ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA III: MATEMATYKA STOSOWANA (1974)

J. ZABCZYK (Warszawa)

Sterowanie z jedną korekcją

Przed omówieniem zagadnienia wymienionego w tytule, podamy kilka uwag wprowadzających.

Ewolucję układów deterministycznych opisuje się często równaniami różniczkowymi zwyczajnymi. Jeżeli przyjmiemy, że „stan" układu jest w dowolnym momencie $t \geqslant 0$ wektorem x_t z przestrzeni n-wymiarowej R^n, to równania takie mają postać:

$$\dot{x}_t = f_t(x_t), \qquad t \geqslant 0, \tag{1}$$

gdzie f_t jest funkcją przekształcającą R^n w R^n. Gdy na przemieszczenia układu wpływ mają jeszcze czynniki losowe (zaburzenia), a więc gdy na przykład

$$x_{t+h} - x_t \approx hf_t(x_t) + \xi_{t,h},$$

gdzie $\xi_{t,h}$ jest zmienną losową o rozkładzie normalnym, to wtedy trajektorie układu będą realizacjami pewnego procesu stochastycznego. Procesy takie definiuje się najczęściej jako rozwiązania równań stochastycznych, które w symbolicznym zapisie mają postać:

$$\dot{x}_t = f_t(x_t) + \dot{w}_t, \qquad t \geqslant 0. \tag{2}$$

Równania typu (2) różnią się od równań typu (1) składnikiem $\dot{w}_t$, tzw. „białym szumem", procesem stochastycznym będącym matematyczną idealizacją zaburzeń działających w różnych technicznych układach (por. [1]).

Zagadnienia sterowania pojawiają się wtedy, gdy funkcja f_t zależy jeszcze dodatkowo od pewnego parametru „sterującego" u. Wówczas

$$\dot{x}_t = f_t(u, x_t) + \dot{w}_t, \qquad t \geqslant 0. \tag{3}$$

Parametr u ma być tak dobierany przez obserwatora, by przebieg procesu był optymalny (w sensie zależnym od sytuacji).

Układy opisywane równaniami postaci (3) to tzw. *układy stochastyczne sterowane* (por. [1]).

W niniejszym komunikacie zajmiemy się konkretnym przykładem układu stochastycznego sterowanego. Ograniczymy się przy tym do sytuacji, gdy w trakcie działania układu można dokonać tylko jeden raz zmiany parametru sterującego. Zmianę taką nazywać będziemy *korekcją*. Przyjmijmy, że układ jest punktem materialnym poruszającym się w przestrzeni trójwymiarowej R^3. Niech $(-r, 0, 0)$, $r > 0$, będzie punktem startu, oraz niech

$$\dot{x}_t = u + \dot{w}_t, \qquad t \geqslant 0.$$

Zakładamy dodatkowo, że parametr sterujący u jest dowolnym wektorem z R^3 o długości $\leqslant 1$.

Celem optymalnej korekcji jest maksymalizacja prawdopodobieństwa dotarcia punktu materialnego do kuli $K(0, \alpha)$, której środkiem jest 0, a promieniem α.

Rozróżniamy dwa przypadki:

(I) Obserwator zna położenie punktu w dowolnym momencie $t \geqslant 0$ i może dokonać korekcji uwzględniając rzeczywistą trajektorię cząstki.

(II) Moment korekcji ma być podany w chwili startu.

W cybernetyce przypadek (I) nazywa się sterowaniem ze sprzężeniem zwrotnym, a przypadek (II) sterowaniem w „pętli otwartej".

Uwagę naszą skoncentrujemy na optymalnym wyborze momentu korekcji, natomiast o wektorze prędkości u założymy, że w chwili startu i w momencie korekcji jest on nakierowywany na punkt 0 i ma maksymalną długość 1.

