ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria III: MATEMATYKA STOSOWANA XXXX (1997)

ADAM CZORNIK

Gliwice

Sterowanie optymalne dla niestacjonarnego układu liniowego z kwadratowym funkcjonałem kosztów

(*Praca wpłynęła do Redakcji 25.07.1997*)

1. Wprowadzenie. W tej pracy rozważamy dyskretny układ sterowania stochastycznego:

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + C_k w_k, \tag{1}$$

gdzie x_k jest n-wymiarowym wektorem w chwili $k, k = 0,1,\ldots, u_k$ jest m-wymiarowym wektorem sterowania w chwili k, $k = 0,1,\ldots$, a w_k, $k = 0,1,\ldots$, jest n-wymiarowym wektorem losowym o zerowej wartości średniej i skończonej wariancji Σ_k, takim, że zmienne losowe w_i, w_j są niezależne dla $i \neq j$. Warunek początkowy x_0 w równaniu (1) jest n wymiarowym wektorem losowym takim, że zmienne losowe x_0 i w_k są nieskorelowane dla $k = 0,1,\ldots$. Ponadto, dla każdego $k = 0,1,\ldots$, A_k, B_k, C_k są danymi macierzami o wymiarach $n \times n, n \times m$ i $n \times n$ odpowiednio. Dla układu (1) rozpatrzmy funkcjonał kosztów w postaci:

$$J_N(x_0, u) = E \sum_{k=0}^{N-1} (\langle Q_k x_k, x_k\rangle + \langle R_k u_k, u_k\rangle) + E\langle K x_N, x_N\rangle. \tag{2}$$

gdzie Q_k, R_k, K, $k = 0,\ldots,N-1$ są macierzami symetrycznymi, Q_k, $k = 0,\ldots,N-1$, są nieujemnie określone, a R_k $k = 0,\ldots,N-1$ i K są dodatnio określone, $u = (u_0,\ldots,u_{N-1})$ jest zastosowanym sterowaniem, a x_0 jest zadanym warunkiem początkowym dla równanie (1). Problem sterowania optymalnego, na skończonym przedziale czasowym $[0,N]$ polega na znalezieniu takiego sterowania $u = (u_0,\ldots,u_{N-1})$ dla którego funkcjonał kosztów (2) osiąga wartość minimalną. Sterowanie takie będziemy nazywać sterowaniem optymalnym. Problem ten rozwiązuje następujące, dobrze znane twierdzenie, którego dowód można znaleźć w [1], str. 46.

TWIERDZENIE 1. *Sterowaniem optymalnym w układzie* (1) *z funkcjonałem kosztów* (2) *jest sterowanie w postaci liniowego sprzężenia zwrotnego*

$$\widetilde{u}_k = -L_k x_k, \tag{3}$$

gdzie

$$L_k = (R_k + B_k' P_{k+1}(K) B_k)^{-1} B_k P_{k+1}(K) A_k, \tag{4}$$

a $P_k(K)$ *zadane jest równaniem rekurencyjnym*

$$P_k(K) = A'(k P_{k+1}(K)(A_k - B_k L_k) + Q_k, \qquad k = N-1, \ldots, 0 \tag{5}$$

z warunkiem początkowym

$$P_N(K) = K. \tag{6}$$

Ponadto minimalna wartość funkcjonału kosztów wynosi

$$J_N(x_0, \widetilde{u}) = \langle P_0(K) x_0, x_0 \rangle + q_0, \tag{7}$$

gdzie q_k *zadane jest równaniem rekurencyjnym*

$$q_k = \operatorname{tr}(C_k \Sigma_k C_k' P_{k+1}(K)) + q_{k+1}, \qquad k = N-1, \ldots, 0 \tag{8}$$

z warunkiem początkowym

$$q_N = 0. \tag{9}$$

Rozważmy teraz zadanie sterowania optymalnego na nieskończonym przedziale czasowym. W przypadku nieskończonego horyzontu czasowego wprowadźmy funkcjonał kosztów w postaci:

$$J(x_0, u) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} E \sum_{k=0}^{N-1} (\langle Q_k x_k, x_k \rangle + \langle R_k u_k, u_k \rangle). \tag{10}$$

Podobnie jak poprzednio zadanie sterowania optymalnego polega, na znalezieniu takiego ciągu sterowań $u = (u_0, u_1, \ldots)$ dla którego funkcjonał kosztów (10) osiąga wartość minimalną. Sterowanie takie będziemy nazywać sterowaniem optymalnym.

