

PIOTR JAWORSKI (Warszawa)

Asymptotyka dwuwymiarowych kopuli

1. Wprowadzenie. Celem niniejszego opracowania jest zapoznanie czytelników z pojęciami kopuli i jej rozwinięcia asymptotycznego, które znalazły szerokie zastosowanie w badaniu i opisie zależności między zdarzeniami ekstremalnymi. Jest to szczególnie istotne w ocenie ryzyka „dużej straty”, np. w ubezpieczeniach czy inwestycjach finansowych.

Przypomnijmy, że funkcję

$$C : \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$$

nazywamy *kopulą* (łącznikiem) (patrz [4]), jeżeli

$$\forall u, v \in \langle 0, 1 \rangle \quad C(0, v) = 0, \quad C(u, 0) = 0;$$

$$\forall u, v \in \langle 0, 1 \rangle \quad C(1, v) = v, \quad C(u, 1) = u;$$

$$\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in \langle 0, 1 \rangle, u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$$

$$C(u_1, v_2) + C(u_2, v_1) \leq C(u_1, v_1) + C(u_2, v_2).$$

Funkcje, które spełniają ostatni warunek, nazywamy *dwu-niemalejącymi*. Dla funkcji dwukrotnie różniczkowalnych warunek ten jest równoważny nieujemności pochodnej mieszanej. Ponadto, jak łatwo zauważyć, funkcja C jest niemalejąca względem każdego argumentu i ciągła (a nawet lipschitzowska).

Niech \mathcal{X} i \mathcal{Y} będą zmiennymi losowymi określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Dwuwymiarową dystrybuantę $F_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}$ możemy zapisać, używając odpowiedniej kopuli C (patrz [4], Th. 2.4.1):

$$F_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}(x, y) = C(F_{\mathcal{X}}(x), F_{\mathcal{Y}}(y)),$$

gdzie $F_{\mathcal{X}}, F_{\mathcal{Y}}$ są dystrybuantami \mathcal{X} i \mathcal{Y} . Zauważmy, że ściśle rosnące przekształcenia zmiennych losowych \mathcal{X} i \mathcal{Y} nie wymagają zmiany kopuli. Rzeczywiście, jeżeli

$$\mathcal{X}' = f(\mathcal{X}), \quad \mathcal{Y}' = g(\mathcal{Y}),$$

gdzie f i g są ściśle rosnące i odwracalne, to

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{X}'\mathcal{Y}'}(x, y) &= F_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}(f^{-1}(x), g^{-1}(y)) = C(F_{\mathcal{X}}(f^{-1}(x)), F_{\mathcal{Y}}(g^{-1}(y))) \\ &= C(F_{\mathcal{X}'}(x), F_{\mathcal{Y}'}(y)). \end{aligned}$$

Dlatego kopule są cennym narzędziem, gdy chcemy badać tylko zależność między zmiennymi losowymi, a nie ich łączny rozkład, tym bardziej że kopule są wyznaczone jednoznacznie dla wszystkich par (u, v) takich, że równania $F_{\mathcal{X}}(x) = u$ i $F_{\mathcal{Y}}(y) = v$ posiadają rozwiązanie.

Dla każdej kopuli C istnieje *kopula dualna*, tak zwana kopula przetrwania (*survival copula*) \widehat{C} , określona w następujący sposób:

$$\widehat{C} : \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle, \quad \widehat{C}(u, v) = C(1 - u, 1 - v) + u + v - 1.$$

Zauważmy, że jeżeli C określa łączny rozkład \mathcal{X} i \mathcal{Y} , to \widehat{C} określa łączny rozkład $-\mathcal{X}$ i $-\mathcal{Y}$.

Powiemy, że dwuwymiarowa kopula ma *jednorodne rozwinięcie „dolnego ogona”*, jeżeli dla argumentów bliskich zeru może być *jednostajnie* przybliżona przez jednorodną funkcję pierwszego stopnia.

DEFINICJA. Kopula

$$C : \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$$

ma *jednorodne rozwinięcie dolnego ogona*, jeżeli istnieje funkcja jednorodna

$$L : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall t \geq 0 \quad L(tu, tv) = tL(u, v),$$

i funkcja ograniczona

$$R : \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} R(u, v) = 0,$$

takie, że

$$\forall u, v \in \langle 0, 1 \rangle \quad C(u, v) = L(u, v) + R(u, v)(u + v).$$

Aby opisać asymptotykę dla argumentów bliskich 1, odwołamy się do kopuli dualnej. Powiemy, że dwuwymiarowa kopula C ma *jednorodne rozwinięcie górnego ogona*, jeżeli dualna kopula \widehat{C} ma jednorodne rozwinięcie dolnego ogona.

