ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria III: MATEMATYKA STOSOWANA XXXVI (1993)

Krzysztof Wisiński

Szczecin

Losowe rozbicie odcinka

(Praca wpłynęła do Redakcji 7.07.1992)

Rozważmy podział odcinka $[0, t]$ dokonany przez $n \geq 1$ losowo i niezależnie wybranych punktów z tego odcinka. Niech kolejne długości pododcinków tego podziału wynoszą $L_1, \ldots, L_{n+1}$. Ponieważ $L_{n+1} = t - L_1 - \ldots - L_n$, zatem długości $L_1, \ldots, L_n$ wyznaczają długość L_{n+1}. Zbiorem zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego jest zbiór Ω postaci:

$$\Omega = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n;\ x_1 + \ldots + x_n \leq t\}.$$

Trójka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie $\mathcal{F}$ jest σ-algebrą podzbiorów zbioru Ω mierzalnych w sensie Lebesgue'a, zaś P prawdopodobieństwem geometrycznym jest przestrzenią prawdopodobieństwa utworzoną dla opisu tego doświadczenia. Wiadomo, że rozkład $(L_1, \ldots, L_n)$ jest rozkładem jednostajnym na zbiorze Ω (zob. [3], str. 76).

Przez indukcję otrzymujemy

$$(1) \qquad m(\Omega) = \int\limits_{\Omega} dx_1 \ldots dx_n = \frac{t^n}{n!} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Niech

$$(2) \quad A = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \geq a_i,\ i = 1, \ldots, n;\ x_1 + \ldots + x_n \leq t - a_{n+1}\},$$

gdzie $a_1, \ldots, a_{n+1}$ są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $a_1 + \ldots + a_{n+1} < t$. Wówczas

$$(3) \qquad P(\{L_1 \geq a_1, \ldots, L_{n+1} \geq a_{n+1}\}) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

Niech teraz

$$(4) \qquad \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \varphi(x_1, \ldots, x_n) = (\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n)),$$

gdzie

(5) $$\varphi_i(x_i) = y_i = x_i - a_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Obrazem zbioru A w przekształceniu φ jest zbiór

(6) $$\varphi(A) = \{(y_1, \ldots, y_n) : y_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n;\ y_1 + \ldots + y_n \leq t - a_1 - \ldots - a_{n+1}\}.$$

Ponieważ jakobian przekształcenia φ jest równy 1, zatem

(7) $$m(A) = m(\varphi(A)).$$

Analogicznie do (1) mamy

(8) $$m(\varphi(A)) = \frac{1}{n!}(t - a_1 - \ldots - a_{n+1})^n.$$

Z (3), (1), (7) oraz (8) otrzymujemy, że

$$P(\{L_1 \geq a_1, \ldots, L_{n+1} \geq a_{n+1}\}) = t^{-n}(t - a_1 - \ldots - a_{n+1})^n.$$

We wzorze tym nierówności nieostre można zastąpić ostrymi. Jeżeli przyjmiemy konwencję $x_+ = \frac{|x|+x}{2}$ oraz $x_+^n = (x_+)^n$, wówczas dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_{n+1}$

(9) $$P(\{L_1 > a_1, \ldots, L_{n+1} > a_{n+1}\}) = t^{-n}(t - a_1 - \ldots - a_{n+1})_+^n.$$

Powyższy wynik został otrzymany przez B. de Finettiego [4].

Z (9) można obliczyć prawdopodobieństwo, że odcinki $L_1, \ldots, L_{n+1}$ są mniejsze odpowiednio od $a_1, \ldots, a_{n+1}$. Mianowicie,

$$P(\{L_1 < a_1, \ldots, L_{n+1} < a_{n+1}\}) = 1 - P(\{L_1 > a_1\} \cup \ldots \cup \{L_{n+1} > a_{n+1}\}).$$

W celu obliczenia prawdopodobieństwa sumy zdarzeń występującego w tej równości można zastosować wzór na prawdopodobieństwo zajścia sumy n zdarzeń (zob. np. [2], str. 90). W przypadku, gdy $a_1 = \ldots = a_{n+1} = a$, otrzymujemy tzw. twierdzenie o pokryciu uzyskane przez W. L. Stevensa [5] (por. [1], str. 262, [3], str. 33).

Niech

$$P(\{L_1 > a_1, \ldots, L_{n+1} > a_{n+1}\}) = F(t; a_1, \ldots, a_{n+1}),$$
$$P(\{L_1 < b_1, \ldots, L_{n+1} < b_{n+1}\}) = G(t; b_1, \ldots, b_{n+1}).$$

Udowodnimy teraz twierdzenie będące uogólnieniem przedstawionych wyżej wyników.

TWIERDZENIE. *Niech $L_1, \ldots, L_{n+1}$ będą długościami pododcinków powstałych z rozbicia odcinka $[0, t]$ przez n losowo i niezależnie wybranych punktów z tego odcinka. Dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych $a_1 \ldots, a_{n+1}$, $b_1, \ldots, b_{n+1}$ takich, że $a_i < b_i$, $i = 1, \ldots, n+1$ oraz*

$a_1 + \ldots + a_{n+1} < t$ *jest*

$$P(\{a_1 < L_1 < b_1, \ldots, a_{n+1} < L_{n+1} < b_{n+1}\})$$
$$= F(t; a_1, \ldots, a_{n+1}) G(t - a_1 \ldots - a_{n+1};\ b_1 - a_1, \ldots, b_{n+1} - a_{n+1})\,.$$

D o w ó d. Niech zbiór A określony będzie przez (2) i niech

$$B = \{(x_1, \ldots, x_n) : 0 \le x_i < b_i,\ i = 1, \ldots, n;\ t - b_{n+1} < x_1 + \ldots + x_n \le t\}\,.$$