Przypomnijmy, że macierz A nazywamy stabilną, jeżeli jej wartości własne mają moduły mniejsze od 1. Parę (A, B) nazywamy stabilizowalną jeżeli istnieje macierz K taka, że macierz $A + BK$ jest macierzą stabilną. Parę (A, B), gdzie A, B są macierzami o wymiarach $n \times n$ i $n \times m$, nazywamy sterowalną jeżeli macierz

$$[B \ AB \ \ldots \ A^{n-1}B]$$

ma rząd n. Parę (A, C) nazywamy obserwowalną jeżeli para (C', A') jest sterowalna. Wreszcie parę (A, C) nazywamy wykrywalną jeżeli istnieje macierz K taka, że macierz $A + KC$ jest macierzą stabilną czyli gdy para (A', C') jest stabilizowalna.

W sytuacji, gdy współczynniki A_k, B_k i C_k równania (1), Q_k i R_k funkcjonału kosztów (11) oraz macierz kowariancji Σ_k są stałe, to rozwiązanie zadania sterowania optymalnego w układzie (1) z funkcjonałem kosztów (10) podaje następujące twierdzenie, którego dowód można znaleźć w [1], str. 56.

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli* $A_k = A$, $B_k = B$, $C_k = C$, $Q_k = Q$, $R_k = R > 0$, $\Sigma_k = \Sigma$ *dla* $k = 0, 1, \ldots$ *para* (A, B) *jest sterowalna i para* $(A, \sqrt{Q})$ *jest obserwowalna, to algebraiczne równanie Riccatiego*:

$$P = A'PA - A'PB(R + B'PB)^{-1}B'PA + Q \tag{11}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie symetryczne nieujemnie określone P, *macierz*

$$A - B(R + B'PB)^{-1}B'PA$$

jest stabilna, sterowanie w postaci liniowego sprzężenia zwrotnego

$$\widetilde{u}_k = -(R + B'PB)^{-1}B'PAx_k, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

jest optymalne, a minimalna wartość funkcjonału kosztów wynosi $J(x_0, \widetilde{u}) = \mathrm{tr}(C\Sigma CP)$.

Następne twierdzenie, którego dowód znajduje się w [3], str. 63, pokazuje, że rozwiązanie równania (11) można otrzymać jako granicę ciągu pewnych iteracji.

TWIERDZENIE 3. *Niech spełnione będą założenia twierdzenia 2, wówczas*

$$P = \lim_{k \to \infty} S_k(S_0), \tag{13}$$

gdzie $k = 0, 1, \ldots$ *dane jest wzorem rekurencyjnym*

$$\begin{aligned} &S_k(S_0) \\ &= A'S_{k-1}(S_0)A - A'S_{k-1}(S_0)B(R + B'S_{k-1}(S_0)B)^{-1}B'S_{k-1}(S_0)A + Q \end{aligned} \tag{14}$$

z dowolnym warunkiem początkowym $S_0 \geq 0$ *i zbieżność w (13) jest jednostajna względem* S_0, *w każdym obszarze* $\|S_0\| \leq c$, *gdzie* c *jest pewną stałą dodatnią.*

Głównym celem tej pracy jest znalezienie sterowania optymalnego w układzie (1) z funkcjonałem kosztów (10) przy założeniu, że współczynniki A_k, B_k i C_k równania (1), Q_k i R_k funkcjonału kosztów (11) oraz macierz kowariancji Σ_k, mają granicę, gdy $k \to \infty$

$$\begin{aligned} &\lim_{k \to \infty} A_k = A, \quad \lim_{k \to \infty} B_k = B, \quad \lim_{k \to \infty} C_k = C, \\ &\lim_{k \to \infty} \Sigma_k = \Sigma, \quad \lim_{k \to \infty} Q_k = Q, \lim_{k \to \infty} R_k = R > 0 \end{aligned} \tag{15}$$

oraz macierz A jest stabilna, para $(A,\sqrt{Q})$ jest obserwowalna, a para (A,B) jest sterowalna.

