ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA III: MATEMATYKA STOSOWANA V (1975)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

G. WOŹNIAKOWSKA i H. WOŹNIAKOWSKI (Warszawa)

Algorytmizacja metody me-T

1. Wstęp. W pracy opisujemy metodę me-T, będącą połączeniem metody minimalnych błędów (me) z metodą Czebyszewa (T) dla rozwiązywania wielkich rzeczywistych układów równań liniowych,

$$A\vec{x} + \vec{b} = \vec{0}, \qquad A \ (n \times n), \qquad \vec{b} \ (n \times 1) \tag{1}$$

o dowolnej macierzy A. Do układu (1) stosujemy nieefektywnie transformację Gaussa, otrzymując układ

$$M\vec{x} + \vec{g} = \vec{0}, \qquad M = A^T A, \qquad \vec{g} = A^T \vec{b}. \tag{2}$$

Szczególna, sfaktoryzowana postać macierzy M pozwala zastosować metodę me (por. [4]). Informacja o układzie (2) wykorzystywana w metodzie me-T jest dana poprzez procedurę obliczania wektora $\vec{y} = A^T(A\vec{x} + \vec{b})$ dla danego wektora $\vec{x}$. Jedyną potrzebną informację o widmie macierzy M stanowi liczba $b \geqslant \|M\|_2$. Metoda me-T znajduje przybliżenie rozwiązania (2), jak również podaje przybliżenie najmniejszej wartości własnej macierzy M. Jeśli macierz M jest osobliwa oraz układ (1) jest niesprzeczny, to przyjmując za przybliżenie początkowe wektor zerowy metoda me-T przybliża rozwiązanie normalne (1). Wskaźnik uwarunkowania układu (2) jest kwadratem wskaźnika uwarunkowania układu (1). Transformacja Gaussa powoduje więc znaczne pogorszenie szybkości zbieżności procesów iteracyjnych. Dlatego stosowanie metody me-T powinno ograniczać się jedynie do zadań, których nie potrafimy sprowadzić do układu liniowego o symetrycznej, dodatnio określonej macierzy z zachowaniem rzędu uwarunkowania.

2. Metoda minimalnych błędów i metoda Czebyszewa. Załóżmy chwilowo, że macierz M jest nieosobliwa. Niech $\vec{x}^* = -M^{-1}\vec{g}$ będzie rozwiązaniem (2). Rozwiązania $\vec{x}^*$ poszukujemy, konstruując ciąg $\{\vec{x}_k\}$ spełniający relację

$$\vec{x}_k - \vec{x}^* = W_k(M)(\vec{x}_0 - \vec{x}^*), \qquad W_k \in P_k(0, 1), \tag{3}$$

gdzie $P_k(0, 1)$ oznacza klasę wielomianów stopnia $\leqslant k$ przyjmujących w zerze wartość jeden.

Metoda minimalnych błędów (me) polega na takim wyborze wielomianów W_k aby zminimalizować $\|\vec{x}_k - \vec{x}^*\|_2$, tzn. aby był spełniony warunek:

$$\|W_k(M)(\vec{x}_0 - \vec{x}^*)\|_2 = \inf_{P \in P_k(0,1)} \|P(M)(\vec{x}_0 - \vec{x}^*)\|_2. \tag{4}$$

Przedstawmy początkowy wektor błędu w postaci

$$\vec{x}_0 - \vec{x}^* = \sum_{j=1}^{m} \vec{\xi}_j c_j, \tag{5}$$

gdzie $c_j \neq 0, M\vec{\xi}_j = \vec{\xi}_j \lambda_j, j = 1, 2, \ldots, m \leqslant n, 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m, (\vec{\xi}_i, \vec{\xi}_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$