Funkcję L będziemy nazywali *częścią główną* rozwinięcia, a w przypadku, gdy jest ona równa zeru, będziemy mówić o rozwinięciu *trywialnym*.

Przytoczone powyżej warunki definicyjne są trochę silniejsze niż te rozważane przez P. Embrechtsa ([1]) i innych autorów, niemniej są one spełnione przez większość kopuli spotykanych w literaturze.

W rozdziale 2 omawiamy podstawowe własności części głównej i opisujemy jej ogólną postać. Rozdział 3 zawiera przykłady kopul i ich części głównych. Między innymi dowodzimy, że kopule gaussowskie (opisujące rozkład normalny) mają trywialną asymptotykę. W rozdziale 4 pokazujemy

praktyczne zastosowania asymptotyki kopul do oceny ryzyka inwestycji finansowych.

2. Własności części głównej L . Niech $L(u, v)$ będzie częścią główną jednorodnego rozwinięcia kopuli $C(u, v)$.

TWIERDZENIE 1. *Funkcja $L(u, v)$ jest dwu-niemalejąca:*

$$u_1 \leq u_2 \wedge v_1 \leq v_2 \Rightarrow L(u_1, v_2) + L(u_2, v_1) \leq L(u_1, v_1) + L(u_2, v_2),$$

nieujemna i ograniczona przez mniejszy ze swoich argumentów, tzn.

$$0 \leq L(u, v) \leq \min(u, v).$$

Dowód. Jak wiadomo, wszystkie kopule spełniają następujące oszacowanie ([4], Th. 2.2.3):

$$0 \leq C(u, v) \leq \min(u, v).$$

Dlatego dla $0 < t < 1$ mamy nierówności

$$0 \leq \frac{C(tu, tv)}{t} = L(u, v) + (u + v)R(tu, tv) \leq \min(u, v).$$

Przechodząc do granicy ($t \rightarrow 0$), otrzymujemy

$$0 \leq L(u, v) \leq \min(u, v).$$

W podobny sposób pokażemy dwu-monotoniczność. Niech $u_1 \leq u_2$ i $v_1 \leq v_2$. Kopule są dwu-niemalejące, zatem dla każdego t , $0 < t < 1$,

$$\begin{aligned} 0 &\geq C(tu_1, tv_2) + C(tu_2, tv_1) - C(tu_1, tv_1) - C(tu_2, tv_2) \\ &= tL(u_1, v_2) + tL(u_2, v_1) - tL(u_1, v_1) - tL(u_2, v_2) \\ &\quad + tR(tu_1, tv_2)(u_1 + v_2) + tR(tu_2, tv_1)(u_2 + v_1) \\ &\quad - tR(tu_1, tv_1)(u_1 + v_1) - tR(tu_2, tv_2)(u_2 + v_2). \end{aligned}$$

Po podzieleniu przez t i przejściu do granicy otrzymujemy

$$0 \geq L(u_1, v_2) + L(u_2, v_1) - L(u_1, v_1) - L(u_2, v_2).$$

Z powyższego twierdzenia i jednorodności wynikają dalsze własności L .

WNIOSEK 1. *Część główna $L(u, v)$ spełnia następujące warunki:*

1. *Dla dowolnych nieujemnych u i v , $L(0, v) = L(u, 0) = 0$.*
2. *$L(u, v)$ jest niemalejąca ze względu na oba argumenty.*
3. *$L(u, v)$ jest lipschitzowska dla dowolnych nieujemnych u, u_1, v, v_1 :*

$$|L(u, v) - L(u_1, v_1)| \leq |u - u_1| + |v - v_1|.$$

4. *$L(u, v)$ jest ciągła.*

Dowód. Pierwszy warunek jest oczywisty. Ponieważ

$$0 \leq L(0, v) \leq \min(0, v) = 0,$$

więc $L(0, v) = 0$. Podobnie pokazujemy, że $L(u, 0) = 0$.

