ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria III: MATEMATYKA STOSOWANA XXXII (1989)

MICHAŁ H. RUDOWSKI

Warszawa

Odległość punktów w przestrzeniach z metrykami n-foremnymi

(*Praca wpłynęła do Redakcji 1986.10.31*)

W pracy wskazano na pewne własności metryk n-foremnych i ich funkcji kierunkowych. Wyprowadzono wzory na minimalne i średnie wartości funkcji kierunkowych, maksymalne i średnie zwiększenie odległości w przestrzeni z metryką n-foremną w stosunku do metryki euklidesowej oraz na odległość punktów w metryce n-foremnej w funkcji współrzędnych prostokątnych punktów na płaszczyźnie. Wskazano także możliwości zastosowania metryk n-foremnych.

1. Wstęp. W pewnych dziedzinach techniki, na przykład w projektowaniu połączeń na pakietach drukowanych i w układach scalonych lub w budownictwie (różnego typu instalacje), występuje konieczność wykonywania połączeń, które mogą być prowadzone tylko w kilku określonych kierunkach. W takich przypadkach dogodnym narzędziem do wyznaczania najkrótszego połączenia są metryki n-kierunkowe oraz n-foremne. Długość jednostkowa dla każdego kierunku jest określona przez funkcję kierunkową. Na podstawie analizy funkcji kierunkowej można określić maksymalny i średni stopień zwiększenia odległości w danej metryce n-foremnej w stosunku do metryki euklidesowej. Definicje podstawowych pojęć przedstawiono w rozdziale 2.

W rozdziale 3 wskazano na pewne własności metryk n-foremnych i ich funkcji kierunkowych, wyprowadzono wzory na minimalne i średnie wartości funkcji kierunkowych metryk n-foremnych, odległość punktów w dowolnej metryce n-foremnej oraz na maksymalny i średni stopień zwiększenia odległości w metryce n-foremnej w stosunku do metryki euklidesowej. Na podstawie analizy funkcji kierunkowej w rozdziale 4 wyprowadzono wzory na odległość punktów w zależności bezpośrednio od współrzędnych kartezjańskich zadanych punktów i liczby kierunków dopuszczalnych n. Pokazano graficzną interpretację tych wzorów.

Przykład zastosowania metryk n-foremnych wskazano w rozdziale 5.

2. Definicje podstawowych pojęć. Odległość pary punktów w przestrzeni metrycznej jest określana poprzez metrykę przestrzeni. W pracy zajmować się będziemy pewną klasą metryk na płaszczyźnie — metrykami n-foremnymi, które są podzbiorem metryk Minkowskiego [1].

Niech będzie dany na płaszczyźnie obszar K — wypukły, domknięty, zawierający punkt $o = (0, 0)$ i symetryczny względem tego punktu. Dla danych punktów p i q zawsze istnieje na brzegu obszaru K taki punkt r, że wektor $r-o$ jest kolinearny z wektorem $p-q$.

DEFINICJA 1. *Metryką Minkowskiego* nazywamy funkcję $\varrho(p, q)$, która jest określona wzorem:

$$\varrho(p, q) = \frac{\varrho_e(p, q)}{\varrho_e(r, o)},$$

gdzie ϱ_e oznacza odległość pary punktów w sensie euklidesowym.

DEFINICJA 2. *Kulą* (*domkniętą*) o promieniu λ i środku w punkcie s nazywamy zbiór wszystkich punktów p spełniających warunek $\varrho(p, s) \leqslant \lambda$.

Zgodnie z definicją 1 i definicją 2 zbiór K z definicji metryki Minkowskiego jest kulą o promieniu $\lambda = 1$ i środku w punkcie $o = (0, 0)$, ponieważ spełniony jest warunek

$$\bigwedge_{p \in K} \varrho(p, o) = \frac{\varrho_e(p, o)}{\varrho_e(r, o)} \leqslant 1.$$

Kulę o promieniu $\lambda = 1$ nazywamy *kulą jednostkową metryki*. Każda metryka Minkowskiego może być jednoznacznie określona przez zadanie kuli jednostkowej, gdyż zbiór K z definicji metryki Minkowskiego jest kulą jednostkową o środku w początku układu współrzędnych.

DEFINICJA 3. Metrykę, której kula jednostkowa jest $2n$-bokiem, nazywamy *metryką n-kierunkową*.

