

WITOLD KOSIŃSKI (Warszawa)

PIOTR PROKOPOWICZ (Bydgoszcz i Warszawa)

Algebra liczb rozmytych

Streszczenie. Określono algebrę skierowanych liczb rozmytych (*ordered fuzzy numbers* (OFN)), która umożliwia posługiwanie się pojęciami rozmytymi, ilościowo nieostryimi, w sposób podobny do rachunku na liczbach rzeczywistych. Zbiór skierowanych liczb rozmytych, izomorficzny z kwadratem kartezjańskim przestrzeni funkcji ciągłych na odcinku jednostkowym, ma strukturę przestrzeni liniowo-topologicznej oraz algebry Banacha z jedyneką. Algebrę tę można wyposażyć w relację pre-porządku i posiada ona dzielniki zera oraz nietrywialne ideały. Podstawowe, w zastosowaniach praktycznych przy budowaniu rozmytych systemów wnioskujących, operacje wyostrzania (*defuzzification*) mogą się pojawić w tej przestrzeni Banacha jako liniowe i ciągle funkcjonały, reprezentowane przez pary miar Radona (tutaj dwie całki w sensie Stieltjesa względem funkcji o wahanii skończonym). Dalsze uogólnienie prowadzi do pojęcia skierowanych zbiorów rozmytych i odpowiadającej algebry Banacha. Przedstawione podstawy algebry skierowanych liczb (zbiorów) rozmytych dają możliwość budowy odpowiedników znanych pojęć z teorii równań różniczkowych, wzbogacając metody sterowania o nowe modele rozmyte. Z powodzeniem dokonana w środowisku Windows, w kalkulatorze rozmytym zCalc, programowa implementacja wprowadzonych operacji na liczbach rozmytych pozwala mieć nadzieję na szybki rozwój zastosowań przedstawionych tutaj pojęć i modeli.

1. Idea zbiorów rozmytych. Przy próbie opisywania świata napotyka się sytuacje, które dość łatwo określić słowami potocznymi, np. „duży deszcz”, „bardzo ciepło” itp. Gdy jednak trzeba słowa potoczne zamienić na odpowiadające im konkretne wartości liczbowe, zaczynają się problemy. „Wolny” samochód ma przecież taką szybkość, którą określilibyśmy jako „bardzo dużą”, gdyby odnosiła się do poruszającego się człowieka. Żyjemy w świecie, gdzie takich zależności jest bardzo wiele, i w życiu codziennym,

w mowie potocznej, nie mamy z tym większych problemów. Problemy pojawiają się, gdy potrzebny jest formalny opis. Dość skuteczną metodę opisu takich nieprecyzyjnych zjawisk znaleziono poprzez wykorzystanie logiki rozmytej, która jest jedną z logik wielowartościowych.

Logika wielowartościowa, której twórcą jest J. Łukasiewicz, dzięki swoim publikacjom na przełomie lat dwudziestych i trzydziestych ubiegłego stulecia [1], dopiero chyba na początku lat 60-tych jednocześnie z pojawieniem się koncepcji zbiorów rozmytych otrzymała kontynualny zbiór wartości i odpowiadającą mu nazwę logiki rozmytej. Za datę początkową dla teorii zbiorów rozmytych uznaje się rok 1965, w którym w czasopiśmie „Information and Control” ukazała się praca Zadeha pod tytułem „Fuzzy sets” [34].

Zbiory rozmyte wraz z logiką rozmytą są szeroko stosowane w problemach związanych ze sterowaniem. Coraz częściej i coraz to nowymi drogami logika rozmyta wkracza w codzienne życie. Wszelkiego rodzaju podzespoły sprzętu komputerowego, samochodów czy elementy wyposażenia domu (AGD, RTV) opisywane są słowami „Fuzzy logic inside”, oznaczającymi wykorzystanie elementów teorii zbiorów rozmytych w sterowaniu procesami działającymi w tych urządzeniach.

Ciekawe jest, że układy sterujące z wykorzystaniem logiki rozmytej są stosowane z sukcesem w sytuacjach, którymi mógłby sterować doświadczony w swej dziedzinie człowiek. On jednak nie byłby często w stanie w sposób formalny i jednoznaczny określić motywów swoich decyzji, używałby do oceny sytuacji typowo ludzkich nieprecyzyjnych sformułowań.

Rzecz jasna, rozwój teorii zbiorów rozmytych wg Zadeha trwa już blisko 40 lat. Niestety nie wszyscy twórcy podstaw matematycznych systemów wnioskujących (decyzyjnych) są przekonani do ich możliwości aplikacyjnych. Często słyszy się: kolejne operacje dokonane na wielkościach rozmytych zmniejszają ich konkretną zawartość, zwiększając ich rozmytość. Tym samym korzystanie z tych pojęć i klasycznych operacji, bazujących na zasadzie rozszerzenia Zadeha (por. zależności (7) oraz (8) w punkcie 1.1) [35, 6, 36], jest obciążone dużą niedoskonałością [10].

Klasycznie zbiór rozmyty jest pojęciem uogólniającym koncepcję zbioru, czy podzbioru pewnego niepustego zbioru (przestrzeni, uniwersum) $\mathcal{X}$. W języku funkcji zbiór $A \subset \mathcal{X}$ jest utożsamiany z jego funkcją charakterystyczną $\chi_A : \mathcal{X} \rightarrow \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$, rozumianą jako funkcja rzeczywista o wartościach binarnych 0 lub 1, gdzie $\mathbb{R}$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych. Rachunek na zbiorach, algebra Boole’a podzbiorów przestrzeni $\mathcal{X}$, mają swoje przełożenie na rachunek na odpowiadających im funkcjach charakterystycznych zbiorów. Zauważmy, że gdy jako przestrzeń $\mathcal{X}$ wybierzemy zbiór liczb rzeczywistych i jednocześnie ograniczymy na moment nasze zainteresowanie do funkcji charakterystycznych podzbiorów jednoelementowych, to możemy zaproponować inny rachunek na tych funkcjach, zgodny z algebrą liczb rze-

czywistych, typu

$$(1) \quad (\chi_r + \chi_s)(x) = \chi_{r+s}(x) \quad \text{dla każdego } x, r, s \in \mathbb{R},$$

gdzie $\chi_r(x) = 1$ dla $x = r$ oraz $\chi_r(x) = 0$ w przeciwnym razie. W tym podzbiorze mnożenie przez skalar można utożsamiać z mnożeniem elementów, gdyż dla dowolnych $a, r \in \mathbb{R}$ iloczyn funkcji charakterystycznej χ_r przez skalar $a \in \mathbb{R}$ spełnia zależność

$$(2) \quad (a\chi_r)(x) = \chi_{ar}(x) = (\chi_a \cdot \chi_r)(x).$$

Rozszerzmy nasze zainteresowanie na większy zbiór funkcji $\mathcal{F}$: niech do $\mathcal{F}$ należą wszystkie funkcje rzeczywiste na $\mathcal{X}$, ale o wartościach w przedziale $[0, 1]$. W ten sposób pojawia się jeden z wariantów pojęcia zbioru rozmytego, jako elementu zbioru $\mathcal{F}$. Widać, że funkcje charakterystyczne podzbiorów w $\mathcal{X}$ tworzą podzbiór właściwy zbioru $\mathcal{F}$. A co można powiedzieć o operacjach na tych nowych obiektach? Zwykle działania na funkcjach, określone punktowo i prowadzące do standardowej algebry funkcji, nie wchodzą w rachubę, gdyż wartości funkcji wynikowych muszą leżeć w odcinku $[0, 1]$. Nawet gdy ograniczymy się do $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, niełatwo odpowiedzieć na pytanie, czy można określić działania w taki sposób, aby były zgodne z działaniami na liczbach rzeczywistych (por. równości (1) i (2)).

Celem, jaki przyświecał autorom serii publikacji [23, 9, 24], [26, 25, 29], [30, 28], było przewyciężenie głównych niedoskonałości klasycznego, opartego na zasadzie rozszerzenia Zadeha, rachunku na liczbach rozmytych i takie zdefiniowanie modelu liczb rozmytych, by liczby rzeczywiste można było traktować jako szczególny przypadek liczb rozmytych. Dodatkowo działania algebraiczne w takim modelu powinny być zgodne z działaniami na zwykłych liczbach rzeczywistych i posiadać własność rozdzielności mnożenia względem dodawania, a jednocześnie dawać poprawne wyniki dla liczb rozmytych.

Rezultaty mają uzupełnić istniejące modele o prosty sposób połączenia działań na liczbach rozmytych z liczbami rzeczywistymi z zachowaniem własności algebry liczb rzeczywistych, a w szczególności zapewnienia istnienia elementów neutralnych względem dodawania i mnożenia, przemienności dodawania oraz możliwości rozwiązania dowolnego równania w arytmetyce nowego modelu liczb rozmytych.

Jak się później okaże, zaproponowane uogólnienie liczby rozmytej prowadzi do istnienia wymaganych elementów neutralnych oraz rozwiązań równań i daje możliwość kontrolowania rozmycia wyników działań na liczbach rozmytych. Nowy model spełnia nie tylko aksjomaty pierścienia, ale i algebry, czego nie można powiedzieć o liczbach rozmytych zdefiniowanych z użyciem pojęcia zbiorów rozmytych według Zadeha [3]. Ważną własnością tego modelu jest prostota implementacji, co zostało zrealizowane między innymi w aplikacji Fuzzy Calculator o nazwie roboczej **zCalc**, por. [28].

Trochę historii. Ogólnie akceptowalna teoria liczb rozmytych (por. pierwszą pozycję polską na ten temat przedwcześnie zmarłego profesora Ernesta Czogały i jego współpracownika Witolda Pedrycza [2]) została zaproponowana w 1978 r. przez Dubois i Prade'a w [3]. Autorzy ci dla ułatwienia rachunków zaproponowali ograniczoną klasę funkcji przynależności, umieszczając w niej tzw. liczby typu (L, R) , z dwoma funkcjami kształtu L i R .

Rachunek na tych liczbach był zbudowany na zasadzie rozszerzenia Zadeha. W szczególności, gdy funkcje kształtu miały wykresy liniowe, można było odtworzyć trójkątne funkcje przynależności. Ale już po kilku operacjach mnożenia funkcji wynikowych nie odtwarzano zgodnie z tą zasadą, ale przyjmowano pewną ich aproksymację. Prowadziło to w naturalny sposób do błędów zaokrągleń, które w miarę obliczeń kumulowały się, czasem bez możliwości kontroli (por. uwagi w pracach [22, 33]).