Aby pokazać monotoniczność, należy skorzystać z dwu-monotoniczności z jednym argumentem równym 0. Rzeczywiście, dla $u_1 < u_2$ i $v > 0$ otrzymujemy

$$0 \leq L(u_1, 0) + L(u_2, v) - L(u_1, v) - L(u_2, 0) = L(u_2, v) - L(u_1, v).$$

Podobnie dla $v_1 < v_2$ i $u > 0$ otrzymujemy

$$0 \leq L(0, v_1) + L(u, v_2) - L(0, v_2) - L(u, v_1) = L(u, v_2) - L(u, v_1).$$

Lipschitzowskość wynika z jednorodności. Mianowicie, dla $0 \leq u_1 < u_2$ i $v > 0$ mamy

$$\begin{aligned} L(u_2, v) - L(u_1, v) &\leq L(u_2, v) - L\left(u_1, \frac{vu_1}{u_2}\right) = L(u_2, v) - \frac{u_1}{u_2}L(u_2, v) \\ &= \left(1 - \frac{u_1}{u_2}\right)L(u_2, v) \leq \left(1 - \frac{u_1}{u_2}\right)u_2 = u_2 - u_1. \end{aligned}$$

Podobnie dla $0 \leq v_1 < v_2$ i $u > 0$ pokazujemy, że $0 \leq L(u, v_2) - L(u, v_1) \leq v_2 - v_1$. Zatem

$$\begin{aligned} |L(u, v) - L(u_1, v_1)| &= |L(u, v) - L(u, v_1) + L(u, v_1) - L(u_1, v_1)| \\ &\leq |L(u, v) - L(u, v_1)| + |L(u, v_1) - L(u_1, v_1)| \leq |v - v_1| + |u - u_1|. \end{aligned}$$

Ciągłość wynika z lipschitzowskości.

Następna ważna własność L to wklęsłość. Okazuje się, że dla funkcji jednorodnych pierwszego stopnia dwu-monotoniczność jest równoważna wklęsłości.

TWIERDZENIE 2. Niech $H(u, v)$ będzie funkcją dodatnio jednorodną stopnia 1 określoną dla $u, v \geq 0$,

$$\forall t \geq 0 \quad H(tu, tv) = tH(u, v).$$

Wówczas następujące warunki są równoważne:

1. H jest dwu-niemalejąca.
2. H jest wklęsła.

Dowód. Ograniczymy się do przypadku, gdy H ma ciągłe drugie pochodne. Wówczas jednorodność H implikuje następujące równości:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(u, v) + v \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial u}(u, v) &= 0, \\ u \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v}(u, v) + v \frac{\partial^2 H}{\partial v^2}(u, v) &= 0. \end{aligned}$$

(Należy zróżniczkować obie strony równości $H(tu, tv) = tH(u, v)$ po u lub v i po t , a następnie podstawić $t = 1$.) Wynika z nich, że macierz drugich

pochodnych ma wyznacznik zero. Rzeczywiście,

$$D^2H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(u, v) & \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial u}(u, v) \\ \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v}(u, v) & \frac{\partial^2 H}{\partial v^2}(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{v}{u} \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v}(u, v) & \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial u}(u, v) \\ \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v}(u, v) & -\frac{u}{v} \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial u}(u, v) \end{pmatrix}.$$

Zatem $\det D^2H = 0$. Ponadto, ponieważ znak pierwszego minora przekątniowego jest przeciwny niż znak pochodnej mieszanej ($u, v > 0$), nieujemność pochodnej mieszanej jest równoważna niedodatniości całej macierzy. Z tego wynika, że warunki 1 i 2 są równoważne.

WNIOSEK 2. $L(u, v)$ jest nadaddytywna, tzn.

$$L(u_1 + u_2, v_1 + v_2) \geq L(u_1, v_1) + L(u_2, v_2).$$

WNIOSEK 3. $L(u, v)$ można zapisać w postaci

$$L(u, v) = (u + v)l\left(\frac{u}{u + v}\right),$$

gdzie $l : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją wklęsłą i spełnia oszacowanie

$$0 \leq l(x) \leq \min(x, 1 - x).$$

2.1. Kopule z zadaną częścią główną L . W tym rozdziale pokażemy, że twierdzenie 1 charakteryzuje wszystkie możliwe części główne.

TWIERDZENIE 3. Niech $L : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dwu-niemalejącą funkcją jednorodną stopnia 1 taką, że

$$\forall u, v \quad 0 \leq L(u, v) \leq \min(u, v).$$

Wówczas funkcja

$$C(u, v) = \max(L(u, v), u + v - 1)$$

ograniczona do kwadratu jednostkowego $\langle 0, 1 \rangle^2$ jest kopulą.