DEFINICJA 4. Metrykę, której kula jednostkowa jest $2n$-bokiem foremnym wpisanym w koło o promieniu $r = 1$, nazywamy *metryką n-foremną*.

Określimy funkcję $f(\varphi)$ jako stosunek długości euklidesowej odcinka o kącie nachylenia φ do osi oX, do długości tego odcinka w przestrzeni z zadaną metryką.

DEFINICJA 5. Funkcję $f(\varphi)$, $f\colon \langle 0, 2\pi) \to \boldsymbol{R}$ taką, że

$$f(\varphi) = \frac{\varrho_e(p, q)}{\varrho(p, q)},$$

nazywamy *funkcją kierunkową metryki* ϱ.

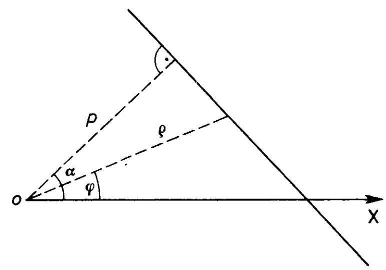
Ponieważ zgodnie z definicją 1 $\varrho(p, q) = \dfrac{\varrho_e(p, q)}{\varrho_e(r, o)}$, więc $f(\varphi) = \varrho_e(r, o)$. Wartość funkcji kierunkowej $f(\varphi)$ nazywać będziemy *długością jednostkową* dla kierunku określonego przez kąt φ, bowiem jest ona równa długości euklidesowej wektora łączącego początek układu współrzędnych z punktem na brzegu kuli jednostkowej metryki nachylonego pod kątem φ do osi oX.

3. Analiza funkcji kierunkowej metryk n-foremnych. Kula jednostkowa metryki n-foremnej jest $2n$-bokiem foremnym, wpisanym w koło o promieniu $r = 1$ (z definicji 3). Koło o promieniu 1 jest z kolei kulą jednostkową metryki euklidesowej. Wynika stąd, że odległość dowolnej pary punktów w metryce n-foremnej jest nie mniejsza od odległości tej samej pary punktów w metryce euklidesowej. Pozostaje pytanie, w jakim stopniu wprowadzenie metryki n-foremnej powoduje zwiększenie odległości punktów w stosunku do metryki euklidesowej. Dla metryki euklidesowej funkcja kierunkowa jest stała i jej wartość wynosi 1 dla każdego kąta $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$. W przypadku metryk n-foremnych funkcja kierunkowa jest zależna od kąta φ i od n, $n = 2, 3, 4, \ldots$

Dla ustalenia uwagi przyjmiemy, że jedna z głównych przekątnych $2n$-boku foremnego, który jest kulą jednostkową metryki, jest równoległa do osi oX. Założenie to nie ogranicza ogólności rozważań. Ze względu na symetrię kuli jednostkowej ($2n$-bok foremny) wystarczy wyznaczyć wartość funkcji kierunkowej dla kątów $\varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{n}\right)$, a następnie dla wszystkich kątów $\varphi \geqslant \frac{\pi}{n}$ zastosować wzór redukcyjny:

$$f_n(\varphi) = f_n\left(\varphi + k \cdot \frac{\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Korzystając z równania prostej we współrzędnych biegunowych (rys. 1)



Rys. 1

$$\varrho = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)},$$

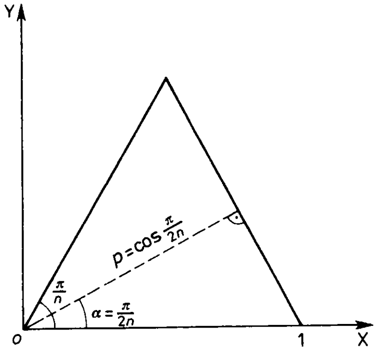
gdzie p — odległość prostej od bieguna, α — kąt między osią biegunową oX a półprostą wyprowadzoną z bieguna, prostopadłą do prostej, otrzymamy następującą zależność:

$$f_n(\varphi) = \frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2n}\right)}, \qquad \varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{n}\right).$$

Odległość p krawędzi wieloboku foremnego wpisanego w koło o promieniu 1 wynosi bowiem $p = \cos\frac{\pi}{2n}$, a kąt α z równania prostej we współrzędnych biegunowych wynosi $\frac{\pi}{2n}$ (rys. 2). Po zastosowaniu wzoru redukcyjnego mamy

$$f_n(\varphi) = \frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\cos\left(\psi - \frac{\pi}{2n}\right)}, \qquad \varphi \in \langle 0, 2\pi),$$

gdzie $\psi = \varphi \bmod \frac{\pi}{n}$.