Niezadowoleni z tego stanu rzeczy próbowali zaproponować pewne modyfikacje, por. [2, 21, 7, 14, 12, 22, 11]. Pierwszy autor tego artykułu, wspólnie ze swoim doktorantem P. Słyszem, próbowali w 1993 r. przededefiniować działania i pojęcie liczby rozmytej w [23]. Tak więc tam należy szukać początków podejścia, jakie prezentujemy w tym artykule. Nie byłoby jednak końcowego efektu i naszej definicji skierowanej liczby rozmytej bez ścisłej współpracy całej trójki autorów podstawowych publikacji [9, 24, 26, 25], tj. piszących tutaj W.K., P.P. oraz Dominika Ślęzaka. Do pierwszej z tych publikacji wnieśli też swój wkład K. Piechór i K. Tyburek. Zapewne nie byłoby też prezentowanych wyników bez stymulujących dyskusji z kolegami, wśród których chcemy wymienić prof. J. Łęskiego, bliskiego współpracownika nieodżałowanego profesora Czogały, a także prof. J. Skrzypczyka i dra Z. Kulpę.

1.1. Zbiory rozmyte

DEFINICJA. Zbiorem rozmytym A na pewnej przestrzeni $\mathcal{X}$ nazywamy zbiór par

$$(3) \quad A = \{(x, \mu_A) : x \in \mathcal{X}\},$$

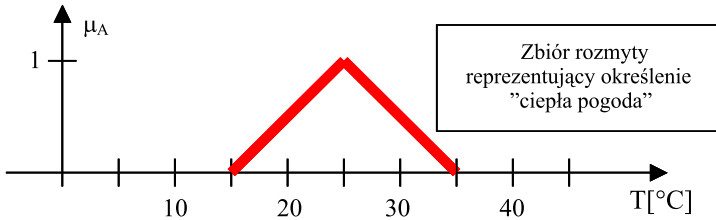
gdzie $\mu_A \in [0, 1]$ nosi nazwę *stopnia przynależności* x do zbioru rozmytego A .

Jak widać, przy tak ogólnym sformułowaniu zbiór rozmyty jest relacją w $\mathcal{X} \times [0, 1]$. Z tak ogólnego sformułowania będziemy w dalszej części pracy korzystali. Przypomnijmy jednak dla porządku, że w swojej fundamentalnej pracy [34] z 1965 r. Zadeh prawie natychmiast przyjął, że drugi element każdej pary jest funkcją, która przypisuje każdemu elementowi $x \in \mathcal{X}$ jego stopień przynależności (*membership level*) do zbioru A , przy czym

$$\mu_A : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1], \quad \text{zatem} \quad \mu_A(x) \in [0, 1].$$

Funkcja μ_A nazywana jest *funkcją przynależności* i jest prostym uogólnieniem funkcji charakterystycznej zbioru, skoro wartości tej funkcji mogą należeć do całego przedziału jednostkowego $[0, 1]$. Liczby rozmyte to szczególny przypadek zbiorów rozmytych określonych na $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ (zbiorze liczb rzeczywistych).

Do reprezentacji funkcji przynależności z powodzeniem używa się wykresów. Rys. 1 przedstawia termin: CIEPŁA POGODA. Dziedziną μ_A jest tutaj zbiór wartości temperatur możliwych do zmierzenia dostępnymi przyrządami. Należy dodać, że jest to przykładowy zbiór zgodny z odczuciami większości osób zamieszkujących Polskę lub kraje o podobnym klimacie. Osoby zamieszkujące miejsca, gdzie występuje klimat arktyczny, stwierdziłyby, że CIEPŁA POGODA to termin określający chwile, gdy temperatura jest w okolicach 0°C .



Rys. 1

Dość często w literaturze przedmiotu, por. [21, 22], [33, 3, 5, 12, 2], [6], określenie LICZBA ROZMYTA jest przypisywane zbiorom rozmytym określonym na osi liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, o ile spełniają warunki:

1. zbiór jest normalny,
— czyli istnieje argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 1;
2. zbiór jest wypukły,
— zbiór rozmyty A jest wypukły, gdy

$$\forall_{x,y \in \mathcal{X}} \forall_{\lambda \in [0;1]} : \mu_A(\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(y));$$

3. nośnik funkcji μ_A jest przedziałem;
4. μ_A jest funkcją przedziałami ciągłą.

Zbiory rozmyte spełniające powyższe cztery warunki w wielu pracach nazywane są *rozmytymi liczbami wypukłymi* [2, 14, 21, 7, 12, 22]. Często warunek ostatni (4) zastępuje się bądź pełną ciągłością (ale wtedy zbiory jednopunktowe, np. liczby rzeczywiste reprezentowane przez funkcje charakterystyczne, są wyłączone z tej definicji), bądź półciągłością z dołu. Ponadto, skoro (istotny) nośnik $\text{supp}(A) := \{x \in \mathcal{X} : \mu_A(x) > 0\}$ jest przedziałem, warunek wypukłości (2) zbioru można zastąpić warunkiem (quasi) wklęsłości funkcji przynależności (por. Drewniak [21]).

W pierwszych pracach autorów (por. [9, 24]) warunek wypukłości zbioru A został zamieniony na warunek ściślejszej quasi-wypukłości funkcji $-\mu_A$ (zwracamy uwagę na minus) na jej nośniku. Przypomnijmy, że funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest *ściśle quasi-wypukła*, jeśli dla dowolnej trójki liczb $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x < y < z$, mamy

$$(4) \quad f(x) \leq f(z) \Rightarrow f(y) \leq f(z) \quad \text{oraz} \quad f(x) < f(z) \Rightarrow f(y) < f(z).$$

Jeśli funkcja przynależności μ_A jest ściśle quasi-wklęsła na swoim nośniku, to na podstawie podstawowego twierdzenia teorii funkcji wypukłych (por. np. [31]) funkcja ta jest przedziałami odwracalna. Zacytujmy więc

Twierdzenie 1. *Funkcja skalarna $f(x)$ jest ściśle quasi-wypukła w zbiorze wypukłym Y wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny odcinek $[x_1, x_2] \subset Y$ można podzielić na trzy odcinki (każdy punkt podziału jest końcem przynajmniej jednego z tych odcinków) w taki sposób, że $f(x)$ jest malejąca w pierwszym, stała w drugim i rosnąca w trzecim. Jeden lub dwa dowolne z tych odcinków mogą być puste lub zdegenerowane do punktów x_1 i (lub) x_2 .*

Łatwo zauważyć, iż w przypadku ściślejszej quasi-wklęsłości zmienia się jedynie kolejność cech monotoniczności poszczególnych odcinków przedziału $[x_1, x_2]$. Dzięki warunkowi ściślejszej quasi-wklęsłości można stwierdzić, że jeśli mamy liczbę rozmytą A o funkcji przynależności μ_A , to jej nośnik $\text{supp } A =: (l_A, p_A) \subset \mathbb{R}$ można rozłożyć na trzy podprzedziały:

$$(5) \quad \text{supp}(A) = \text{rosn}(A) \cup \text{stała}(A) \cup \text{malej}(A);$$

na pierwszym funkcja jest rosnąca, na drugim stała, a na trzecim malejąca, tzn. istnieją dwie liczby rzeczywiste $1_A^-, 1_A^+ \in [l_A, p_A]$ (por. [24]) takie, że $\text{rosn}(A) := (l_A, 1_A^-)$, $\text{malej}(A) := (1_A^+, p_A)$ oraz $\text{stała}(A) = [1_A^-, 1_A^+]$. Warunek ten można by nazwać *quasi-odwracalnością*.

Dzięki quasi-odwracalności uzyskujemy możliwość zdefiniowania działań na odwrotnościach części funkcji przynależności liczb rozmytych. Własność ta pozwala na całkiem efektywne dodanie dwóch liczb rozmytych $A = \mu_A$ i $B = \mu_B$ w taki sposób, że dodajemy do siebie odwrotności części rosnących funkcji μ_A i μ_B , a następnie części malejących. Po ponownym odwróceniu sum poszczególnych części uzyskujemy w wyniku μ_C , którą traktujemy jako funkcję przynależności liczby C będącej wynikiem dodawania $A + B$, tj.

$$(6) \quad \begin{aligned} (C|\text{rosn}(C))^{-1} &= (A|\text{rosn}(A))^{-1} + (B|\text{rosn}(B))^{-1}, \\ (C|\text{malej}(C))^{-1} &= (A|\text{malej}(A))^{-1} + (B|\text{malej}(B))^{-1}. \end{aligned}$$

Oczywistym wnioskiem jest, iż nośnik jest przedziałem rzeczywistym, co prowadzi do propozycji, by w działaniach na liczbach rozmytych wykorzystać *rachunek przedziałowy* ([4]). Tak określone działania są łatwo algorytmizowalne, na co zwrócili uwagę już wcześniej autorzy prac [21, 13, 7, 9, 14, 24].

Warto jednak w tym miejscu przytoczyć zasadę rozszerzenia Zadeha, która ma zastosowanie do dowolnego typu zbiorów rozmytych i operacji określonych na (podstawowej) przestrzeni $\mathcal{X}$. Ogólniej, jeśli mamy zbiory rozmyte określone na dwóch przestrzeniach $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ oraz funkcję $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, zaś A jest zbiorem rozmytym w $\mathcal{X}$, to A wyznacza poprzez f zbiór rozmyty B w $\mathcal{Y}$, dany przez

$$(7) \quad \mu_B(y) = \sup_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mu_A(x) \quad \text{dla } y \in \mathcal{Y}.$$

W przypadku operacji (funkcji) dwuargumentowej, gdy $F : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$, to zbiór C w $\mathcal{Z}$ jest dany przez

$$(8) \quad \mu_C(z) = \sup_{\{x,y:F(x,y)=z\}} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \quad \text{dla } z \in \mathcal{Z}.$$

Powyższe zależności nie są łatwo algorytmizowalne, nawet gdy przepisze się je w języku α -cięć (ang. α -cuts) funkcji przynależności, tj. podziorów S_α w $\mathcal{X}$ określonych dla funkcji przynależności μ_A w $\mathcal{X}$ przez

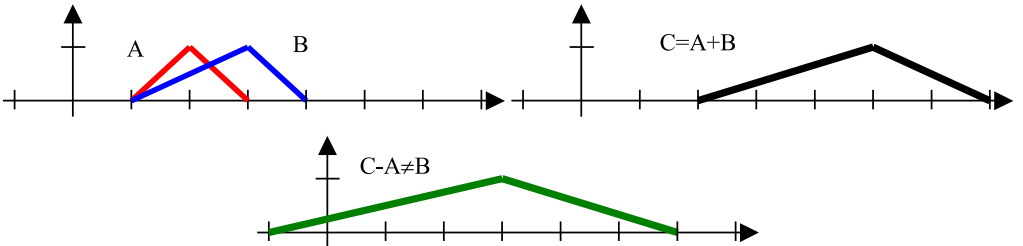
$$(9) \quad S_\alpha := \{x \in \mathcal{X} : \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad \text{dla } \alpha \in (0, 1] \subset \mathbb{R}.$$

Natomiast jest oczywiste, że definicja wypukłych liczb rozmytych wprowadzana poprzez żądanie wypukłości każdego α -cięcia jest równoważna poprzedniej (por. [21, 8]).