Dowód. Dla dowolnego $v \in \langle 0, 1 \rangle$ zachodzą następujące równości:

$$C(0, v) = \max(L(0, v), 0 + v - 1) = \max(0, v - 1) = 0,$$

$$C(1, v) = \max(L(1, v), 1 + v - 1) = \max(1, v) = v.$$

Podobnie dla dowolnego $u \in \langle 0, 1 \rangle$, $C(u, 0) = 0$ i $C(u, 1) = u$.

Następnie wybieramy u_1, u_2, v_1, v_2 takie, że $u_1 \leq u_2$ i $v_1 \leq v_2$. W zależności od tego, który z dwóch argumentów funkcji maksimum jest większy, mamy cztery przypadki do rozpatrzenia. Pokażemy, że w każdym z nich C jest dwu-nierosnąca.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad C(u_1, v_2) + C(u_2, v_1) &= (u_1 + v_2 - 1) + (u_2 + v_1 - 1) \\ &= (u_1 + v_1 - 1) + (u_2 + v_2 - 1) \leq C(u_1, v_1) + C(u_2, v_2); \end{aligned}$$

- (ii) $C(u_1, v_2) + C(u_2, v_1) = (u_1 + v_2 - 1) + L(u_2, v_1)$
 $\leq (u_1 + v_2 - 1) + (L(u_1, v_1) + u_2 - u_1)$
 $= L(u_1, v_1) + u_2 + v_2 - 1 \leq C(u_1, v_1) + C(u_2, v_2);$
- (iii) $C(u_1, v_2) + C(u_2, v_1) = L(u_1, v_2) + (u_2 + v_1 - 1)$
 $\leq (L(u_1, v_1) + v_2 - v_1) + (u_2 + v_1 - 1)$
 $= L(u_1, v_1) + u_2 + v_2 - 1 \leq C(u_1, v_1) + C(u_2, v_2);$
- (iv) $C(u_1, v_2) + C(u_2, v_1) = L(u_1, v_2) + L(u_2, v_1)$
 $\leq L(u_1, v_1) + L(u_2, v_2) \leq C(u_1, v_1) + C(u_2, v_2).$

Zauważmy, że dla każdego nieujemnego L i dla $0 \leq u + v \leq 1$,

$$C(u, v) = \max(L(u, v), u + v - 1) = L(u, v).$$

Zatem L jest nie tylko aproksymacją dolnego ogona C , ale po prostu tym ogonem.

WNIOSEK 4. Dla dowolnej funkcji wklęsłej $l : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ takiej, że

$$0 \leq l(x) \leq \min(x, 1 - x),$$

funkcja

$$L(u, v) = (u + v)l\left(\frac{u}{u + v}\right)$$

jest częścią główną rozwinięcia pewnej kopuli dwuwymiarowej.

3. Przykłady kopuli i ich części głównych

3.1. Kopula zmiennych losowych niezależnych. Załóżmy, że \mathcal{X} i \mathcal{Y} są niezależne. Wówczas kopula ma prostą postać

$$C(u, v) = uv.$$

Wynika to z równości dystrybuant:

$$F_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}(x, y) = F_{\mathcal{X}}(x)F_{\mathcal{Y}}(y).$$

W tym przypadku $L(u, v) = 0$ i $R(u, v) = uv/(u + v) \leq (u + v)/2$.

Zauważmy, że kopula dualna \widehat{C} pokrywa się z kopulą wyjściową:

$$\widehat{C}(u, v) = C(1 - u, 1 - v) + u + v - 1 = (1 - u)(1 - v) + u + v - 1 = uv = C(u, v),$$

zatem to samo dotyczy rozwinięcia górnego ogona.

3.2. Kopule zmiennych losowych doskonale zależnych. Załóżmy, że $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$. Wówczas kopula ma postać

$$C(u, v) = \min(u, v).$$

Wynika to z następującej równości:

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}(x, y) &= \mathbb{P}(\mathcal{X} \leq x \wedge \mathcal{Y} \leq y) = \mathbb{P}(\mathcal{X} \leq x \wedge \mathcal{X} \leq y) = \mathbb{P}(\mathcal{X} \leq \min(x, y)) \\ &= F_{\mathcal{X}}(\min(x, y)) = \min(F_{\mathcal{X}}(x), F_{\mathcal{Y}}(y)). \end{aligned}$$

W tym przypadku $L(u, v) = \min(u, v)$ i $R(u, v) = 0$.