Rys. 2

Dla metryk n-foremnych funkcja kierunkowa jest okresowa, jej okres wynosi $\frac{\pi}{n}$, a wartość funkcji kierunkowej jest dodatnia, nie większa od jedności. Wartość funkcji kierunkowej $f_n(\varphi)$ przyjmuje w przedziale $\langle 0, 2\pi)$ $2n$ razy wartość maksymalną $f_{n\max} = 1$ dla $\psi = 0$ oraz $2n$ razy wartość minimalną $f_{n\min} = \cos\frac{\pi}{2n}$ dla $\psi = \frac{\pi}{2n}$, gdzie $\psi = \varphi \bmod \frac{\pi}{n}$.

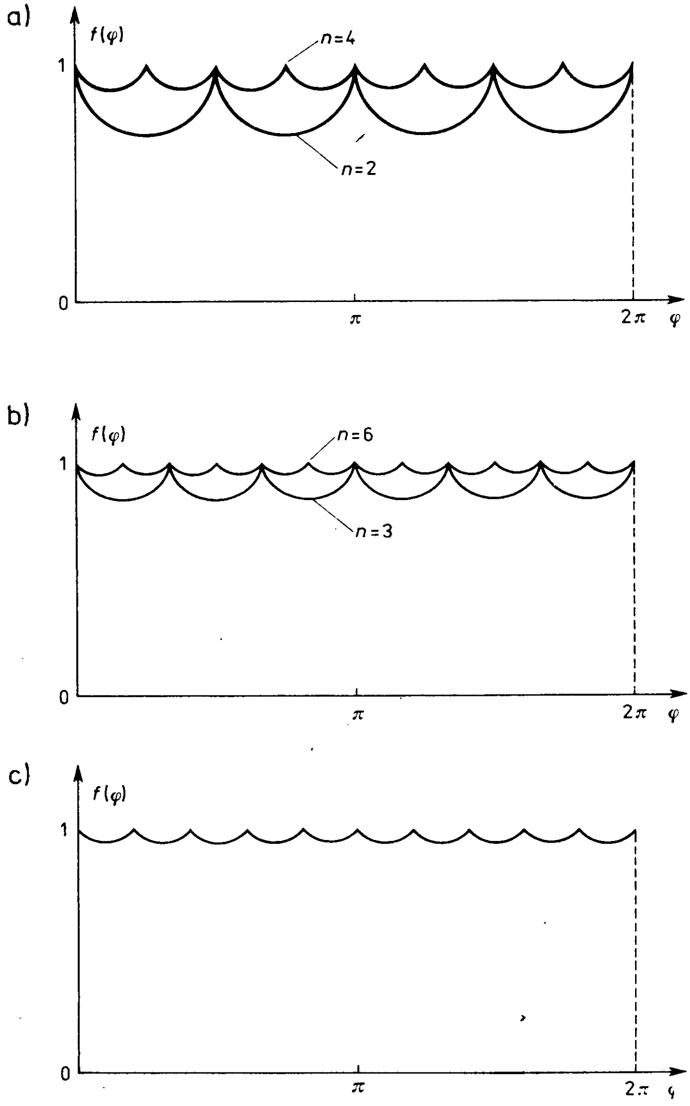
Obliczymy wartość średnią $\bar{f}_n$ funkcji kierunkowej w przedziale $\langle 0, 2\pi)$:

$$\bar{f}_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_n(\varphi)\,d\varphi = \frac{n}{\pi}\int_0^{\pi/n} \frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2n}\right)}\,d\varphi$$

$$= \cos\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{n}{\pi}\cdot \ln\left[\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4n} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right]_0^{\pi/n}$$

$$= \frac{2n}{\pi}\cos\frac{\pi}{2n}\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)\right).$$

Rysunek 3 przedstawia wykresy funkcji kierunkowych dla kilku metryk n-foremnych, a w tablicy 1 podano wartości średnie i minimalne funkcji kierunkowych dla metryk n-foremnych.



