

JERZY MUSZYŃSKI (Warszawa)

## O pewnej zunifikowanej metodzie rozwiązywania równań liniowych o stałych współczynnikach

**1. Wstęp.** Celem pracy jest omówienie zunifikowanej metody rozwiązywania wybranych zagadnień analizy i algebry. Są to te zagadnienia, przy których korzystamy z równań charakterystycznych. Zajmiemy się tu zagadnieniami początkowymi dla równań różnicowych

$$y_{n+p} + a_{p-1}y_{n+p-1} + \dots + a_1y_{n+1} + a_0y_n = b(n),$$

równań różniczkowych

$$y^{(p)} + a_{p-1}y^{(p-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(x),$$

układów równań różniczkowych

$$y' = Ay + b(x),$$

jak również zadaniami, w których dla danej macierzy  $A$  poszukujemy pewnych jej funkcji, na przykład wielomianu,  $e^A$ ,  $\sin A$  lub funkcji typu  $x \mapsto e^{Ax}$ ,  $\sin Ax$ .

W pracy zakłada się, że Czytelnikowi znane są podstawowe wiadomości z analizy i algebry, a w szczególności twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zagadnień początkowych dla równań różnicowych, różniczkowych i ich układów (por. np. [1]) oraz pewne twierdzenia z algebry liniowej (por. np. [2]).

Na zakończenie pracy w uwagach dydaktycznych zasugerujemy, jak bez sięgania do ogólnej teorii równań różnicowych i różniczkowych można wykazać istnienie i jednoznaczność rozwiązań rozpatrywanych zagadnień oraz zbadać pewne inne ich własności.

W pracy zajmować się będziemy zarówno równaniami o zmiennych zespolonych, jak i rzeczywistych. Przez  $K$  będziemy oznaczać zbiór liczb zespolonych  $\mathbb{C}$  bądź rzeczywistych  $\mathbb{R}$ .

Rozpoczniemy od równań jednorodnych.

**1.1. Równanie różnicowe.** Niech dane będzie jednorodne równanie różnicowe liniowe o stałych współczynnikach (z  $K$ )

$$y_{n+p} + a_{p-1}y_{n+p-1} + \cdots + a_1y_{n+1} + a_0y_n = 0.$$

Niech  $X$  będzie przestrzenią wektorową ciągów (o wartościach z  $K$ ), a  $X_0 \subset X$  zbiorem rozwiązań podanego równania różnicowego.

W przestrzeni  $X$  rozważmy operator  $D$ , który elementowi  $y_k$  danego ciągu  $(y_n) \in X$  przypisuje następny element tego ciągu:

$$Dy_k = y_{k+1}.$$

Jeżeli  $(y_n)$  jest rozwiązaniem równania różnicowego, to

$$D^p y_n + a_{p-1} D^{p-1} y_n + \cdots + a_1 D y_n + a_0 y_n = 0,$$

lub

$$(D^p + a_{p-1} D^{p-1} + \cdots + a_1 D + a_0 E) y_n = 0,$$

gdzie  $E$  jest operatorem tożsamościowym.

Jeżeli  $(y_n)$  jest rozwiązaniem równania różnicowego ( $(y_n) \in X_0$ ), to na jego elementach spełnione jest zatem równanie operatorowe

$$(1) \quad D^p + a_{p-1} D^{p-1} + \cdots + a_1 D + a_0 E = \Theta,$$

gdzie  $\Theta$  jest operatorem zerowym ( $\Theta y_n = 0$  dla dowolnych  $y_n \in K$ ).

**1.2. Równanie różniczkowe.** Niech  $a_0, \dots, a_{p-1} \in K$ . Rozważmy równanie

$$y^{(p)} + a_{p-1} y^{(p-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Niech funkcja  $y(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , będzie jego rozwiązaniem ( $y(x) \in K$  dla  $x \in \mathbb{R}$ ). Oznacza to, że funkcja  $y$  jest klasy  $C^p(\mathbb{R})$  i

$$y^{(p)}(x) + a_{p-1} y^{(p-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

dla  $x \in \mathbb{R}$ .

Wykażemy, że funkcja ta jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna ( $y \in C^\infty(\mathbb{R})$ ). Z podanego wyżej równania mamy dla  $x \in \mathbb{R}$

$$y^{(p)}(x) = -a_{p-1} y^{(p-1)}(x) - \cdots - a_1 y'(x) - a_0 y(x).$$

Funkcja  $y$  jest klasy  $C^p(\mathbb{R})$ . Prawa strona tej tożsamości jest różniczkowalna, a stąd i lewa, zatem  $y$  jest klasy  $C^{p+1}(\mathbb{R})$ . Po zróżniczkowaniu ostatniego wzoru otrzymujemy

$$y^{(p+1)}(x) = -a_{p-1} y^{(p)}(x) - \cdots - a_1 y''(x) - a_0 y'(x).$$

Prawa strona jest znów różniczkowalna, taka też jest więc i lewa. Oznacza to, że funkcja  $y$  jest klasy  $C^{p+2}(\mathbb{R})$ . Kontynuując tę procedurę, dowodzimy, że rozwiązanie  $y$  jest klasy  $C^\infty(\mathbb{R})$ .

Oznaczmy przez  $X$  przestrzeń  $C^\infty(\mathbb{R})$ , a przez  $X_0$  zbiór rozwiązań rozpatrywanego równania; mamy więc  $X_0 \subset X$ . Niech  $D$  będzie operatorem

różniczkowania w przestrzeni  $X$

$$Dy = y'.$$

Wtedy rozwiązanie  $y \in X_0$  spełnia równość

$$D^p y(x) + a_{p-1} D^{p-1} y(x) + \dots + a_1 Dy(x) + a_0 y(x) = 0,$$

czyli

$$(D^p + a_{p-1} D^{p-1} + \dots + a_1 D + a_0 E)y(x) = 0.$$

Stąd na rozwiązaniach równania różniczkowego (w zbiorze  $X_0$ ) spełnione jest równanie operatorowe (1).

**1.3. Macierze.** Niech dana będzie macierz kwadratowa  $A = (a_{ij})$ , gdzie  $a_{ij} \in K$  dla  $i, j = 1, \dots, n$ . Równanie  $\det(\lambda E - A) = 0$  nazywa się równaniem charakterystycznym. Ma ono postać

$$\lambda^n + b_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + b_1 \lambda + b_0 = 0.$$

Wobec twierdzenia Cayleya–Hamiltona macierz  $A$  spełnia to równanie, a więc

$$A^n + b_{n-1} A^{n-1} + \dots + b_1 A + b_0 E = 0,$$

gdzie  $E$  jest macierzą jednostkową, a  $0$  jest macierzą zerową.

