ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA III: MATEMATYKA STOSOWANA II (1974)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Ilona KOPOCIŃSKA (Wrocław)

Zagadnienie konserwatora

1. Wstęp. Rozpatrzmy system, w którym mamy pewną liczbę maszyn przeznaczonych do pracy i jednego konserwatora do obsługi tych maszyn. Załóżmy że każda maszyna pracująca w tym systemie może ulec uszkodzeniu i wówczas powinna być naprawiana przez konserwatora. Przyjmijmy, że maszyny naprawiane są w kolejności uszkodzeń, a naprawa w pełni przywraca zdolność maszyn do pracy.

Można także rozpatrywać ogólniejsze systemy, np. z rezerwą maszyn sprawnych włączanych do pracy w chwili uszkodzenia jednej z maszyn pracujących lub z większą liczbą konserwatorów [2]. Takimi systemami nie będziemy się jednak zajmowali.

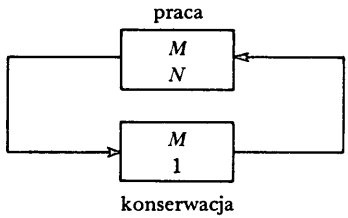
W systemach które będziemy rozpatrywali w tej pracy zakładamy, że czasy pracy maszyn i czasy konserwacji są zmiennymi losowymi, przy czym do pełnej charakteryzacji systemu należy zadanie rozkładów prawdopodobieństwa tych zmiennych losowych. Ponadto we wszystkich rozpatrywanych systemach będziemy zakładali, że czasy pracy maszyn i czasy konserwacji są niezależne.

Rozwiązanie zagadnienia konserwatora polega na wyznaczeniu rozkładu prawdopodobieństwa liczby maszyn pracujących w systemie w chwili t. Najczęściej jednak wystarczające dla praktyki jest znalezienie granicznego rozkładu prawdopodobieństwa liczby maszyn pracujących w systemie, gdy z czasem dążymy do nieskończoności ($t \to \infty$). Gdy wspomniane rozkłady są znalezione, wówczas można wyznaczyć dalsze ważne charakterystyki systemu takie jak: średnia liczba maszyn pracujących w systemie, frakcja czasu pracy maszyn, frakcja czasu bezczynności konserwatora i inne. Wspomniane charakterystyki mogą służyć do rozwiązywania różnych zagadnień optymalizacji systemów.

Przy założeniu dowolnych rozkładów czasu pracy maszyn i czasów konserwacji nie jest znane rozwiązanie zagadnienia konserwatora i trudno spodziewać się efektywnych rozwiązań analitycznych. Można natomiast analitycznie rozwiązać wiele interesujących przypadków. Przeglądem tych przypadków, którym poświęciło uwagę wielu autorów, zajmiemy się w kolejnych rozdziałach tej pracy.

2. System Palma. Rozpatrzmy system, w którym mamy N maszyn przeznaczonych do pracy i jednego konserwatora. Załóżmy, że w systemie tym czasy konserwacji maszyn są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ, a czasy pracy maszyn są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem μ.

Rozpatrywany system R. E. Barlow i F. Proschan [2] schematycznie przedstawiają w następujący sposób



Rys. 1

System ten rozpatrywał C. Palm [15] (zob. również [6]) w 1947 roku. Warto wspomnieć, że wyniki otrzymane dla tego najprostszego do analizy systemu były z powodzeniem stosowane w wielu praktycznych sytuacjach. Przejdziemy teraz do przedstawienia rozwiązania zagadnienia dla tego systemu.

Niech $m(t)$ będzie procesem stochastycznym zdefiniowanym jako liczba maszyn uszkodzonych w chwili t. Będziemy mówili, że proces $m(t)$ znajduje się w stanie E_j jeżeli w chwili t nie pracuje j maszyn. Jeżeli $j = 1, 2, \ldots, N$, to jedna maszyna jest w konserwacji a $j-1$ maszyn czeka w kolejce do konserwatora. W stanie E_0 wszystkie maszyny pracują i konserwator jest bezczynny. Przejście $E_j \to E_{j+1}$ następuje w chwili uszkodzenia jednej z $N-j$ pracujących maszyn, natomiast przejście $E_j \to E_{j-1}$ następuje w chwili zakończenia konserwacji jednej z j uszkodzonych maszyn.

Nie trudno zauważyć, że proces $m(t)$ jest procesem narodzin i śmierci. Oznaczmy przez μ_j intensywności przejścia $E_j \to E_{j+1}$ a przez λ_j oznaczmy intensywności przejścia $E_j \to E_{j-1}$. Łatwo sprawdzić, że w rozpatrywanym systemie mamy

$$\mu_j = (N-j)\mu, \qquad j = 0, 1, \ldots, N,$$

$$\lambda_j = \lambda, \qquad j = 1, 2, \ldots, N,$$

$$\lambda_0 = 0.$$

Niech $q(j, t) = \Pr\{m(t) = j\}$, $j = 0, 1, \ldots, N$, będą prawdopodobieństwami stanów procesu $m(t)$. Podstawowy układ równań różniczkowych Kołmogorowa przyjmie postać

$$\begin{aligned} q'(0, t) &= -N\mu q(0, t) + \lambda q(1, t), \\ q'(j, t) &= (N-j+1)\mu q(j-1, t) - [(N-j)\mu + \lambda] q(j, t) + \lambda q(j+1, t), \\ &\qquad j = 1, 2, \ldots, N-1, \\ q'(N, t) &= \mu q(N-1, t) - \lambda q(N, t). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Graniczne prawdopodobieństwa stanów procesu $m(t)$, $\lim\limits_{t\to\infty} q(j, t) = q(j)$, $j = 0, 1, \ldots, N$, istnieją i można je wyznaczyć z następującego układu równań

$$\begin{aligned} -N\mu q(0) + \lambda q(1) &= 0, \\ (N-j+1)\mu q(j-1) - [(N-j)\mu + \lambda] q(j) + \lambda q(j+1) &= 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, N-1, \\ \mu q(N-1) - \lambda q(N) &= 0, \\ \sum_{j=0}^{N} q(j) &= 1. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Rozwiązanie układu równań (2.2) ma postać

$$
(2.3)\qquad
\begin{aligned}
q(j) &= \frac{N!}{(N-j)!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j q(0), \qquad j = 1, 2, \ldots, N,\\
q(0) &= \left[\sum_{j=0}^{N} \frac{N!}{(N-j)!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j\right]^{-1}
\end{aligned}
$$

Rozwiązanie to jest dobrze znane praktykom pod nazwą wzorów Erlanga. Dane we wzorach Erlanga $q(0)$ możemy interpretować jako prawdopodobieństwo bezczynności konserwatora. Jeżeli prawdopodobieństwo $q(0)$ jest dane, to łatwo znaleźć średnią liczbę maszyn czekających w kolejce do naprawy

$$
L = \lim_{t\to\infty} E\{m(t)\} = N - \frac{\lambda+\mu}{\mu}\,[1 - q(0)].
$$

Mając prawdopodobieństwa stanów procesu $m(t)$ natychmiast można otrzymać rozkład prawdopodobieństwa stanów procesu zdefiniowanego jako liczba maszyn pracujących w systemie w chwili t. Oznaczmy ten proces przez $n(t)$. Powyższa uwaga wynika natychmiast z oczywistego związku między tymi procesami: $n(t) = N - m(t)$.

3. System Takácsa konserwacji maszyn. Rozpatrzmy najpierw system obsługi masowej o N niezależnych liniach obsługi, w którym zakładamy, że odstępy między zgłoszeniami jednostek do systemu są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie $G(x)$ oraz, że długości czasów obsługi w każdej linii obsługi są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem μ. Zgłaszająca się do systemu jednostka jeżeli zastaje wszystkie linie obsługi zajęte, to rezygnuje z obsługi, w przeciwnym razie rozpoczyna obsługę w którejkolwiek z wolnych linii obsługi. System ten rozpatrywał L. Takács ([18], [19]), jako model centrali telefonicznej. Przejdziemy teraz do przedstawienia głównych rezultatów zawartych w [19] dotyczących tego systemu, a następnie pokażemy jak przedstawione tutaj rezultaty wykorzystuje się do analizy pewnego zagadnienia konserwatora. Dowody przedstawionych tutaj twierdzeń można znaleźć w [19].

