +\infty)$, $N(t_0)$ jest zmienną losową o rozkładzie prawdopodobieństwa (1). Wówczas zmienna losowa $X(t) = S_{N(t)}$ opisuje jasność światła po przejściu przez chmury na odcinku długości t.

Proces stochastyczny $X(t)$ daje opis probabilistyczny naszego zjawiska bez uwzględnienia deterministycznego przyrostu jasności wywołanego przez gwiazdy pośrednie. Niech więc $\{U(t)\}_{t\in[0,\ +\infty)}$ będzie procesem stochastycznym w pełni opisującym nasze doświadczenie. Wówczas, przy uwzględnieniu postulatu 2°, mamy

$$U(t) - \beta t = X(t). \tag{2}$$

3. Konstrukcja łańcucha Markowa $\{S_n\}_{n=0,1,\dots}$. Przypomnę dwie równości znane z teorii jednorodnych łańcuchów Markowa (zob. [2], str. 195–200).

Niech $S_0, S_1, \dots$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa i niech $K(x,\Gamma)$, gdzie $x \in R^1$ oraz Γ jest dowolnym zbiorem borelowskim w R^1, oznacza prawdopodobieństwo przejścia od x do Γ w jednym kroku. Jeśli μ_0 jest rozkładem zmiennej losowej S_0, to rozkład zmiennej losowej S_n spełnia równanie

$$\mu_n(\Gamma) = \int_{R^1} \mu_0(dx)\, K^{(n)}(x,\Gamma), \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{3}$$

gdzie prawdopodobieństwa przejścia $K^{(n)}(x,\Gamma)$ w n krokach spełniają równanie rekurencyjne

$$K^{(n)}(x,\Gamma) = \int_{R^1} K(x, dy)\, K^{(n-1)}(y,\Gamma), \qquad n = 2, 3, \dots \tag{4}$$

Prawdopodobieństwa przejścia w jednym kroku dla łańcucha $\{S_n\}_{n=0,1,\dots}$ o przestrzeni stanów R^1 wyrażają się wzorem

$$\mathrm{P}\{S_n \in [uq,\ u(q+dq)] \mid S_{n-1} = u\} = \mathrm{P}\{Q \in [q,\ q+dq]\} = \int_q^{q+dq} \psi(q)\,dq. \tag{5}$$

Przy założeniu istnienia gęstości $\psi(q)$, istnieje gęstość $k(x, y)$ jądra stochastycznego $K(x, \Gamma)$ dla łańcucha $\{S_n\}_{n=0,1,\ldots}$ i zachodzi wzór

$$k(x, y) = \frac{1}{x}\,\psi\left(\frac{y}{x}\right), \qquad y < x. \tag{6}$$

Załóżmy, że zmienna losowa S_0 ma rozkład prawdopodobieństwa μ_0 skupiony w punkcie x_0, tzn.

$$\mathrm{P}\{S_0 = x_0\} = 1.$$

Z równości (3) i (4) wynika, że przy znajomości (5) i rozkładu początkowego μ_0 znamy rozkład zmiennej losowej S_n dla każdego $n \geqslant 1$.

4. Konstrukcja procesu stochastycznego $\{X(t)\}_{t \in [0, +\infty)}$. Niech dany będzie jednorodny proces Markowa $\{X(t)\}_{t \in [0, +\infty)}$ z przestrzenią stanów R^1. Oznaczmy

$$Q_t(x, \Gamma) = \mathrm{P}\{X(t+s) \in \Gamma \mid X(s) = x\} = \mathrm{P}\{X(t) \in \Gamma \mid X(0) = x\},$$

gdzie $x \in R^1$, Γ – zbiór borelowski w R^1.