Macierz  $A$  może też spełniać inne równanie niż równanie charakterystyczne, na przykład tzw. równanie minimalne.

Na przykład równanie  $A^2 - E = 0$  spełnia macierz jednostkowa  $E$  dowolnego skończonego stopnia lub przeliczalna. Podobnie spełniają je macierze:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

czy też macierz nieskończona

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

W pracy rozważać będziemy macierze spełniające równanie skończonego stopnia, a więc skończone, oraz wybrane nieskończone.

Niech więc macierz  $A$  spełnia równanie

$$A^p + a_{p-1} A^{p-1} + \dots + a_1 A + a_0 E = 0.$$

Równanie takie będziemy nazywać *zerującym*.

Niech  $X$  będzie przestrzenią wektorową macierzy kwadratowych pewnego stopnia  $n$  lub nieskończonych, a  $X_0 \subset X$  zbiorem macierzy spełniających podane wyżej równanie zerujące.

Macierz  $A$  można traktować jako odwzorowanie liniowe  $D$  w przestrzeni wektorowej  $X$  (gdy  $x \in X$ , to  $Ax \in X$ ), a wtedy  $D = A$  i dla macierzy  $A$  spełniających równanie zerujące ( $A \in X_0$ ) równanie to przybiera postać (1).

**1.4. Układ równań różniczkowych.** Niech dany będzie skończony lub przeliczalny układ równań różniczkowych

$$(2) \quad y' = Ay,$$

w którym macierz  $A$  spełnia równanie zerujące

$$A^p + a_{p-1}A^{p-1} + \dots + a_1A + a_0E = 0.$$

Jeżeli funkcja wektorowa  $y(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , jest rozwiązaniem równania (2), to rozumując podobnie jak dla równania różniczkowego, dowodzi się, że funkcja ta jest klasy  $C^\infty(\mathbb{R})$ .

W przestrzeni wektorowej funkcji  $X = C^\infty(\mathbb{R})$  wprowadźmy operator  $D$  jako operator różniczkowania

$$D = \frac{d}{dx}.$$

Wtedy rozpatrywany układ zapiszemy w postaci

$$Dy = Ay.$$

Jeżeli  $X_0$  jest zbiorem rozwiązań tego układu ( $X_0 \subset X$ ), to dla  $y \in X_0$  mamy

$$D = A,$$

a wtedy na zbiorze  $X_0$  równanie zerujące przybiera postać (1).

## 2. Rozważania ogólne

**2.1. Wyprowadzenie wzoru na operator  $D^n$ .** Niech  $X$  będzie przestrzenią wektorową nad ciałem  $K$  i niech  $D$  będzie operatorem liniowym w  $X$ . Przez  $E$  oznaczać będziemy operator tożsamościowy w  $X$ , a przez  $aD + bE$  dla  $a, b \in K$  taki operator w  $X$ , że dla każdego  $\varphi \in X$

$$(aD + bE)\varphi = aD\varphi + b\varphi.$$

Przez  $D^k$  będziemy oznaczać  $k$ -krotne złożenie operatora  $D$ . Wtedy złożenia operatorów podlegają prostym regułom mnożenia, na przykład

$$D(aD + bE) = aD^2 + bD.$$

Niech w pewnym podzbiorze  $X_0 \subset X$  operator  $D$  spełnia dla pewnego  $p \in \mathbb{N}$ , pewnych stałych  $a_{p-1}, \dots, a_1, a_0 \in K$  i dowolnych  $y \in X_0$  równanie

$$(3) \quad D^p y + a_{p-1}D^{p-1}y + \dots + a_1Dy + a_0Ey = 0_X,$$

gdzie  $0_X$  jest elementem zerowym w  $X$ . Wtedy operator  $D$  spełnia w  $X_0$  równanie operatorowe

$$(4) \quad D^p + a_{p-1}D^{p-1} + \dots + a_0E = \Theta,$$

gdzie  $\Theta$  jest operatorem zerowym w  $X$  ( $\Theta y = 0_X$  dla każdego  $y \in X$ ).

Odpowiadające równaniu (4) równanie algebraiczne (dla  $\lambda \in \mathbb{C}$ )

$$\lambda^p + a_{p-1}\lambda^{p-1} + \dots + a_0 = 0$$

będziemy nazywać *zerującymi*, a jego pierwiastki *zerującymi*.

Ze wzoru (4) wynika, że w  $X_0$

$$D^p = -a_{p-1}D^{p-1} - \dots - a_0E,$$

a więc  $D^p$  można wyrazić jako kombinację liniową operatorów  $D^{p-1}, \dots, D, E$ .

Mnożąc ostatnią równość przez  $D$ , otrzymamy

$$D^{p+1} = -a_{p-1}D^p - \dots - a_0D,$$

a więc  $D^{p+1}$  można wyrazić jako kombinację liniową  $D^p, \dots, D$ . Ale  $D^p$  można wyrazić jako kombinację liniową  $D^{p-1}, \dots, D, E$ , a zatem również  $D^{p+1}$  można wyrazić jako kombinację  $D^{p-1}, \dots, D, E$ . Powtarzając to rozumowanie, dowodzimy, że dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}$  operator  $D^n$  w  $X_0$  można wyrazić jako kombinację liniową  $D^{p-1}, \dots, D, E$ . Znajdźmy współczynniki tej kombinacji.