Niech $s(t)$ będzie procesem stochastycznym zdefiniowanym jako liczba jednostek w systemie w chwili t. Oznaczmy przez τ_r', $r = 1, 2, \ldots$ chwile zgłoszeń jednostek do systemu. Przy założeniach przyjętych dla rozpatrywanego systemu obsługi masowej łańcuch stochastyczny

$$
(3.1)\qquad s^{(r)} = s(\tau_r' - 0), \qquad r = 1, 2, \ldots
$$

jest włożonym łańcuchem Markowa.

Rzeczywiście, nie trudno zauważyć, że

$$
(3.2)\qquad s^{(r+1)} = \begin{cases} s^{(r)} + 1 - \eta_r, & s^{(r)} = 0, 1, \ldots, N-1\\ s^{(r)} - \eta_r, & s^{(r)} = N, \end{cases}
$$

gdzie η_r jest liczbą zakończonych obsług w przedziale $\langle \tau_r', \tau_{r+1}')$. Ponieważ czas obsługi jednostki jest wykładniczy, więc rozkład zmiennej losowej η_r zależy tylko od wartości zmiennej losowej $s^{(r)}$, a nie zależy od długości czasu obsługi jednostki przed chwilą τ_r'. Stąd i z wzoru (3.2) wynika, że łańcuch (3.1) jest łańcuchem Markowa. Dla procesu stochastycznego

$s(t)$ i łańcucha Markowa $\{s^{(r)}\}$ możliwe są stany $0, 1, \ldots, N$. Zajmiemy się teraz prawdopodobieństwami stanów łańcucha stochastycznego $\{s^{(r)}\}$.

LEMAT 3.1. *Załóżmy, że w chwili $t = 0$ nastąpiło zgłoszenie, oraz, że $s(0) = i$. Dla $r = 0, 1, \ldots, k = 0, 1, \ldots, N$, $\operatorname{Re} s \geqslant 0$ niech*

$$A_k^{(r)}(s) = E\left\{e^{-s\tau_r} I\binom{s^{(r)}}{k}\right\}, \tag{3.3}$$

oraz dla $k = 0, 1, \ldots, N$, $|w| \leqslant 1$ i $\operatorname{Re} s > 0$ niech

$$\Phi_k(s, w) = \sum_{r=1}^{\infty} A_k^{(r)}(s) w^r. \tag{3.4}$$

Wówczas

$$\Phi_k(s, w) = \frac{C_k(s, w)}{\sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} \frac{1}{C_j(s, w)}} \left\{\left[\sum_{j=k}^{N} \binom{N}{j} \frac{1}{C_j(s, w)}\right]\left[\sum_{j=0}^{k} \binom{i}{j} \frac{1}{C_{j-1}(s, w)}\right] - \right. \tag{3.5}$$

$$\left. - \left[\sum_{j=0}^{k-1} \binom{N}{j} \frac{1}{C_j(s, w)}\right]\left[\sum_{j=k+1}^{N} \binom{i}{j} \frac{1}{C_{j-1}(s, w)}\right]\right\},$$

gdzie

$$C_k(s, w) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli} \quad k = -1, \\ \prod_{i=0}^{k} \dfrac{wg^*(s + i\mu)}{1 - wg^*(s + i\mu)}, & \text{jeżeli} \quad k = 0, 1, \ldots, N, \end{cases} \tag{3.6}$$

natomiast

$$g^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dG(x)$$

jest transformatą Laplace'a–Stieltjesa funkcji $G(x)$.

TWIERDZENIE 3.1. *Jeżeli $s(0) = i$, gdzie i jest ustalone, to prawdopodobieństwa $\Pr\{s^{(r)} = j\}$, $j = 0, 1, \ldots, N$, mają funkcję tworzącą postaci*

$$\sum_{r=1}^{\infty} \Pr\{s^{(r)} = j\} w^r = \sum_{k=j}^{N} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \Phi_k(0, w), \qquad k = 0, 1, \ldots, N, \tag{3.7}$$

przy czym $\Phi_k(s, w)$ dane jest w lemacie 3.1, wzór (3.5).

TWIERDZENIE 3.2. *Niezależnie od warunku początkowego $s(0)$ graniczne prawdopodobieństwa $\lim_{r\to\infty} \Pr\{s^{(r)} = j\} = Q^-(j)$, $j = 0, 1, \ldots, N$ istnieją i mają postać*

$$Q^{-}(j) = \sum_{k=j}^{N} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} B_k, \tag{3.8}$$

przy czym

$$B_k = C_k \frac{\sum_{j=k}^{N} \binom{N}{j} \frac{1}{C_j}}{\sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} \frac{1}{C_j}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N, \tag{3.9}$$

są momentami dwumianowymi rozkładu $Q^{-}(j)$, *natomiast*

$$C_k = \begin{cases} 1, & \textit{jeżeli} \quad k = 0, \\ \prod_{i=1}^{k} \frac{g^*(i\mu)}{1 - g^*(i\mu)}, & \textit{jeżeli} \quad k = 1, 2, \ldots, N. \end{cases} \tag{3.10}$$

TWIERDZENIE 3.3. *Jeżeli rozkład* $G(x)$ *odstępów między zgłoszeniami jednostek do systemu jest nieokresowy* [1], *że skończoną wartością oczekiwaną*

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^{\infty} x \, dG(x) < \infty,$$

to graniczne prawdopodobieństwa $\lim_{t \to \infty} \Pr\{s(t) = j\} = Q(j)$, $j = 0, 1, \ldots, N$, *istnieją i nie zależą od warunku początkowego. Ponadto graniczne prawdopodobieństwa* $\{Q(j)\}$ *można wyrazić przez graniczne prawdopodobieństwa* $\{Q^{-}(j)\}$ *następująco*

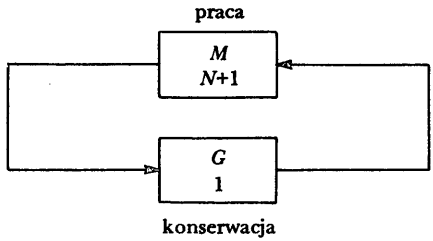
$$\begin{aligned} Q(j) &= \frac{\lambda}{\mu} \frac{Q^{-}(j-1)}{j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, N, \\ Q(0) &= 1 - \frac{\lambda}{\mu} \sum_{j=1}^{N} \frac{Q^{-}(j-1)}{j}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Przejdziemy teraz do zastosowania analizy systemu centrali telefonicznej Takácsa do rozwiązania związanego z nim zagadnienia konserwatora. Rozpatrzmy system, w którym mamy $N + 1$ maszyn przeznaczonych do pracy i jednego konserwatora. Załóżmy, że w systemie tym czasy pracy maszyn są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem μ, a czasy konserwacji są niezależnymi zmiennymi losowymi o pewnym rozkładzie $G(x)$. Rozpatrywany system ma następujący schemat

---

[1] Rozkład prawdopodobieństwa $G(x)$ nazywamy *okresowym* jeżeli istnieje liczba rzeczywista ω taka, że suma przyrostów w tym rozkładzie w punktach $0, \omega, 2\omega, \ldots$ jest równa 1, czyli

$$\sum_{n=0}^{\infty} [G(n\omega + 0) - G(n\omega)] = 1.$$



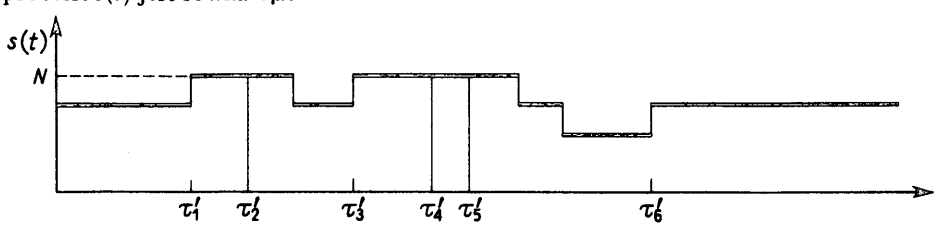
Rys. 2

Niech $n(t)$ będzie procesem stochastycznym zdefiniowanym jako liczba maszyn pracujących w chwili t. Przyjmijmy jako początek rachuby czasu chwilę zakończenia konserwacji. Chwila ta jest jednocześnie początkiem bezczynności konserwatora jeżeli $n(0) = N + 1$ lub początkiem konserwacji jeżeli $n(0) = 1, 2, \ldots, N$. Oznaczmy przez τ_r, $r = 1, 2, \ldots$, chwile zakończenia konserwacji. Wówczas łańcuch stochastyczny

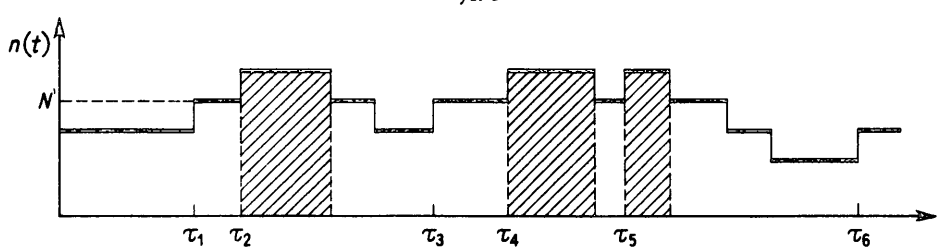
$$n^{(r)} = n(\tau_r - 0), \qquad r = 1, 2, \ldots,$$

jest włożonym łańcuchem Markowa o stanach $0, 1, \ldots, N$.