Rozwiązaniem problemu (4) (por. [3], [4]) są wielomiany W_k ortogonalne w sensie iloczynu skalarnego,

$$(f, g) = \sum_{j=1}^{m} c_j^2 \lambda_j f(\lambda_j) g(\lambda_j).$$

Metoda me konstruuje ciąg $\{x_k\}$ o własnościach (por. [4]):

$$\begin{aligned} &\| \vec{x}_k - \vec{x}^* \|_2 \leqslant 2\, \sigma_1^k \| \vec{x}_0 - \vec{x}^* \|_2, \qquad k = 1, 2, \ldots, \\ &\vec{x}_k = \vec{x}^*, \qquad k \geqslant m. \end{aligned} \tag{6}$$

gdzie $\sigma_1 = (\sqrt{\lambda_m} - \sqrt{\lambda_1})/(\sqrt{\lambda_m} + \sqrt{\lambda_1})$.

Niestety, algorytm me, bazujący na formule trójczłonowej dla wielomianów ortogonalnych W_k, jest numerycznie niestabilny. Nie pozwala to w praktyce otrzymać po m krokach rozwiązania, a dla zadań źle uwarunkowanych błąd po m krokach jest często na poziomie błędu początkowego.

Dlatego też stosowanie samej metody me nie jest zalecane (dotyczy to również metod cg, mr, por. [1]).

Aby zabezpieczyć się przed numeryczną niestabilnością metody me proponujemy stosowanie jej w połączeniu z metodą Czebyszewa (T).

Metoda T jest definiowana następująco (por. [1], [2] i [3]). Oszacujmy błąd k-tego przybliżenia w (3),

$$\| \vec{x}_k - \vec{x}^* \|_2 \leqslant \| W_k(M) \|_2 \| \vec{x}_0 - \vec{x}^* \|_2.$$

Ze względu na symetrię macierzy M

$$\| W_k(M) \|_2 \leqslant \| W_k \| \overset{\mathrm{df}}{=} \max_{\lambda_{\min} \leqslant \lambda \leqslant \lambda_{\max}} | W_k(\lambda) |,$$

($\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ oznaczają odpowiednio najmniejszą i największą wartość własną M).

Wielomiany W_k w metodzie T wybieramy tak, aby zminimalizować normę $\| W_k \|$, tzn. zachodzi równość

$$\| W_k \| = \inf_{P \in P_k(0,1)} \| P \|. \tag{7}$$

Rozwiązanie warunku (7) wyraża się poprzez wielomiany Czebyszewa (por. [1], str. 50), a ciąg błędów spełnia zależność

(8) $$\|\vec{x}_k - \vec{x}^*\|_2 \leqslant 2\,\sigma_2^k \|\vec{x}_0 - \vec{x}^*\|_2, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

gdzie $\sigma_2 = (\sqrt{\lambda_{max}} - \sqrt{\lambda_{min}})/(\sqrt{\lambda_{max}} + \sqrt{\lambda_{min}})$.

Ponieważ na ogół $\lambda_{min} = \lambda_1$, $\lambda_{max} = \lambda_m$ z (5) i (6) wynika $\sigma_1 = \sigma_2$, co oznacza, że dla początkowych kroków iteracyjnych oszacowanie błędu w metodzie me i T są takie same. Metoda Czebyszewa wymaga znajomości λ_{min} oraz λ_{max}, ewentualnie przedziału $[a, b]$ zawierającego wartości własne M.

3. Algorytmy metod me i T. Wykorzystanie formuł rekurencyjnych dla wielomianów ortogonalnych występujących w metodach me i Czebyszewa, prowadzi do związków rekurencyjnych na kolejno konstruowane wektory $\vec{x}_k$ (por. [1], [2], [4]):

(9) $$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \Delta\vec{x}_k,$$
$$\Delta\vec{x}_k = (\Delta\vec{x}_{k-1} e_{k-1} - \vec{r}_k)/q_k,$$
$$\vec{r}_k = A^T(A\vec{x}_k + \vec{b}),$$

gdzie współczynniki e_{k-1}, q_k są równe odpowiednio:

W metodzie me

$$e_{-1} = 0, \qquad q_k = \frac{(\vec{r}_k, \vec{r}_k)}{c_k} - e_{k-1}, \qquad e_k = q_k \frac{c_{k+1}}{c_k}$$

dla

(10) $$c_k = (\vec{r}_k, \vec{x}_k - \vec{x}^*) = \|A\vec{x}_k + \vec{b}\|_2^2.$$

W metodzie T na przedziale $[a, b]$

$$q_0 = (a+b)/2; \qquad q_1 = (a+b)/2 - (b-a)^2/(4(b+a)),$$
$$q_k = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{16\,q_{k-1}}, \qquad k = 2, 3, \ldots,$$
$$e_{-1} = 0, \qquad e_0 = (b-a)^2/(4(a+b)),$$
$$e_k = \frac{(b-a)^2}{8(b+a) - 16\,e_{k-1}}, \qquad k = 1, 2, \ldots \quad \blacksquare$$

Uwagi. 1° Obliczanie współczynników c_k w metodzie me, por. (10), jest możliwe tylko dzięki szczególnej i sfaktoryzowanej postaci macierzy układu $M = A^T A$.

2° Współczynniki metody me spełniają zależność:

$$q_k + e_{k-1} = \frac{(\vec{r}_k, \vec{r}_k)}{c_k} = \frac{(M(\vec{x}_k - \vec{x}^*), M(\vec{x}_k - \vec{x}^*))}{(M(\vec{x}_k - \vec{x}^*), \vec{x}_k - \vec{x}^*)} = \frac{(M\vec{y}, \vec{y})}{(\vec{y}, \vec{y})}$$

dla wektora $\vec{y} = M^{1/2}(\vec{x}_k - \vec{x}^*)$.

Stąd otrzymujemy

$$\lambda_1 \leqslant \frac{(\vec{r}_k, \vec{r}_k)}{c_k} \leqslant \lambda_m. \tag{11}$$

Jeśli $\vec{y} \to \vec{\xi}, M\vec{\xi} = \vec{\xi}\lambda$, to

$$\frac{(\vec{r}_k, \vec{r}_k)}{c_k} \to \lambda. \tag{12}$$

3^σ Jeśli przedział $[a, b]$ w metodzie T zawiera spektrum macierzy M, $a \leqslant \lambda_{\min}, \lambda_{\max} \leqslant b$, to oszacowanie błędu jest postaci

$$\|\vec{x}_k - \vec{x}^*\|_2 \leqslant 2\left(\frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}\right)^k \|\vec{x}_0 - \vec{x}^*\|_2.$$

W metodzie me-T będziemy używali metody T także na przedziale $[a, b]$, gdy $\lambda_{\min} < a$, $\lambda_{\max} \leqslant b$, co pozwoli szybciej redukować składowe błędu w kierunkach należących do wartości własnych większych od a (por. [1]).

4. Metoda me-T. Metoda me-T jest połączeniem metod me oraz T. W [1] opisana jest analogiczna metoda mr-T, stanowiąca połączenie metod mr i T. W metodzie mr są minimalizowane residua $\vec{r}_k$, natomiast teraz, dzięki szczególnej postaci macierzy M, możemy minimalizować błędy $\vec{x}_k - \vec{x}^*$. Pierwszy etap metody me-T polega na zastosowaniu metody T na przedziale $[a, b]$, gdzie $b \geqslant \lambda_{\max} = \|M\|_2, a = b/2$ (czyli na ogół $\lambda_{\min} \ll a$).

