ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria III: MATEMATYKA STOSOWANA XXXV (1992)

W. Krysicki

Łódź

O wartościach modalnych mieszaniny dwóch rozkładów Laplace'a

(*Praca wpłynęła do Redakcji 1.02.1991*)

Streszczenie. W pracy podano warunki przy których mieszanina postaci (1.1), z pięcioma danymi parametrami m_1, m_2, a_1, a_2, p ($m_1, m_2 \in R$, $a_1, a_2 > 0$, $0 < p < 1$, $p + q = 1$) ma jedną wartość modalną albo więcej i ile ich.

1. Rozważania wstępne Prace dotyczące jedno-, dwu- albo amodalności mieszaniny dwóch rozkładów typu ciągłego — w odróżnieniu od tegoż zagadnienia dla jednego rozkładu (3) — pojawiły się stosunkowo niedawno (2, 4, 5).

W pracy [3] podano warunki jedno- i dwumodalności dla mieszaniny dwóch trójparametrowych rozkładów postaci

$$f(x) = \sum_{i=1}^{2} p_i c_i (x-\alpha)^{\beta-1} \exp[-(x-\alpha)^2/\gamma_i], \qquad x \geq \alpha,$$

gdy $p_i > 0$, $p_1 + p_2 = 1$, $\alpha \in R$, $\beta > 1$, $\gamma_i > 0$, C_i czynniki normujące, $i = 1, 2$. Szczególnymi przypadkami są tutaj: mieszaniny dwóch rozkładów 1) Rayleigh'a ($\alpha = 0$, $\beta = 2$) oraz 2) Maxwell'a ($\alpha = 0$, $\beta = 3$).

W pracy [6] dla mieszaniny postaci

$$y(x) = \sum_{i=1}^{2} p_i \frac{\alpha}{a_i^{\beta/\alpha}/\Gamma(\frac{\beta}{\alpha})} x^{\beta-1} \exp\left(-\frac{x^\alpha}{a}\right), \qquad x \geq 0,$$

przy $p_i > 0$, $p_1 + p_2 = 1$, $a_i > 0$, $\alpha, \beta > 0$, $i = 1, 2$ podano warunki konieczne i wystarczające jedno-, dwu- i amodalności (tw. 3.1, 3.2, 3.3).

W monografii [1] (§23. Laplace Distribution) w cytowanej tam pracy (5) — prócz tematyki zawartej w tytule — sformułowano warunki (twierdzenia

2,3,4), przy których mieszanina dwóch rozkładów Laplace'a postaci (1.1) jest jedno- albo dwumodalna w postaci nierówności $f_1(\theta) < p < f_2(\theta)$, gdzie $\theta = \{m_1, m_2, a_1, a_2\}$, $m_1 \neq m_2$, $a_1, a_2 > 0$. W niniejszej pracy — stosując przekształcenie (2.3) — zredukowano liczbę pięciu parametrów do trzech m, a, d określonych przez (2.2), dzięki czemu warunki jedno- albo dwumodalności uprościły się.

Rozważmy gęstość mieszaniny dwóch rozkładów Laplace'a postaci

$$f(x \mid \theta) = \frac{p}{2a_1}\exp\left[-\frac{|x-m_1|}{a_1}\right] + \frac{q}{2a_2}\exp\left[-\frac{|x-m_2|}{a_2}\right] \tag{1.1}$$

$\theta = \{p, m_1, m_2, a_1, a_2\}$, $a_1, a_2 > 0$, $m_1, m_2 \in R$, $0 < p < 1$, $p + q = 1$.

W punktach $x = m_1$, $x = m_2$ gęstość (1.1) nie jest różniczkowalna Gdy $m_1 = m_2$ gęstość ta jest jednomodalna, ale nie jest to jedyna możliwość jednomodalności gęstości (1.1), patrz (3.).