2. Asymptotyczne własności algebraicznego równania Riccatiego. W przyszłych rozważaniach wygodnie będzie się posługiwać funkcją $P_k^{(N)}(K)$ określoną wzorem

$$P_k^{(N)}(K)=P_{N-k}(K),\qquad k=0,\dots,N, \tag{16}$$

gdzie macierze $P_{N-k}(K)$ zadane są zależnościami rekurencyjnymi (4)–(6). Na mocy (4)–(6) i (16) spełnia ona zależność rekurencyjną:

$$\begin{gathered}P_k^{(N)}(K)=A'_{N-k}P_{k-1}^{(N)}(K)(A_{N-k}-B_{N-k}L_{N-k})+Q_{N-k},\\ k=1,\dots,N,\qquad P_0^{(N)}(K)=K,\end{gathered} \tag{17}$$

gdzie

$$L_{N-k}=(R_{N-k}+B'_{N-k}P_{k-1}^{(N)}(K)B_{N-k})^{-1}B_{N-k}P_{k-1}^{(N)}(K)A_{N-k} \tag{18}$$

lub łącząc (17) i (18) w jedno równanie

$$\begin{aligned}P_k^{(N)}(K)=A'_{N-k}&P_{k-1}^{(N)}(K)A_{N-k}\\ &-A'_{N-k}P_{k-1}^{(N)}(K)B_{N-k}(R_{N-k}+B'_{N-k}P_{k-1}^{(N)}(K)B_{N-k})^{-1}\\ &\times B_{N-k}P_{k-1}^{(N)}(K)A_{N-k}+Q_{N-k}.\end{aligned} \tag{19}$$

Następne twierdzenie charakteryzuje zachowanie $P_k^{(N)}$ gdy N dąży do nieskończoności.

TWIERDZENIE 4. *Załóżmy, że zachodzą równości* (15) *oraz, że macierz A jest stabilna, para (A,B) kest sterowalna i para $(A,\sqrt{Q})$ jest obserwowalna. Wówczas*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}P_k^{(N)}(K)=P, \tag{20}$$

gdzie $P_k^{(N)}(K)$ zadane jest zależnością (19), *a P jest jedynym symetrycznym dodatnio określonym rozwiązaniem równanie* (11).

Dowód. Do dowodu tego twierdzenia będzie nam potrzebny następujący lemat, którego dowód znajduje się w [2], str. 191.

LEMAT. *Jeżeli ciąg macierzy Ω_n jest zbieżny do macierzy stabilnej Ω, to istnieją stałe $0<\mu<1$ i $c>0$, takie, że dla dowolnych liczb naturalnych $i\ge 0$ i $k>i$ zachodzi nierówność*

$$\Big\|\prod_{j=0}^{k-i-1}\Omega_{k-j}\Big\|\le c\mu^{k-1}. \tag{21}$$

Wprowadźmy następujące oznaczenie

$$L(A,B,Q,R,P) = A'PA - A'PB(R+B'PB)^{-1}B'PA + Q. \tag{22}$$

Wykorzystując oznaczenie (22) równania (14) i (19) możemy zapisać w postaci

$$S_k(S_0) = L(A,B,Q,R,S_{k-1}(S_0)), \qquad k = 1,2,\ldots \tag{24}$$

i

$$P_k^{(N)}(K) = L(A_{N-k}, B_{N-k}, Q_{N-k}, R_{N-k}, P_{k-1}^{(N)}(K)), \qquad k = 1,\ldots,N. \tag{25}$$

Ustalmy $N > 0$. Wówczas z równania (19) mamy

$$P_k^{(N)}(K) \leq A'_{N-k}P_{k-1}^{(N)}(K)A_{N-k} + Q_{N-k}, \tag{26}$$

dla dowolnego $k = 1,\ldots,N$. Korzystając z oszacowań (21) i (26) możemy ciąg $P_k^{(N)}(K)$ ograniczyć jak następuje

$$\|P_k^{(N)}(K)\| \leq c(K), \tag{27}$$

gdzie $c(K)$ jest pewną stałą dodatnią. Podobnie można pokazać, że istnieje stała $c_1(K)$ taka, że