Z (3) i (5) wynika

$$\vec{x}_k - \vec{x}^* = \sum_{j=1}^{m} \vec{\xi}_j c_j W_k(\lambda_j). \tag{13}$$

Wielomiany W_k przybliżają najlepiej zero w przedziale $[a, b]$ w klasie $P_k(0, 1)$, a ponadto

$$\forall_{\varepsilon > 0} \lim_{k \to \infty} \frac{W_k(\lambda)}{W_k(\lambda - \varepsilon)} = 0 \qquad \text{dla} \qquad \lambda \in (0, a).$$

Dla dużych k zależność (13) możemy przedstawić w postaci

$$\vec{x}_k - \vec{x}^* \cong \sum_{\lambda_j < a} \vec{\xi}_j c_j W_k(\lambda_j) \cong \vec{\xi}_1 c_1 W_k(\lambda_1).$$

Widzimy, że ciąg błędów $\vec{x}_k - \vec{x}^*$ asymptotycznie „układa się" w podprzestrzeni rozpiętej na wektorach własnych, przynależnych do wartości własnych mniejszych niż a, a „w dalszej kolejności" w podprzestrzeni przynależnej do najmniejszej wartości własnej λ_1.

Stąd i z (12) wynika:

$$\frac{\|A^H (A\vec{x}_k + \vec{b})\|_2}{\|A\vec{x}_k + \vec{b}\|_2} \to \lambda_1, \qquad k \to \infty, \tag{14}$$

co oznacza, że w trakcie realizacji metody T na przedziale $[a, b]$ możemy znaleźć przybliżenie najmniejszej wartości własnej λ_1 w rozłożeniu spektralnym początkowego wektora błędu (5).

Załóżmy, że w pierwszym etapie wykonaliśmy k kroków metodą T, gdzie k jest tak dobrane, aby w przedziale $[a, b]$ zredukować błąd $(\mathrm{eps})^{-1}$ razy, eps – zadana mała liczba, tzn. k spełnia warunek

$$\left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}\right)^k \leqslant \frac{\mathrm{eps}}{2}.$$

Aby wykorzystać szczególne położenie wektora błędów, $\vec{x}_k - \vec{x}^*$, zastosujemy teraz metodę me, traktując $\vec{x}_k$ jako wektor początkowy iteracji. Metoda ta będzie głównie redukować te składowe, które odpowiadają wartościom własnym mniejszym od a, czyli te składowe, które były najmniej redukowane w metodzie T.

Pamiętając o numerycznej niestabilności metody me, pracujemy tą metodą tylko tak długo, jak długo prawdziwe są oszacowania

$$\|\vec{x}_{i+k} - \vec{x}^*\|_2 \leqslant 2\left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a_1}}{\sqrt{b}+\sqrt{a_1}}\right)^i \|\vec{x}_k - \vec{x}^*\|_2, \qquad i = 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

gdzie a_1 oznacza obliczone w pierwszym etapie metodą T przybliżenie λ_1 (por. (14)).

Oszacowanie (15) dla $a_1 \cong \lambda_1$ teoretycznie jest spełnione zawsze i oznacza, że metoda jest co najmniej tak szybko zbieżna jak metoda Czebyszewa na przedziale $[a_1, b]$. Sprawdzanie warunku (15) w rachunku numerycznym oznaczałoby badanie wpływu błędu zaokrągleń na konstruowany ciąg przybliżeń. Gdybyśmy mogli faktycznie sprawdzać ten warunek, to zabezpieczylibyśmy się przed numeryczną niestabilnością metody me (przerywając jej realizację, gdy warunek nie będzie spełniony). Ponieważ jednak nie możemy znać dokładnie normy błędu $\|\vec{x}_{i+k} - \vec{x}^*\|_2$, więc zależność (15) zastępujemy dającym się efektywnie sprawdzać warunkiem,

$$\|A\vec{x}_{k+i} + \vec{b}\|_2 \leqslant 2\left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a_1}}{\sqrt{b}+\sqrt{a_1}}\right)^i \sqrt{\frac{b}{a_1}}\, \|A\vec{x}_k + \vec{b}\|_2. \tag{16}$$

(Jak długo jest spełnione (15), tak długo jest również spełnione (16), ale z (16) wynika $\|\vec{x}_{k+i} - \vec{x}^*\|_2 \leqslant 2\left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a_1}}{\sqrt{b}+\sqrt{a_1}}\right)^i \frac{b}{a_1} \|\vec{x}_k - \vec{x}^*\|_2$ o ile tylko $a_1 \cong \lambda_1$). Jeśli zależność (16) nie jest spełniona, przechodzimy ponownie do metody T, tym razem już na przedziale $[a_1, b]$. Takie stosowanie na przemian metod T i me nazywamy metodą me-T (por. [1] dla metody mr-T).