2. Redukcja liczby parametrów Przy założeniu $m_1 < m_2$ — nie ograniczającym ogólności rozważań — w miejsce parametrów m_1, m_2, a_1, a_2 wprowadzimy trzy m, d, b określone następująco

$$m = (m_1 + m_2)/2, \qquad d = (m_2 - m_1)/2\sqrt{a_1 a_2}, \qquad a = a_1/a_2, \tag{2.1}$$

a następnie zastosujemy przekształcenie

$$z = (x - m)/\sqrt{a_1 a_2}. \tag{2.2}$$

W rezultacie zamiast (1.1) otrzymamy gęstość postaci

$$g(z|\theta_1) = \frac{p}{2\sqrt{a}}\exp\left[-\frac{|z+d|}{\sqrt{a}}\right] + \frac{q\sqrt{a}}{2}\exp\left[-\sqrt{a}|z-d|\right], \tag{2.3}$$

gdzie $\theta_1 = \{p, a, d\}$, $a, d > 0$, $0 < p < 1$, $p + q = 1$.

Ponieważ przekształcenie (2.2) jest liniowe, więc liczba wartości modalnych gęstości (2.3) i (1.1) jest taka sama.

3. Badanie przebiegu zmienności gęstości (2.3) Gęstość (2.3) ma — tak jak gęstość (1.1) — dwa punkty nieróżniczkowalności gdy $d \neq 0$: są nimi $z = -d$, $z = d$, zbadamy więc przebieg jej zmienności w każdym z trzech przedziałów: i) $(-\infty, -d)$, ii) (d, ∞), iii) $(-d, d)$.

i) z postaci (2.3) bezpośrednio wnioskujemy, że oba składniki rosną więc gęstość (2.3) w tym przedziale nie posiada wartości modalnej.

ii) w tym przypadku również bezpośrednio z postaci (2.3) wnioskujemy, że oba składniki maleją, więc i w tym przedziale gęstość (2.3) nie posiada wartości modalnej.

iii) wobec $-d < z < d$ pochodną jest

$$g'(z \mid a, d, p) = \frac{-p}{2a}\exp\left(-\frac{z+d}{\sqrt{a}}\right) + \frac{qa}{2}\exp\left[\sqrt{a}(z-d)\right]. \tag{3.1}$$

Rozwiązanie nierówności $g'(z \mid a, d, p) \geq 0$ — po przekształceniu prawej strony (3.1) — prowadzi do nierówności

$$-\frac{1}{\sqrt{a}}[(1+a)z + (1-a)d] \leq \ln\frac{qa^2}{p},$$

skąd

$$z \geq \frac{-\sqrt{a}\ln\frac{qa^2}{p} - (1-a)d}{1+a} = z_0 \tag{3.2}$$

Aby z_0 zależne od d spełniało nierówność iii) winno być

$$-d < \frac{-\sqrt{a}\ln\frac{qa^2}{p} - (1-a)d}{1+a} < d. \tag{3.3}$$

Rozwiązanie tej podwójnej nierówności prowadzi do łącznego spełnienia nierówności

$$\begin{cases} d > \frac{1}{2\sqrt{a}}\ln\frac{qa^2}{p} \\ d > -\frac{\sqrt{a}}{2}\ln\frac{qa^2}{p}, \end{cases} \tag{3.4}$$

skąd

A) jeżeli $\frac{qa^2}{p} > 1$, to winno być $d > \frac{1}{2\sqrt{a}}\ln\frac{qa^2}{p}$

B) jeżeli $\frac{qa^2}{p} < 1$, to winno być $d > \frac{\sqrt{a}}{2}\ln\frac{p}{qa^2}$.

Tak więc zarówno w przypadku A) jak i w B) funkcja (2.3) maleje w przedziale $(-d, z_0)$, osiąga minimum w punkcie z_0 i rośnie w przedziale (z_0, d), tzn. że w przedziale $(-d, d)$ wartości modalnej nie posiada, więc w obu przypadkach A,B gęstość mieszaniny (2.3) posiada dwie wartości modalne w punktach $y = -d$ oraz $y = d$.

W granicznym przypadku dla A i B gdy $\frac{qa^2}{p} = 1$ spełnienie nierówności (3.4) prowadzi do warunku $d > 0$.

Pozostają do rozważenia przypadki

C) $\frac{qa^2}{p} > 1$, $0 < d < \frac{1}{2\sqrt{a}}\ln\frac{qa^2}{p}$

D) $0 < \frac{qa^2}{p} < 1$, $0 < a < \frac{\sqrt{a}}{2}\ln\frac{p}{qa^2}$.