$$\|S_t(P_k^{(N)}(K))\| \leq c_1(K), \tag{28}$$

dla dowolnych k,l,N, $N \geq k \geq 1$. Na mocy równości (15) i nierówności (27) dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje N_0 takie, że dla wszystkich N,k takich, że $N-k \geq N_0$

$$\|\Delta L(N,k)\| \leq \varepsilon, \tag{29}$$

gdzie

$$\Delta L(N,k) = L(A,B,Q,R,P_k^{(N)}(K)) - L(A_{N-k}, B_{N-k}, Q_{N-k}, R_{N-k}, P_k^{(N)}(K)).$$

Dalej nietrudno zauważyć, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\varrho > 0$ takie że dla dowolnych macierzy symetrycznych nieujemnie określonych U,V takich, że $\|U\| < c_1(K)$ i $\|V\| < \varepsilon$ mamy

$$\|W(U,V)\| < \varrho\varepsilon, \tag{30}$$

gdzie $W(U,V) = L(A,B,Q,R,U+V) - L(A,B,Q,R,U)$.

Pokażemy teraz, że dla dowolnych $\varepsilon > 0$ i k istnieje stała $c(k)$ taka, że dla dowolnych $l,N,N-k-l \geq N_0$ (N_0 jest stałą o jakiej mowa w nierówności (29)) mamy

$$\|Z(N,k,l)\| \leq c(k,\varepsilon), \tag{31}$$

gdzie $Z(N,k,l) = P_{k+1}^{(N)}(K) - S_k(P_1^{(N)}(K))$. Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem k. Z (29) wynika prawdziwość (31) dla $k = 1$

($c(1)=1$). Załóżmy, że dla pewnego k istnieje stała $c(k)$ taka, że nierówność (31) zachodzi dla wszystkich $l, N, N-k-l \geq N_0$. Na mocy (29) mamy wówczas

$$
\begin{aligned}
(32)\quad & P_{k+1+l}^{(N)}(K) \\
& = L(A_{N-k-l-1}, B_{N-k-l-1}, Q_{N-k-l-1}, R_{N-k-l-1}, P_{k+1}^{(N)}(K)) \\
& = L(A,B,Q,E,P_{k+1}^{(N)}(K)) - L(N,k+l),
\end{aligned}
$$

oraz

$$(33)\qquad \|\Delta(N,k+l)\| < \varepsilon,$$

dla dowolnych l, N, $N-k-1-l \geq N_0$. Dalej na mocy założenia indukcyjnego (30) i (32) mamy

$$
\begin{aligned}
(34)\quad & P_{k+1+l}^{(N)}(K) \\
& = L(A,B,Q,R,S_k(P_l^{(N)}(K)) + Z(N,k,l)) - \Delta(N,k+l) \\
& = S_{k+1}(P_l^N(K)) + W(S_k(P_l^N(K)), Z(N,k,l)) - \Delta(N,k+l) \\
& = S_{k+1}(P_l^N(K)) + Z(N,k+1,l),
\end{aligned}
$$

gdzie $Z(N,k+1,l) = W(S_k(P_l^N(K)), Z(N,k,l)) - \Delta(N,k+l)$ i
$\|Z(N,k+1,l)\| \leq \|W(S_k(P_l^N(K)), Z(N,l,l))\| + \|\Delta(N,k+l)\| \leq c(k+1)\varepsilon$,
dla $c(k+1) = \varrho c(k) + 1$. Dowód indukcyjny jest tym samym zakończony. Ustalmy dowolnie $\delta > 0$. Na mocy twierdzenia 2, istnieje k_0, takie, że

$$(35)\qquad \|S_k(S_0) - P\| < \frac{\delta}{2},$$

dla $k \geq k_0$ i $\|S_0\| < c_1(K)$. Dla $\varepsilon = \frac{\delta}{2c(k_0)}$ wybierzmy zgodnie z (29) stałą N_0. Wówczas dla dowolnych $k, N, N-k \geq N_0 + k_0$ z (31) i (35) otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
(36)\quad & \|P_{k+k_0}^{(N)}(K) - P\| \\
& \leq \|P_{k+k_0}^{(N)}(K) - S_{k_0}(P_k^{(N)}(K))\| + \|S_{k_0}(P_k^{(N)}(K)) - P\| \leq \delta.
\end{aligned}
$$