Przy rozwiązaniu zagadnienia konserwatora dla wyżej zdefiniowanego systemu wykorzystamy rezultaty uzyskane uprzednio dla systemu centrali telefonicznej. W tym celu prześledzimy związek między procesem $n(t)$ zdefiniowanym w tym rozdziale dla systemu konserwacji i procesem $s(t)$ zdefiniowanym dla systemu centrali telefonicznej. Związek ten wygodnie jest prześledzić na realizacjach procesów $s(t)$ i $n(t)$ przedstawionych na rysunkach 3 i 4. W systemie $GI/M/N$ bez oczekiwania każde zgłoszenie jeżeli nie jest stracone rozpoczyna obsługę, która ma rozkład wykładniczy z parametrem μ. W chwilach τ'_r, $r = 1, 2, \ldots$, zgłoszeń jednostek do systemu, wartość procesu $s(t)$ zwiększa się o jednostkę chyba, że zgłoszenie jest stracone. Odstępy między kolejnymi zgłoszeniami tworzą strumień odnowy, w którym odstępy między sygnałami mają rozkład $G(x)$. Intensywność przejścia od stanu k do $k - 1$ w procesie $s(t)$ jest równa $k\mu$.



Rys. 3



Rys. 4

W systemie konserwacji chwila zakończenia konserwacji jest jednocześnie początkiem pracy tej maszyny. Ponieważ rozkład długości czasu pracy maszyn jest wykładniczy z parametrem μ, więc intensywność przejścia od stanu k do $k-1$ w procesie $n(t)$ jest równa $k\mu$. Gdy wszystkie maszyny pracują, to konserwator jest bezczynny aż do momentu uszkodzenia którejkolwiek z maszyn. Wobec tego, jeżeli w procesie $n(t)$ wykreślimy okresy czasu, w których konserwator jest bezczynny (zob. rys. 4), to chwile zakończenia konserwacji τ_r, $r = 1, 2, \ldots$, utworzą strumień odnowy, w którym odstępy między sygnałami mają rozkład $G(x)$.

Wprowadźmy w procesie konserwacji $n(t)$ nową rachubę czasu pomijając okresy, w których wszystkie maszyny pracują. W procesie $s(t)$ przyjmijmy jako warunek początkowy

$$s(0) = \begin{cases} n(0), & \text{jeżeli} \quad n(0) = 0, 1, \ldots, N, \\ N, & \text{jeżeli} \quad n(0) = N+1, \end{cases}$$

i ponadto przyjmijmy, że jeżeli w procesie konserwacji mamy $n(0) = N+1$, to w nowej rachubie czasu przyjmujemy tak jak gdyby w chwili $t = 0$ nastąpiło przejście ze stanu $N+1$ do stanu N. Z powyższego wynika, że proces $n(t)$ z nową rachubą czasu i proces $s(t)$ mają jednakowe charakterystyki probabilistyczne. Przejście od stanu $N+1$ do stanu N w procesie konserwacji odpowiada stracie sygnału w systemie centrali telefonicznej.

Oznaczmy przez $P(j, t) = \Pr\{n(t) = j\}$, $j = 0, 1, \ldots, N+1$, prawdopodobieństwa stanów procesu $n(t)$ a przez $P^*(j, s)$, $j = 0, 1, \ldots, N+1$, transformaty Laplace'a tych prawdopodobieństw. Analizę systemu konserwacji rozpoczniemy od podania postaci tych transformat.

Wykorzystanie prawdopodobieństw $P(j, t)$, $j = 0, 1, \ldots, N+1$, w praktyce jest raczej rzadkie. Mogą one jednak służyć do badania szybkości stabilizacji systemu.

TWIERDZENIE 3.4. *Jeżeli* $n(0) = N+1$, *to dla* $\operatorname{Re} s \geqslant 0$ *mamy*

$$P^*(j, s) = \sum_{k=j}^{N+1} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \beta_k^*(s), \qquad j = 0, 1, \ldots, N+1, \tag{3.12}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \beta_k^*(s) = {} & \frac{(N+1)\mu\, C_{k-1}(s, 1)}{(s+k\mu)\left[(N+1)\mu \sum\limits_{j=0}^{N} \binom{N}{j} \frac{1}{C_j(s, 1)} + s \sum\limits_{j=0}^{N+1} \binom{N+1}{j} \frac{1}{C_{j-1}(s, 1)}\right]} \times \\ & \times \Bigg\{ \Bigg[\sum_{j=k}^{N} \binom{N}{j} \frac{1}{C_j(s, 1)}\Bigg]\Bigg[\sum_{j=0}^{k} \binom{N}{j} \frac{1}{C_{j-1}(s, 1)}\Bigg] - \\ & - \Bigg[\sum_{j=0}^{k-1} \binom{N}{j} \frac{1}{C_j(s, 1)}\Bigg]\Bigg[\sum_{j=k+1}^{N} \binom{N}{j} \frac{1}{C_{j-1}(s, 1)}\Bigg]\Bigg\} + \\ & + \frac{\binom{N+1}{k} \sum\limits_{j=0}^{N+1} \binom{N+1}{j} \frac{1}{C_{j-1}(s, 1)}}{(N+1)\mu\left[\sum\limits_{j=0}^{N} \binom{N}{j} \frac{1}{C_j(s, 1)} + s \sum\limits_{j=0}^{N+1} \binom{N+1}{j} \frac{1}{C_{j-1}(s, 1)}\right]}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

oraz

$$C_j(s, 1) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli} \quad j = -1, \\ \prod_{i=0}^{j} \dfrac{g^*(s+i\mu)}{1-g^*(s+i\mu)}, & \text{jeżeli} \quad j = 0, 1, \ldots, N \end{cases}$$

natomiast

$$g^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG(x)$$

jest transformatą Laplace'a–Stieltjesa rozkładu $G(x)$.

TWIERDZENIE 3.5. *Jeżeli średni czas konserwacji jest skończony* $\int_0^\infty x\, dG(x) = 1/\lambda < \infty$, *to niezależnie od warunku początkowego* $n(0)$ *graniczne prawdopodobieństwa* $P(j) = \lim_{t\to\infty} P(j, t)$, $j = 0, 1, \ldots, N+1$, *stanów procesu* $n(t)$ *istnieją i mają postać*

$$P(j) = \sum_{k=j}^{N+1} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \beta_k, \qquad j = 0, 1, \ldots, N+1, \tag{3.14}$$

gdzie

$$\beta_k = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli} \quad k = 0, \\ \dfrac{(N+1)\, C_{k-1} \sum_{j=k-1}^{N} \binom{N}{j} \frac{1}{C_j}}{k\left[1 + (N+1)\frac{\mu}{\lambda} \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} \frac{1}{C_j}\right]}, & \text{jeżeli} \quad k = 1, 2, \ldots, N+1, \end{cases} \tag{3.15}$$

oraz

$$C_j = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli} \quad j = 0, \\ \prod_{i=1}^{j} \dfrac{g^*(i\mu)}{1-g^*(i\mu)}, & \text{jeżeli} \quad j = 1, 2, \ldots, N. \end{cases} \tag{3.16}$$

Oznaczmy przez $P^-(j) = \lim_{r\to\infty} \Pr\{n^{(r)} = j\}$, $j = 0, 1, \ldots, N$, graniczne prawdopodobieństwa stanów łańcucha $\{n^{(r)}\}$.