Dzieląc, jak to się czyni w algebrze, w przestrzeni  $X$  „wielomian”  $D^n$  przez „wielomian”  $D^p + a_{p-1}D^{p-1} + \dots + a_0E$ , otrzymamy dla pewnej funkcji  $\varphi$  i stałych  $\overset{n}{a}_{p-1}, \dots, \overset{n}{a}_1, \overset{n}{a}_0 \in K$

$$(5) \quad D^n = \varphi(D)(D^p + a_{p-1}D^{p-1} + \dots + a_0E) + \overset{n}{a}_{p-1}D^{p-1} + \dots + \overset{n}{a}_1D + \overset{n}{a}_0E$$

lub zastępując  $D$  przez  $\lambda$

$$\lambda^n = \varphi(\lambda)(\lambda^p + a_{p-1}\lambda^{p-1} + \dots + a_0) + \overset{n}{a}_{p-1}\lambda^{p-1} + \dots + \overset{n}{a}_1\lambda + \overset{n}{a}_0.$$

Niech  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  będą pierwiastkami zerującymi o krotnościach odpowiednio  $k_1, \dots, k_s$ , a więc

$$\lambda^p + a_{p-1}\lambda^{p-1} + \dots + a_0 = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}.$$

Podane wyżej równanie można zatem przedstawić w postaci

$$(6) \quad \lambda^n = \varphi(\lambda)(\lambda - \lambda_1)^{k_1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{k_s} + \overset{n}{a}_{p-1}\lambda^{p-1} + \dots + \overset{n}{a}_1\lambda + \overset{n}{a}_0.$$

Do równości tej i jej odpowiednich pochodnych będziemy podstawiać w miejsce  $\lambda$  liczby  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  w sposób następujący: jeżeli  $\lambda_i$  jest jedną z tych liczb krotności  $k_i$ , to do równania (6) i pochodnych tego równania do rzędu

$k_i - 1$  podstawimy  $\lambda = \lambda_i$ . Postępując w ten sposób, otrzymujemy układ  $p$  równań z  $p$  niewiadomymi  $\overset{n}{a}_{p-1}, \dots, \overset{n}{a}_1, \overset{n}{a}_0$ :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^n = \overset{n}{a}_{p-1} \lambda_1^{p-1} + \dots + \overset{n}{a}_1 \lambda_1^1 + \overset{n}{a}_0 \lambda_1^0, \\ (\lambda_1^n)' = \overset{n}{a}_{p-1} (\lambda_1^{p-1})' + \dots + \overset{n}{a}_1 (\lambda_1^1)' + \overset{n}{a}_0 (\lambda_1^0)', \\ \dots \quad \dots \dots \\ (\lambda_1^n)^{(k_1-1)} = \overset{n}{a}_{p-1} (\lambda_1^{p-1})^{(k_1-1)} + \dots + \overset{n}{a}_1 (\lambda_1^1)^{(k_1-1)} + \overset{n}{a}_0 (\lambda_1^0)^{(k_1-1)}, \\ \dots \quad \dots \dots \\ \lambda_s^n = \overset{n}{a}_{p-1} \lambda_s^{p-1} + \dots + \overset{n}{a}_1 \lambda_s^1 + \overset{n}{a}_0 \lambda_s^0, \\ \dots \quad \dots \dots \\ (\lambda_s^n)^{(k_s-1)} = \overset{n}{a}_{p-1} (\lambda_s^{p-1})^{(k_s-1)} + \dots + \overset{n}{a}_1 (\lambda_s^1)^{(k_s-1)} + \overset{n}{a}_0 (\lambda_s^0)^{(k_s-1)}, \end{array} \right.$$

w którym  $(\lambda_i^r)^{(k)}$  oznacza  $(\lambda^r)^{(k)}|_{\lambda=\lambda_i}$ .

Oznaczmy macierz współczynników tego układu przez  $\Gamma$ :

$$(8) \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \lambda_1^{p-1} & \lambda_1^{p-2} & \dots & \lambda_1 & \lambda_1^0 \\ (\lambda_1^{p-1})' & (\lambda_1^{p-2})' & \dots & (\lambda_1)' & (\lambda_1^0)' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\lambda_1^{p-1})^{(k_1-1)} & (\lambda_1^{p-2})^{(k_1-1)} & \dots & (\lambda_1)^{(k_1-1)} & (\lambda_1^0)^{(k_1-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\lambda_s^{p-1})^{(k_s-1)} & (\lambda_s^{p-2})^{(k_s-1)} & \dots & (\lambda_s)^{(k_s-1)} & (\lambda_s^0)^{(k_s-1)} \end{bmatrix}$$

przez  $A_r$  wektor

$$A_r = [\lambda_1^r, (\lambda_1^r)', \dots, (\lambda_1^r)^{k_1-1}, \dots, \lambda_s^r, \dots, (\lambda_s^r)^{k_s-1}]^T,$$

a przez  $\overset{n}{a}$  wektor

$$\overset{n}{a} = [\overset{n}{a}_{p-1}, \dots, \overset{n}{a}_1, \overset{n}{a}_0]^T.$$

Wtedy

$$\Gamma = [A_{p-1}, A_{p-2}, \dots, A_1, A_0]$$

i układ równań (7) przybiera postać

$$(9) \quad A_n = \Gamma \overset{n}{a}.$$

Wobec związku (5) i równania (4), na elementach zbioru  $X_0$  mamy

$$(10) \quad D^n = \overset{n}{a}_{p-1} D^{p-1} + \dots + \overset{n}{a}_1 D + \overset{n}{a}_0 E.$$

## 2.2. TWIERDZENIE.

$$\det \Gamma \neq 0.$$

*Dowód.* Niech  $r(\lambda)$  będzie wektorem-wierszem

$$r(\lambda) = [\lambda^{p-1}, \lambda^{p-2}, \dots, \lambda, 1].$$

Wtedy macierz  $\Gamma$  można zapisać w postaci

$$\Gamma = \begin{bmatrix} r(\lambda_1) \\ r'(\lambda_1) \\ \dots \\ r^{(k_1-1)}(\lambda_1) \\ \dots \\ r(\lambda_s) \\ r'(\lambda_s) \\ \dots \\ r^{(k_s-1)}(\lambda_s) \end{bmatrix}.$$

Aby wykazać, że macierz  $\Gamma$  jest nieosobliwa, wystarczy pokazać, że wektory

$$r(\lambda_1), r'(\lambda_1), \dots, r^{(k_1-1)}(\lambda_1), \dots, r(\lambda_s), r'(\lambda_s), \dots, r^{(k_s-1)}(\lambda_s)$$

są liniowo niezależne.