Zauważmy, że kopula dualna \widehat{C} pokrywa się z kopulą wyjściową:

$$\begin{aligned} \widehat{C}(u, v) &= C(1 - u, 1 - v) + u + v - 1 = \min(1 - u, 1 - v) + u + v - 1 \\ &= \min(u, v) = C(u, v), \end{aligned}$$

zatem to samo dotyczy rozwinięcia górnego ogona.

Założmy, że $\mathcal{Y} = -\mathcal{X}$. Wówczas kopula ma postać

$$C(u, v) = \max(0, u + v - 1).$$

Wynika to z następującej równości:

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}(x, y) &= \mathbb{P}(\mathcal{X} \leq x \wedge \mathcal{Y} \leq y) = \mathbb{P}(\mathcal{X} \leq x \wedge \mathcal{X} \geq -y) \\ &= \max(0, F_{\mathcal{X}}(x) - F_{\mathcal{X}}(-y)) = \max(0, F_{\mathcal{X}}(x) - (1 - F_{\mathcal{Y}}(y))). \end{aligned}$$

W tym przypadku $L(u, v) = 0$ i dla $u + v < 1$ również $R(u, v) = 0$.

Zauważmy, że podobnie jak wyżej kopula dualna \widehat{C} pokrywa się z kopulą wyjściową:

$$\begin{aligned} \widehat{C}(u, v) &= C(1 - u, 1 - v) + u + v - 1 \\ &= \max(0, (1 - u) + (1 - v) - 1) + u + v - 1 \\ &= \max(0, 1 - u - v) + u + v - 1 = \max(u + v - 1, 0) = C(u, v), \end{aligned}$$

zatem to samo dotyczy rozwinięcia górnego ogona.

3.3. Kopule gaussowskie. Założmy, że \mathcal{X} i \mathcal{Y} mają ten sam rozkład normalny standardowy $N(0, 1)$ i ich łączny rozkład jest normalny $N(0, \Sigma)$. Wówczas kopula (zwana gaussowską) ma postać

$$C_N(u, v) = F_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}(F^{-1}(u), F^{-1}(v)),$$

gdzie F jest dystrybuantą rozkładu $N(0, 1)$.

LEMAT 1. *Kopule gaussowskie mają trywialną asymptotykę obu ogonów.*

Dowód. Zauważmy, że zmienna losowa $\mathcal{Z} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$ ma rozkład normalny, w którym

$$E(\mathcal{Z}) = 0, \quad D^2(\mathcal{Z}) = 2 + 2c \leq 4,$$

gdzie $c = \text{cov}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. W dalszym ciągu będziemy korzystali z faktu, że \mathcal{X} i \mathcal{Y} są unormowane i $-1 < c < 1$.

Przyjmijmy, że $u = F(x)$ i $v = F(y)$ oraz $x \leq y < 0$. Wówczas

$$0 \leq \frac{C_N(u, v)}{u + v} = \frac{F_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}(x, y)}{F(x) + F(y)} = \frac{\mathbb{P}(\mathcal{X} \leq x \wedge \mathcal{Y} \leq y)}{F(x) + F(y)} \leq \frac{\mathbb{P}(\mathcal{X} + \mathcal{Y} \leq x + y)}{F(x) + F(y)}$$

$$= \frac{F\left(\frac{x+y}{\sqrt{2+2c}}\right)}{F(x) + F(y)} \leq \frac{F\left(\frac{2y}{\sqrt{2+2c}}\right)}{F(y)}.$$

Następnie skorzystamy z oszacowania ogona standardowego rozkładu normalnego (patrz [3], str. 119). Dla dowolnego $x < 0$ mamy

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{|x|}{1+x^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) < F(x) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{|x|} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Zatem

$$\frac{F\left(\frac{2y}{\sqrt{2+2c}}\right)}{F(y)} < \frac{\frac{1}{|y|} \exp\left(-\frac{y^2}{1+c}\right)}{\frac{1}{|y|} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)} \leq 2 \exp\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+c}\right)y^2\right).$$

Ponieważ c jest mniejsze od 1, więc argument funkcji wykładniczej jest ujemny oraz

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \exp\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+c}\right)y^2\right) = 0.$$

W ten sposób, korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach, pokazujemy, że $L(u, v) = 0$, co kończy dowód dla dolnego ogona. W przypadku górnego ogona dowód przebiega analogicznie.