1.2. Niedoskonałości. Typowym przykładem modelu wykorzystującego rachunek przedziałowy są *liczby trójkątne* (Drewniak [21]). Otrzymywane wyniki kłócą się jednak z dotychczasowym doświadczeniem zdobytym przy operowaniu liczbami rzeczywistymi, gdzie

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a + b = c \Rightarrow c - b = a \wedge c - a = b.$$

Poniższe wykresy (rys. 2) ilustrują poruszony tu problem dla liczb rozmytych.



Rys. 2. Suma liczb rozmytych i przykład nieodwracalności działań

Braki, w porównaniu z operacjami na liczbach rzeczywistych, własności operacji na liczbach wypukłych związane są z kłopotem, jaki stanowi element neutralny dodawania. Jest nim funkcja χ_0 , czyli zero rzeczywiste. Choć dla

dowolnej wypukłej liczby A zachodzi równość

$$(10) \quad A + \chi_0 = A,$$

to jednak nie zachodzi podstawowy warunek, jaki działania dodawania i mnożenia winny spełniać, aby zbiór $\mathcal{F}$ był pierścieniem: dla dowolnej liczby A istnieje element (liczba wypukła) T spełniający równość $A + T = \chi_0$. Przy sprawdzaniu równości (10) korzystamy z następującego przepisu na dodawanie do wypukłej liczby rozmytej, reprezentowanej przez jej funkcję przynależności μ_A , liczby rzeczywistej $r \in \mathbb{R}$, reprezentowanej przez jej funkcję charakterystyczną χ_r :

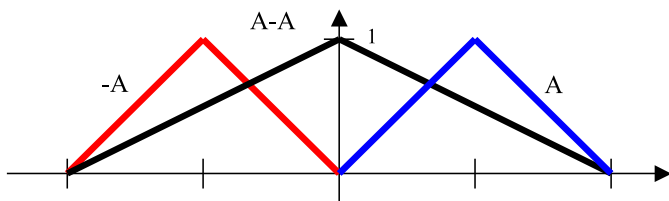
$$(11) \quad (\chi_r + \mu_A)(x) = \mu_A(x - r) \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R},$$

który jest zgodny z naszą intuicją i z dodawaniem w zbiorze liczb rzeczywistych, por. (1).

Jeśli dla wykonania działania odejmowania przyjmiemy, zgodnie z klasyczną teorią zbiorów (liczb) rozmytych Zadeha, że funkcja przynależności μ_{-A} zbioru $-A$ jest określona jako zwierciadlane odbicie funkcji μ_A , tj. punktowo przez relację

$$(12) \quad \mu_{-A}(x) = \mu_A(-x) \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R},$$

oraz liczba rozmyta ma nośnik niejednopunktowy, to w wyniku odejmowania tej samej liczby uzyskujemy zero rozmyte, a nie zero rzeczywiste (rys. 3).



Rys. 3. Wynik odejmowania liczby rozmytej od niej samej

Przedstawiony model ma pewną własność, która w przypadku obliczeń na wypukłych liczbach rozmytych stwarza parę ograniczeń. Chodzi o to, że bez względu na to, czy dodajemy liczby rozmyte, czy też je odejmujemy, nośnik się powiększa i tym samym powiększają się nośniki liczb wynikowych. Nośniki nazywane są czasem *przedziałami nieprecyzyjności*. W konsekwencji ich powiększanie się nazywane jest niekiedy *zwiększaniem nieprecyzyjności* lub *zwiększaniem rozmytości* liczby rozmytej. W efekcie może się okazać, że po wykonaniu wielu działań nośnik wynikowej liczby będzie tak szeroki, że informacja, którą dana liczba będzie przenosić, stanie się mniej użyteczna.

Do powyższej niedoskonałości działań w zbiorze $\mathcal{F}$ dochodzi następują:

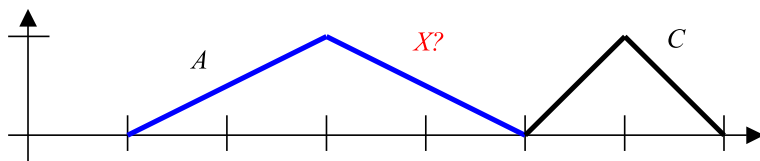
$$(13) \quad A + B = C, \quad \text{ale na ogół } C - B \neq A,$$

gdzie A, B i C są liczbami rozmytymi. Cecha ta, niezgodna z intuicją i z dzia-

łaniami na liczbach rzeczywistych, ma swoje konsekwencje w obserwowanym powiększaniu się nieprecyzyjności liczb rozmytych i w ogólnym braku możliwości rozwiązywania prostego równania

$$(14) \quad A + X = C$$

z danymi liczbami rozmytymi A i C (por. rys. 4). W szczególności brak ta-

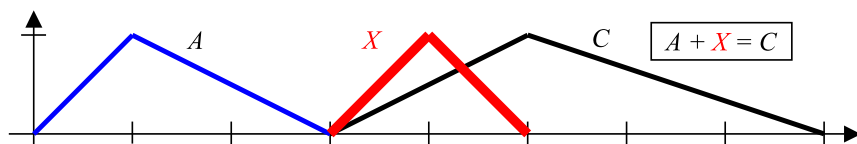


Rys. 4. Pytanie, czy dla danych A i C istnieje liczba X taka, że $A + X = C$

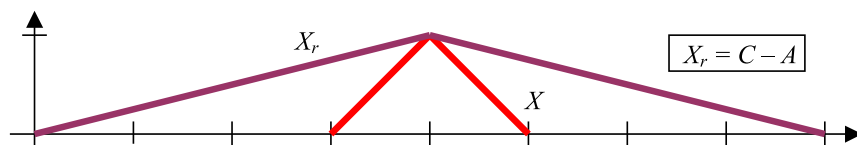
kiego rozwiązania jest konsekwencją spostrzeżenia, że każda operacja zwiększa nośnik. Tym samym nie istnieje liczba rozmyta X , która byłaby rozwiązaniem tego równania, gdy nośnik A jest większy od nośnika liczby C .

Zauważmy, że jeśli nawet wskażemy rozwiązanie równania (14), nie istnieje prosta metoda obliczeniowa (jak w przypadku liczb rzeczywistych) jego wyznaczenia. Przykład liczb rozmytych przedstawionych na rys. 4 prezentuje tę niedoskonałość. Chociaż wiemy, że rozwiązanie istnieje (rys. 5), nie określimy go poprzez wykonanie prostego wyliczenia (rys. 5), gdyż

$$(15) \quad C - A = X_r, \quad \text{zaś} \quad X_r \neq X.$$



Rys. 5



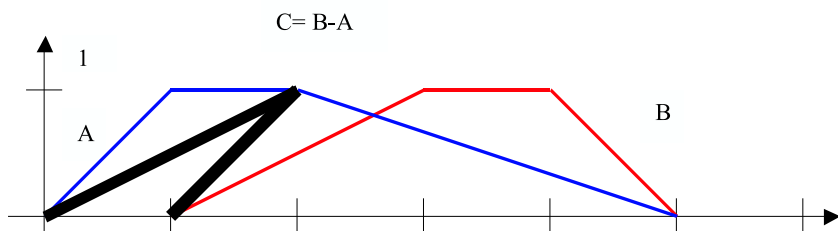
Rys. 6

Na rysunku 6 widać różnicę między wyliczonym rozwiązaniem X_r a faktycznym rozwiązaniem X równania $A + X = C$.

Równanie (14) można rozwiązać bez kłopotu klasycznymi działaniami na wypukłych liczbach rozmytych jedynie w przypadku, gdy liczba A jest zbiorem jednoelementowym, czyli liczbą rzeczywistą (por. przepis (11)).

Założenie w klasycznym (wg Zadeha) rachunku na liczbach rozmytych, że relacja (3) jest funkcją, to podstawowe ograniczenie dla poszukiwania rozwiązania równania (14) w ogólnym przypadku. Zaraz potem pojawia się niedoskonałość w określeniu operacji odejmowania jako przeciwnej do dodawania.

1.3. Dalsze motywacje. Jeśli ograniczyć się do trójkątnych czy ogólniej trapezoidalnych funkcji przynależności, to — mając na uwadze, że liczby rzeczywiste reprezentowane przez ich funkcje charakterystyczne należą do tak wydzielonego zbioru wypukłych liczb rozmytych, a mnożenie przez skalary jest dane przez (2) — arytmetyka przedziałowa jest do zaakceptowania do realizacji dodawania. Jest ona przecież zgodna z dodawaniem poszczególnych odwrotności części monotonicznych funkcji przynależności: osobno rosnących, osobno malejących; następnie wyniki tych działań należy odwrócić. Przedziały stałości funkcji przynależności, gdzie jej wartość wynosi jeden, dodaje się też w sposób naturalny. Dopóki dodajemy funkcje o nośnikach dodatnich, tzn. zawartych w dodatniej półosi $\mathbb{R}$, wszystko jest w porządku. Gorzej, gdy chcemy wykonać operację odejmowania, rozumianą, zgodnie z wprowadzoną przez (2) strukturą liniową, jako dodawanie elementów przeciwnych. Wykonanie takich operacji przy zastosowaniu powyższego algorytmu może prowadzić do obiektów, które mogą być takie jak na rys. 7. Różnica $C = B - A$ nie jest już funkcją zmiennej x . W pozycji [24] użyto terminu *improper fuzzy number* dla takich obiektów. One jednak dają nam rozwiązanie równania (14). W sytuacji poszukiwania liczby X spełniającej równanie $A + X = B$, kiedy rozmycie (inaczej nośnik) liczby B , tj. prawej strony równania, jest mniejsze niż rozmycie pierwszego składnika, tj. liczby A , rozwiązaniem jest właśnie liczba $X = C$ z rys. 7.



Rys. 7. Wynik odejmowania liczb wypukłych z zastosowaniem rachunku na funkcjach odwrotnych

Trzecią wskazówkę dla dalszego postępowania zmierzającego do nowego ujęcia liczb rozmytych przynosi rys. 3. Odejmowanie liczby rozmytej od niej samej będzie prowadzić do zera rzeczywistego (które z kolei powinno być elementem naturalnym dodawania), jeśli właśnie w tej sytuacji wzbogacimy przedstawiony powyżej algorytm arytmetyki przedziałowej o dodat-

kową informację. Wykonanie operacji odejmowania zgodnej z założoną liniową strukturą

$$A - A = A + (-1) \cdot A$$

wymaga więcej niż prostego rachunku przedziałowego, tym bardziej że rachunek ten, przy próbie zastosowania do ewentualnej operacji mnożenia wypukłych liczb rozmytych, okaże się niepozbawiony defektów ⁽¹⁾.

Sygnalizując zwieńczenie drogi naszych poszukiwań, postawmy jeszcze jeden problem: zaproponowane użycie, dla wypukłej liczby rozmytej, praw operacyjnych z (11) odnoszących się do kolejnych przedziałów monotoniczności funkcji przynależności, wykorzystywało naturalną (rosnącą) orientację osi x . A jeśli kolejność tych przedziałów zmienimy przy zmianie znaku liczby rozmytej?

