ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA III: MATEMATYKA STOSOWANA II (1974)

Grażyna HOBOT (Lublin)

O pewnej metodzie całkowania równań zwyczajnych z efektywnie różniczkowalną prawą stroną

1. Rozważmy równanie różniczkowe

$$x' = f(t, x) \tag{1.1}$$

z warunkiem początkowym

$$x(t_0) = x_0. \tag{1.2}$$

W pracy tej opisane[1] będą dwie, analogiczne do metod Rungego–Kutty, metody jednokrokowe rzędu czwartego.

Przy założeniu, że istnieje możliwość praktycznego obliczania dla dowolnie zadanych wartości t i x wartości funkcji

$$g(t, x) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} f(t, x), \tag{1.3}$$

przybliżoną wartość rozwiązania problemu (1.1) – (1.2) w punkcie t_{k+1} przedstawimy w postaci

$$x_{k+1} = x_k + \Phi(f, g, h, t_k, x_k). \tag{1.4}$$

Funkcja Φ jest kombinacją liniową wartości funkcji f i g w pewnych punktach pośrednich.

2. Pierwszą metodę jednokrokową rzędu czwartego określimy w sposób następujący:

$$x_{k+1} = x_k + a_0 k_0 + a_1 k_1 + b_0 g_0 + b_1 g_1, \tag{2.1}$$

gdzie

$$\begin{aligned} g_0 &= 0.5h^2 g(t_k, x_k), \\ k_0 &= hf(t_k, x_k), \\ g_1 &= 0.5h^2 g(t_k + M_1 h,\ x_k + L_{10} k_0 + P_{10} g_0), \\ k_1 &= hf(t_k + M_1 h,\ x_k + R_{10} k_0 + E_{10} g_0 + E_{11} g_1). \end{aligned} \tag{2.2}$$

[1] Pełne dowody przedstawionych tutaj tez zostaną opublikowane osobno.

Współczynniki $a_0, a_1, b_0, b_1, L_{10}, P_{10}, R_{10}, E_{10}$ i E_{11} zostały wyznaczone w podobny sposób jak w metodzie Rungego–Kutty (patrz Ralston [2], str. 203), a mianowicie z warunku, aby metoda była rzędu czwartego i tak dobrane, że rozwiązanie w punkcie pośrednim $t_k + M_1 h$ zgadza się z dokładnym aż do wyrazu z h^2.

Żądania te doprowadziły do wyznaczenia stałych w zależności od wolnego parametru M_1. Są one odpowiednio równe:

$$a_0 = \frac{2M_1^3 - 2M_1 + 1}{2M_1^3}, \qquad a_1 = \frac{2M_1 - 1}{2M_1^3},$$

$$(2.3) \qquad b_0 = \frac{6M_1^2 - 8M_1 + 3}{6M_1^2}, \qquad b_1 = \frac{3 - 4M_1}{6M_1^2},$$

$$L_{10} = R_{10} = M_1,$$

$$P_{10} = M_1^2, \qquad E_{10} = \frac{2M_1^2}{3}, \qquad E_{11} = \frac{M_1^2}{3}.$$

Natomiast drugą z metod określają wzory:

$$(2.4) \qquad x_{k+1} = x_k + a_0 k_0 + a_1 k_1 + a_2 k_2,$$

gdzie

$$k_0 = hf(t_k, x_k),$$

$$g_1 = 0.5h^2 g(t_k + M_1 h,\ x_k + L_{10} k_0),$$

$$(2.5) \qquad k_1 = hf(t_k + M_1 h,\ x_k + R_{10} k_0 + E_{11} g_1),$$

$$g_2 = 0.5h^2 g(t_k + M_2 h,\ x_k + L_{20} k_0 + L_{21} k_1),$$

$$k_2 = hf(t_k + M_2 h,\ x_k + R_{20} k_0 + R_{21} k_1 + E_{22} g_2).$$

Postępując podobnie jak w przypadku poprzednim można wyznaczyć parametry występujące we wzorach (2.4) – (2.5). Przeprowadzone obliczenia dały

$$M_2 = \frac{3 - 4M_1}{2(2 - 3M_1)},$$

$$a_0 = \frac{6M_1 M_2 - 3(M_1 + M_2) + 2}{6M_1 M_2}, \qquad a_1 = \frac{3M_2 - 2}{6M_1(M_2 - M_1)}, \qquad a_2 = \frac{2 - 3M_1}{6M_2(M_2 - M_1)},$$