P r z y p a d e k (I). Przede wszystkim należy wyliczyć lub możliwie dokładnie oszacować prawdopodobieństwo $p(r, \alpha)$ trafienia kuli $K(0, \alpha)$, gdy nie dokonuje się korekcji. Okazuje się (por. [3]), że:

$$\frac{\alpha}{r} \leqslant p(r, \alpha) \leqslant \frac{\alpha}{r} e^{2\alpha}, \qquad r > \alpha.$$

Dokładność przybliżonego wzoru $p(r, \alpha) \approx \frac{\alpha}{r}$ jest tym lepsza, im mniejszy jest promień kuli $K(0, \alpha)$.

Poniższe twierdzenie podaje oszacowanie prawdopodobieństwa $p^m(r, \alpha)$ trafienia kuli $K(0, \alpha)$ przy optymalnej korekcji oraz $p^a(r, \alpha)$ trafienia kuli, gdy dokonujemy korekcji na płaszczyźnie $x_1 = 0$ (przypominamy, punktem startu jest zawsze $(-r, 0, 0)$).

TWIERDZENIE. *Prawdziwe są następujące nierówności*:

$$p^m(r, \alpha) \leqslant \alpha \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \left[e^{2\alpha} + e^{2\alpha} \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \right],$$

$$p^a(r, \alpha) \geqslant \alpha \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \left[(1 + r^{-2/3})^{-3/2} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha/r}^{\sqrt[3]{r}} e^{-s^2/2}\, ds \right]$$

i dlatego

$$1 \leqslant \underline{\lim}_{r\to\infty} \frac{P(r, \alpha)}{\alpha \frac{1}{r}} \leqslant \overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{p(r, \alpha)}{\alpha \frac{1}{r}} \leqslant e^{2\alpha},$$

$$1 \leqslant \underline{\lim}_{r\to\infty} \frac{p^a(r, \alpha)}{\alpha \sqrt{\frac{\pi}{2r}}} \leqslant \overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{p^m(r, \alpha)}{\alpha \sqrt{\frac{\pi}{2r}}} \leqslant e^{2\alpha}.$$

Z twierdzenia wynika, że jedna korekcja może zwiększyć prawdopodobieństwo trafienia kuli $\sqrt{\frac{\pi r}{2}}$ - krotnie (przy dużej odległości początkowej r). Wynika z niego również, że korekcja na płaszczyźnie $x_1 = 0$ jest bliska optymalnej.

P r z y p a d e k (II). Znalezienie optymalnego deterministycznego momentu korekcji prowadzi do szukania maksimum funkcji określonej skomplikowanym wzorem. Ograniczymy się więc do następującej informacji. Jeżeli będziemy dokonywać korekcji w momencie $t = r$, to prawdopodobieństwo $q(r,\ \alpha)$ trafienia kuli będzie większe od liczby $\alpha\sqrt{\frac{2}{\pi r}}\, e^{-\alpha^2/2r}$ oraz

$$1 \leqslant \varliminf_{r\to\infty} \frac{p^m(r,\ \alpha)}{q(r,\ \alpha)} \leqslant \varlimsup_{r\to\infty} \frac{p^m(r,\ \alpha)}{q(r,\ \alpha)} \leqslant e^{2\alpha}\frac{\pi}{2}.$$

Dlatego też prawdopodobieństwo $q(r,\ \alpha)$ będzie tego samego rzędu cp w przypadku (I). Korzyści płynące w tym modelu ze sprzężenia zwrotnego są więc minimalne.

Pytanie sformułowane w punkcie (I) prowadzi do zagadnień tzw. optymalnego zatrzymywania procesów stochastycznych, o których to zagadnieniach w sposób wyczerpujący mówi książka [2]. Sam dowód twierdzenia sformułowanego w tekście znajduje się w pracy [3].

Bibliografia

[1] K. I. A s t r o m, *Introduction to Stochastic Control*, New York 1970.

[2] А. Н. Ширяев, *Статистический последовательный анализ*, Москва 1969.

[3] J. Z a b c z y k, *A mathematical correction problem*, Kybernetika, 8(4) (1972).