Niech istnieją takie stałe  $a_{ij} \in K$ ,  $i = 1, \dots, s$ ,  $j = 0, 1, \dots, k_i - 1$ , że

$$\sum_{i=1}^s \sum_{l_i=0}^{k_i-1} a_{il_i} r^{(l_i)}(\lambda_i) = 0,$$

gdzie  $r^{(0)} = r$ . Ostatnie składowe wektorów  $r(\lambda_i)$  są równe 1, gdy ostatnie składowe wektorów  $r^{(l_i)}(\lambda_i)$  dla  $l_i > 0$  są równe 0, zatem  $\sum_{i=1}^s a_{i0} r(\lambda_i) = 0$ . Gdyby nie wszystkie stałe  $a_{i0}$  były równe 0, to wektory

$$\begin{aligned} r(\lambda_1) &= [\lambda_1^{p-1}, \lambda_1^{p-2}, \dots, \lambda_1, 1], \\ &\dots \\ r(\lambda_s) &= [\lambda_s^{p-1}, \lambda_s^{p-2}, \dots, \lambda_s, 1] \end{aligned}$$

byłyby liniowo zależne, a wtedy wektory

$$\begin{aligned} &[\lambda_1^{s-1}, \lambda_1^{s-2}, \dots, \lambda_1, 1], \\ &\dots \\ &[\lambda_s^{s-1}, \lambda_s^{s-2}, \dots, \lambda_s, 1] \end{aligned}$$

byłyby również liniowo zależne, co nie jest możliwe, gdyż wyznacznik

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^{s-1} & \lambda_1^{s-2} & \dots & \lambda_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_s^{s-1} & \lambda_s^{s-2} & \dots & \lambda_s & 1 \end{vmatrix}$$

jest wyznacznikiem Vandermonde'a, różnym od zera przy naszych założeniach (pierwiastki  $\lambda_i$  są różne). Zatem wszystkie stałe  $a_{i0}$  są równe 0.

Podobnie dowodzi się, że stałe  $a_{i1}$ , stałe  $a_{i2}$  itd. są wszystkie równe zero. Otrzymane w tych dowodach wyznaczniki są wyznacznikami Vandermonde'a mnożonymi przez pewne stałe różne od zera.

**2.3. TWIERDZENIE.** *Jeżeli współczynniki równania zerującego  $a_r$ ,  $r = p - 1, \dots, 1, 0$ , są rzeczywiste, to liczby  $\bar{a}_i$ ,  $i = p - 1, \dots, 1, 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , są rzeczywiste.*

*Dowód.* Wobec wzoru (9) mamy  $\Lambda_n = \Gamma \bar{a}$ , gdzie

$$\Gamma = [\Lambda_{p-1}, \Lambda_{p-2}, \dots, \Lambda_1, \Lambda_0].$$

Stosując metodę Cramera, mamy tu  $\bar{a}_i = \det \Gamma_i / \det \Gamma$ , gdzie macierz  $\Gamma_i$  otrzymujemy z macierzy  $\Gamma$ , zastępując jej  $i + 1$ -szą kolumnę  $\Lambda_i$  przez  $\Lambda_n$ . Wtedy

$$\bar{a}_i = \frac{\det \bar{\Gamma}_i}{\det \bar{\Gamma}}.$$

Jeżeli któraś liczba  $\lambda_i$ ,  $i \in \{1, \dots, s\}$ , ma niezerową część urojoną, to wśród pozostałych  $\lambda_j$ ,  $j \in \{1, \dots, s\}$ , istnieje do niej sprzężona  $\lambda_j = \bar{\lambda}_i$ . Wynika stąd, że gdy w pewnych wierszach wyznaczników  $\det \bar{\Gamma}_i$  i  $\det \bar{\Gamma}$  występują wyrazy z niezerową częścią urojoną, to w tych wyznacznikach występują wiersze do nich sprzężone. Zamieniając między sobą jednocześnie wszystkie takie pary wierszy w  $\det \bar{\Gamma}_i$  i  $\det \bar{\Gamma}$ , otrzymamy

$$\bar{a}_i = \frac{\det \bar{\Gamma}_i}{\det \bar{\Gamma}} = \frac{\det \Gamma_i}{\det \Gamma} = \bar{a}_i.$$

**2.4. LEMAT.** *Niech  $A = (a_{ij})$  będzie macierzą kwadratową nieosobliwą stopnia  $n$  i niech  $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ ,  $y = [y_1, \dots, y_n]^T$ ,  $\gamma = [\gamma_1, \dots, \gamma_n]$ . Jeżeli  $y = Ax$ , to*

$$(11) \quad \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} & y_1 \\ \dots \dots \dots & \dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} & y_n \\ \gamma_1 \dots \gamma_n & \gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_n x_n \end{vmatrix} = 0.$$

*Dowód.* Niech  $c_k$  oznacza  $k$ -tą kolumnę macierzy  $A$  i niech

$$A_k = \begin{vmatrix} c_1 \dots c_{k-1} & c_k & c_{k+1} \dots c_n & y \\ 0 \dots 0 & 1 & 0 \dots 0 & x_k \end{vmatrix}.$$

Rozkładając ten wyznacznik względem ostatniego wiersza, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 & (-1)^{n+k+1} | c_1 \dots c_{k-1} c_{k+1} \dots c_n y | \\
 & \quad + (-1)^{2n+2} \det Ax_k \\
 & = (-1) | c_1 \dots c_{k-1} y c_{k+1} \dots c_n | + \det Ax_k \\
 & = \det A \left( x_k - \frac{| c_1 \dots c_{k-1} y c_{k+1} \dots c_n |}{\det A} \right) = 0;
 \end{aligned}$$

ostatnia równość wynika ze wzoru Cramera na  $k$ -tą współrzędną  $x_k$  wektora  $x$  takiego, że  $Ax = y$ . Ale wtedy

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k A_k = 0,$$

co należało wykazać.

Zauważmy, że wzór (11) można zapisać w symbolicznej postaci

$$\left| \begin{array}{ccc} & & y_1 \\ & A & \dots \\ & & y_n \\ \gamma_1 \dots \gamma_n & \gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_n x_n & \end{array} \right| = 0.$$

**2.5. Wzór na operator  $D^n$ .** Jak wiemy,  $\det \Gamma \neq 0$ . Ze wzorów (9), (10) i lematu 2.4 wynika, że w  $X_0$  (zapis symboliczny)

$$\left| \begin{array}{ccc} \Gamma & & A_n \\ D^{p-1} \dots D & E & D^n \end{array} \right| = \Theta,$$

gdzie  $\Theta$  jest operatorem zerowym w  $X$ , lub dokładniej

$$(12) \quad \det \left[ \begin{array}{cccc} \lambda_1^{p-1} & \lambda_1^{p-2} & \dots & 1 & \lambda_1^n \\ (\lambda_1^{p-1})' & (\lambda_1^{p-2})' & \dots & 0 & (\lambda_1^n)' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\lambda_1^{p-1})^{(k_1-1)} & (\lambda_1^{p-2})^{(k_1-1)} & \dots & 0 & (\lambda_1^n)^{(k_1-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_s^{p-1} & \lambda_s^{p-2} & \dots & 1 & \lambda_s^n \\ (\lambda_s^{p-1})' & (\lambda_s^{p-2})' & \dots & 0 & (\lambda_s^n)' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\lambda_s^{p-1})^{(k_1-1)} & (\lambda_s^{p-2})^{(k_1-1)} & \dots & 0 & (\lambda_s^n)^{(k_s-1)} \\ D^{p-1} & D^{p-2} & \dots & E & D^n \end{array} \right] = \Theta.$$