$$L_{10} = M_1, \qquad R_{10} = M_1, \qquad E_{11} = M_1^2,$$

$$(2.6) \qquad R_{20} = \frac{M_2(M_2 - M_1 + 8M_1 M_2 - 18M_1^2 M_2 + 6M_1 M_2^2 + 6M_1^3 - 4M_2^2)}{2M_1(2M_2 - M_1)(2 - 3M_1)},$$

$$R_{21} = \frac{M_2(M_2 - M_1)[4(M_2 + M_1) - 6M_1 M_2 - 1]}{2M_1(2M_2 - M_1)(2 - 3M_1)},$$

$$E_{22} = \frac{M_2(M_2 - M_1 - 3M_1^2 M_2 + 4M_1^2 - 2M_1 M_2)}{(2M_2 - M_1)(2 - 3M_1)},$$

$$L_{20} = \frac{M_2\,(2M_1 - M_2)}{2M_1}, \qquad L_{21} = \frac{M_2^2}{2M_1}.$$

3. Parametr M_1 występujący we wzorach (2.1) — (2.3) można dobrać w ten sposób, aby uzyskać możliwie małe oszacowanie współczynnika α_5 przy h^5 w rozwinięciu $x_{k+1} - x(t_{k+1})$ w szereg potęgowy względem h.

Współczynnik ten można przedstawić w postaci

$$\alpha_5 = \sum_{i=1}^{8} d_i e_i = \left(d\,(M_1),\, e\right). \tag{3.1}$$

Składowe wektora e (pochodne cząstkowe wyższych rzędów funkcji f w punkcie t_k, x_k) są liczbami, natomiast składowe wektora d są wielomianami (stopnia co najwyżej drugiego) ze względu na M_1.

Z (3.1) mamy

$$|\alpha_5| \leqslant |d(M_1)|\,|e| \tag{3.2}$$

Długość $d\,(M_1)$ będzie najmniejsza dla

$$M_1 = 0.6403744628. \tag{3.3}$$

Przy takim doborze M_1 uzyskujemy najmniejsze możliwe oszacowanie dla wielkości $|\alpha_5|$ (co nie oznacza oczywiście, że α_5 osiąga minimum).

Podstawiając wartość M_1 z (3.3) do (2.1)—(2.2) otrzymujemy

$$x_{k+1} = x_k + 0.46545275k_0 + 0.534547242k_1 + 0.0981256692g_0 + 0.2172535262g_1, \tag{3.4}$$

gdzie

$$\begin{aligned} k_0 &= hf\,(t_k,\, x_k),\\ g_0 &= 0.5h^2 g\,(t_k,\, x_k),\\ g_1 &= 0.5h^2 g\,(t_k + 0.6403744628h,\; x_k + 0.6403744628k_0 + 0.4100794514g_0),\\ k_1 &= hf\,(t_k + 0.6403744628h,\; x_k + 0.6403744629k_0 + 0.2733863006g_0 +\\ &\qquad + 0.1366931505g_1). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Przyjmując, że znane są ograniczenia

$$|f| < M, \qquad \left|\frac{\partial^{i+j} f}{\partial t^i \partial x^j}\right| < \frac{L^{i+1}}{M^{j-1}}, \qquad i + j \leqslant 4, \tag{3.6}$$

dostajemy

$$|\alpha_5| \leqslant 0.0694585886L^4 M. \tag{3.7}$$

Dla $M_1 = 0.5$ otrzymujemy jako przypadek szczególny wzory podane przez Zurmühla [3]

$$x_{k+1} = x_k + k_0 + \frac{1}{3}g_0 + \frac{2}{3}g_1, \tag{3.8}$$

gdzie

$$g_0 = 0.5h^2 g\,(t_k,\ x_k),$$

(3.9)
$$k_0 = hf\,(t_k,\ x_k),$$

$$g_1 = 0.5h^2 g\,(t_k + 0.5h,\ x_k + 0.5k_0 + 0.25g_0).$$

W metodzie tej

(3.10)
$$|\alpha_5| \leqslant 0.145508898 L^4 M.$$

4. Metoda (3.4) — (3.5) lepiej reaguje na nagłe zmiany krzywizny rozwiązania w porównaniu z klasyczną metodą Rungego—Kutty rzędu czwartego opisaną wzorami

(4.1)
$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{3}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3),$$

gdzie

(4.2)
$$k_0 = hf\,(t_k,\ x_k),$$
$$k_1 = hf\,(t_k + 0.5h,\ x_k + 0.5k_0),$$
$$k_2 = hf\,(t_k + 0.5h,\ x_k + 0.5k_1),$$
$$k_3 = hf\,(t_k + h,\ x_k + k_2).$$

Natomiast metoda (2.4)—(2.6) daje lepsze wyniki w przypadku, gdy rozwiązanie ma przebieg bardzo spokojny.