Rozpatrzmy łańcuch Markowa $\{S_n\}_{n=0,1,\ldots}$. Generowany przez jądro $K(x, \Gamma)$ oraz proces Poissona $\{N(t)\}_{t \in [0, +\infty)}$ niezależny od łańcucha $\{S_n\}_{n=0,1,\ldots}$ Tworzymy zmienne losowe

$$X(t) = S_{N(t)}.$$

Można pokazać (zob. [2], str. 310), że w procesie stochastycznym $\{X(t)\}_{t \in [0, +\infty)}$, prawdopodobieństwa przejścia mają postać:

$$Q_t(x, \Gamma) = e^{-\alpha t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^n}{n!} K^{(n)}(x, \Gamma), \qquad t > 0.$$

Różniczkując ten związek otrzymujemy równanie prospektywne Kołmogorowa

$$\frac{\partial Q_t(x, \Gamma)}{\partial t} = -\alpha\, Q_t(x, \Gamma) + \alpha \int_{R^1} K(z, \Gamma)\, Q_t(x, dz). \tag{7}$$

Równanie Kołmogorowa jest również spełnione dla gęstości warunkowych przy założeniu, że jądra $K(z, \Gamma)$, $Q_t(x, \Gamma)$ mają gęstości. Zatem, jeśli

$$K(z, \Gamma) = \int_{\Gamma} k(z, u)\, du, \qquad \text{oraz} \qquad Q_t(x, \Gamma) = \int_{\Gamma} g_t(x, z)\, dz,$$

to zakładając, że funkcje $K(z, \Gamma)$, $Q_t(x, \Gamma)$ są dostatecznie regularne, z równości (7) otrzymujemy:

$$\frac{\partial g_t(x, u)}{\partial t} = -\alpha g_t(x, u) + \alpha \int_{R^1} k(z, u)\, g_t(x, z)\, dz. \tag{8}$$

Równanie Kołmogorowa spełnia również gęstość bezwarunkowa $g_t(u)$ prawdopodobieństwa $P\{X(t) < u\}$, przy założeniu istnienia gęstości rozkładu początkowego w chwili $t = 0$. Wykorzystując więc równanie (8) mamy:

$$\frac{\partial g_t(u)}{\partial t} = -\alpha g_t(u) + \alpha \int_{R^1} k(z, u)\, g_t(z)\, dz. \tag{9}$$

W tym przypadku równanie to nosi nazwę równania Fokkera–Plancka (zob. [2], str. 290–293).

Jeśli uwzględnimy podany w założeniach naszego modelu deterministyczny przyrost jasności światła, to wykorzystując (9) oraz wobec (2) i (6) otrzymamy równanie

$$\frac{\partial g_t(u)}{\partial t} = -\beta \frac{\partial g_t(u)}{\partial u} - \alpha g_t(u) + \alpha \int_u^{\beta t} \psi\left(\frac{z}{u}\right) g_t(z) \frac{dz}{u}. \tag{10}$$

Równanie to nosi w astronomii nazwę równania Chandrasekhara–Müncha (zob. [1], str. 335–337).

Metody rozwiązywania tego równania oraz rozwiązania w szczególnych przypadkach podano w pracach [1] i [3].

Uwagi końcowe. Znaleziona z równania Chandrasekhara–Müncha gęstość $g_t(u)$ określa rozkład prawdopodobieństwa jasności światła $U(t)$. Rozkład ten pozwala ocenić jasność światła w dowolnym punkcie Drogi Mlecznej przy założeniu istnienia absorbcji światła. Fakt ten jest bardzo przydatny w badaniach astronomicznych. Rozmiary, kształt oraz szczegóły struktury obiektów naszej Galaktyki określane są między innymi przy użyciu funkcji jasności światła $g_t(u)$ i współczynnika przezroczystości (zob. [4]). Znajomość tych wielkości jest konieczna na przykład przy badaniu rozkładu przestrzennego gwiazd, ocenianiu odległości chmury, określaniu masy gwiazd itp. Do czasu wyprowadzenia równania Chandrasekhara–Müncha w wielu problemach przyjmowano, że funkcja jasności jest stała, absorbcję zaś zaniedbywano. Założenia te powodowały znaczne rozbieżności w wynikach badań astronomicznych. Problem rozwiązały dopiero prace Chandrasekhara i Müncha, którzy stosując metody procesów stochastycznych wyprowadzili fundamentalne równanie na funkcję jasności światła Drogi Mlecznej przy uwzględnieniu zjawiska absorbcji.

Bibliografia

[1] A. T. Bharucha-Reid, *Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications*, New York 1960.

[2] W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, tom 2, Warszawa 1969.

[3] A. Ramakrishnan and P. H. Mathews, *The solution of an integral equation of Chandrasekhar and Münch*, Astrophysical Journ. 119 (1954), str. 192.

[4] O. Struve i V. Zebergs, *Astronomia XX wieku*, Warszawa 1967.