Podaną wyżej równość można zapisać w postaci

$$(13) \quad \left| \begin{array}{ccc} & & \lambda_1^n \\ & & (\lambda_1^n)' \\ & \Gamma & \cdots \\ & & (\lambda_1^n)^{(k_1-1)} \\ & & \cdots \\ & & (\lambda_s^n)^{(k_s-1)} \\ D^{p-1} \dots D E & & D^n \end{array} \right| = \Theta.$$

**2.6. Umowa ogólna.** W następnych punktach  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  będą pierwiastkami równania

$$\lambda^p + a_{p-1}\lambda^{p-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

o krotnościach  $k_1, \dots, k_s$ , a  $\Gamma$  — macierzą określoną wzorem (8).

### 3. Równanie różnicowe

#### 3.1. Zagadnienie jednorodne

**TWIERDZENIE.** *Niech dane będzie zagadnienie początkowe: równanie różnicowe jednorodne*

$$y_{n+p} + a_{p-1}y_{n+p-1} + \dots + a_1y_{n+1} + a_0y_n = 0$$

z danymi początkowymi  $y_0, y_1, \dots, y_{p-1}$ . Rozwiązanie  $y_n$  tego zagadnienia znajdujemy ze wzoru

$$(14) \quad \left| \begin{array}{ccc} & & \lambda_1^n \\ & & (\lambda_1^n)' \\ & \Gamma & \cdots \\ & & (\lambda_1^n)^{(k_1-1)} \\ & & \cdots \\ & & (\lambda_s^n)^{(k_s-1)} \\ y_{p-1} \dots y_1 y_0 & & y_n \end{array} \right| = 0.$$

Korzystamy tu z oznaczeń podanych w punkcie 2.6.

*Dowód.* Korzystając ze wzoru (13) i definicji operatora  $D$  danej wzorem  $Dy_k = y_{k+1}$  oraz działając operatorami ostatniego wiersza na element  $y_0$ ,



z zerowymi danymi początkowymi. Rozwiązanie  $y_n$  tego zagadnienia znajdziemy ze wzoru

$$(15) \quad \Gamma \begin{vmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_1^{n-k-1} b(k) & & & \\ & \dots & & \\ \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_1^{n-k-1})^{(k_1-1)} b(k) & & & \\ & \dots & & \\ \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_s^{n-k-1})^{k_s-1} b(k) & & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & y_n \end{vmatrix} = 0.$$

Korzystamy tu z oznaczeń podanych w punkcie 2.6.

*Dowód.* Rozwiązanie równania niejednorodnego, takie, że  $y_0 = y_1 = \dots = y_{p-1} = 0$ , opisane jest wzorem

$$(16) \quad y_n = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{y}_{n-k-1} b(k),$$

gdzie  $\tilde{y}_n$  jest rozwiązaniem równania jednorodnego

$$y_{n+p} + a_{p-1}y_{n+p-1} + \dots + a_1y_{n+1} + a_0y_n = 0$$

z warunkami początkowymi  $y_0 = y_1 = \dots = y_{p-2} = 0$ ,  $y_{p-1} = 1$ . Rozwiązanie to można znaleźć ze wzoru

$$\Gamma \begin{vmatrix} \lambda_1^n & & & \\ & \dots & & \\ (\lambda_1^n)^{(k_1-1)} & & & \\ & \dots & & \\ (\lambda_s^n)^{k_s-1} & & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{y}_n \end{vmatrix} = 0.$$

Wobec wzoru (16) rozwiązanie  $y_n$  równania niejednorodnego można więc znaleźć z (15).

UWAGA. Przypominamy, że rozwiązaniem zagadnienia niejednorodnego z danymi warunkami początkowymi jest suma złożona z rozwiązania odpowiedniego równania jednorodnego z danymi warunkami początkowymi i rozwiązania równania niejednorodnego z zerowymi warunkami początkowymi.

Podobnie jest dla rozpatrywanych dalej równań różniczkowych (por. przytoczony w tym punkcie przykład) i ich układów.

#### 4. Równanie różniczkowe

##### 4.1. Zagadnienie jednorodne

TWIERDZENIE. Niech dane będzie zagadnienie początkowe:

$$y^{(p)} + a_{p-1}y^{(p-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0,$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, \quad y^{(p-1)}(x_0) = y_{p-1}.$$

Rozwiązanie  $y$  tego zagadnienia znajdujemy ze wzoru

$$(17) \quad \Gamma \begin{vmatrix} e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ (x-x_0)e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ \dots \\ (x-x_0)^{k_1-1}e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ \dots \\ e^{\lambda_s(x-x_0)} \\ \dots \\ (x-x_0)^{k_s-1}e^{\lambda_s(x-x_0)} \\ y_{p-1} \dots y_1 y_0 & y(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Korzystamy tu z oznaczeń podanych w punkcie 2.6.

*Dowód.* Korzystając ze wzoru (13) i definicji operatora  $D$  danej wzorem  $Dy = y'$  oraz działając operatorami ostatniego wiersza na element  $y(x)$ , otrzymujemy wzór

$$(18) \quad \Gamma \begin{vmatrix} \lambda_1^n \\ \frac{d}{d\lambda}(\lambda_1^n) \\ \dots \\ \frac{d^{k_1-1}}{d\lambda^{k_1-1}}(\lambda_1^n) \\ \dots \\ \lambda_s^n \\ \dots \\ \frac{d^{k_s-1}}{d\lambda^{k_s-1}}(\lambda_s^n) \\ y^{(p-1)}(x) \dots y'(x) y(x) & y^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Jak wiemy, rozwiązanie  $y(x)$  jest klasy  $C^\infty(\mathbb{R})$ , zatem według wzoru Taylora

$$y(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{y^{(m)}(x_0)}{m!} (x-x_0)^m + \frac{y^{(n)}(\tilde{x})}{n!} (x-x_0)^n$$