Na mocy (27) mamy

$$
\begin{aligned}
(37)\quad & \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \|P_k^{(N)}(K) - P\| \\
& \leq \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=N-N_0+1}^{N} \|P_k^{(N)}(K) - P\| \\
& = \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=k_0+1}^{N-N_0} \|P_k^{(N)}(K) - P\|
\end{aligned}
$$

ale z (36) wynika, że

$$\lim_{N\to\infty}\sup \frac{1}{N}\sum_{k=k_0+1}^{N-N_0}\|P_k^{(N)}(K)-P\| \le \lim_{N\to\infty}\sup \frac{N-N_0-k_0}{N}\delta=\delta, \tag{38}$$

co wobec dowolności δ kończy dowód twierdzenia.

W dalszych rozważaniach potrzebne nam będzie następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 5. *Załóżmy, że zachodzą równości* (15), $B_k = 0$, $k = 1,2,\ldots$ *oraz, że macierz A jest stabilna. Wówczas*

$$\lim_{N\to\infty} \overline{P}_N = \overline{P}, \tag{39}$$

gdzie $\overline{P}_N$ zadane jest zależnością rekurencyjną

$$\overline{P}_{N+1} = A'_N\overline{P}_N A_N + \Sigma_N, \tag{40}$$

z warunkiem początkowym $\overline{P}_0$, a $\overline{P}$ jest jedynym symetrycznym dodatnio określonym rozwiązaniem równania

$$\overline{P} = A'\overline{P}A + \Sigma. \tag{41}$$

D o w ó d. Jeżeli A jest macierzą stabilną, to równanie (1) ma istotnie dokładnie jedno rozwiązanie nieujemnie określone $\overline{P}$ dla każdej macierzy symetrycznej nieujemnie określonej Σ; [4], str. 339. Z lematu, w ten sam sposób jak w dowodzie twierdzenia 4, ze stabilności macierzy A wynika ograniczoność ciągu P_N. Odejmując równania (40) i (41) oraz wykorzystując ograniczoność ciągów P_N i A_N otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \|\overline{P}_{N+1}-\overline{P}\| &\le \|A'_N\overline{P}_N A_N - A'\overline{P}A\| + \|\Sigma_N-\Sigma\| \\ &\le c\|A_N-A\| + \|\Sigma_N-\Sigma\|. \end{aligned} \tag{42}$$

Z nierówności (42) teza twierdzenia wynika w sposób oczywisty.

3. Główny rezultat. Główny wynik tej pracy zawarty jest w następującym twierdzeniu.

TWIERDZENIE 6. *Załóżmy, że zachodzą równości* (15) *oraz, że macierz A jest stabilna, para (A,B) jest sterowalna i para $(A,\sqrt{Q})$ jest wykrywalna. Wówczas sterowaniem optymalnym w układzie* (1) *z funkcjonałem kosztów* (10) *jest sterowanie w postaci liniowego sprzężenia zwrotnego*

$$\widetilde{u}_k = -(R+B'PB)^{-1}B'PAx_k, \qquad k=1,2,\ldots, \tag{43}$$

a minimalna wartość funkcjonału kosztów (10) *wynosi*

$$J(x_0,\widetilde{u}) = \mathrm{tr}(C\Sigma CP).$$

D o w ó d. Na mocy równości (7) i (8) w twierdzeniu 1, równości (15) oraz twierdzenia 4 otrzymujemy, że dla dowolnego sterowania u jest:

$$(44)\quad J(x_0,u) \geq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\Big(\langle P_N^{(N)}(0)x_0, x_0\rangle + \sum_{k=0}^{N-1} tr(C_{N-k}C'_{N-k}P_k^{(N)})\Big) \\ = \mathrm{tr}(C\Sigma C'P),$$