5. Uwagi o algorytmie me-T. Celem metody me-T jest wyznaczenie, o ile to możliwe, przybliżenia $\vec{x}_k$ o błędzie względnym nie przekraczającym zadanej z góry liczby eps,

$$\frac{\|\vec{x}_k - \vec{x}^*\|_2}{\|\vec{x}_k\|_2 + 10^{-2}} \leqslant \mathrm{eps}. \tag{17}$$

Dodanie 10^{-2} do normy $\vec{x}_k$ jest istotne tylko wtedy gdy wyznaczane rozwiązanie ma małą normę.

Proces obliczeniowy przerywamy, gdy
1^σ prawdziwa jest nierówność (17),
2^σ macierz układu M jest numerycznie osobliwa,
3^σ osiągnęliśmy graniczną maksymalną dokładność.
Omówmy pokrótce te przypadki.

1^σ Spełnianie (17) sprawdzamy przez

$$\frac{\|A\vec{x}_k + \vec{b}\|_2}{\|\vec{x}_k\|_2 + 10^{-2}} \leqslant \frac{\text{eps}}{\|A^{-1}\|_2}$$

gdzie na miejsce $\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\|M^{-1}\|_2}$ podstawiamy $1/\sqrt{a_1}$, a_1 najlepsze znane przybliżenie najmniejszej wartości własnej macierzy M.

2^σ Numeryczną osobliwość M sprawdzamy przy obliczaniu ilorazów Rayleigha (11). Mianowicie, wartość λ z (11),

$$\lambda = \frac{(\vec{r}_k, \vec{r}_k)}{c_k} = \frac{(M\vec{y}, \vec{y})}{(\vec{y}, \vec{y})}, \qquad y = M^{1/2}(\vec{x}_k - \vec{x}^*),$$

leży w przedziale $[\lambda_1, \lambda_m] \subset [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$. Można pokazać, że obliczona wartość λ

$$\lambda = \text{fl}\left(\frac{\|A^T(A\vec{x}_k + \vec{b})\|_2^2}{\|A\vec{x}_k + \vec{b}\|_2^2}\right)$$

(fl oznacza t-cyfrową arytmetykę zmiennopozycyjną) spełnia warunek

$$\lambda_1 \leqslant \lambda + 2 \cdot 2^{-t} \cdot s\sqrt{n}\,\|M\|_2, \tag{18}$$

gdzie s oznacza maksymalną liczbę niezerowych elementów w kolumnach i w wierszach macierzy A, $1 \leqslant s \leqslant n$.

Jeśli

$$\lambda \leqslant s\sqrt{n}\,2^{-t}\|M\|_2,$$

to wskaźnik uwarunkowania układu (2) spełnia nierówność

$$\|M\|_2\|M^{-1}\|_2 \geqslant \frac{1}{3s\sqrt{n}} \cdot 2^t,$$

co oznacza numeryczną osobliwość macierzy M.

3^σ Graniczną maksymalną dokładność osiągniemy wówczas, gdy normy wektorów residualnych, $A\vec{x}_k + \vec{b}$, lub $A^T(A\vec{x}_k + \vec{b})$, są na poziomie błędu wytworzonego przy ich obliczaniu, a więc

$$\|A\vec{x}_k + \vec{b}\|_2 \leqslant s\sqrt{n}\,\|A\|_2 2^{-t}\|\vec{x}_k\|_2,$$

$$\|A^T(A\vec{x}_k + \vec{b})\|_2 \leqslant s\sqrt{n}\,\|M\|_2 2^{-t}\|\vec{x}_k\|_2,$$

(por. [1]).