Czy określeniu liczby o znaku przeciwnym nie powinna towarzyszyć, oprócz zastosowania przepisu (12) dla funkcji przynależności, zmiana odpowiadających przedziałów monotoniczności tej funkcji; dokładniej, czy nie powinno się uwzględnić wewnętrznej orientacji wykresu funkcji przynależności, niekoniecznie pokrywającej się z wymuszoną orientacją osi x ?

2. Skierowane liczby rozmyte. Skierowana liczba rozmyta definiowana jest następująco:

DEFINICJA. *Skierowaną liczbą rozmytą* A nazywamy uporządkowaną parę funkcji

$$A = (x_{up}, x_{down}),$$

gdzie $x_{up}, x_{down} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi.

Poszczególne funkcje nazywamy odpowiednio: *częścią up* i *częścią down* skierowanej liczby rozmytej A . Z ciągłości obu części wynika, że ich obrazy są ograniczonymi przedziałami, którym przypisujemy nazwy UP i $DOWN$ (rys. 8). Ustalamy też odpowiednie symbole dla oznaczenia granic tych przedziałów: $UP = (l_A, 1_A^-)$ oraz $DOWN = (1_A^+, p_A)$. Granice te są liczbami rzeczywistymi. Występujące tutaj oznaczenia granic przedziałów UP oraz $DOWN$ nie muszą być właściwe ⁽²⁾, tzn. nie muszą spełniać warunków $l_A \leq 1_A^-$ oraz $1_A^+ \leq p_A$. W przypadku, gdy obydwie funkcje (części liczby rozmytej) są ściśle monotoniczne, istnieją dla nich funkcje odwrotne x_{up}^{-1} i x_{down}^{-1} określone na odpowiednich przedziałach UP oraz $DOWN$, a po-

⁽¹⁾ W operacjach na przedziałach mamy na ogół nierówność $Z(W + V) \neq ZW + ZV$.

⁽²⁾ Wprowadzając pojęcie skierowanych liczb rozmytych w jednej z naszych poprzednich prac [26], nie byliśmy świadomi istnienia dobrze już eksploatowanego terminu przedziałów skierowanych i związanej z nimi arytmetyki, zapoczątkowanej przez Kauchera [19, 20]. Zwrócił nam na to uwagę dr Zenon Kulpa z IPPT PAN.

nadto prawdziwe jest przyporządkowanie

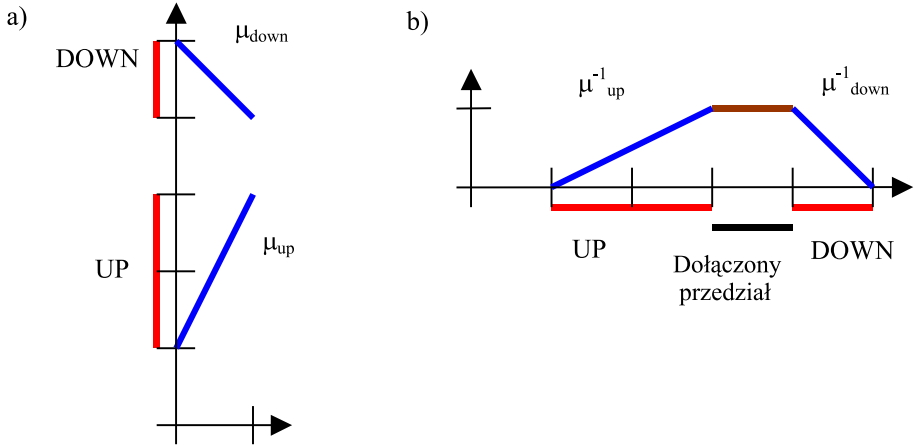
$$(16) \quad l_A := x_{up}(0), \quad 1_A^- := x_{up}(1), \quad 1_A^+ := x_{down}(1), \quad p_A := x_{down}(0).$$

Jeśli dodamy teraz funkcję stałą i równą 1 na przedziale $[1_A^-, 1_A^+]$, to otrzymamy razem z UP i $DOWN$ jeden przedział. Dzięki temu możemy zdefiniować funkcję przynależności μ_A zbioru rozmytego określonego na $\mathbb{R}$ (oznaczenia μ_{down} i μ_{up} na rys. 8 odpowiadają x_{down} i x_{up}) poprzez równości:

$$(17) \quad \begin{aligned} \mu_A(x) &= 0 \quad \text{dla } x \notin [l_A, p_A], & \mu_A(x) &= x_{up}^{-1}(x) \quad \text{dla } x \in UP, \\ \mu_A(x) &= x_{down}^{-1}(x) \quad \text{dla } x \in DOWN. \end{aligned}$$

Tak zdefiniowany zbiór rozmyty można odnieść do modelu liczb rozmytych definiowanych w klasycznym sensie, z tym że obecnie dysponujemy dodatkową własnością nazywaną skierowaniem; przedział $UP \cup [1_A^-, 1_A^+] \cup DOWN$ można potraktować jako nośnik (por. relacje (5) z poprzedniej części artykułu).

Idea skierowanych liczb rozmytych ewoluowała, dlatego też naturalne jest podobieństwo między funkcjami x_{up}, x_{down} i odpowiednimi częściami odwrotnymi liczb rozmytych z quasi-wklęsłą funkcją przynależności.



Rys. 8. a) Przykładowa skierowana liczba rozmyta, b) skierowana liczba rozmyta przedstawiona w sposób nawiązujący do liczb rozmytych w klasycznym podejściu.

Warto w tym miejscu zaznaczyć, że bez względu na kształt części up i części $down$ skierowanej liczby rozmytej, wartości dla granic wyznaczających UP i $DOWN$ będą:

$$\mu_A(l_A) = 0, \quad \mu_A(1_A^-) = 1, \quad \mu_A(1_A^+) = 1, \quad \mu_A(p_A) = 0.$$

Tak zdefiniowany model skierowanych liczb rozmytych ma wiele ciekawych własności, których szczegółowe opisanie wymaga znacznie więcej miejsca niż

objętość tej pracy. Najważniejsze z nich zostaną przedstawione w kolejnych punktach. Warto może na chwilę zatrzymać się nad interpretacją i wskazać źródło pochodzenia w życiu codziennym skierowanych liczb rozmytych. Każda wielkość, z jaką będziemy mieli do czynienia w sterowaniu rozmytym, odpowiada jakiejś wartości opisującej wybrany proces, zjawisko, parametr fizyczny itp. otaczającego nas świata. Jako proces ustalania tej wartości wyobraźmy sobie obserwację, w naszym przypadku intuicyjnie nazwiemy ją *obserwacją rozmytą*. Skierowana liczba rozmyta opisuje pewną własność takiej obserwacji rozmytej, co zostanie przedstawione w dalszej części.

2.1. Rozmyta obserwacja (fuzzy observation). Wracając do uogólnionego podejścia do zbiorów rozmytych, a tym samym i liczb, można potraktować zbiór stopni przynależności jako wynik pewnej *obserwacji rozmytej* opisującej jakiś proces zachodzący w świecie rzeczywistym, np. deszcz padający na wyznaczonym terytorium. Każdy proces w otaczającym nas świecie jest postrzegany jako trwający (dziejący się) w jakimś przedziale czasowym. Stąd też możemy starać się opisać go, bez względu na inne parametry, jako zależny od jakiegoś parametru t , który możemy sobie wyobrazić najprościej jako upływający czas. Poniżej przedstawiona jest formalna definicja obserwacji rozmytej.

DEFINICJA. Funkcję ciągłą $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1]$ nazywamy *rozmytą obserwacją*, jeśli spełnia następujące warunki:

1. dla każdego $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{f}(t) = (x_f(t), \mu_f(t))$,
2. istnieją takie $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, dla których $\{t \in \mathbb{R} : \mu_f(t) > 0\} = (t_0, t_1)$,
3. istnieje $t \in (t_0, t_1)$, dla którego $\mu_f(t) = 1$,
4. funkcja $-\mu_f|_{[t_0, t_1]} : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 0]$ jest ściśle quasi-wypukłą.

Dzięki temu istnieją $t^-, t^+ \in (t_0, t_1)$ takie, że μ_f jest stałe i równe 1 na $[t^-, t^+]$ oraz rosnące na $[t_0, t^-]$ i malejące na $[t^+, t_1]$. Istnieją również ciągle funkcje $x_f^\uparrow, x_f^\downarrow : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t_0) &= (x_f^\uparrow(0), 0), & \mathbf{f}(t^-) &= (x_f^\uparrow(1), 1), \\ \mathbf{f}(t_1) &= (x_f^\downarrow(0), 0), & \mathbf{f}(t^+) &= (x_f^\downarrow(1), 1) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \forall_{t \in (t_0, t^-)} \exists!_{y \in (0, 1)} \quad \mathbf{f}(t) &= (\mu_f^\uparrow(y), y), \\ \forall_{t \in (t^+, t_1)} \exists!_{y \in (0, 1)} \quad \mathbf{f}(t) &= (\mu_f^\downarrow(y), y). \end{aligned}$$

Funkcja $\mathbf{f}$ może być zdefiniowana także jako $\mathbf{f} : [t_0, t_1] \rightarrow [x_0, x_1] \times [0, 1]$, gdzie $\mathbf{f}(t_0) = (x_0, 0)$ oraz $\mathbf{f}(t_1) = (x_1, 0)$. Wartości $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ mogą być interpretowane jako początek i koniec pewnej obserwacji (eksperymentu), której wyniki wraz ze stopniami przynależności są zapisywane w postaci funkcji $\mathbf{f}$.

Jak już wspomniano, bez względu na inne parametry, każdy proces trwa w czasie. Rozpatrując procesy w ten sposób, nie można pominąć pewnego narzuconego porządku (skierowania), związanego z upływającym czasem. Funkcja $\mathbf{f}$ może być identyfikowana także z uporządkowaną parą $(x_f^\uparrow, x_f^\downarrow)$, gdzie z wcześniejszych zależności wynika, że porządek zależy od parametru t (który można identyfikować z czasem lub pewnym parametrem porządku).

Warto w tym miejscu podać pewne warunki na istnienie pary funkcji określających skierowaną liczbę rozmytą.