3.4. Kopule BEV. Przykładem kopuli o nietrywialnej asymptotyce górnego ogona jest rodzina BEV (*bivariate extreme value copulas*, patrz [2]), zdefiniowana następująco:

$$C_A(u, v) = \exp\left((\ln(u) + \ln(v))A\left(\frac{\ln(u)}{\ln(u) + \ln(v)}\right)\right),$$

gdzie $A: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą spełniającą warunek

$$\max(x, 1-x) \leq A(x) \leq 1.$$

LEMAT 2. Jeśli $A(x) \neq \max(x, 1-x)$, to

1. asymptotyka dolnego ogona jest trywialna,
2. część główna rozwinięcia dla górnego ogona wynosi

$$(u+v)\left(1 - A\left(\frac{u}{u+v}\right)\right).$$

Dowód. 1. Ponieważ funkcja wypukła $A(x)$ jest nie mniejsza niż $\max(x, 1-x)$ i nie jest równa tożsamościowo temu maksimum, otrzymujemy oszacowanie na jej minimum:

$$m = \min_{x \in (0,1)} A(x) > \min_{x \in (0,1)} \max(x, 1-x) = \frac{1}{2}.$$

Zatem dla $u + v < 1$,

$$C_A(u, v) \leq \exp(m \ln(uv)) = (uv)^m \leq (u+v)(uv)^{m-0.5}.$$

2. Rozwiemy kopulę dualną \widehat{C}_A w szereg Taylora w punkcie $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} \widehat{C}_A(u, v) &= \exp\left((\ln(1-u) + \ln(1-v))A\left(\frac{\ln(1-u)}{\ln(1-u) + \ln(1-v)}\right)\right) + u + v - 1 \\ &= \exp\left((-u-v)A\left(\frac{u}{u+v}\right) + O_2\right) + u + v - 1 \\ &= 1 - (u+v)A\left(\frac{u}{u+v}\right) + O_2 + u + v - 1 \\ &= (u+v)\left(1 - A\left(\frac{u}{u+v}\right)\right) + O_2. \end{aligned}$$

W skrajnym przypadku, gdy $A(x) = \max(x, 1-x)$, mamy $C_A(u, v) = \min(u, v)$ i tyle samo wynoszą obie części główne.

4. Zastosowania: Ryzyko podwójnej straty. W rozdziale tym pokażemy korzyści płynące z zastosowania jednorodnego rozwinięcia w modelowaniu ryzyka dużej straty dla portfela zawierającego dwa papiery. Skoncentrujemy się na następującym prostym przykładzie.

Inwestor zainwestował w akcje dwóch spółek odpowiednio x_1 i x_2 PLN, $x_1, x_2 > 0$. Następnie ustalił pewien poziom bezpieczeństwa c , $0 < c < 1$. Aby oszacować ryzyko związane z przeprowadzoną inwestycją, jest on zainteresowany wyznaczeniem następujących wielkości:

- prawdopodobieństwa tego, że na koniec okresu inwestycyjnego wartość jego portfela będzie mniejsza niż $c(x_1 + x_2)$;
- warunkowego prawdopodobieństwa tego, że na koniec okresu inwestycyjnego wartość akcji jednej spółki będzie mniejsza niż c razy wartość początkowa, pod warunkiem że zdarzyło się to z akcjami drugiej spółki;
- warunkowego prawdopodobieństwa tego, że na koniec okresu inwestycyjnego wartość akcji obu spółek będzie mniejsza niż c razy ich wartość początkowa, pod warunkiem że zdarzyło się to z akcjami jednej z nich;
- warunkowej wartości oczekiwanej liczby spółek wartość akcji, których spadła poniżej poprzeczki, pod warunkiem że zdarzyło się to z akcjami jednej z nich.

Niech $S_{i,0}$ i $S_{i,1}$ będą cenami akcji na początku i na końcu okresu inwestycyjnego. Wówczas wartość portfela na koniec okresu inwestycyjnego wynosi

$$W_1 = x_1 \frac{S_{1,1}}{S_{1,0}} + x_2 \frac{S_{2,1}}{S_{2,0}}.$$

Założmy, że zwroty z obu akcji mają „tłuste ogony”, z tym samym indeksem $\alpha > 0$ (patrz [6], §9.2 i §9.5):

$$\mathbb{P}(\ln(S_{i,1}) - \ln(S_{i,0}) < z) \approx a_i(-z)^{-\alpha} \quad \text{dla } z \ll 0$$

i ponadto ich łączny rozkład jest określony przez kopulę mającą niezerową część główną L .