W każdym z tych przypadków w przedziale $(-d, d)$ pochodna (3.1) gęstości mieszaniny (2.3) jest dodatnia, więc funkcja (2.3) rośnie — a wobec 3i — rośnie w przedziale $(-\infty, d)$; uwzględniając 3ii wnioskujemy, że w przypadkach C,D gęstość (2.3) ma jedną wartość modalną $y = d$.

W przypadku A granicznym gdy $d = \frac{1}{2\sqrt{a}}\ln\frac{qa^2}{p} \neq 0$ ze wzoru (3.2) otrzymujemy $z_0 = -d$, więc zgodnie z nierównością (3.2) dla $z > z_0 = -d$ w przedziale $(-d, d)$ funkcja (2.3) jest rosnąca a prawostronna pochodna (3.1) w punkcie z_0 jest równa zeru. Ponieważ wiemy już z 3i, że w przedziale $(-\infty, -d)$ funkcja $g(\cdot)$ jest również rosnąca i jest ciągła dla $z \in R$, więc funkcja $g(\cdot)$ — jako rosnąca w przedziale $(-\infty, d)$ — wartości modalnej w nim nie posiada. Jedyną wartością modalną mieszaniny (2.3) jest wówczas $z = \frac{1}{2\sqrt{a}} \ln \frac{qa^2}{p} = d > 0$, a mieszaniny (1.1) $x = \sqrt{a_1 a_2} z + (m_1 + m_2)/2 = m_2$.

W przypadku B granicznym — gdy $d = \frac{\sqrt{a}}{2} \ln \frac{p}{qa^2} > 0$ — określone wzorem (3.2) $z_0 = d$, więc zgodnie z nierównością (3.2) dla $z < z_0 = d$ w całym przedziale $(-d, d)$ funkcja $g(\cdot)$ jest malejąca, a lewostronna pochodna (3.1) w punkcie z_0 jest równa zeru, uwzględniając 3ii wnioskujemy, że funkcja (2.3) jest malejąca w przedziale $(-d, \infty)$, więc w tym przedziale nie posiada wartości modalnej. Wobec powyższego i punktu 3i jedyną wartością modalną mieszaniny (2.3) jest $z = -\frac{\sqrt{a}}{2} \ln \frac{p}{qa^2} < 0$, a mieszaniny (1.1) $x = \sqrt{a_1 a_2} z + (m_1 + m_2)/2 = m_1$.

4. Zestawienie wyników

	Wartości parametrów	Liczba wartości modalnych (2.3)
I	$d = 0$	jedna $z = 0$
IIi.	$d > 0, 0 < \frac{qa^2}{p} < 1$	
1)	$0 < d \leq -\frac{\sqrt{a}}{2} \ln \frac{qa^2}{p}$	jedna: $z = -d$
2)	$d > -\frac{\sqrt{a}}{2} \ln \frac{qa^2}{p}$	dwie: $z = -d, z = d$
IIii.	$d > 0, \frac{qa^2}{p} = 1$	dwie: $z = -d, z = d$
IIiii.	$d > 0, \frac{qa^2}{p} > 1$	
1)	$0 < d \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} \ln \frac{qa^2}{p}$	jedna: $z = d$
2)	$d > \frac{1}{2\sqrt{a}} \ln \frac{qa^2}{p}$	dwie: $z = -d, z = d$

Literatura

1) N.L. Johnson and S. Kotz Continuous Univariate Distributions 1–2 Wiley, 1970, New York.
2) J. Behboodian *On the Modes of Two Normal Distributions.* Technometrics. V. 12, No. 1, 1970, p. 130–139.
3) W. Krysicki *Ueber Bedingungen, unter welchen die Mischung zweier Verteilungen eine ein- oder zweigipflige Verteilung ergibt.* Wissenschaftliche Zeitschrift Humboldt — Univ. XVI-1, 1967, 41–42.
4) J. Eisenberger *Genesis of Bimodal Distributions.* Technometrics V.6, 1964, p. 357–364.
5) E. Kącki, W. Krysicki *Die Parameterschaetzung einer Mischung von zwei Laplaceschen Verteilungen.* Commentationes Mathematicae XI, 1, 23–31, 1967.
6) M. Wasilewski *Sur certaines propriétés de la distribution gamma généralisée.* Revue de Statistique Appliquée. Vol. XV, 1967, 95–105.