7. Testowanie procedury me-T. Procedurę me-T, realizującą metodę me-T, testowaliśmy dla macierzy A postaci

$$A = P\,\mathrm{diag}\,(\lambda_i)\,P, \qquad P = I - \frac{2}{(\vec{w}, \vec{w})}\,\vec{w}\,\vec{w}^T,$$

dla losowo wybranego wektora $\vec{w}$ i dla różnych rozkładów wartości własnych λ_i, por. [1].

Efektywność metody me-T porównywaliśmy z metodą Czebyszewa na przedziale zawierającym spektrum macierzy A^TA. We wszystkich przeprowadzonych testach metoda me-T była co najmniej tak efektywna jak metoda T, a często liczba kroków iteracyjnych w me-T była znacznie mniejsza niż w metodzie T. Znaczne zmniejszenie liczby kroków miało miejsce zwłaszcza wtedy; gdy wartości własne λ_i były umieszczone „pęczkami" lub gdy początkowy wektor własny leżał w podprzestrzeni o stosunkowo niskim wymiarze, $m \ll n$.

8. Procedura me-T.

procedure *meT*(*n,A,s,x,a1,a2,eps,macheps*);
value *n,a2*;
integer *n,s*;
real *a1,a2,eps,macheps*;
array *x*;
procedure *A*;
comment *Procedura me-T rozwiązuje układ równań liniowych wysokiego stopnia o dowolnej macierzy A postaci*:

$$A\vec{x} + \vec{b} = \vec{0}.$$

Procedura ta ponadto podaje przybliżenie najmniejszej wartości własnej macierzy A^TA.

Parametry wejścia i wyjścia:

n – *wartość całkowita, wymiar macierzy A.*

A – *procedura postaci A (x,r,nor,nor1),gdzie x,r tablice jednowymiarowe o zakresie wskaźników od 1 do n, nor,nor1 – zmienne rzeczywiste. Procedura A realizuje zależności:*

$$\vec{r} := A^T(A\vec{x} + \vec{b}),$$
$$nor1 := \|A\vec{x} + \vec{b}\|_2^2,$$
$$nor := \|\vec{r}\|_2^2,$$

s – *zmienna całkowita. Na wejściu s równa się maksymalnej ilości niezerowych elementów w wierszach i kolumnach macierzy A* $(1 \leqslant s \leqslant n)$. *Na wyjściu na zmiennej s zapamiętujemy*:
s=0 redukcja błędu o eps:
s=–2 macierz A numerycznie osobliwa
s=–3 osiągnięcie granicznej maksymalnej dokładności.

x – *tablica jednowymiarowa* [*1:n*]. *Na wejściu na x podstawiamy przybliżenie początkowe,* $x = \vec{x}_0$, *na wyjściu x zawiera przybliżenie rozwiązania* $\vec{x}^*$, $x = \vec{x}_k$.

a1 – *zmienna rzeczywista, na wejściu a1 dowolna, na wyjściu przybliżenie najmniejszej wartości własnej macierzy* $A^T A$.

a2 – *wartość rzeczywista spełniająca zależność,* $a2 \geqslant \|A\|_2$.

eps – *zmienna rzeczywista. Na wejściu eps oznacza błąd względny rozwiązania,* $\|\vec{x}_k - \vec{x}^*\| \leqslant eps(\|\vec{x}_k\| + {}_{10} - 2)$.
Na wyjściu $eps := \|A\vec{x}_k + \vec{b}\|$.