Niech $F(c)$ będzie prawdopodobieństwem „porażki”:

$$F(c) = \mathbb{P}(W_1 < c(x_1 + x_2)),$$

i niech $U(c)$ i $V(c)$ będą prawdopodobieństwami tego, że wartość pierwszego lub drugiego papieru spadła poniżej poprzeczki:

$$U(c) = \mathbb{P}\left(\frac{S_{1,1}}{S_{1,0}} \leq c\right) \approx a_1(-\ln(c))^{-\alpha},$$

$$V(c) = \mathbb{P}\left(\frac{S_{2,1}}{S_{2,0}} \leq c\right) \approx a_2(-\ln(c))^{-\alpha}.$$

Zatem dla odpowiednio małych c zachodzą nierówności

$$\begin{aligned} & (\ln(\max(x_1, x_2)) - \ln(c(x_1 + x_2)) + \ln 2)^{-\alpha} L(a_1, a_2) \\ & \leq L\left(U\left(\frac{c(x_1 + x_2)}{2x_1}\right), V\left(\frac{c(x_1 + x_2)}{2x_2}\right)\right) \\ & \leq F(c) \leq L\left(U\left(\frac{c(x_1 + x_2)}{x_1}\right), V\left(\frac{c(x_1 + x_2)}{x_2}\right)\right) \\ & \leq (\ln(\min(x_1, x_2)) - \ln(c(x_1 + x_2)))^{-\alpha} L(a_1, a_2). \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} & \frac{(\ln(\max(x_1, x_2)) - \ln(c(x_1 + x_2)) + \ln 2)^{-\alpha}}{(\ln(\min(x_1, x_2)) - \ln(c(x_1 + x_2)))^{-\alpha}} \\ & = \left(1 + \frac{\ln 2 + |\ln x_2 - \ln x_1|}{\ln(\min(x_1, x_2)) - \ln(c(x_1 + x_2))}\right)^{-\alpha} \\ & \approx 1 - \alpha \frac{\ln 2 + |\ln x_2 - \ln x_1|}{\ln(\min(x_1, x_2)) - \ln(x_1 + x_2) - \ln c}, \end{aligned}$$

więc przedział

$$\left\langle L\left(U\left(\frac{c(x_1 + x_2)}{2x_1}\right), V\left(\frac{c(x_1 + x_2)}{2x_2}\right)\right), L\left(U\left(\frac{c(x_1 + x_2)}{x_1}\right), V\left(\frac{c(x_1 + x_2)}{x_2}\right)\right)\right\rangle$$

jest relatywnie mały. Zatem możemy w miarę dokładnie oszacować prawdopodobieństwo porażki.

Odpowiedź na pozostałe pytania otrzymamy, korzystając z klasycznego wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe:

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_{1,1}}{S_{1,0}} \leq c \mid \frac{S_{2,1}}{S_{2,0}} \leq c\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\frac{S_{1,1}}{S_{1,0}} \leq c \wedge \frac{S_{2,1}}{S_{2,0}} \leq c\right)}{\mathbb{P}\left(\frac{S_{2,1}}{S_{2,0}} \leq c\right)} = \frac{C(U(c), V(c))}{V(c)}.$$

Zatem dla odpowiednio małych c ,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_{1,1}}{S_{1,0}} \leq c \mid \frac{S_{2,1}}{S_{2,0}} \leq c\right) \approx \frac{L(U(c), V(c))}{V(c)} = L\left(\frac{U(c)}{V(c)}, 1\right) \approx L\left(\frac{a_1}{a_2}, 1\right).$$

Podobnie pokazujemy, że

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_{2,1}}{S_{2,0}} \leq c \mid \frac{S_{1,1}}{S_{1,0}} \leq c\right) \approx \frac{L(U(c), V(c))}{U(c)} = L\left(1, \frac{V(c)}{U(c)}\right) \approx L\left(1, \frac{a_2}{a_1}\right).$$

Wzór na prawdopodobieństwo zajścia dwóch porażek pod warunkiem, że zaszła przynajmniej jedna, jest niewiele bardziej skomplikowany:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{2|1} &= \mathbb{P}\left(\frac{S_{1,1}}{S_{1,0}} \leq c \wedge \frac{S_{2,1}}{S_{2,0}} \leq c \mid \frac{S_{1,1}}{S_{1,0}} \leq c \vee \frac{S_{2,1}}{S_{2,0}} \leq c\right) \\ &= \frac{\mathbb{P}\left(\frac{S_{1,1}}{S_{1,0}} \leq c \wedge \frac{S_{2,1}}{S_{2,0}} \leq c\right)}{\mathbb{P}\left(\frac{S_{1,1}}{S_{1,0}} \leq c \vee \frac{S_{2,1}}{S_{2,0}} \leq c\right)} = \frac{C(U(c), V(c))}{U(c) + V(c) - C(U(c), V(c))}. \end{aligned}$$