gdyż jak wykazaliśmy w dowodzie twierdzenia 3 ciąg $P_k^{(N)}$ jest jednostajnie ograniczony. Nierówność (44) pokazuje, że funkcjonał kosztów (10) nie może przyjmować wartości mniejszych niż $tr(C\Sigma CP)$. Pokażemy teraz, że dla sterowania określonego wzorem (43) funkcjonał kosztów przyjmuje tą wartość. Dowód twierdzenia będzie tym samym zakończony. Niech $\widetilde{x}$ będzie rozwiązaniem równania (1) odpowiadającym sterowaniu $\widetilde{u}$. Z równania (1) oraz z faktu, że zmienne losowe $\widetilde{x}_k$ i w_k są nieskorelowane, wynika, że macierz $\overline{P}_k = \overline{x}_k\overline{x}'_k$ spełnia równanie rekurencyjne

$$(45)\qquad \overline{P}_{k+1} = (A_k - B_kL)\overline{P}_k(A_k - B_kL)' + C_k\Sigma_kC'_k,$$

gdzie $L = -(R + B'PB)^{-1}B'PA$. Na mocy równości (15) jest

$$(46)\qquad \lim_{k\to\infty}(A_k - B_kL) = A - BL$$

i na mocy twierdzenia 2 macierz $A - BL$ jest stabilna. Zatem na podstawie twierdzenia 5 wynika stąd, że

$$(47)\qquad \lim_{k\to\infty} \overline{P}_k = \overline{P},$$

gdzie $\overline{P}$ jest jedynym nieujemnie określonym rozwiązaniem równania

$$(48)\qquad \overline{P} = (A - BL)\overline{P}(A - BL)' + C\Sigma C'.$$

Obliczymy teraz wartość funkcjonału kosztów odpowiadającą sterowaniu $\widetilde{u}$. Mamy, na podstawie (15) i (47):

$$(49)\quad J(x_0,\widetilde{u}) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}E\sum_{k=0}^{N-1}\langle (Q_k + L'R_kL)x_k, x_k\rangle \\ = \mathrm{tr}(\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(Q_k + L'R_kL)\overline{P}_k) = \mathrm{tr}((Q + L'RL)\overline{P}).$$

Zauważmy dalej, że równanie (11) możemy zapisać w postaci

$$(50)\qquad P = (A - BL)'P(A - BL) + L'RL + Q,$$

zatem

$$(51)\qquad L'RL + Q = P - (A - BL)'P(A - BL)$$

Przekształcając prawą stronę (49) i wykorzystując (51) i (48) mamy kolejno

$$
\begin{aligned}
(52)\quad \operatorname{tr}((Q + L'RL)\overline{P}) &= \operatorname{tr}((P - (A - BL)'P(A - BL))\overline{P}) \\
&= \operatorname{tr}(P\overline{P}) - \operatorname{tr}(A - BL)'\overline{P}(A - BL)) \\
&= \operatorname{tr}(P(\overline{P} - (A - BL)'P(A - BL))) = \operatorname{tr}(C\Sigma C'P).
\end{aligned}
$$

Równość (52) kończy dowód twierdzenia.

4. Zakończenie. W pracy znaleziono sterowanie optymalne na nieskończonym przedziale czasowym dla klasy liniowych układów stochastycznych niestacjonarnych z kwadratowym funkcjonałem kosztów. W rozpatrywanych układach sterowania współczynniki równania, funkcjonału kosztów, jak i macierz kowariancji zakłóceń są zmienne w czasie, ale posiadają granicę, gdy czas dąży do nieskończoności. Udowodniono, że dla takiej klasy układów sterowanie optymalne można zrealizować w postaci liniowego i stacjonarnego sprzężenia zwrotnego z macierzą wzmocnienia taką samą jak dla układu stacjonarnego o parametrach równych granicom odpowiednich parametrów układu niestacjonarnego.

Literatura

[1] A. Bagchi, *Optimal control of stochastic systems*, Prentice Hall, 1993.

[2] H. F. Chen, *Recursive Estimation and Control for Stochastic Systems*, John Wiley & Sons, New Jork 1985.

[3] H. F. Chen i L. Guo, *Identification and Stochastic Adaptive Control*, Birkhauser, Boston 1991.

[4] W. M. Wonham, *Linear multivariable control; a geometric approach*, Springer-Verlag, New York 1979.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
INSTYTUT MATEMATYKI
44-100 GLIWICE
UL. KASZUBSKA 23
E-MAIL: ADAMCZOR@ZEUS.POLSL.GLIWICE.PL