macheps – *zmienna rzeczywista równa na wejściu* $2\uparrow(-t)$, *gdzie t – ilość cyfr mantysy w arytmetyce fl.*
Na wyjściu macheps jest oszacowaniem błędu względnego $\|\vec{x}_k - \vec{x}^*\|/(\|\vec{x}_k\| + 0.01)$;

```
begin integer i,k;
  real a11,c,c1,c2,c3,c4,e,eps1,nor,nor1,q,u,v,xn;
  boolean H;
  array r,dx[1:n];
  a2:=a2×a2;
  a11:=a1:=a2/2;
  u:=s× sqrt(n)× macheps;
  macheps:=u×a2;
  v:=u× macheps;
  eps1:=v/a11;
  eps:=eps× eps;
  H:=true;
  k:=0;
ITE:;
  comment jeśli H to metoda T na przedziale [a1,a2],
          jeśli ~H to metoda me;
  if k=0 then
  begin
    for i:=1 step 1 until n do dx[i]:=0;
    A(x,r,nor,nor1);
    k:=-1
  end start meT;
  e:=0;
  c:=sqrt(a2/a11);
  c:=((c-1)/(c+1))↑2;
  c3:=4× nor1/a11;
  if H then
  begin
    c1:=(a2-a1)/2;
    c2:=c1×c1/4;
    c4:=(a2+a1)/2;
  end else
  c1:=nor/nor1;
```

```
Tme:
  if H then
  begin
    k:=k+1;
    q:=if k=0 then c4 else if k=1 then q-2×c2/q else c4-c2/q
  end else q:=c1-e;
  xn:=10-4;
  for i:=1 step 1 until n do
  begin
    u:=dx[i]:=(e×dx[i]-r[i])/q;
    u:=x[i]:=x[i]+u;
    xn:=xn+u×u
  end nowe przybliżenie;
  xn:=xn+210-2×sqrt(xn);
  u:=nor1;
  A(x,r,nor,nor1);
  e:=if-,H then q×nor1/u else if k=0 then 2×c2/c4 else c2/(c4-e);
  c1:=nor/nor1;
  if a11≥c1 then
  begin
    a11:=c1;
    if a11≤macheps then
    begin
      s:=-2;
      goto END
    end numeryczna osobliwość;
    if eps1<v/a11 then eps1:=v/a11
  end najmniejsza wartość własna;
  u:=v×xn;
  if nor1≤u∨nor≤u×a2 then
  begin
    s:=-3;
    goto END
  end granicznej dokładności;
  u:=eps×a11×xn;
  if nor1≤u∨nor≤u×a11 then
  begin
    s:=0;
    goto END
  end redukcja błędu o eps;
  c3:=c3×c;
  u:=if eps>eps1 then eps else eps1;
  if H∧c3≤xn×(if u<a2/a11 then u else a2/a11) then
  begin
    H:=false;
```

```
        k:=-1;
        goto ITE
    end przejście do metody me;
    if-,H∧c1>a1∧nor1/a2≥c3 then
    begin
        H:=true;
        a1:=a11;
        k:=-1;
        goto ITE
    end przejście do metody T;
    goto Tme;
END:;
    comment wyniki metody meT;
    a1:=a11;
    eps:=sqrt(nor1);
    if s=0∨s=-3 then macheps:=(eps+sqrt(v×xn))/sqrt(a1×xn);
end procedury meT;
```

Bibliografia

[1] A. Kiełbasiński, G. Woźniakowska, H. Woźniakowski, *Algorytmizacja metod najlepszej strategii dla wielkich układów równań o symetrycznej, dodatnio określonej macierzy*, Matematyka Stosowana 1 (1973), str. 47–68.

[2] H. Rutishauser, E. Stiefel i inni, *Refined Iterative Methods for Computation of the Solution and the Eigenvalues of Self-Adjoint Boundary Value Problem* (1959), ETH.

[3] E. Stiefel, *Kernel Polynomials in Linear Algebra and their Numerical Applications*, NBS. Appl. Math. Series 49 (1958), str. 1–22.

[4] H. Woźniakowski, *Metoda minimalnych B-błędów dla wielkich układów równań liniowych o dowolnej macierzy*, Matematyka Stosowana, ten tom, str. 29–42.