TWIERDZENIE 3.6. *Niezależnie od warunku początkowego* $n(0)$ *graniczne prawdopodobieństwa* $P(j)$ *stanów procesu* $n(t)$ *mają postać*

$$P(j) = \frac{(N+1)\, P^-(j-1)}{j\left[(N+1)\frac{\mu}{\lambda} + P^-(N)\right]}, \qquad j = 1, 2, \ldots, N+1, \qquad P(0) = 1 - \sum_{j=1}^{N+1} P(j). \tag{3.17}$$

4. Cykliczne systemy obsługi masowej. W tym rozdziale zajmiemy się analizą pracy pewnego przedsiębiorstwa transportowego ([11], [8]). Przypuśćmy, że w żwirowni pracuje koparka ładująca żwir na samochody wywrotki, które przewożą go do betoniarni a następnie wracają do punktu załadowczego. W systemie tym zakładamy, że czasy załadunków są niezależnymi zmiennymi losowymi o pewnym rozkładzie $G(x)$, natomiast czasy przejazdów samochodów, na które składają się czasy przejazdów do betoniarni, czasy wyładunków czasy powrotów są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem μ. Ponadto załóżmy, że czasy przejazdów i czasy załadunków są niezależne. Niech N będzie liczbą samochodów w systemie, $m(t)$ niech będzie procesem stochastycznym zdefiniowanym jako liczba samochodów znajdujących się w kolejce przed koparką w chwili t, natomiast $n(t)$ niech będzie procesem stochastycznym zdefiniowanym jako liczba samochodów znajdujących się w drodze do koparki w chwili t. Procesy stochastyczne $n(t)$ i $m(t)$ związane są oczywistą równością $n(t) = N - m(t)$. Nie trudno zauważyć, że proces stochastyczny $n(t)$ można interpretować jako proces konserwacji maszyn w systemie N maszyn konserwowanych przez jednego konserwatora. Przy tej interpretacji czasy pracy maszyn interpretujemy jako czasy przejazdów samochodów a czasy konserwacji interpretujemy jako czasy załadunków.

Oznaczmy przez $\Pr\{n(t) = j\} = P(j, t)$, $j = 0, 1, \ldots, N$, prawdopodobieństwa stanów procesu $n(t)$, a przez $\lim_{t\to\infty} P(j, t) = P(j)$, oznaczmy graniczne prawdopodobieństwa stanów tego procesu. Z powyższych uwag wynika, że między granicznymi prawdopodobieństwami $P(j)$ i $q(j)$ istnieje zależność

$$P(j) = q(N-j), \qquad j = 0, 1, \ldots, N. \tag{4.1}$$

Graniczne prawdopodobieństwa $P(j)$ dane są w twierdzeniu 3.5.

P r z y k ł a d 4.1. Niech czasy przejazdów samochodów będą zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem μ, a czasy załadunków niech będą zmiennymi losowymi o rozkładzie deterministycznym. Tutaj przyjęto, że średni czas załadunku jest równy $\frac{1}{\lambda} = 5$ (minut), a średni czas jazdy $\frac{1}{\mu} = 50$ (minut). W tablicy 4.1 znajdują się graniczne prawdobodobieństwa liczby samochodów znajdujących się przed koparką dla $N = 1, 3, 5, \ldots, 13$ samochodów w systemie. Prawdopodobieństwa $q(j)$ można wyznaczyć z twierdzenia 3.5, w którym należy przyjąć $g^*(s) = \exp(-s/\mu)$.

T a b l i c a 4.1. Graniczne prawdopodobieństwa $q(j)$ liczby samochodów znajdujących się przed koparką

j \ N	1	3	5	7	9	11	13
0	0.500	0.730	0.556	0.391	0.243	0.124	0.046
1	.500	.242	.342	.375	.336	.234	.114
2		.027	.089	.173	.242	.248	.171
3		.001	.012	.050	.120	.193	.197
4			.001	.010	.045	.119	.186
5				.001	.012	.056	.140
6					.002	.020	.085
7						.005	.041
8						.001	.015
9							.004
10							.001
$\sum_{j=1}^{N} j\,q(j)$	0.500	0.299	0.560	0.914	1.433	2.234	3.451

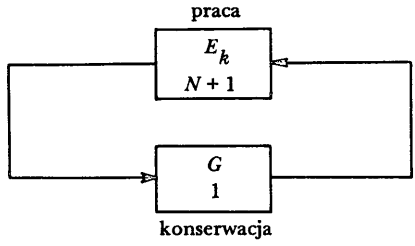
Założenie wykładniczego rozkładu czasów jazdy ogranicza w pewnym stopniu możliwość stosowania tego systemu w praktyce przez to, że gęstość tego rozkładu ma maksimum w zerze. W rozdziałach 5 i 6 osłabimy to założenie wprowadzając rozkład Erlanga wolny od tego zarzutu. Od tych trudności można się także uwolnić korzystając z metody modelowania systemu na maszynach cyfrowych. W [8] mamy taką analizę systemów cyklicznych przy założeniu, że czasy jazdy samochodów mają rozkład jednostajny albo rozkład trójkątny.

5. Uogólnienie systemu Takácsa. Rozpatrzmy system, w którym mamy $N+1$ maszyn przeznaczonych do pracy i jednego konserwatora. Załóżmy, że w systemie tym czasy konserwacji maszyn są niezależnymi zmiennymi losowymi o pewnym rozkładzie $G(x)$, a czasy pracy są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Erlanga rzędu k. Funkcje gęstości rozkładu Erlanga przyjmujemy w postaci

$$f_k(x) = \frac{\mu^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu x}, \qquad x > 0,\ \mu > 0. \tag{5.1}$$

Tutaj k jest ustaloną liczbą naturalną. Jeżeli $k = 1$, to czasy pracy maszyn mają rozkład wykładniczy, wówczas opisany system redukuje się do przypadku rozpatrywanego w rozdziale 3 (system Takácsa konserwacji maszyn).

Rozpatrywany w tym rozdziale system ma następujący schemat



Rys. 5

Niech $n(t)$ będzie procesem stochastycznym zdefiniowanym jako liczba maszyn pracujących w chwili t. Naszym zadaniem będzie znalezienie granicznych prawdopodobieństw stanów procesu $n(t)$.

Jeżeli rozkład prawdopodobieństwa czasu pracy maszyn jest rozkładem Erlanga, którego funkcja gęstości jest postaci (5.1), to czas pracy maszyny można rozłożyć na k niezależnych faz przy czym czasy pracy w każdej fazie mają rozkład wykładniczy z parametrem μ. Kolejne fazy pracy maszyny numerujemy zgodnie ze zwyczajem przyjętym w teorii kolejek w ten sposób, że praca maszyny rozpoczyna się od k-tej fazy a kończy się z chwilą zakończenia 1-szej fazy pracy.

Oznaczmy przez $n_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, k$, liczbę maszyn znajdujących się w j-tej fazie pracy w chwili t. Oczywiście ogólna liczba maszyn pracujących w chwili t jest równa $\sum_{j=1}^{k} n_j(t)$. Niech $X(t)$ będzie procesem stochastycznym, który przyjmuje wartość 0 jeżeli konserwator jest bezczynny, a w przeciwnym razie przyjmuje wartość równą długości czasu do zakończenia konserwacji naprawianej maszyny.

Załóżmy, że proces stochastyczny $[n_1(t), \ldots, n_k(t), X(t)]$ jest stacjonarny i przyjmijmy następujące oznaczenia:

$$P(n_1, \ldots, n_k; x) = \Pr\{n_1(t) = n_1, \ldots, n_k(t) = n_k, X(t) < x\}, \qquad n_1 + \ldots + n_k \leqslant N, \tag{5.2}$$

$$P(n_1, \ldots, n_k) = \Pr\{n_1(t) = n_1, \ldots, n_k(t) = n_k\}, \qquad n_1 + \ldots + n_k \leqslant N+1, \tag{5.3}$$

$$P(N+1) = \Pr\{n(t) = N+1\} = \sum_{n_1+\ldots+n_k=N+1} P(n_1, \ldots, n_k), \tag{5.4}$$

$$P^-(n_1, \ldots, n_k) = \Pr\{n_1(\tau_r - 0) = n_1, \ldots, n_k(\tau_r - 0) = n_k\}, \qquad n_1 + \ldots + n_k \leqslant N, \tag{5.5}$$

gdzie τ_r są chwilami zakończenia konserwacji. Powyższe prawdopodobieństwa w przypadku gdy ich argumenty są ujemne interpretujemy jako zero.