Wówczas

$$A \cap B = \{(x_1, \ldots, x_n) : a_i \le x_i < b_i,\ i = 1, \ldots, n;$$
$$t - b_{n+1} < x_1 + \ldots + x_n \le t - a_{n+1}\}\,.$$

Zbiory A, B, $A \cap B$ reprezentują odpowiednio zdarzenia: $\{L_1 \ge a_1, \ldots, L_{n+1} \ge a_{n+1}\}$, $\{L_1 < b_1, \ldots, L_{n+1} < b_{n+1}\}$, $\{a_1 \le L_1 < b_1, \ldots, a_{n+1} \le L_{n+1} < b_{n+1}\}$. Ponieważ miary zbiorów, które odpowiadają zdarzeniom $\{a_1 < L_1 < b_1, \ldots, a_{n+1} < L_{n+1} < b_{n+1}\}$ i $\{a_1 \le L_1 < b_1, \ldots, a_{n+1} \le L_{n+1} < b_{n+1}\}$ są takie same, możemy napisać

$$(10) \qquad P(A \cap B) = P(\{a_1 < L_1 < b_1, \ldots, a_{n+1} < L_{n+1} < b_{n+1}\})\,.$$

W przekształceniu φ danym przez (4) i (5) obrazem zbioru A jest zbiór $\varphi(A)$ określony przez (6), natomiast obrazem zbioru $A \cap B$ jest zbiór

$$\varphi(A \cap B) = \{(y_1, \ldots, y_n) : 0 \le y_i < b_i - a_i,\ i = 1, \ldots, n;$$
$$t - a_1 - \ldots - a_n - b_{n+1} < y_1 + \ldots + y_n \le t - a_1 - \ldots - a_{n+1}\}\,.$$

Z kolei

$$(11) \qquad P(A \cap B) = \frac{m(A \cap B)}{m(\Omega)} = \frac{m(A)}{m(\Omega)} \cdot \frac{m(A \cap B)}{m(A)}$$
$$= P(A)\frac{m(A \cap B)}{m(A)} = F(t; a_1, \ldots, a_{n+1})\frac{m(A \cap B)}{m(A)}\,.$$

Ponieważ jakobian przekształcenia φ jest równy 1, tak więc

$$(12) \qquad \frac{m(A \cap B)}{m(A)} = \frac{m(\varphi(A \cap B))}{m(\varphi(A))}\,.$$

Zauważmy, że zbiór $\varphi(A)$ jest zbiorem zdarzeń elementarnych losowego rozbicia odcinka o długości $t^* = t - a_1 - \ldots - a_{n+1}$ na $n + 1$ pododcinków o kolejnych długościach $L_1^*, \ldots, L_{n+1}^*$, natomiast zbiór $\varphi(A \cap B)$ reprezentuje zdarzenie $\{L_1^* < b_1 - a_1, \ldots, L_{n+1}^* < b_{n+1} - a_{n+1}\}$. Mamy więc,

$$(13) \qquad \frac{m(\varphi(A \cap B))}{m(\varphi(A))} = G(t - a_1 - \ldots - a_{n+1};\ b_1 - a_1, \ldots, b_{n+1} - a_{n+1})\,.$$

Z (10), (11), (12) oraz (13) otrzymujemy, że

$$P(\{a_1 < L_1 < b_1, \ldots, a_{n+1} < L_{n+1} < b_{n+1}\})$$
$$= F(t; a_1, \ldots, a_{n+1}) G(t - a_1 - \ldots - a_{n+1};\ b_1 - a_1, \ldots, b_{n+1} - a_{n+1})\,.$$

Pragnę serdecznie podziękować Profesorowi R. Zielińskiemu za cenne uwagi.

Prace cytowane

[1] P. Billingsley, *Prawdopodobieństwo i miara*, PWN, Warszawa 1987.
[2] W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa* t. I, PWN, Warszawa 1977.
[3] W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa* t. II, PWN, Warszawa 1978.
[4] B. de Finetti, *Alcune osservazioni in tema di "suddivisione casuale"*, Giornale Instituto Italiano degli Attuari, vol. 27 (1964), str. 151–173.
[5] W. L. Stevens, *Solution to a geometrical problem in probability*, Ann. Eugenics, vol. 2 (1939), str. 315–320.

Random division of interval.

Let $L_1, = \ldots L_{n+1}$ be the lenghts of subintervals created by division of the interval $[0, t]$ by n randomly and independently selected points of this interval.

B. de Finetti in his paper (1964) proved that

$$F(t; a_1, \ldots, a_{n+1}) = P(\{L_1 > a_1, \ldots, L_{n+1} > a_{n+1}\}) = t^{-n}(t - a_1 - \ldots - a_{n+1})^n,$$

where $a_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n+1$ and $a_1 + \ldots + a_{n+1} < t$. Let

$$G(t; a_1, \ldots, a_{n+1} = P(\{L_1 < a_1, \ldots, L_{n+1} < a_{n+1}\}).$$

In the paper we prove that

$$\begin{aligned} &P(\{a_1 < L_1 < b_1, \ldots, a_{n+1} < L_{n+1} < b_{n+1}\}) \\ &\qquad = F(t; a_1, \ldots, a_{n+1}) G(t - a_1 - \ldots - a_{n+1}; b_1 - a_1, \ldots, b_{n+1} - a_{n+1}), \end{aligned}$$

where $0 \leq a_i < b_i$, $i = 1, \ldots, n+1$ and $a_1 + \ldots + a_{n+1} < t$.

UL. CHOPINA 51
71-450 SZCZECIN
POLSKA