Rys. 3

Odległość pary punktów p, q takich, że wektor $p-q$ tworzy z osią oX kąt φ w metryce n-foremnej, wyraża się wzorem:

$$\varrho_n(p, q) = \frac{\varrho_e(p, q)}{f_n(\varphi)} = \varrho_e(p, q)\cdot\frac{\cos\left(\psi - \dfrac{\pi}{2n}\right)}{\cos\dfrac{\pi}{2n}}, \qquad \psi = \varphi \bmod \frac{\pi}{n}.$$

Z powyższego wzoru możemy określić maksymalny stopień zwiększenia odległości pary punktów w metryce n-foremnej w stosunku do metryki euklidesowej:

$$a_{n\max} = \frac{1}{f_{n\min}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2n}}.$$

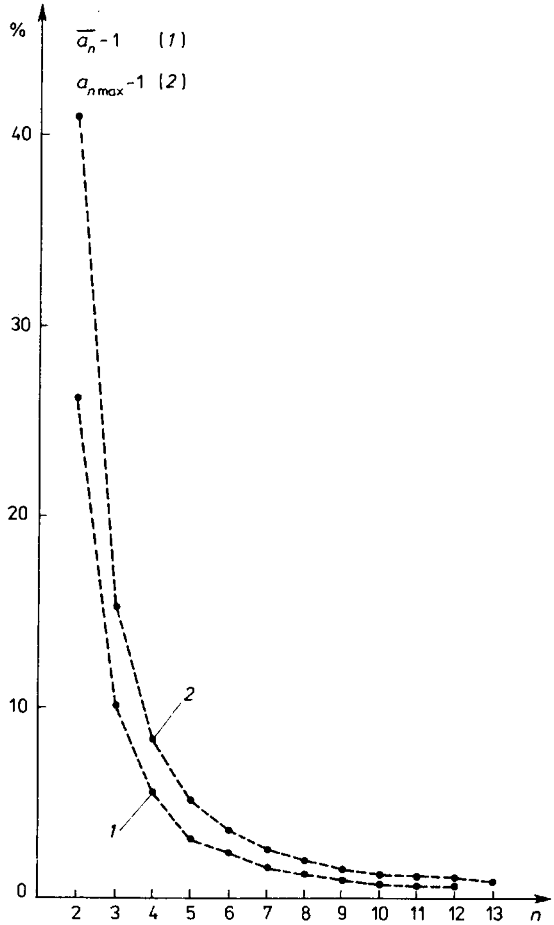
W analogiczny sposób, znając średnią wartość funkcji kierunkowej, otrzymamy wzór na średni stopień wzrostu odległości pary punktów w metryce n-foremnej w stosunku do metryki euklidesowej:

$$\bar{a}_n = \frac{1}{\bar{f}_n} = \frac{\pi}{2n\cdot\cos\frac{\pi}{2n}\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\right)}.$$

Średni i maksymalny stopień wzrostu odległości pary punktów dla różnych metryk n-foremnych przedstawiają tablica 1 oraz wykresy na rysunku 4. Funkcje $a_{n\max}$ i $\bar{a}_n$ są ciągami o wartościach dodatnich zbieżnymi do wartości 1.

Tablica 1. Wartości minimalne i średnie funkcji kierunkowych dla wybranych metryk n-foremnych oraz maksymalny i średni stopień zwiększenia odległości punktów w stosunku do metryki euklidesowej

Liczba kierunków n	Minimum funkcji kierunkowej $f_n(\varphi)\min = \cos\frac{\pi}{2n}$	Max. stopień zwiększenia odległości punktów $f_n(\varphi)\min^{-1}$	Wartość średnia funkcji kierunkowej $\bar{f}_n(\varphi)$	Średni stopień zwiększenia odległości punktów $\overline{f_n(\varphi)}^{-1}$
2	.707107	1.414214	.793515	1.260216
3	.866025	1.154701	.908545	1.100661
4	.923880	1.082392	.948583	1.054205
5	.951057	1.051462	.967098	1.034021
6	.965926	1.035276	.977152	1.023381
7	.974928	1.025717	.983214	1.017073
8	.980785	1.019591	.987149	1.013019
9	.984808	1.015427	.989845	1.010259
10	.987688	1.012465	.991774	1.008295
11	.989821	1.010283	.993198	1.006848
12	.991445	1.008629	.994284	1.005749