TWIERDZENIE 5.1. *Jeżeli $G(0+) = 0$ i średni czas konserwacji jest skończony*

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^\infty x\, dG(x) < \infty,$$

to prawdopodobieństwa (5.3) *i* (5.5) *spełniają następujący układ równań*

$$\begin{aligned}
&-(1 - P(N+1))\lambda P^-(n_1, \ldots, n_k) - \mu(n_1 + \ldots + n_k) P(n_1, \ldots, n_k) + \\
&+ \sum_{j=1}^{k-1} P(n_1, \ldots, n_j - 1, n_{j+1} + 1, \ldots, n_k)(n_{j+1} + 1)\mu + \\
&+ P(n_1 + 1, \ldots, n_k)(n_1 + 1)\mu + (1 - P(N+1))\lambda P^-(n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k - 1) = 0, \\
&\qquad\qquad n_1 + \ldots + n_k \leqslant N, \\
&-\mu(N+1) P(n_1, \ldots, n_k) + \sum_{j=1}^{k-1} P(n_1, \ldots, n_j - 1, n_{j+1} + 1, \ldots, n_k)(n_{j+1} + 1)\mu + \\
&+ (1 - P(N+1))\lambda P^-(n_1, \ldots, n_k - 1) = 0, \qquad n_1 + \ldots + n_k = N+1.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Dowód pomijamy, można go znaleźć w [12].

WNIOSEK 5.1. *Jeżeli czasy pracy maszyn są zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem μ, czyli $k = 1$, to równania* (5.6) *przyjmą postać*

$$\begin{aligned}
&-[1 - P(N+1)]\lambda P^-(j) - \mu j P(j) + (j+1)\mu P(j+1) + \\
&\qquad + [1 - P(N+1)]\lambda P^-(j-1) = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, N, \\
&-\mu(N+1) P(j) + [1 - P(N+1)]\lambda P^-(j-1) = 0, \qquad j = N+1.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Z równań (5.7) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&P(j) = \frac{(N+1) P^-(j-1)}{j\left[(N+1)\frac{\mu}{\lambda} + P^-(N)\right]}, \qquad j = 1, 2, \ldots, N+1, \\
&P(0) = 1 - \sum_{j=1}^{N+1} P(j).
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Rozwiązanie to otrzymał na innej drodze L. Takács (zob. (3.17)).

Dla kompletności naszych rozważań nad systemem opisanym w tym rozdziale wystarczy przejść do analizy łańcucha stochastycznego

$$[n_1(\tau_r - 0), \ldots, n_k(\tau_r - 0)]. \tag{5.9}$$

Znajomość prawdopodobieństw stanów tego łańcucha wobec twierdzenia 5.1 daje nam rozwiązanie zagadnienia konserwatora.

Niech S_N będzie zbiorem stanów łańcucha stochastycznego (5.9). Jest to oczywiście zbiór k elementowych ciągów liczb

$$S_N = \{(n_1, \ldots, n_k): \ n_1 + \ldots + n_k \leqslant N\}.$$

Nie trudno zauważyć, że dla procesu $[n_1(t), \ldots, n_k(t)]$ przejście od wartości procesu w chwili $\tau_r - 0$ do wartości procesu w chwili $\tau_{r+1} - 0$ można rozłożyć na trzy etapy:

Przejście rozpatrywanego procesu w czasie od chwili $\tau_r - 0$ do chwili $\tau_r + 0$. Wówczas mamy

$$n_i(\tau_r + 0) = \begin{cases} n_i(\tau_r - 0), & \text{jeżeli } i = 1, 2, \ldots, k-1, \\ & \text{lub } i = k \text{ i } \sum\limits_{i=1}^{k} n_i(\tau_r - 0) = N + 1, \\ n_i(\tau_r - 0) + 1, & \text{jeżeli } i = k \text{ i } \sum\limits_{i=1}^{k} n_i(\tau_r - 0) \leqslant N. \end{cases} \tag{5.10}$$

Odpowiadającą temu etapowi macierz prawdopodobieństw przejścia oznaczmy przez A_N.

Przejście rozpatrywanego procesu w czasie od chwili $\tau_r + 0$ do chwili $\tau_r + \sigma_r + 0$, gdzie σ_r jest długością czasu, w którym konserwator jest bezczynny. Oczywiście gdy $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i(\tau_r - 0) = N$, to znaczy gdy w chwili $\tau_r + 0$ wszystkie maszyny pracują, to czas bezczynności konserwatora σ_r jest czasem czekania na uszkodzenie którejkolwiek maszyny, a więc jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem $N\mu$. W przeciwnym razie, gdy $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i(\tau_r - 0) < N$, przyjmujemy, że $\sigma_r = 0$. Odpowiadająca drugiemu etapowi macierz prawdopodobieństw przejścia oznaczmy przez B_N. Dla każdego k charakteryzującego rząd rozkładu Erlanga macierz prawdopodobieństw przejścia B_N jest łatwa do konstrukcji. Przykład konstrukcji takiej macierzy będzie podany w rozdziale 6.

Przejście rozpatrywanego procesu w czasie od chwili $\tau_r + \sigma_r + 0$ do chwili $\tau_{r+1} - 0$. Odpowiadającą temu etapowi macierz prawdopodobieństw przejścia oznaczmy przez C_N.

Przypuśćmy, że dla ustalonego i w chwili $\tau_r + \sigma_r + 0$ jedna maszyna znajduje się w i-tej fazie pracy, tj. $n_i(\tau_r + \sigma_r + 0) = 1$. Maszyna ta w chwili $\tau_r + \sigma_r + u - 0$, gdzie $u = \tau_{r+1} - \tau_r - \sigma_r$, może znajdować się w j-tej fazie obsługi z prawdopodobieństwem równym

$$q_j = \frac{(\mu u)^{i-j}}{(i-j)!} e^{-\mu u}, \qquad j = 1, 2, \ldots, i,$$

lub uszkodzi się z prawdopodobieństwem

$$q_0 = 1 - \sum_{j=1}^{i} q_j.$$

Przypuśćmy teraz, że $n_i(\tau_r + \sigma_r + 0) = n_i$. Wówczas w chwili $\tau_r + \sigma_r + u - 0$ będziemy mieli następujące liczby maszyn: n_{ij} $(j = i, i-1, \ldots, 1)$ maszyn w j-tej fazie i n_{i0} maszyn uszkodzonych. Prawdopodobieństwa tych zadrzeń są wielomianowe

$$\tilde{P}(n_{ii}, n_{i,i-1}, \ldots, n_{i0}; u) = \frac{n_i!}{n_{i0}!\, n_{i1}! \ldots n_{ii}!} \prod_{j=0}^{i} q_j^{n_{ij}}. \tag{5.11}$$

Ponieważ rozłożenia liczb na n_{ij} $(j = i, i-1, \ldots, 1)$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$ w rozpatrywanym czasie są niezależne więc prawdopodobieństwo przejścia $\tilde{P}(n_1, \ldots, n_k, n_1', \ldots, n_k'; u)$ od stanu $(n_1, \ldots, n_k)$ w chwili $\tau_r + \sigma_r + 0$ do stanu $(n_1', \ldots, n_k')$ w chwili $\tau_r + \sigma_r + u - 0$ dane jest wzorem

$$\tilde{P}(n_1, \ldots, n_k, n_1', \ldots, n_k'; u) = \sum \prod_{i=1}^{k} \tilde{P}(n_{ii}, n_{i,i-1}, \ldots, n_{i1}, n_{i0}; u). \tag{5.12}$$

Sumowanie w tym wzorze rozciąga się na wszystkie możliwe układy $(n_{ii}, \ldots, n_{i0})$ dające stan $(n_1', \ldots, n_k')$, a więc takie, że

$$n_i' = n_{ii} + n_{i+1,i} + \ldots + n_{ki}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

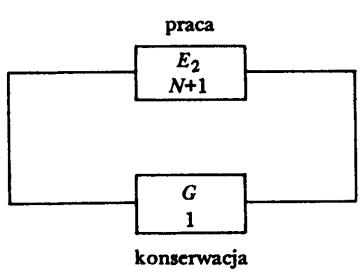
Teraz ostatecznie prawdopodobieństwo przejścia od stanu $(n_1, \ldots, n_k)$ do stanu $(n_1', \ldots, n_k')$ w czasie konserwacji maszyny możemy napisać w następującej postaci

$$\tilde{P}(n_1, \ldots, n_k, n_1', \ldots, n_k') = \int_0^\infty \tilde{P}(n_1, \ldots, n_k, n_1', \ldots, n_k'; u)\, dG(u). \tag{5.13}$$