TWIERDZENIE 2. *Niech będzie dana ciągła funkcja $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1]$. Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ napiszmy $\mathbf{f}(t) = (x_f(t), \mu_f(t))$. Funkcja ta ma następujące własności:*

1. $\{t \in \mathbb{R} : \mu_f(t) > 0\} = (t_0, t_1)$ dla pewnych $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$,
2. $\mu_f(t) = 1$ dla pewnego $t \in (t_0, t_1)$,
3. $-\mu_f|_{[t_0, t_1]} : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 0]$ jest ściśle quasi-wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $t^-, t^+ \in (t_0, t_1)$ takie, że μ_f jest stała i równa 1 na $[t^-, t^+]$, a także rosnąca na $[t_0, t^-]$ i malejąca na $[t^+, t_1]$, tzn. wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją ciągłe funkcje $x_f^\uparrow, x_f^\downarrow : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że:

$$(18) \quad \begin{aligned} \mathbf{f}(t_0) &= (x_f^\uparrow(0), 0), & \mathbf{f}(t^-) &= (x_f^\uparrow(1), 1), \\ \mathbf{f}(t_1) &= (x_f^\downarrow(0), 0), & \mathbf{f}(t^+) &= (x_f^\downarrow(1), 1) \end{aligned}$$

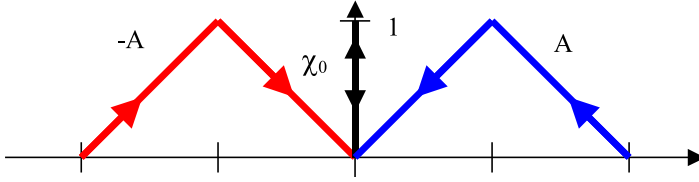
oraz

$$(19) \quad \begin{aligned} \forall t \in (t_0, t^-) \quad \exists!_{y \in (0,1)} \quad \mathbf{f}(t) &= (x_f^\uparrow(y), y), \\ \forall t \in (t^+, t_1) \quad \exists!_{y \in (0,1)} \quad \mathbf{f}(t) &= (x_f^\downarrow(y), y). \end{aligned}$$

Dowód tego twierdzenia jest prostym zastosowaniem definicji i własności funkcji ściśle quasi-wypukłych, zebranych za Martosem [31] w postaci twierdzenia 1.

2.2. Operacje na skierowanych liczbach rozmytych. Jako narzędzia do graficznego przedstawiania skierowanych liczb rozmytych użyjemy standardowych wykresów z dodaniem drobnego szczegółu — odpowiednio zwróconej strzałki; jej zwrot od osi x oznacza część **up** skierowanej liczby rozmytej. Jak wynika z definicji i z reprezentacji $A = (x_{up}, x_{down})$, wykresy obu funkcji pozwalają jedynie stwierdzić, że skierowana liczba rozmyta jest opisywana relacją. Jedynie monotoniczność obu funkcji pozwala ze wspomnianej relacji wyprowadzić zależność funkcyjną. Wtedy wykres będzie funkcją zmiennej x .

Jako przykład reprezentacji graficznej spójrzmy na rys. 9. Rysunek ten przedstawia intuicyjnie rozumiane dwie liczby rozmyte o przeciwnych znakach A i $-A$ oraz liczbę rzeczywistą χ_0 . W obecnym (uogólnionym) modelu liczby rzeczywiste będziemy utożsamiać z parą funkcji stałych, tzn. jeśli



Rys. 9

$r \in \mathbb{R}$, to będziemy ją zapisywać jako skierowaną liczbę rozmytą $r = (r^\uparrow, r^\downarrow)$, gdzie $r^\uparrow(s) = r$ dla $s \in [0, 1]$ reprezentuje funkcję stałą.

Skoro ustaliliśmy sposób reprezentacji graficznej skierowanych liczb rozmytych, możemy teraz przedstawić definicje operacji algebraicznych na skierowanych liczbach rozmytych wraz z przykładami graficznymi.

DEFINICJA. Niech będą dane trzy skierowane liczby rozmyte $A = (x_A^\uparrow, x_A^\downarrow)$, $B = (x_B^\uparrow, x_B^\downarrow)$ oraz $C = (x_C^\uparrow, x_C^\downarrow)$.

Liczba C jest sumą A i B (piszemy $C = A + B$), jeśli

$$(20) \quad \forall_{y \in [0,1]} \quad [x_A^\uparrow(y) + x_B^\uparrow(y) = x_C^\uparrow(y) \wedge x_A^\downarrow(y) + x_B^\downarrow(y) = x_C^\downarrow(y)].$$

Liczba C jest wynikiem mnożenia A przez skalar r (piszemy $C = rA$), jeśli

$$(21) \quad \forall_{y \in [0,1]} \quad [rx_A^\uparrow(y) = x_C^\uparrow(y) \wedge rx_A^\downarrow(y) = x_C^\downarrow(y)].$$

Liczba C jest wynikiem mnożenia A i B (piszemy $C = A \cdot B$), jeśli

$$(22) \quad \forall_{y \in [0,1]} \quad [x_A^\uparrow(y) \cdot x_B^\uparrow(y) = x_C^\uparrow(y) \wedge x_A^\downarrow(y) \cdot x_B^\downarrow(y) = x_C^\downarrow(y)].$$

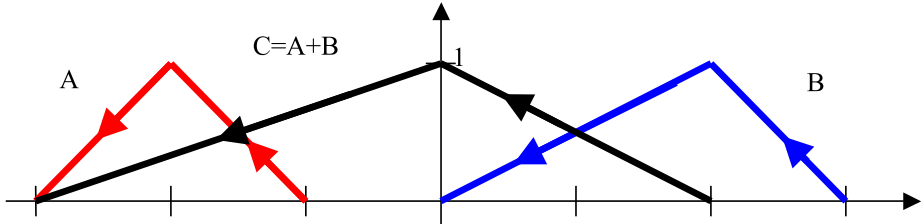
Liczba C jest wynikiem dzielenia A przez B (piszemy $C = A/B$), jeśli

$$\forall_{y \in [0,1]} \quad [x_B^\uparrow(y) \neq 0 \wedge x_B^\downarrow(y) \neq 0]$$

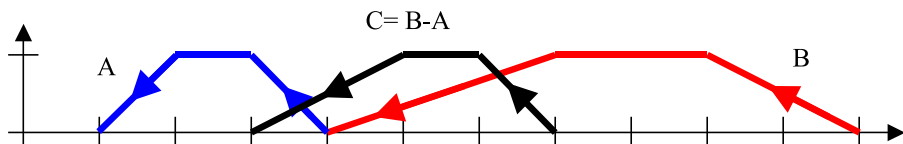
oraz

$$(23) \quad \forall_{y \in [0,1]} \quad \left[\frac{x_A^\uparrow(y)}{x_B^\uparrow(y)} = x_C^\uparrow(y) \wedge \frac{x_A^\downarrow(y)}{x_B^\downarrow(y)} = x_C^\downarrow(y) \right].$$

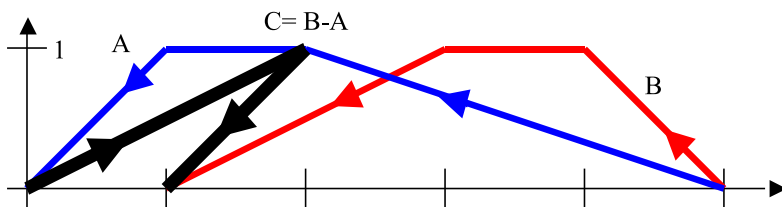
Na rys. 10 widzimy przykładowy wynik dodawania dwóch skierowanych liczb rozmytych.



Rys. 10



Rys. 11



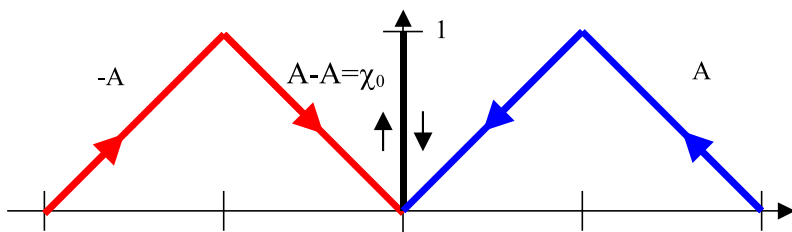
Rys. 12

Wykonując operacje na liczbach o różnej orientacji, możemy podzielić wyniki na dwa rodzaje: takie, których interpretacja nie odbiega od liczb rozmytych wypukłych (rys. 11), oraz takie, które należą do skierowanych liczb rozmytych, lecz nie do liczb rozmytych wypukłych (rys. 12).

Odejmowanie od liczby B liczby A jest tym samym, co dodanie do liczby B liczby $-A$. W szczególności, jeśli od liczby A odejmiemy A , tzn. dodamy $-A = (-x_A^\uparrow, -x_A^\downarrow)$, to uzyskamy $C = (x_C^\uparrow, x_C^\downarrow)$ takie, że

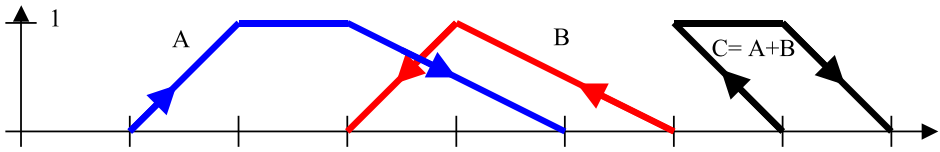
$$x_C^\uparrow(y) = x_A^\uparrow(y) - x_A^\uparrow(y) = 0, \quad x_C^\downarrow(y) = x_A^\downarrow(y) - x_A^\downarrow(y) = 0.$$

Wobec tego wynikiem operacji $A - A$ jest liczba rzeczywista $r = 0$ jak na rys. 13.

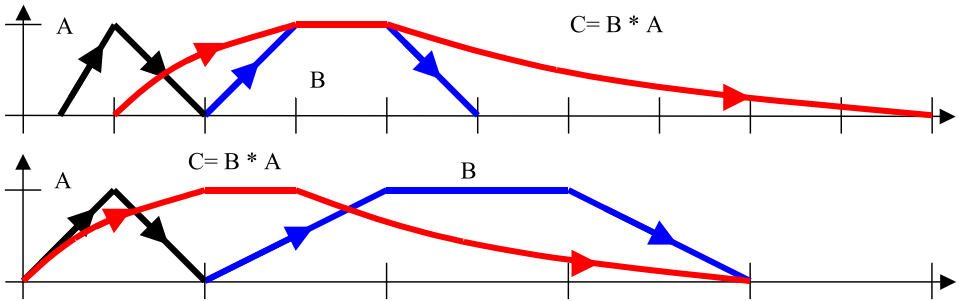


Rys. 13

Ogólnie, rozważając różne możliwe wyniki działań na skierowanych liczbach rozmytych, można przyjąć, że na poziomie definicji działań nie analizujemy możliwości interpretacji otrzymanych rezultatów. Mimo że wynik może nie mieć jasnej interpretacji w klasycznym modelu liczb rozmytych, to wciąż przechowuje on pewną informację o rozmytej przynależności jak na rys. 14.



Rys. 14



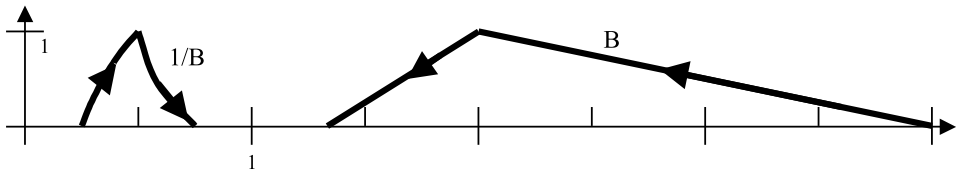
Rys. 15

Orientacja danej liczby rozmytej A ilustruje tylko położenie części $x_A^\uparrow$ względem części $x_A^\downarrow$.