Obliczenia testowe były przeprowadzone na maszynie cyfrowej Odra—1013 ze stałym krokiem obliczeń. Otrzymane wyniki porównywane były z metodą opisaną wzorami (4.1)—(4.2).

W obliczeniach wzięto pod uwagę wzory (3.4)—(3.5) oraz (2.4)—(2.6) z tym, że w tych ostatnich przyjęto $M_1 = \frac{1}{3}$.

I. $x' = x + t + 1$, $x(-1) = 0$, $h = 0.1$;
rozwiązanie dokładne: $x(t) = \exp\,(t+1) - 2 - t$.

t_k	x_k z (3.4)—(3.5)	błąd	x_k z (2.4)—(2.6)	błąd
−0.60	$.9182464456_{10}-1$	$-.53_{10}-7$	$.9182487992_{10}-1$	$.18_{10}-6$
−0.10	$.5596029140_{10}+0$	$-.20_{10}-6$	$.5596037868_{10}+0$	$.66_{10}-6$
0.50	$.1981688971_{10}+1$	$-.60_{10}-6$	$.1981691461_{10}+1$	$.24_{10}-5$
1.50	$.8682491208_{10}+1$	$-.27_{10}-5$	$.8682503224_{10}+1$	$.93_{10}-5$
2.00	$.1608553153_{10}+2$	$-.53_{10}-5$	$.1608555527_{10}+2$	$.18_{10}-4$

t_k	x_k z (4.1)—(4.2)	błąd
−0.60	$.9182424008_{10}-1$	$-.46_{10}-6$
−0.10	$.5596014124_{10}+0$	$-.17_{10}-5$
0.50	$.1981683911_{10}+1$	$-.51_{10}-5$
1.50	$.8682470616_{10}+1$	$-.23_{10}-4$
2.00	$.1608549075_{10}+2$	$-.46_{10}-4$

II. $x' = -x \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}$, $x(1) = 1$, $h = 0.1$;

rozwiązanie dokładne: $x(t) = \frac{1}{\sin(1)} \sin\left(\frac{1}{t}\right)$.

t_k	x_k z (3.4)–(3.5)	błąd	x_k z (2.4)–(2.6)	błąd
1.10	$.937578242_{10}+0$	$-.59_{10}-7$	$.937578880_{10}+0$	$.47_{10}-8$
1.50	$.734866666_{10}+0$	$-.91_{10}-7$	$.734867608_{10}+0$	$.32_{10}-8$
2.60	$.445888382_{10}+0$	$-.57_{10}-7$	$.445888957_{10}+0$	$.40_{10}-9$
3.00	$.388836048_{10}+0$	$-.49_{10}-7$	$.388836546_{10}+0$	$.40_{10}-9$

t_k	x_k z (4.1)–(4.2)	błąd
1.10	$.937579174_{10}+0$	$.34_{10}-7$
1.50	$.734868089_{10}+0$	$.51_{10}-7$
2.60	$.445889279_{10}+0$	$.33_{10}-7$
3.00	$.388836828_{10}+0$	$.29_{10}-7$

Całkowanie za pomocą podanych wzorów wymaga oprócz podprogramu obliczającego wartości funkcji f także podprogramu obliczającego wartości funkcji g. Czas wykonywania tego ostatniego bywa dłuższy od czasu wykonywania podprogramu obliczającego wartości funkcji f i w związku z tym czas obliczeń może się wydłużyć. Jest to rekompensowane zwiększoną dokładnością otrzymanych wyników.

Czasami zdarza się, że funkcja g ma prostszą postać niż funkcja f. Ma to miejsce np. w przypadku równania

$$x' = \frac{t^3\,(4 + 3t)}{1 + t} + \frac{x}{1 + t},$$

dla którego $g(t, x) = 12t^2$. W takich przypadkach czas obliczeń zmienia się w sposób nieznaczny.

Literatura

[1] G. H o b o t, *Pewne metody rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych*, praca doktorska UMCS Lublin, 1971 (w przygotowaniu do druku).

[2] A. R a l s t o n, *Wstęp do analizy numerycznej*, Warszawa 1971.

[3] R. Z u r m ü h l, *Runge–Kutta Verfahren unter Vervendung hoherer Ableitung*, Z. Angew. Math. Mech. 32 (1952), str. 153–154.