Wzór tén pozwala znaleźć macierz prawdopodobieństw przejścia C_N. Mając macierze prawdopodobieństw przejścia A_N, B_N i C_N dla poszczególnych etapów tworzymy macierz Π_N prawdopodobieństw przejścia dla łańcucha stochastycznego (5.9). Jest ona postaci

$$\Pi_N = A_N B_N C_N. \tag{5.14}$$

6. Przykład. Rozpatrzmy system o następującym schemacie



Rys. 6

W systemie tym zakładamy, że czasy konserwacji są niezależnymi zmiennymi losowymi o pewnym rozkładzie $G(x)$, a czasy pracy maszyn są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Erlanga rzędu 2. System ten jest szczególnym przypadkiem systemu rozpatrywanego w rozdziale 5. Przyjęcie rozkładu Erlanga rzędu 2 pozwoli na bardziej szczegółową analizę łańcucha stochastycznego (5.9). W tym systemie będzie to łańcuch stochastyczny

$$[n_1(\tau_r - 0),\ n_2(\tau_r - 0)], \tag{6.1}$$

o stanach należących do zbioru S_N. Przy tym elementy tych zbiorów będziemy porządkowali w następujący sposób

$$\begin{gathered} S_0 = [00], \qquad S_1 = [00,\ 01,\ 10], \\ S_N = [00,\ 01,\ 10,\ 02,\ 11,\ 20,\ \ldots,\ 0N,\ 1N-1,\ \ldots,\ N0]. \end{gathered} \tag{6.2}$$

Liczba elementów zbioru S_N jest równa $\frac{1}{2}(N+1)(N+2)$.

Związki (5.10) dla łańcucha stochastycznego (6.1) przyjmą postać

$$n_i(\tau_r + 0) = \begin{cases} n_i(\tau_r - 0), & \text{jeżeli } i = 1 \\ & \text{lub } i = 2 \ \text{ i } \ \sum\limits_{i=1}^{2} n_i(\tau_r - 0) = N + 1, \\ n_i(\tau_r - 0) + 1, & \text{jeżeli } i = 2 \ \text{ i } \ \sum\limits_{i=1}^{2} n_i(\tau_r - 0) \leqslant N. \end{cases} \tag{6.3}$$

Ponieważ macierz A_N jest macierzą prawdopodobieństw przejścia od stanu ze zbioru S_N do stanu ze zbioru S_{N+1} zatem jest macierzą o $\frac{1}{2}(N+1)(N+2)$ wierszach i o $\frac{1}{2}(N+2)(N+3)$ kolumnach. Niech I_n będzie macierzą kwadratową jednostkową o n wierszach (i n kolumnach) oraz $O_{m,n}$ niech będzie macierzą zerową o m wierszach i n kolumnach.

Można sprawdzić, że spełniony jest wzór rekurencyjny

$$A_N = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} A_{N-1} & O_{\frac{1}{2}N(N+1),N+2} \\ \hline O_{N+1,\frac{1}{2}(N+1)(N+2)} & \begin{array}{c|c} I_{N+1} & O_{N+1,1} \end{array} \end{array}\right]}_{S_{N+1}} \Bigg\} S_N, \qquad N = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{6.4}$$

gdzie

$$A_0 = \underbrace{[0\ \ 1\ \ 0]}_{S_1} \} S_0. \tag{6.5}$$

Dowód wzoru (6.4) pomijamy, można go dowieść indukcyjnie. Elementy macierzy A_N można także wyznaczyć ze wzoru

$$A_N = (a_{ij}), \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ \tfrac{1}{2}(N+1)(N+2), \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ \tfrac{1}{2}(N+2)(N+3), \tag{6.6}$$

gdzie

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } i = \frac{1}{2}k(k-1) + 1,\ \frac{1}{2}k(k-1) + 2,\ \ldots,\ \frac{1}{2}k(k-1) + k, \\ & \qquad j = k + i, \ \text{ oraz } \ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N+1, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases} \tag{6.7}$$

Podobnie jak w poprzednim rozdziale, gdy $\sum_{i=1}^{k} n_i(\tau_r - 0) = N$, to konserwator w chwili $\tau_r + 0$ jest bezczynny aż do chwili uszkodzenia którejkolwiek maszyny. Gdy $\sum_{i=1}^{k} n_i(\tau_r - 0) < N$, to czas w którym konserwator jest bezczynny $\sigma_r = 0$.

Macierz B_N jest macierzą prawdopodobieństw przejścia dla procesu $[n_1(t), n_2(t)]$ od wartości procesu w chwili $\tau_r + 0$ do wartości procesu w chwili $\tau_r + \sigma_r + 0$. Ponieważ jest to macierz prawdopodobieństw przejścia od stanu ze zbioru S_{N+1} do stanu ze zbioru S_N, zatem ma ona $\frac{1}{2}(N+2)(N+3)$ wierszy i $\frac{1}{2}(N+1)(N+2)$ kolumn. Można sprawdzić, że

$$B_N = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} I_{\frac{1}{2}(N+1)(N+2)} & \\ \hline O_{N+2,\frac{1}{2}N(N+1)} & B^*_{N+2,N+1} \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}I\\ \hline O\end{array}}\right\} S_N \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}I\\ \hline O\end{array}}\right\} S_{N+1}\backslash S_N \end{array} \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{S_{N-1}} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{S_N\backslash S_{N-1}} \end{array}; \qquad N = 1, 2, \ldots, \tag{6.8}$$

gdzie $B^*_{N+2,N+1}$ jest macierzą prawdopodobieństw przejścia od stanu ze zbioru $S_{N+1}\backslash S_N$ do stanu ze zbioru $S_N\backslash S_{N-1}$, zatem jest macierzą o $N+2$ wierszach i $N+1$ kolumnach.

Przejdziemy teraz do uwag dotyczących konstrukcji macierzy $B^*_{N+2,N+1}$. Zauważmy, że prawdopodobieństwo przejścia od stanu (n_1, n_2) do stanu $(n_1 - 1, n_2)$ jest postaci

$$p = \frac{n_1}{n_1 + n_2}, \tag{6.9}$$

a prawdopodobieństwo przejścia od stanu (n_1, n_2) do stanu $(n_1 + 1, n_2 - 1)$ jest postaci

$$q = \frac{n_2}{n_1 + n_2}. \tag{6.10}$$

Słuszność wzoru (6.9) jest konsekwencją następujących spostrzeżeń. Czas do uszkodzenia którejkolwiek maszyny znajdującej się w pierwszej fazie ma rozkład wykładniczy z parametrem $n_1\mu$ a czas do zmiany fazy którejkolwiek maszyny znajdującej się w drugiej fazie ma rozkład wykładniczy z parametrem $n_2\mu$. Ponadto oczywisty jest fakt, że jeżeli X jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem ξ, a Y jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem ω, to $P(X < Y) = \frac{\xi}{\omega + \xi}$. Prawdopodobieństwo p dane wzorem (6.9) jest prawdopodobieństwem tego, że zmiana stanu w pierwszej składowej łańcucha (6.1) nastąpi przed zmianą stanu w drugiej składowej tego łańcucha. To samo rozumowanie daje wzór (6.10). Z powyższych uwag wynika, że konstrukcja macierzy $B^*_{N+2,N+1}$ przy ustalonym N nie przedstawia trudności.

Macierze $B^*_{N+2,N+1}$ dla $N = 1, 2, 3$ mają postać

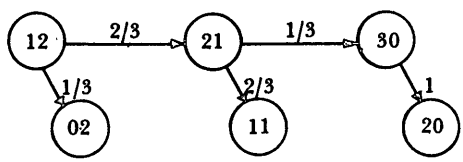
$$B^*_{3,2} = \begin{array}{c} \\ 02 \\ 11 \\ 20 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 01 & 10 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} S_2\backslash S_1, \tag{6.11}$$

$$S_1\backslash S_0$$

$$
(6.12)\qquad B^*_{4,3} = \begin{array}{c} \\ 03 \\ 12 \\ 21 \\ 30 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 02 & 11 & 20 \end{array} \\ \left.\begin{bmatrix} 1/3 & 4/9 & 2/9 \\ 1/3 & 4/9 & 2/9 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\} S_3\backslash S_2, \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{S_2\backslash S_1} \end{array}
$$

$$
(6.13)\qquad B^*_{5,4} = \begin{array}{c} \\ 04 \\ 13 \\ 22 \\ 31 \\ 40 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 03 & 12 & 21 & 30 \end{array} \\ \left.\begin{bmatrix} 1/4 & 3/8 & 9/32 & 3/32 \\ 1/4 & 3/8 & 9/32 & 3/32 \\ 0 & 1/2 & 3/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\} S_4\backslash S_3. \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{S_3\backslash S_2} \end{array}
$$

Dla przykładu sprawdzimy elementy znajdujące się w drugim wierszu macierzy $B^*_{4,3}$. Na rysunku 7 strzałkami oznaczone są możliwe przejścia od stanu (12) do stanów (02), (11) i (20) (z uwzględnieniem stanów pośrednich), natomiast liczby nad strzałkami oznaczają prawdopodobieństwa wyznaczone z wzorów (6.9) i (6.10). Prawdopodobieństwo przejścia od stanu (12) do stanu (02) jest więc równe 1/3:



Rys. 7

od stanu (12) do stanu (11) jest równe 4/9 oraz od stanu (12) do stanu (20) jest równe 2/9.