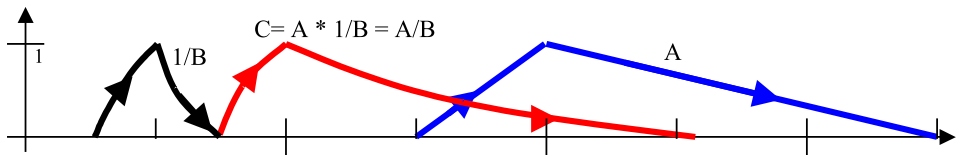
Mnożenie dwóch skierowanych liczb rozmytych przedstawiają powyższe przykłady na rys. 15. Dzielenie jest pomnożeniem przez liczbę odwrotną. Liczbę odwrotną do danej skierowanej liczby rozmytej $A = (x_A^\uparrow, x_A^\downarrow)$ określamy w następujący sposób:

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{x_A^\uparrow}, \frac{1}{x_A^\downarrow} \right).$$

Dzielenie skierowanych liczb rozmytych ilustrują rys. 16 oraz 17.



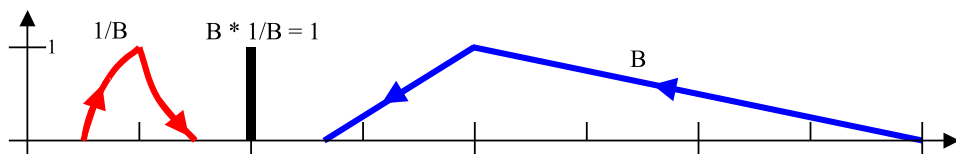
Rys. 16



Rys. 17

Określając liczbę odwrotną do B , zwróćmy uwagę na to, że liczba ta ma przeciwne skierowanie niż B . O ile zero rzeczywiste jest reprezentowane w naszym modelu przez parę funkcji stałych równych zero, to elementem neutralnym względem mnożenia jest jedynka rzeczywista reprezentowana przez χ_1 , czyli parę funkcji stałych równych jeden.

Istotną właściwością prezentowanego tutaj modelu jest to, że pomnożenie liczb wzajemnie odwrotnych pozwala uzyskać dokładnie element neutralny mnożenia (patrz rys. 18).



Rys. 18

Z powyższych przykładów wynika, że dla danej skierowanej liczby rozmytej $A = (f, g)$ możemy określić jej tak zwaną liczbę komplementarną (ang. *complementary number*) $\bar{A} = (-g, -f)$; wtedy suma $A + \bar{A} =: D$ daje w wyniku (na ogół) liczbę około zera (rozmyte zero) $D = (f - g, -(f - g))$. Przez analogię z klasycznym rachunkiem na (wypukłych) liczbach rozmytych możemy powiedzieć, że liczba komplementarna gra rolę liczby przeciwnej do danej liczby w sensie Zadeha.

Na koniec tego punktu zwróćmy uwagę, że oprócz powyższych algebraicznych działań na skierowanych liczbach rozmytych można wprowadzić pewną liczbę działań zbliżonych do operacji teoriomnogościowych czy logicznych, np. $\max(A, B) = A \vee B$ i $\min(A, B) = A \wedge B$, poprzez

$$C = A \vee B, \text{ jeśli } f_C(y) = \max\{f_A(y), f_B(y)\} \text{ i } g_C(y) = \max\{g_A(y), g_B(y)\},$$

$$C = A \wedge B, \text{ jeśli } f_C(y) = \min\{f_A(y), f_B(y)\} \text{ i } g_C(y) = \min\{g_A(y), g_B(y)\}.$$

Powyższe dwie operacje logiczne zastępują te znane w teorii zbiorów rozmytych i realizowane przez funkcje przynależności tych zbiorów. Podobnie można zdefiniować wiele innych działań, pamiętając o reprezentacji skierowanych liczb rozmytych w postaci pary rzeczywistych funkcji ciągłych na odcinku jednostkowym.

Co zyskujemy dzięki skierowanym liczbom rozmytym? Działania na liczbach rozmytych niekoniecznie powodują rozszerzanie się nieprecyzyjności, co wiąże się z kilkoma istotnymi elementami:

- 1) otrzymujemy algebrę przemiennej skierowanych liczb rozmytych z elementami neutralnymi dodawania i mnożenia,
- 2) uzyskujemy możliwość rozwiązywania równań z udziałem liczb rozmytych reprezentowanych przez skierowane liczby rozmyte.

Dodatkowo, charakter skierowanych liczb rozmytych i działań na nich pozwala na w miarę prostą optymalizację, co stwarza wiele nowych możliwości związanych z praktycznym wykorzystaniem nowego modelu w sterowaniu. Ponadto swoboda obliczeń inspirowała do poszukiwania nowych propozycji związanych z agregacją, wnioskowaniem i wyostrażaniem w sterowaniu rozmytym. Otwierają się nowe obszary, które do tej pory były trudne do osiągnięcia.

2.3. Algebra Banacha. Punktowe mnożenie przez skalary (liczby rzeczywiste) oraz operacja dodawania, określone przez (20), (21), prowadzą do struktury przestrzeni liniowej $\mathcal{R}$. Ponadto zachodzi następujący fakt:

LEMAT 1. *Przestrzeń skierowanych liczb rozmytych $\mathcal{R}$ jest izomorficzna z liniową przestrzenią rzeczywistych, 2-wymiarowych wektorowych funkcji określonych na odcinku $I = [0, 1]$. Ponadto, jest to przestrzeń unormowana przez normę*

$$\|A\| = \max(\sup_{s \in I} |x_{up}(s)|, \sup_{s \in I} |x_{down}(s)|).$$

Stąd przestrzeń $\mathcal{R}$ może być identyfikowana z produktem $C([0, 1]) \times C([0, 1])$. Dowód wynika bezpośrednio z definicji działań i zbioru $\mathcal{R}$.

Mnożenie elementów (por. (22)) w $\mathcal{R}$, które jest przemienne, w oczywisty sposób spełnia warunek rozdzielności względem dodawania i wprowadza w zbiorze $\mathcal{R}$ strukturę pierścienia przemienne. W konsekwencji przestrzeń $\mathcal{R}$ jest *algebrą Banacha* z jednością $e = (1^\dagger, 1^\dagger)$, parą stałych funkcji równych jeden.

Należy w tym miejscu wspomnieć o artykule Goetschela i Voxmana [13], w którym została wprowadzona struktura przestrzeni Banacha w rozszerzonym zbiorze wypukłych liczb rozmytych. Jednakże autorzy [13] byli zainteresowani tylko w liniowej strukturze tego rozszerzenia, bez wprowadzania struktury pierścienia.

2.4. Operacje wyostrażania w $\mathcal{R}$. Operacje wyostrażania są podstawowymi operacjami występującymi w rozmytych systemach wnioskujących i rozmytych sterownikach [2, 11, 30], gdy występują rozmyte reguły wnioskowania, postaci

Jeśli x_1 jest L_1 i x_2 jest L_2 , to z jest M .

W tej regule zmienne x_1 , x_2 i z mogą przyjmować wartości rozmyte, scharakteryzowane tutaj przez terminy L_1 , L_2 , M . Jeśli reguła ma mieć swoje znaczenie praktyczne, to część skutkowa winna prowadzić do wartości liczbowej (w zbiorze $\mathbb{R}$). Można to uzyskać, stosując odpowiedni operator wyostrażania (ang. *defuzzification*), który wartościom rozmytej zmiennej z przyporządkuje liczbę rzeczywistą (zwaną z angielska *crisp value*). Sięgając po literaturę dotyczącą zbiorów i logiki rozmytej, napotkamy na dużą liczbę takich

operacji (por. [11]). Jeśli wynikiem (wyjściem) powyższej reguły jest skierowana liczba rozmyta, to klasyczne operacje wyostrażania mogą już nie mieć swowego zastosowania; potrzebne są nowe.

Okazuje się, że do pomocy staje nam aparat analizy funkcjonalnej, a dokładnie twierdzenia o reprezentacji ciągłych i liniowych funkcjonałów na przestrzeniach Banacha funkcji ciągłych. Skoro przestrzeń $\mathcal{R}$ jest kwadratem kartezjańskim znanej przestrzeni Banacha funkcji ciągłych na kompaktach, korzystamy z twierdzenia Banacha–Kakutania–Riesza o reprezentacji ciągłego, liniowego funkcjonału ϕ na $C([0, 1])$, tj.

$$(24) \quad \phi(x_{up}, x_{down}) = \int_0^1 x_{up}(s) \nu_1(ds) + \int_0^1 x_{down}(s) \nu_2(ds),$$

gdzie para ciągłych funkcji $(x_{up}, x_{down}) \in \mathcal{R}$ reprezentuje skierowaną liczbę rozmytą, zaś ν_1, ν_2 są dwoma miarami Radona na $[0, 1]$.

Korzystając z tej formuły, można określić praktycznie nieskończenie wiele przepisów na wyostrażanie, w szczególności odpowiedniki wszystkich znanych i stosowanych w systemach wnioskujących czy sterownikach typu Mamdaniego (por. [11, 15, 30, 8]). W szczególności znana metoda wyostrażania poprzez wyznaczanie pola powierzchni pod funkcją przynależności jest tutaj realizowana przez liniową kombinację pary miar Lebesgue’a na $[0, 1]$. Należy zwrócić uwagę, że funkcjonały liniowe nie ograniczają nas do liniowych metod wyostrażania, gdyż złożenie nieliniowej funkcji jednej czy wielu zmiennych rzeczywistych, np. $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, z jednym czy wieloma liniowymi funkcjonałami na $\mathcal{R}$ prowadzi do kolejnych (już nieliniowych) operatorów wyostrażania. Na przykład, jeśli funkcjonał ϕ_1 realizuje wyznaczanie pierwszego momentu, zaś ϕ_2 wyznacza wspomniane już pole powierzchni, to stosunkowo prosta nieliniowa funkcja Ψ dwóch zmiennych, postaci $\Psi(s, t) = s/t$ złożona z tymi funkcjonałami, czyli $\Psi(\phi_1, \phi_2)$, realizuje klasyczną metodę wyostrażania (por. np. [8]) poprzez wyznaczanie środka ciężkości pola pod wykresem funkcji przynależności. W obecnym przypadku będzie to środek ciężkości pod wykresem relacji przynależności.

Dla podkreślenia możliwości określania nowych operacji wyostrażania przytoczmy podstawową reprezentację miary Radona na przedziale $[0, 1]$ w postaci całki Stieltjesa względem funkcji o wahaniu ograniczonym. Dla miary Radona ν na $[0, 1]$ istnieje funkcja o wahaniu ograniczonym $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że

$$(25) \quad \forall f \in C([0, 1]) \quad \int_0^1 f(s) \nu(ds) = \int_0^1 f(s) dg(s),$$

gdzie po prawej stronie stoi tzw. całka Stieltjesa. O każdej funkcji g o wahaniu skończonym wiadomo, z drugiej strony, że ma reprezentację w postaci różnicy dwóch funkcji rzeczywistych rosnących i ograniczonych. Dalsza uży-

teczna reprezentacja całki w (25), a tym samym pomocna przy określaniu operacji wyostrzania, jest następująca [32].