Mnożąc ostatnią kolumnę wyznacznika we wzorze (19) przez  $\frac{(x-x_0)^n}{n!}$ , otrzymujemy

$$\Gamma \begin{vmatrix} \frac{\lambda_1^n (x-x_0)^n}{n!} \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\lambda_1^n (x-x_0)^n}{n!} \\ \dots \\ \frac{\partial^{k_1-1}}{\partial \lambda^{k_1-1}} \frac{\lambda_1^n (x-x_0)^n}{n!} \\ \dots \\ \frac{\lambda_s^n (x-x_0)^n}{n!} \\ \dots \\ \frac{\partial^{k_s-1}}{\partial \lambda^{k_s-1}} \frac{\lambda_s^n (x-x_0)^n}{n!} \\ y_{p-1} \dots y_1 y_0 \frac{y^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} \end{vmatrix} = 0$$

Sumując takie wyznaczniki od  $n = 0$  do nieskończoności (różnią się one tylko ostatnią kolumną) i biorąc pod uwagę zbieżność wszystkich otrzymanych szeregów, otrzymujemy wzór

$$\Gamma \begin{vmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^n (x-x_0)^n}{n!} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\lambda_1^n (x-x_0)^n}{n!} \\ \dots \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^{k_1-1}}{\partial \lambda^{k_1-1}} \frac{\lambda_1^n (x-x_0)^n}{n!} \\ \dots \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_s^n (x-x_0)^n}{n!} \\ \dots \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^{k_s-1}}{\partial \lambda^{k_s-1}} \frac{\lambda_s^n (x-x_0)^n}{n!} \\ y_{p-1} \dots y_1 y_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} \end{vmatrix} = 0$$

czyli

$$\Gamma \begin{vmatrix} e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ \dots \\ \frac{\partial^{k_1-1}}{\partial \lambda^{k_1-1}} e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ \dots \\ e^{\lambda_s(x-x_0)} \\ \dots \\ \frac{\partial^{k_s-1}}{\partial \lambda^{k_s-1}} e^{\lambda_s(x-x_0)} \\ y_{p-1} \dots y_1 y_0 \quad y(x) \end{vmatrix} = 0,$$

a więc wzór (17).

**4.2. PRZYKŁAD.** Rozważmy zagadnienie początkowe

$$y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Równaniem charakterystycznym jest tu

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

o pierwiastku dwukrotnym

$$\lambda = 1.$$

Rozwiązanie znajdujemy ze wzoru (17):

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & 1 & e^{\lambda x} \\ 1 & 0 & xe^{\lambda x} \\ 2 & 1 & y(x) \end{bmatrix} = 0;$$

mamy tu  $2xe^{\lambda x} - (\lambda xe^{\lambda x} - e^{\lambda x}) - y(x) = 0$  i przy  $\lambda = 1$

$$y(x) = xe^x + e^x.$$

**4.3. Równanie niejednorodne**

**TWIERDZENIE.** Niech dane będzie równanie niejednorodne

$$y^{(p)} + a_{p-1}y^{(p-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(x).$$

Rozwiązanie tego równania z warunkami początkowymi

$$y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(p-1)}(x_0) = 0$$

opisane jest wzorem

$$(20) \quad \Gamma \begin{vmatrix} \int_{x_0}^x e^{\lambda_1(x-u)} b(u) du \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{x_0}^x e^{\lambda_1(x-u)} b(u) du \\ \dots \\ \frac{\partial^{k_1-1}}{\partial \lambda^{k_1-1}} \int_{x_0}^x e^{\lambda_1(x-u)} b(u) du \\ \dots \\ \int_{x_0}^x e^{\lambda_s(x-u)} b(u) du \\ \dots \\ \frac{\partial^{k_s-1}}{\partial \lambda^{k_s-1}} \int_{x_0}^x e^{\lambda_s(x-u)} b(u) du \\ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \quad y(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Korzystamy tu z oznaczeń podanych w punkcie 2.6.

*Dowód.* Rozwiązanie rozpatrywanego zagadnienia początkowego dane jest wzorem

$$(21) \quad y = \int_{x_0}^x \tilde{y}(x + x_0 - u) b(u) du,$$

gdzie  $\tilde{y}$  jest rozwiązaniem równania jednorodnego

$$y^{(p)} + a_{p-1}y^{(p-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

z warunkami początkowymi

$$y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(p-2)}(x_0) = 0, \quad y^{(p-1)}(x_0) = 1.$$

Rozwiązanie  $\tilde{y}$  można więc opisać wzorem

$$\Gamma \begin{vmatrix} e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ \dots \\ \frac{\partial^{k_1-1}}{\partial \lambda^{k_1-1}} e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ \dots \\ e^{\lambda_s(x-x_0)} \\ \dots \\ \frac{\partial^{k_s-1}}{\partial \lambda^{k_s-1}} e^{\lambda_s(x-x_0)} \\ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \quad \tilde{y}(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Wobec wzoru (21) rozwiązanie  $y$  równania niejednorodnego można znaleźć ze wzoru (20).

**4.4. PRZYKŁAD.** Znajdźmy rozwiązanie zagadnienia

$$y'' - 2y' + y = e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Wobec wzoru (20) i poprzedniego przykładu mamy tu

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & \int_0^x e^{\lambda(x-u)} e^{2u} du \\ 1 & 0 & \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^x e^{\lambda(x-u)} e^{2u} du \\ 1 & 0 & y(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{\lambda(x-u)} e^{2u} du &= \frac{1}{2-\lambda} (e^{2x} - e^{\lambda x}), \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^x e^{\lambda(x-u)} e^{2u} du &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{1}{2-\lambda} (e^{2x} - e^{\lambda x}) \right] \\ &= \frac{1}{(2-\lambda)^2} (e^{2x} - e^{\lambda x}) - \frac{1}{2-\lambda} x e^{\lambda x}, \end{aligned}$$

więc dla  $\lambda = 1$

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{\lambda(x-u)} e^{2u} du &= e^{2x} - e^x, \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^x e^{\lambda(x-u)} e^{2u} du &= e^{2x} - e^x - x e^x, \end{aligned}$$

a wtedy rozwiązanie znajdujemy ze wzoru

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & e^{2x} - e^x \\ 1 & 0 & e^{2x} - e^x - x e^x \\ 1 & 0 & y(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Mamy tu

$$y(x) = e^{2x} - e^x - x e^x.$$

Rozwiązanie zagadnienia

$$y'' - 2y' + y = e^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

jest sumą rozwiązań poprzedniego przykładu i bieżącego, a więc

$$y = x e^x + e^x + e^{2x} - e^x - x e^x = e^{2x}.$$

## 5. Układ równań różniczkowych

### 5.1. Zagadnienie jednorodne

TWIERDZENIE. Niech dane będzie zagadnienie jednorodne

$$y' = Ay, \quad y(x_0) = y_0.$$

Jego rozwiązanie można znaleźć ze wzoru

$$(22) \quad \left| \begin{array}{ccc} & & e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ & & (x-x_0)e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ & & \dots \\ \Gamma & & (x-x_0)^{k_1-1}e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ & & \dots \\ & & e^{\lambda_s(x-x_0)} \\ & & \dots \\ & & (x-x_0)^{k_s-1}e^{\lambda_s(x-x_0)} \\ A^{p-1}y_0 \dots Ay_0 y_0 & & y(x) \end{array} \right| = 0.$$

Korzystamy tu z oznaczeń podanych w punkcie 2.6.