Dla kompletności naszych rozważań wystarczy jeszcze przeanalizować przejście od wartości procesu $n(t)$ w chwili $\tau_r + \sigma_r + 0$ do wartości tego procesu w chwili $\tau_{r+1} - 0$. Odpowiednią macierz prawdopodobieństw przejścia oznaczmy przez C_N. W obu chwilach $\tau_r + \sigma_r + 0$ i $\tau_{r+1} - 0$ stan procesu należy do zbioru S_N, a więc macierz C_N jest macierzą kwadratową o $\frac{1}{2}(N+1)(N+2)$ wierszach. Konstrukcja macierzy C_N jest elementarna ale dość kłopotliwa. Poniżej znajduje się macierz $C_3 = (c_{ij})$, $i, j = 1, 2, \ldots, 10$, w której $[p(t)]$ jest symbolem całki $\int_0^\infty p(t)\,dG(t)$, oraz

$$
(6.14)\qquad \begin{aligned} p_0 &= e^{-\mu t}, & p_1 &= \mu t\, e^{-\mu t}, \\ p_1' &= 1 - e^{-\mu t}, & p_2 &= 1 - (1 + \mu t)\, e^{-\mu t}. \end{aligned}
$$

Dla przykładu znajdziemy prawdopodobieństwo przejścia od stanu (11) do stanu (10) będące w macierzy C_3 elementem c_{53}. Nie trudno zauważyć, że przejście od stanu (11) do stanu (10) jest realizacją sumy dwóch rozłącznych zdarzeń:

Macierz C_3.

	00	01	10	02	11	20	03	12	21	30
00	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
01	$[p_2]$	$[p_0]$	$[p_1]$	0	0	0	0	0	0	0
10	$[p'_1]$	0	$[p_0]$	0	0	0	0	0	0	0
02	$[p_2^2]$	$[2p_2p_0]$	$[2p_2p_1]$	$[p_0^2]$	$[2p_1p_0]$	$[p_1^2]$	0	0	0	0
11	$[p_2p'_1]$	$[p'_1p_0]$	$[p_2p_0+p'_1p_1]$	0	$[p_0^2]$	$[p_1p_0]$	0	0	0	0
20	$[(p'_1)^2]$	0	$[2p'_1p_0]$	0	0	$[p_0^2]$	0	0	0	0
03	$[p_2^3]$	$[3p_2^2p_0]$	$[3p_2^2p_1]$	$[3p_2p_0^2]$	$[6p_2p_1p_0]$	$[3p_2p_1^2]$	$[p_0^3]$	$[3p_1p_0^2]$	$[3p_1^2p_0]$	$[p_1^3]$
12	$[p_2^2p'_1]$	$[2p_2p'_1p_0]$	$[p_2(p_2p_0+2p'_1p_1)]$	$[p_0^2p'_1]$	$[2p_0(p_2p_0+p'_1p_1)]$	$[p_1(2p_2p_0+p'_1p_1)]$	0	$[p_0^3]$	$[2p_1p_0^2]$	$[p_1^2p_0]$
21	$[p_2(p'_1)^2]$	$[p_0(p'_1)^2]$	$[p'_1(2p_2p_0+p'_1p_1)]$	0	$[2p'_1p_0^2]$	$[p_0(p_2p_0+2p'_1p_1)]$	0	0	$[p_0^3]$	$[p_1p_0^2]$
30	$[(p'_1)^3]$	0	$[3(p'_1)^2p_0]$	0	0	$[3p'_1p_0^2]$	0	0	0	$[p_0^3]$

1° zdarzenia polegającego na tym, że maszyna będąca w drugiej fazie pracy zakończy drugą fazę pracy oraz pierwszą fazę pracy i jednocześnie maszyna będąca w pierwszej fazie pracy pozostanie w tej fazie. Prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest równe $[p_2 p_0]$,

2° zdarzenia polegającego na tym, że maszyna będąca w pierwszej fazie pracy zakończy ją i jednocześnie maszyna będąca w drugiej fazie pracy zakończy tę fazę i przejdzie do pierwszej fazy pracy. Prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest równe $[p_1' p_1]$.

Stąd wynika, że prawdopodobieństwo przejścia ze stanu (11) do stanu (10) podczas konserwacji jest równe $[p_2 p_0 + p_1' p_1]$.

Otrzymane dotychczas rezultaty dotyczące procesu $[n_1(t), n_2(t)]$ są przedstawione w tablicy 6.1.

Tablica 6.1. Etapy przejścia w procesie $[n_1(t), n_2(t)]$

Chwila	$\tau_r - 0$	$\tau_r + 0$	$\tau_r + \sigma_r + 0$	$\tau_{r+1} - 0$
Zbiór stanów	S_N	S_{N+1}	S_N	S_N
Macierz prawdopodobieństw przejścia		A_N	B_N	C_N

Macierz prawdopodobieństw przejścia łańcucha stochastycznego $[n_1(\tau_r - 0), n_2(\tau_r - 0)]$ jest oczywiście postaci $\Pi_N = A_N B_N C_N$.

Można sprawdzić, że z wzorów (6.4) i (6.8) wynika następujący wzór

$$(6.15) \qquad A_N B_N = \underbrace{\left.\left[\begin{array}{c|c} A_{N-1} & \\ \hline O_{N+1,\frac{1}{2}N(N+1)} & B^{**}_{N+1} \end{array}\right]\right\}}_{S_N} S_N, \qquad N = 1, 2, \ldots,$$

gdzie B^{**}_{N+1} jest macierzą kwadratową o $N+1$ wierszach powstałą z macierzy $B^{*}_{N+2,N+1}$ przez skreślenie ostatniego wiersza.

Przejdziemy teraz do wyznaczenia granicznych prawdopodobieństw stanów procesu $n(t)$. Prawdopodobieństwa te znajdujemy z wzorów (5.6) danych w twierdzeniu 5.1. W naszym przypadku z (5.6) otrzymujemy układ $\frac{1}{2}(N+2)(N+3)$ równań o tyluż niewiadomych.

Niech P_{N+1} będzie macierzą kolumnową uporządkowanych liniowo według (6.2) zmiennych $P(n_1, n_2)$, $n_1 + n_2 \leqslant N+1$, niech R_{N+1} będzie macierzą współczynników przy zmiennych $P(n_1, n_2)$ w układzie równań (5.6). Ponadto niech Q_{N+1} będzie macierzą kolumnową, której elementy mają postać

$$(6.16) \qquad q_{ij} = \lambda\,[1 - P(N+1)]\,P^{-}(i, j), \qquad i, j = 0, 1, \ldots, \tfrac{1}{2}(N+2)(N+3),$$

gdzie

$$(6.17) \qquad P(N+1) = P(0, N+1) + P(1, N) + \ldots + P(N+1, 0).$$

Innymi słowy, jest to macierz kolumnowa „wyrazów wolnych" w układzie równań (5.6).