Zatem dla odpowiednio małych c ,

$$\mathbb{P}_{2|1} \approx \frac{L(U(c), V(c))}{U(c) + V(c) - L(U(c), V(c))} \approx \frac{L(a_1, a_2)}{a_1 + a_2 - L(a_1, a_2)}.$$

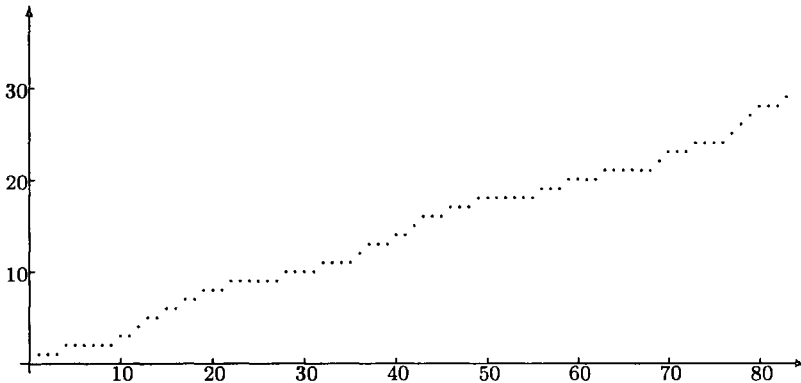
Natomiast wartość oczekiwana liczby porażek τ pod warunkiem, że zaszła przynajmniej jedna, wynosi

$$\begin{aligned} E(\tau \mid \tau \geq 1) &= 2 \cdot \mathbb{P}_{2|1} + 1 \cdot (1 - \mathbb{P}_{2|1}) = 1 + \mathbb{P}_{2|1} \\ &= \frac{U(c) + V(c)}{U(c) + V(c) - C(U(c), V(c))} \approx \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 - L(a_1, a_2)}. \end{aligned}$$

Jak widać, dla małych c powyższe prawdopodobieństwa warunkowe i wartość oczekiwana się stabilizują i oszacowania asymptotyczne nie zależą od parametru c .

W praktycznych zastosowaniach należy określić, jakie c jest *dostatecznie małe*. W tym celu można np. sprawdzić za pomocą danych empirycznych, dla jakich c widoczna jest opisana powyżej stabilizacja. Okazuje się, że dla długich pozycji w USD i EUR (tzn. na przykład, gdy inwestor posiada te waluty), dla jednodniowych zmian kursów walutowych może to być nawet 0.99.

Na wykresie przedstawione są wyniki dla dolnego ogona dziennych zmian fixingów i kursów średnich NBP dla USD i EUR (a wcześniej ECU) względem PLN. Dane obejmują okres od stycznia 1995 do lutego 2003 (2056 obserwacji).



Wykres 1. Liczby dużych spadków notowań. Źródło: opracowanie własne.

Punkty na wykresie przedstawiają następujące dane:

- pierwsza współrzędna to liczba przypadków, gdy kurs USD w danym dniu spadł poniżej c razy kurs poprzedni;
- druga współrzędna oznacza liczbę przypadków, gdy zarówno kurs USD, jak i kurs EUR spadły poniżej c razy kurs poprzedni.

Widoczna na wykresie liniowa zależność punktów odpowiadających różnym c (mniejszym od 0.99) potwierdza hipotezę o stabilizacji prawdopodobieństwa warunkowego, a zatem również hipotezę o nietrywialnej asymptocie dolnego ogona.

Literatura

- [1] P. Embrechts, L. de Haan, X. Huang, *Modelling multivariate extremes*, w: P. Embrechts (red.), *Extremes and Integrated Risk Management*, Risk Waters Group, 2000.
- [2] W. Hürlimann, *Hutchinson-Lai's conjecture for bivariate extreme value copulas*, *Statist. Probab. Lett.* 61 (2003), 191–198.
- [3] J. Jakubowski, R. Sztencel, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, SCRIPT, Warszawa, 2000.
- [4] R. B. Nelsen, *An Introduction to Copulas*, Springer, 1999.
- [5] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.
- [6] A. Weron, R. Weron, *Inżynieria finansowa*, WNT, Warszawa, 1999.

Instytut Matematyki
 Uniwersytet Warszawski
 ul. Banacha 2
 02-097 Warszawa
 E-mail: jwptxa@mimuw.edu.pl