UWAGA. We wzorze tym (i podobnych) w miejsce  $\Gamma$  należy podstawić elementy tej macierzy (ze wzoru (8)). Natomiast  $A$  jest daną macierzą i wzór należy rozumieć w tym sensie, że po formalnym obliczeniu wyznacznika znajdziemy rozwiązanie — funkcję wektorową  $y(x)$  zależną w szczególności od macierzy  $A$ .

Dowód. Korzystając ze wzoru (13) i definicji operatora  $D$  danej wzorem  $Dy = Ay$  oraz działając operatorami ostatniego wiersza na rozwiązanie  $y(x)$ , otrzymujemy wzór

$$\left| \begin{array}{ccc} \Gamma & & A_n \\ D^{p-1}y(x) \dots Dy(x) y(x) & & D^n y(x) \end{array} \right| = 0;$$

postępując tak jak w przypadku zagadnienia jednorodnego dla równania różniczkowego, otrzymujemy

$$\left| \begin{array}{ccc} & & e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ & & \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ & & \dots \\ \Gamma & & \frac{\partial^{k_1-1}}{\partial \lambda^{k_1-1}} e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ & & \dots \\ & & e^{\lambda_s(x-x_0)} \\ & & \dots \\ & & \frac{\partial^{k_s-1}}{\partial \lambda^{k_s-1}} e^{\lambda_s(x-x_0)} \\ A^{p-1}y_0 \dots Ay_0 y_0 & & y(x) \end{array} \right| = 0,$$

czyli wzór (22).

Znajdźmy jeszcze wzór opisujący dla układu  $y' = Ay$  macierz fundamentalną  $W(x)$ , podstawową dla  $x = x_0$ , to znaczy taką, że  $W(x_0) = E$ . Wtedy  $y(x) = W(x)y_0$ , a zatem wobec ostatniego wzoru

$$(23) \quad \Gamma \begin{vmatrix} e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ \dots \\ \frac{\partial^{k_1-1}}{\partial \lambda^{k_1-1}} e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ \dots \\ e^{\lambda_s(x-x_0)} \\ \dots \\ \frac{\partial^{k_s-1}}{\partial \lambda^{k_s-1}} e^{\lambda_s(x-x_0)} \\ A^{p-1} \dots A E \quad W(x) \end{vmatrix} = 0.$$

**5.2. PRZYKŁAD.** Rozważmy zagadnienie

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2, \\ y_2' = y_1 + 2y_2, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(0) = 2, \\ y_2(0) = 1. \end{cases}$$

Mamy tu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad y_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i

$$Ay_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Równaniem charakterystycznym jest

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

czyli  $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ , o pierwiastkach  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$ . Mamy tu symbolicznie

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & e^x \\ 3 & 1 & e^{3x} \\ Ay_0 & y_0 & y(x) \end{vmatrix} = 0,$$

czyli  $-2y(x) - y_0(e^{3x} - 3e^x) + Ay_0(e^{3x} - e^x)$ , a więc

$$\begin{aligned} y(x) &= -\frac{1}{2}(e^{3x} - 3e^x)y_0 + \frac{1}{2}(e^{3x} - e^x)Ay_0 \\ &= -\frac{1}{2}(e^{3x} - 3e^x) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(e^{3x} - e^x) \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^{3x} + \frac{1}{2}e^x \\ \frac{3}{2}e^{3x} - \frac{1}{2}e^x \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mamy więc

$$y_1 = \frac{3}{2}e^{3x} + \frac{1}{2}e^x,$$

$$y_2 = \frac{3}{2}e^{3x} - \frac{1}{2}e^x.$$

**5.3. Równanie niejednorodne.** Niech dane będzie równanie niejednorodne

$$y' = Ay + b(x).$$

Rozwiązanie tego równania z warunkiem początkowym

$$y(x_0) = 0$$

można znaleźć ze wzoru

$$(24) \quad y = \int_{x_0}^x W(x + x_0 - u)b(u) du,$$

gdzie  $W$  jest macierzą fundamentalną, podstawową dla  $x = x_0$  układu  $y' = Ay$ . Macierz ta opisana jest wzorem (23). Po znalezieniu z tego wzoru macierzy  $W$  rozwiązanie  $y$  równania niejednorodnego można znaleźć ze wzoru (24).

## 6. Macierze

**6.1. Wielomian.** Niech dana będzie macierz kwadratowa  $A = (a_{ij})$  o elementach  $a_{ij} \in K$ . Niech macierz ta spełnia równanie zerujące

$$(25) \quad A^p + a_{p-1}A^{p-1} + \dots + a_1A + a_0E = 0.$$

Korzystając ze wzoru (13) w przypadku  $D = A$ , otrzymujemy wzór

$$(26) \quad \left| \begin{array}{cccc} & & \lambda_1^n & \\ & & (\lambda_1^n)' & \\ & \Gamma & \dots & \\ & & (\lambda_1^n)^{(k_1-1)} & \\ & & \dots & \\ & & (\lambda_s^n)^{(k_s-1)} & \\ A^{p-1} & \dots & A & E & A^n \end{array} \right| = \Theta.$$

Stąd dla każdego wielomianu  $\varphi$  można znaleźć wielomian  $\varphi(A)$  ze wzoru

$$\Gamma \begin{vmatrix} \varphi(\lambda_1) \\ \varphi'(\lambda_1) \\ \dots \\ \varphi^{(k_1-1)}(\lambda_1) \\ \dots \\ \varphi(\lambda_s) \\ \dots \\ \varphi^{(k_s-1)}(\lambda_s) \\ A^{p-1} \dots A E \quad \varphi(A) \end{vmatrix} = 0.$$