Macierze R_{N+1} i Q_{N+1} można określić rekurencyjnie. Sformułowanie wzorów rekurencyjnych pomijamy. Pierwsze z tych macierzy są następujące:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 00 & 01 & 10 \end{array} \\ R_1 \,\|\, Q_1 = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \mu \\ \hline 0 & -\mu & 0 \\ 0 & \mu & -\mu \end{array}\right] \Bigg\| \begin{bmatrix} q_{00} \\ -q_{00} \\ 0 \end{bmatrix}, \end{array}$$

$$
R_2 \parallel Q_2 = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 00 & 01 & 10 & 02 & 11 & 20 \end{array} \\
\left[\begin{array}{c|cc|ccc}
0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & -\mu & 0 & 0 & \mu & 0 \\
0 & \mu & -\mu & 0 & 0 & 2\mu \\ \hline
0 & 0 & 0 & -2\mu & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2\mu & -2\mu & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\mu & -2\mu
\end{array}\right]
\end{array}
\parallel
\left[\begin{array}{cc}
q_{00} & \\
q_{01} & -q_{00} \\
q_{10} & \\
 & -q_{01} \\
 & -q_{10} \\
 & 0
\end{array}\right],
$$

$$
R_3 \parallel Q_3 = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} 00 & 01 & 10 & 02 & 11 & 20 & 03 & 12 & 21 & 30 \end{array} \\
\left[\begin{array}{c|cc|ccc|ccc}
0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & -\mu & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mu & -\mu & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & -2\mu & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2\mu & -2\mu & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\mu & -2\mu & 0 & 0 & 0 & 3\mu \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3\mu & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mu & -3\mu & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & -3\mu & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & -3\mu
\end{array}\right]
\end{array}
\parallel
\left[\begin{array}{cc}
q_{00} & \\
q_{01} & -q_{00} \\
q_{10} & \\
q_{02} & -q_{01} \\
q_{11} & -q_{10} \\
q_{20} & \\
 & -q_{02} \\
 & -q_{11} \\
 & -q_{20} \\
 & 0
\end{array}\right].
$$

Zatem układ równań (5.6) w naszym przypadku ma postać

$$
R_{N+1}\, P_{N+1} = Q_{N+1}, \qquad N = 0, 1, \ldots \tag{6.18}
$$

Pokażemy teraz, że rozwiązanie układu równań (6.18) nie przedstawia trudności. Na razie elementy macierzy Q_{N+1} zdefiniowane w (6.16) i (6.17) zależą jeszcze od nieznanego prawdopodobieństwa $P(N+1)$. Podstawmy więc

$$
P^*(i, j) = \frac{P(i, j)}{\lambda\,[1 - P(N+1)]}, \qquad i, j = 0, 1, \ldots, \tfrac{1}{2}(N+2)(N+3). \tag{6.19}
$$

Po tym podstawieniu z układu równań (6.18) otrzymujemy układ równań o niewiadomych $P^*(i, j)$ o tej samej co poprzednio macierzy współczynników przy niewiadomych ale o nowej macierzy wyrazów wolnych powstałej z macierzy Q_{N+1} przez zastąpienie elementów q_{ij} przez $P^{-}(i, j)$. Powstały układ równań łatwo rozwiązać np. metodą eliminacji zmiennych. W rezultacie otrzymujemy prawdopodobieństwa $P^*(i, j)$ z wyjątkiem prawdopodobieństwa $P^*(0, 0)$.

Oznaczmy

$$
P^*(N+1) = P^*(0, N+1) + P^*(1, N) + \ldots + P^*(N+1, 0).
$$

Wówczas z (6.19) mamy

$$
P^*(N+1) = \frac{P(N+1)}{\lambda\,[1 - P(N+1)]},
$$

a więc

$$
1 - P(N+1) = \frac{1}{1 + \lambda\, P^*(N+1)}.
$$

Stąd i z (6.19) ostatecznie mamy

$$(6.20)\quad P(i, j) = \frac{\lambda P^*(i, j)}{1 + \lambda P^*(N+1)}, \qquad i, j = 0, 1, \ldots, \tfrac{1}{2}(N+2)(N+3), \quad i^2 + j^2 > 0,$$

gdzie

$$P(0, 0) = 1 - \sum_{i^2+j^2>0}\sum P(i, j).$$

Korzystając z (6.20) znajdujemy graniczne prawdopodobieństwa liczby maszyn pracujących w systemie. Ponieważ liczba maszyn pracujących w chwili t, $n(t)$, jest równa sumie $n_1(t) + n_2(t)$, więc

$$\Pr\{n(t) = i\} = P(i) = \sum_{j=0}^{i} P(j, i-j).$$

7. Porównanie wyników numerycznych. Przedstawimy teraz niektóre wyniki numeryczne mające na celu porównanie rozpatrywanych systemów. W tablicy 7.1 znajdują się graniczne prawdopodobieństwa liczby maszyn pracujących w trzech różnych systemach przy danej liczbie maszyn. Pierwszy system jest systemem Palma, a więc przyjęto wykładniczy rozkład czasów pracy maszyn z parametrem $\mu = 10$ i wykładniczy rozkład czasu konserwacji z parametrem $\lambda = 1$.

Tablica 7.1. Graniczne prawdopodobieństwa liczby maszyn pracujących w trzech systemach konserwacji maszyn (rozkład czasu konserwacji deterministyczny)

Liczba maszyn	Stan systemu	System Palma	System Takácsa	Uogólniony system Takácsa
1	0	.09091	.09091	.09091
	1	.90909	.90909	.90909
2	0	.01639	.00876	.00831
	1	.16393	.17227	.17276
	2	.81967	.81898	.81894
3	0	.00439	.00096	.00076
	1	.04392	.02677	.02548
	2	.21962	.24240	.24403
	3	.73206	.72988	.72973
4	0	.00155	.00013	.00008
	1	.01552	.00438	.00355
	2	.07760	.05387	.05164
	3	.25867	.29952	.30300
	4	.64666	.64209	.64173

Drugi system jest systemem Takácsa, w którym przyjęto wykładniczy rozkład czasów pracy maszyn z parametrem $\mu = 1$ i deterministyczny czas konserwacji równy $T_0 = 1/10$. W trzecim systemie przyjęto, że czasy pracy maszyn mają rozkład Erlanga rzędu drugiego z parametrem $\mu = 2$ i deterministyczny czas konserwacji równy $T_0 = 1/10$. Zauważmy, że różnice między granicznymi prawdopodobieństwami liczby maszyn pracujących w tych systemach zmniejszaja się gdy liczba maszyn pracujących rośnie. Ponadto zauważmy, że różnice te w dwóch ostatnich systemach są małe, występują dopiero od trzeciego miejsca dziesiętnego. Tak więc bardzo istotna zmiana w założeniach, a mianowicie przejście od rozkładu wykładniczego do rozkładu Erlanga rzędu drugiego niewiele wpływa na postać rozwiązania.

Wynika stąd, że badanie wpływu założeń w zagadnieniu konserwatora na postać rozwiązania wymaga subtelnych metod.

Wyniki otrzymane w rozdziale 5 i 6 można wykorzystać do analizy pracy przedsiębiorstwa transportowego, o którym była mowa w rozdziale 4.

Bibliografia

[1] R. E. Barlow, *Repairman problems*, Studies in Applied Probability and Management Science, Chap. 2 edited by Arrow, Karlin and Scarf, Stanford, Calif., 1962.

[2] R. E. Barlow and F. Proschan, *Mathematical theory of reliability*, New York – London – Sidney 1965.

[3] A. A. Borovkov (А. А. Боровков), *Вероятностные процесы в теории массового обслуживания*, Москва 1972.

[4] A. J. Chinczin (А. Я. Хинчин), *Работы по математической теории массового обслуживания*, Москва 1963.

[5] D. R. Cox, *Renewal theory*, New York 1963.

[6] W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, Warszawa 1966.

[7] B. W. Gniedenko i I. N. Kowalenko, *Wstęp do teorii obsługi masowej*, Warszawa 1971.

[8] J. Huk i J. Łukaszewicz, *Cykliczne systemy obsługi masowej*, Matematyka Stosowana 1(1973), str. 85–104.

[9] J. R. Jackson, *Networks of waiting lines*, Ops. Res. 5(1957), str. 518–521.

[10] D. G. Kendall, *Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markow chain*, Ann. Math. Statist. 24(1953), str. 338–354.

[11] I. Kopocińska, *Matematyczne modele kolejek cyklicznych*, Inwestycje i Budownictwo 12(1968), str. 22–25.

[12] — *Repairman problem with an arbitrary distribution of repairment and Erlangian distribution of working time*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 19(1971), No. 7, str. 649–654.

[13] I. Kopocińska and B. Kopociński, *Queueing systems with feedback*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 19(1971), No. 5, str. 397–401.

[14] B. Kopociński, *Zarys teorii odnowy i niezawodności*, Warszawa 1973.

[15] C. Palm, *The distribution of repairmen in servicing automatic machines*, Industritidningen Norden 75(1947), str. 75–80, 90–94, 119–123.

[16] N. U. Prabhu, *Queues and inventories*, New York – London – Sidney 1965.

[17] B. A. Sevastianov (Б. А. Севастянов), *Предельная теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами*, Теория Вероятностей и ее Применения 2(1957), str. 106–116.

[18] L. Takács, *On a stochastic process concerning some waiting time problems*, Teor. Veroyatnost. i Primenen. 2(1957), str. 92–105, Theory of Probability and its Applications 2(1957), str. 90–103.

[19] — *Introduction to the theory of queues*, New York 1962.