Jeśli funkcja g ma wahanie skończone na $[0, 1]$, to ma przeliczalną liczbę punktów nieciągłości pierwszego rodzaju ⁽³⁾ i można ją przedstawić w postaci ⁽⁴⁾ sumy dwóch funkcji $g(s) = g_c(s) + g_j(s)$, gdzie g_c jest funkcją ciągłą o wahaniu skończonym, a g_j jest funkcją skoków funkcji g . Wtedy prawą całkę w (25) można zapisać w tzw. postaci kanonicznej [32]

$$(26) \quad \int_0^1 f(s) dg(s) = \int_0^1 f(s) dg_c(s) + f(0)[g(+0) - g(0)] \\ + \sum_{k=1}^{\infty} f(s_k)[g(s_k + 0) - g(s_k)] + f(1)[g(1) - g(1 - 0)],$$

gdzie $\{s_k\}$ są punktami, w których następuje skok funkcji g , zaś istnienie całki po lewej stronie gwarantuje zbieżność szeregu po prawej stronie.

SPOSTRZEŻENIE. Zauważmy, że jeśli g jest iloczynem pewnej stałej c_0 i funkcji Heaviside'a przesuniętej powiedzmy do punktu $s_0 \in [0, 1]$, tzn. g ma skok tylko w jednym punkcie s_0 równy c_0 , to całka prawej strony (26) będzie równa

$$\int_0^1 f(s) dg(s) = f(s_0).$$

To ważne spostrzeżenie oznacza, że w reprezentacji funkcjonałów liniowych, a tym samym operacji wyostrzania, jest możliwość wykorzystania miar atomowych i określenia wartości operatora na przykład w punkcie, gdzie relacja przynależności przechodzi przez punkty typu $(x, 1)$. W języku funkcji przynależności oznacza to wyostrzanie wypukłej liczby rozmytej A w jej punkcie normalności, tzn. takim x , dla którego $\mu_A(x) = 1$.

2.5. Wychylenie. Dla analizy struktury algebraicznej skierowanych liczb rozmytych wprowadzimy pojęcie wychylenia.

DEFINICJA. Funkcję $W(A)$ daną przez

$$W(A) = x_{up} + x_{down}$$

nazywamy *wychyleniem* skierowanej liczby rozmytej $A = (x_{up}, x_{down})$.

Mówimy, że liczba A jest *nie mniejsza niż* liczba B i piszemy $A \succ B$, gdy

$$(27) \quad W(A) \geq W(B) \Leftrightarrow W(A - B) \geq 0$$

⁽³⁾ W każdym punkcie nieciągłości istnieją granice jednostronne funkcji.

⁽⁴⁾ Przypomnijmy, że każdą funkcję rosnącą można przedstawić w postaci sumy funkcji ciągłej rosnącej i funkcji skoków [32].

tzn. gdy funkcja $W(A - B)$ jest nieujemna. Liczba C jest *nieujemna*, gdy jej wychylenie jest nie mniejsze niż zero, tzn.

$$W(C) \geq 0.$$

Podobnie C jest *niedodatnie*, gdy $W(C) \leq 0$.

Istnieją liczby nieporównywalne z zerem.

Liczbę D nazwiemy *około zera* (rozmyte zero), gdy dla niej $W(D) = 0$, tzn. wychylenie jest funkcją stałą równą zero (poprawniej należałoby napisać $W(D) = 0^\dagger$).

Skierowaną liczbę rozmytą R nazywamy *symetryczną około r* , gdy istnieje taka liczba rzeczywista $r \in \mathbb{R}$, że $W(R - r) = 0$.

LEMAT 2. *Wprowadzona przepisem (27) relacja $\succ$ w algebrze $\mathcal{R}$ jest pre-porządkiem; nie jest ona częściowym porządkiem.*

Dowód. Relacja zwrotna i przechodnia jest częściowym porządkiem, jeśli jest antysymetryczna, tj. z warunków $A \succ B$ oraz $B \succ A$ wynika, że $A = B$. Jest oczywiste, że pierwsze dwie własności relacja $\succ$ posiada. Natomiast antysymetria nie zachodzi, gdyż istnieją różne liczby A i B , których różnica $C = A - B$ może mieć wychylenie zero, tzn. $W(C) = W(A - B) = 0$, choć sama liczba C jest różna od zera. Przykładami takich C są liczby symetryczne około zera, tj. postaci $C = (f, -f)$, z dowolną funkcją $f \in C([0, 1])$.

Zauważmy, że przedstawione w dowodzie lematu 2 liczby symetryczne około zera, dla których zero rzeczywiste nie należy do obrazu funkcji f , nie są dzielnikami zera, a więc są odwracalne, tzn. posiadają swoje odwrotności w pierścieniu $\mathcal{R}$.

Określmy teraz dwa ideały w naszej algebrze.

DEFINICJA. Podzbiór liczb rozmytych dany przez

$$(28) \quad \mathcal{L} := \{A = (x_{up}, x_{down}) : W(A) = x_{down}\}$$

nazywamy *lewym ideałem*, zaś podzbiór

$$(29) \quad \mathcal{P} := \{A = (x_{up}, x_{down}) : W(A) = x_{up}\}$$

nazywamy *prawym ideałem*.

Sprawdzenie, że oba podzbiory są domknięte ze względu na dodawanie, jest natychmiastowe. Drugi warunek bycia ideałem, tj. z warunku ⁽⁵⁾ $A \in \mathcal{L}$ oraz $Z \in \mathcal{R}$ wynika, że $A \cdot Z \in \mathcal{L}$, nie nastręcza też kłopotów, jeśli skorzystamy z definicji operacji mnożenia w pierścieniu $\mathcal{R}$.

LEMAT 3. *Oba ideały nie są trywialne i zawierają właściwe dzielniki zera.*

⁽⁵⁾ Dla prawego ideału wstawiamy oczywiście w miejsce $\mathcal{L}$ literę $\mathcal{P}$.

Dowód. Przeprowadzimy go dla ideału lewego, gdyż dowód dla ideału prawego jest podobny. Niech $A \in \mathcal{L}$. Należy wskazać taki element B algebry $\mathcal{R}$, różny od zera (tj. różny od pary funkcji stałych $(0^\dagger, 0^\dagger)$), że $A \cdot B = \mathbf{0}$. Skoro $A \in \mathcal{L}$, więc jest postaci $A = (0^\dagger, g)$, gdzie $g \in C([0, 1])$; stąd biorąc dowolną niezerową funkcję $f \in C([0, 1])$, określamy skierowaną liczbę $B = (f, 0^\dagger)$. Z definicji mnożenia w pierścieniu $\mathcal{R}$ wynika, że $A \cdot B = (0^\dagger, 0^\dagger) = \mathbf{0}$.

Jedną z podstawowych własności pierścieni jest, że każdy ideał jest jądrem pewnego homomorfizmu pierścieni. Jak łatwo widać, powyżej określone dwa ideały są jądrami homomorfizmów h_L, h_P pierścienia $\mathcal{R}$ w pierścień $C([0, 1])$, gdzie homomorfizm $h_L : \mathcal{R} \rightarrow C([0, 1])$ jest określony przez $h_L(f, g) = f$. Symetrycznie określamy drugi homomorfizm. Wtedy oczywiście

$$(30) \quad \mathcal{L} = h_L^{-1}(0^\dagger),$$

gdzie $0^\dagger$ jest zerem pierścienia $C([0, 1])$.

2.6. Skierowane zbiory rozmyte. Idea skierowanych liczb rozmytych może być rozszerzona na dowolną przestrzeń liniową $\mathcal{X}$.

DEFINICJA. *Skierowany zbiór rozmyty* C na przestrzeni liniowo-topologicznej $\mathcal{X}$ to dowolna uporządkowana para funkcji ciągłych $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathcal{X}$, tzn. $C = (f, g)$, gdzie $f, g \in C([0, 1], \mathcal{X})$.

Tutaj przez $C([0, 1], \mathcal{X})$ oznaczyliśmy przestrzeń funkcji ciągłych określonych na przedziale domkniętym $[0, 1]$ o wartościach w przestrzeni $\mathcal{X}$.

Łatwo sprawdzić, że rodzina skierowanych zbiorów rozmytych, oznaczana dalej przez $\mathcal{F}\mathcal{X}$, ma strukturę przestrzeni liniowej, gdzie działania liniowe są określone przez

$$(31) \quad A + B = (f_A + f_B, g_A + g_B), \quad \lambda A = (\lambda f_A, \lambda g_A),$$

gdzie ⁽⁶⁾ $A = (f_A, g_A)$, $B = (f_B, g_B)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Jeśli $\mathcal{X}$ jest przestrzenią Banacha to,

$$\mathcal{F}\mathcal{X} = \{(f, g) : f, g \in C([0, 1], \mathcal{X})\}$$

ze strukturą liniową (31) oraz normą

$$\|(f, g)\| = \max\left(\sup_{s \in [0, 1]} \|f(s)\|_{\mathcal{X}}, \sup_{s \in [0, 1]} \|g(s)\|_{\mathcal{X}}\right)$$

jest przestrzenią Banacha, zwaną przestrzenią skierowanych zbiorów rozmytych na $\mathcal{X}$. Tutaj przez $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ oznaczyliśmy normę w przestrzeni $\mathcal{X}$.

Jeśli $\mathcal{X}$ jest algebrą Banacha z jedyneką e , tzn. takim elementem $e \in \mathcal{X}$, dla którego $e \cdot z = z$ dla każdego $z \in \mathcal{X}$, gdzie $\cdot$ to mnożenie w algebrze $\mathcal{X}$,

⁽⁶⁾ Jeśli przestrzeń liniowa $\mathcal{X}$ nie jest rzeczywista, to w miejsce $\mathbb{R}$ winniśmy wstawić odpowiednie ciało.

to $\mathcal{FX}$ jest algebrą Banacha z jedyneką, gdzie mnożenie jest określone przez

$$(32) \quad A \cdot B := (f_A \cdot f_B, g_A \cdot g_B), \quad \text{gdzie } A = (f_A, g_A), \quad B = (f_B, g_B).$$

Jedyneką tej algebry jest para funkcji $(e^\dagger, e^\dagger)$ stałych o wartości e ,

$$e^\dagger : [0, 1] \rightarrow \mathcal{X}, \quad e^\dagger(s) = e, \quad s \in [0, 1].$$

Jak łatwo zauważyć, strukturę algebraiczną zbioru $\mathcal{FX}$ (który wtedy też jest pierścieniem) można badać poprzez pierścień $\mathcal{X}$. Jak w przypadku skierowanych liczb rozmytych, można wprowadzić pojęcie wychylenia skierowanego zbioru rozmytego. Przy jego pomocy można określić co najmniej dwa nietrywialne ideały. Jeśli pierścień $\mathcal{X}$ ma nietrywialne ideały, to w $\mathcal{FX}$ można odnaleźć następne nietrywialne ideały.