**6.2. Szeregi.** Zdefiniujmy funkcję  $x \mapsto e^{A(x-x_0)}$  z  $\mathbb{R}$  w przestrzeń wektorową macierzy przez szereg

$$e^{A(x-x_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} A^n.$$

Szereg ten jest zbieżny dla dowolnego  $x \in \mathbb{R}$  i dowolnej macierzy  $A$ . Funkcję  $e^{A(x-x_0)}$  można znaleźć ze wzoru

$$\Gamma \begin{vmatrix} e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ (x-x_0)e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ \dots \\ (x-x_0)^{k_1-1}e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ \dots \\ e^{\lambda_s(x-x_0)} \\ \dots \\ (x-x_0)^{k_s-1}e^{\lambda_s(x-x_0)} \\ A^{p-1} \dots A E \quad e^{A(x-x_0)} \end{vmatrix} = 0.$$

Podobnie definiując funkcję

$$\sin A(x-x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-x_0)^{2n+1}}{(2n+1)!} A^{2n+1},$$

mamy

$$\left| \begin{array}{c} \sin \lambda_1(x - x_0) \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \sin \lambda_1(x - x_0) \\ \dots \\ \frac{\partial^{k_1-1}}{\partial \lambda^{k_1-1}} \sin \lambda_1(x - x_0) \\ \dots \\ \sin \lambda_s(x - x_0) \\ \dots \\ \frac{\partial^{k_s-1}}{\partial \lambda^{k_s-1}} \sin \lambda_s(x - x_0) \\ A^{p-1} \dots A E \quad \sin A(x - x_0) \end{array} \right| = 0.$$

Analogicznie można zdefiniować funkcję  $\cos A(x - x_0)$  i znaleźć odpowiedni wzór.

**6.3. Macierz odwrotna.** Jeżeli macierz  $A$  jest nieosobliwa, to wobec wzoru (25) mamy

$$A^{p-1} + a_{p-1}A^{p-2} + \dots + a_1E + a_0A^{-1} = 0,$$

skąd wynika, że macierz  $A^{-1}$  można wyrazić przez  $E, A, \dots, A^{p-1}$ , a wtedy działając tak jak w paragrafie 2, uzyskamy wzór

$$\left| \begin{array}{c} \lambda_1^{-1} \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \lambda_1^{-1} \\ \dots \\ \frac{\partial^{k_1-1}}{\partial \lambda^{k_1-1}} \lambda_1^{-1} \\ \dots \\ \lambda_s^{-1} \\ \dots \\ \frac{\partial^{k_s-1}}{\partial \lambda^{k_s-1}} \lambda_s^{-1} \\ A^{p-1} \dots A E \quad A^{-1} \end{array} \right| = 0.$$

**6.4. Pierwiastki.** Pierwiastkiem  $n$ -tego stopnia z macierzy  $A$  nazywamy każdą macierz  $B$  taką, że  $B^n = A$ .

Macierz może:

- nie mieć pierwiastków, na przykład macierz  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  nie ma pierwiastków drugiego stopnia,
- mieć skończoną liczbę pierwiastków, np. pierwiastkami kwadratowymi z macierzy  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$  są macierze  $\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{bmatrix}$ ,

- mieć nieskończenie wiele pierwiastków, np. pierwiastkami kwadratowymi macierzy  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  są macierze  $\begin{bmatrix} a & \frac{-a^2+1}{b} \\ b & -a \end{bmatrix}$  dla dowolnych  $a$  i  $b \neq 0$  oraz macierz  $\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$ .

W ostatnich dwóch przypadkach część pierwiastków z macierzy (w szczególności te, które można opisać jako wielomian od  $E, A, \dots, A^{p-1}$ ) znajdujemy ze wzoru

$$\Gamma \begin{vmatrix} \varrho_1 \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \varrho_1 \\ \dots \\ \frac{\partial^{k_1-1}}{\partial \lambda^{k_1-1}} \varrho_1 \\ \dots \\ \varrho_s \\ \dots \\ \frac{\partial^{k_s-1}}{\partial \lambda^{k_s-1}} \varrho_s \\ A^{p-1} \dots A E \quad B \end{vmatrix} = 0,$$

gdzie liczby  $\varrho_k$  są takie, że  $\varrho_k^n = \lambda_k$ , macierz  $B$  jest szukaną, tzn. taką, że  $B^n = A$ .

**6.5. PRZYKŁAD.** Znajdźmy pierwiastki drugiego stopnia z macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Mamy tu

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 4 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda$$

o pierwiastkach  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 4$ . Pierwiastki  $B$  z macierzy  $A$  znajdziemy ze wzoru

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & \varrho \\ A & E & B \end{vmatrix} = 0,$$

gdzie  $\varrho$  jest takie, że  $\varrho^2 = 4$ . Mamy tu

$$B = \frac{1}{4} \varrho A = \frac{1}{4} \varrho \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \varrho & \frac{1}{4} \varrho \\ \varrho & \frac{1}{2} \varrho \end{bmatrix}.$$

**7. Uwagi dydaktyczne.** W przypadku małej liczby godzin przeznaczonej na wykład, w którym musimy opisać rozwiązywanie rozpatrywanych tu zagadnień z elementami teorii ograniczonej do zagadnień liniowych o stałych współczynnikach, opisane rozważania można traktować jako dowody jedności, a dowody istnienia otrzymać bezpośrednio z uzyskanych wzorów. Na ich podstawie można uzyskać pełną teorię dla zagadnień liniowych o stałych współczynnikach, rozpatrywać pewną klasę zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych itd. Jeśli Czytelnicy będą zainteresowani tą tematyką, będziemy ją kontynuować w następnym numerze czasopisma.

Zauważmy, że opisaną w pracy metodą można w prosty sposób opisać rozwiązanie zagadnienia początkowego dla układu równań różnicowych postaci  $y_{n+1} = Ay_n + b(n)$ , gdzie  $A$  jest macierzą kwadratową stopnia  $n$ , a  $y_n, b(n)$  są wektorami z  $\mathbb{R}^n$ .

Na zakończenie autor składa serdecznie podziękowania doktor Katarzynie Litewskiej za pomoc w wykonaniu tej pracy.

#### Literatura

- [1] J. Muszyński, A. D. Myszkis, *Równania różniczkowe zwyczajne*, PWN, Warszawa, 1984.
- [2] R. Bellman, *Introduction to matrix analysis*, McGraw-Hill, New York, 1960.

Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych  
Politechnika Warszawska  
Pl. Politechniki 1, 00-661 Warszawa  
E-mail: jmuszynski@acn.waw.pl