2.7. Pewne zastosowania i rozmyty kalkulator. Budowane uogólnienie pojęcia liczby rozmytej ma na celu dostarczenie odpowiednich narzędzi do zastosowań logiki rozmytej. Pierwszym działem matematyki, który w naturalny sposób już korzysta z logiki i teorii zbiorów rozmytych, jest teoria sterowania. Odpowiednio wyposażeni w aparat algebraiczny (strukturę algebraiczną), w którym rachunek na liczbach rozmytych niewiele się różni od klasycznego rachunku na liczbach rzeczywistych, mamy potencjalnie dużo większe pole do zastosowań niż z poprzednią strukturą, bazującą na niedoskonałym rachunku przedziałowym wypukłych liczb rozmytych. Już nawet elementarny problem Cauchy'ego dla zwyczajnego równania różniczkowego w $\mathbb{R}^n$:

$$(33) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad \text{z warunkiem początkowym } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

ma swoje bezpośrednie przełożenie na równanie różniczkowe w algebrze liczb rozmytych. W miejsce zmiennej zależnej $\mathbf{x}$ z $\mathbb{R}^n$ poszukuje się zmiennej o wartościach w $\mathcal{R}^n$, co oznacza, że równanie (33) rozpatrujemy w $2n$ -krotnym produkcie przestrzeni Banacha $C([0, 1])$. Pierwsze zastosowania tego podejścia do sterowania obiektami fizycznymi są właśnie opracowywane w przygotowywanej rozprawie doktorskiej drugiego autora.

Na koniec wypada wspomnieć o stworzonych użytecznych narzędziach liczenia posługujących się algebrą skierowanych liczb rozmytych. Ostatnio została zaimplementowana, przez jednego z naszych współpracowników R. Kołesnika, w środowisku Windows i w języku C++, programowa platforma w postaci tzw. kalkulatora rozmytego **zCalc**. W [18], [28] zaprezentowano jej główne moduły i możliwości. Platforma jest wyposażona w moduł graficzny o nazwie **zWinCalc**. Implementacja daje możliwość bezpośredniego wyznaczania i śledzenia na wykresach wyników podstawowych czterech operacji algebraicznych na skierowanych liczbach rozmytych. Liczby te mogą być podane w postaci przepisów na kształt relacji przynależności, a także w sposób graficzny, przez zaznaczenie w prostokątnym układzie współrzed-

nych (na ekranie) punktów, przez które krzywa relacji winna przechodzić. Odpowiedni moduł dokonuje interpolacji wielomianami Lagrange'a. Same wyliczenia odbywają się bez interpolacji czy aproksymacji: wykonuje się je na funkcjach, tj. przepisach określających kształty odpowiednich krzywych. W ten sposób jesteśmy na tym etapie uniezależnieni od jakiegokolwiek błędu aproksymacji (czy dokładności obliczeniowej sprzętu, na którym wyznacza się wyniki operacji). Dopiero do wyświetlenia na ekranie wyników obliczeń stosuje się narzędzia aproksymacyjne.

Programowa implementacja zCalc została dokonana w ten sposób, że może być użyta przez programistę tworzącego oprogramowanie aplikacyjne jako zewnętrzny moduł obliczeniowy: komunikacja między kalkulatorem a głównym programem aplikacji odbywa się na zasadzie przesyłania plików tekstowych.

Jednocześnie w odpowiednim module, korzystając z prostego języka i jego interpretera, użytkownik może zdefiniować własne operacje, funkcje na zmiennych, jakimi są skierowane liczby rozmyte. Daje to dodatkowe właściwości aplikacyjne tego narzędzia programistycznego.

Podziękowanie. Praca nad tym artykułem była przeprowadzona w ramach relizacji projektu badawczego KBN No. 4 T11C 038 25.

English summary. An algebra of ordered fuzzy numbers (OFN) is defined. It enables handling fuzzy inputs in a quantitative way, exactly in the same way as for real numbers. Additional two structures: algebraic and normed (topological) are introduced, which makes it possible to define a general form of defuzzification operators if fuzzy rules are used in a decision process. A useful implementation of a Fuzzy Calculator is given which allows counting with OFNs of general type membership relations.

Literatura

- [1] J. Łukasiewicz, *Elementy logiki matematycznej*, Koło Matematyczno-Fizyczne Słuchaczy Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa, 1929; II wyd., PWN, Warszawa, 1958.
- [2] E. Czogała, W. Pedrycz, *Elementy i metody teorii zbiorów rozmytych*, PWN, Warszawa, 1985.
- [3] D. Dubois, H. Prade, *Operations on fuzzy numbers*, Int. J. System Science 9 (1978), 576–578.
- [4] R. E. Moore, *Methods and Applications of Interval Analysis*, SIAM Press, Philadelphia, PA, 1979.
- [5] D. Dubois, H. Prade, *Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory*, Information Sciences 30 (1983), 183–224.
- [6] J. Kacprzyk, *Zbiory rozmyte w analizie systemowej*, PWN, Warszawa, 1986.
- [7] G. J. Klir, *Fuzzy arithmetic with requisite constraints*, Fuzzy Sets and Systems 91 (1997), 165–175.
- [8] G. C. Chen, Pham Trung Tat, *Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Control Systems*, CRS Press, Boca Raton, 2001.

- [9] W. Kosiński, K. Piechór, P. Prokopowicz, K. Tyburek, *On algorithmic approach to operations on fuzzy numbers*, w: *Methods of Artificial Intelligence in Mechanics and Mechanical Engineering*, T. Burczyński, W. Cholewa (red.), PACM, Gliwice, 2001, 95–98.
- [10] A. Skowron, *osobista uwaga*, 1995.
- [11] A. Piegat, *Modelowanie i sterowanie rozmyte*, Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa, 1999.
- [12] E. Sanchez, *Solutions of fuzzy equations with extended operations*, Fuzzy Sets and Systems 12 (1984), 237–248.
- [13] R. Goetschel Jr., W. Voxman, *Elementary fuzzy calculus*, Fuzzy Sets and Systems 18 (1986), 31–43.
- [14] H. T. Nguyen, *A note on the extension principle for fuzzy sets*, J. Math. Anal. Appl. 64 (1978), 369–380.
- [15] A. Łachwa, *Rozmyty świat zbiorów, liczb, relacji, faktów, reguł i decyzji*, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2001.
- [16] D. Rutkowska, M. Piliński, L. Rutkowski, *Sieci neuronowe, algorytmy genetyczne i systemy rozmyte*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa, 1997.
- [17] J. Kacprzyk, *Wieloetapowe sterowanie rozmyte*, WNT, Warszawa, 2001.
- [18] R. Koleśnik, P. Prokopowicz, W. Kosiński, *Fuzzy Calculator – useful tool for programming with fuzzy algebra*, w: *Artificial Intelligence and Soft Computing—ICAISC 2004* (Zakopane, 2004), L. Rutkowski i in. (red.), Lecture Notes on Artificial Intelligence 3070, Springer, 2004, 320–325.
- [19] E. Kaucher, *Über metrische und algebraische Eigenschaften einiger beim numerischen Rechnen auftretender Räume*, Ph.D. Thesis, Universität Karlsruhe, Karlsruhe, 1973.
- [20] E. Kaucher, *Interval analysis in the extended interval space IR* , Computing Suppl. 2 (1980), 33–49.
- [21] J. Drewniak, *Liczby rozmyte*, w: *Zbiory rozmyte i ich zastosowania*, J. Chojcan, J. Łęski (red.), Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice, 2001, 103–129.
- [22] M. Wagenknecht, *On the approximate treatment of fuzzy arithmetics by inclusion, linear regression and information content estimation*, w: *Zbiory rozmyte i ich zastosowania*, J. Chojcan, J. Łęski (red.), Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice, 2001, 291–310.
- [23] W. Kosiński, P. Słysz, *Fuzzy numbers and their quotient space with algebraic operations*, Bull. Polish Acad. Sci. Ser. Tech. Sci. 41 (1993), 285–295.
- [24] W. Kosiński, P. Prokopowicz, D. Ślęzak, *Fuzzy numbers with algebraic operations: algorithmic approach*, w: *Intelligent Information Systems 2002* (Sopot, 2002), M. Kłopotek i in. (red.), Physica Verlag, 2002, 311–320.
- [25] W. Kosiński, P. Prokopowicz, D. Ślęzak, *Drawback of fuzzy arithmetics — new intuitions and propositions*, w: *Proc. Methods of Artificial Intelligence*, T. Burczyński i in. (red.), PACM, Gliwice, 2002, 231–237.
- [26] W. Kosiński, P. Prokopowicz, D. Ślęzak, *On algebraic operations on fuzzy numbers*, w: *Intelligent Information Processing and Web Mining* (Zakopane, 2003), M. Kłopotek i in. (red.), Physica Verlag, 2003, 353–362.
- [27] W. Kosiński W., P. Prokopowicz, D. Ślęzak, *Ordered fuzzy numbers*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 51 (2003), 327–338.
- [28] W. Kosiński, R. Koleśnik, P. Prokopowicz, K. Frischmuth, *On algebra of ordered fuzzy numbers*, w: *Proc. International Seminar on Soft Computing—WISSC 2003*, w druku.

- [29] W. Kosiński, *On defuzzification of ordered fuzzy numbers*, w: *Artificial Intelligence and Soft Computing—ICAISC 2004* (Zakopane, 2004), L. Rutkowski i in. (red.), Lecture Notes on Artificial Intelligence 3070, Springer, Berlin, 2004, 326–331.
- [30] W. Kosiński, M. Weigl, *General mapping approximation problems solving by neural networks and fuzzy inference systems*, *Systems Analysis Modelling Simulation* 30 (1998), 11–28.
- [31] B. Martos, *Programowanie nieliniowe. Teoria i zastosowanie*, PWN, Warszawa, 1983.
- [32] S. Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, Biblioteka Mat. 46, PWN, Warszawa, 1973.
- [33] M. Wagenknecht, R. Hampel, V. Schneider, *Computational aspects of fuzzy arithmetic based on Archimedean t -norms*, *Fuzzy Sets and Systems* 123 (2001), 49–62.
- [34] L. A. Zadeh, *Fuzzy sets*, *Information and Control* 8 (1965), 338–353.
- [35] L. A. Zadeh, *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, Part I*, *Information Sciences* 8 (1975), 199–249.
- [36] L. A. Zadeh, *The role of fuzzy logic in the management of uncertainty in expert systems*, *Fuzzy Sets and Systems* 11 (1983), 199–227.

Polsko-Japońska Wyższa Szkoła
Technik Komputerowych
Centrum Badawcze
ul. Koszykowa 86
02-008 Warszawa
E-mail: wkos@pjwstk.edu.pl

Akademia Bydgoska
Instytut Mechaniki Środowiska
i Informatyki Stosowanej
ul. Chodkiewicza 30, 85-064 Bydgoszcz
Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Pracownia Systemów Wizyjnych i Pomiarowych
ul. Świętokrzyska 21, 00-049 Warszawa
E-mail: reiden10@wp.pl, piotrekp@ab-byd.edu.pl