Rys. 4

4. Wzory na odległość w przestrzeniach z metrykami *n*-foremnymi. Na podstawie wzoru na odległość pary punktów w dowolnej metryce *n*-foremnej możemy wyprowadzić wzory na odległość w dowolnej konkretnej metryce *n*-foremnej, określające odległość pary punktów nie jako funkcję kąta φ i ich odległości euklidesowej, ale bezpośrednio jako funkcję współrzędnych kartezjańskich danej pary punktów p, q, a konkretnie współrzędnych wektora $p-q$.

Niech x i y oznaczają współrzędne wektora $p-q$ w prostokątnym układzie współrzędnych:

$$x = x_p - x_q, \qquad y = y_p - y_q.$$

Zauważmy, że $y = x \operatorname{tg} \varphi$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$. Funkcja $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ przyjmuje wartości z przedziału $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, a więc

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x > 0 \wedge y \geqslant 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \wedge y > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x < 0, \\ \frac{3\pi}{2}, & x = 0 \wedge y < 0, \\ 2\pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x > 0 \wedge y < 0. \end{cases}$$

Na wstępie wyznaczymy wzór na odległość pary punktów p i q w przestrzeni n-foremnej dla kąta $\varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{n} \right)$. Ponieważ $n \geqslant 2$, więc $\varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right)$, czyli w tym przypadku $x > 0$ i $y \geqslant 0$. Mamy więc

$$\varrho_n(p, q) = \frac{\varrho_e(p, q)}{f_n(\varphi)} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2n}\right)}{\cos\frac{\pi}{2n}}$$

$$= \frac{x\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\left(\cos\varphi\cos\frac{\pi}{2n} + \sin\varphi\sin\frac{\pi}{2n}\right)}{\cos\frac{\pi}{2n}}$$

$$= \frac{x\left(\cos\varphi\cos\frac{\pi}{2n} + \sin\varphi\sin\frac{\pi}{2n}\right)}{\cos\varphi\cos\frac{\pi}{2n}} = x + y\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}.$$

Uzyskana zależność dotyczy przypadku, gdy $\varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{n} \right)$. Aby można było uzyskać wynik dla dowolnej pary punktów, udowodnimy następujące twierdzenie:

Niech k będzie dowolną liczbą całkowitą, a n — liczbą naturalną, $n \geqslant 2$.

TWIERDZENIE 1. *W przestrzeni z metryką n-foremną obrót o kąt* $k\frac{\pi}{n}$ *jest przekształceniem izometrycznym.*

Dowód. Obrót płaszczyzny o kąt α jest równoważny obrotowi układu współrzędnych o kąt $-\alpha$.

W przestrzeni z metryką n-foremną kula jednostkowa jest n-bokiem foremnym. Jeżeli obrócimy układ współrzędnych wraz z kulą jednostkową o kąt, który jest całkowitą wielokrotnością kąta $\frac{\pi}{n}$, otrzymamy przestrzeń z metryką n-foremną, w której kula jednostkowa jest identycznym wielobokiem foremnym jak w przestrzeni wyjściowej. Ponieważ dowolna metryka Minkowskiego jest jednoznacznie określona przez podanie kuli jednostkowej (def. 1 i def. 2), zatem identyczność kul jednostkowych implikuje izometrię przekształcenia, c.b.d.o.

Na podstawie analogicznego rozumowania oraz symetrii obszaru $\bar{K}$ w definicji metryki Minkowskiego względem punktu $o = (0,0)$ można udowodnić twierdzenie:

TWIERDZENIE 2. *W dowolnej przestrzeni z metryką Minkowskiego obrót o kąt* $k\pi$ *jest przekształceniem izometrycznym.*

Aby obliczyć odległość pary punktów dla dowolnego kąta, będziemy korzystać z następujących wzorów wiążących układ współrzędnych oXY z układem $oX'Y'$, powstałym przez obrót układu oXY o kąt α:

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \qquad y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Podstawiając wzory na wartości x' i y' do wzoru na odległość w przestrzeni z metryką n-foremną, otrzymamy wzór na odległość dla dowolnego kąta φ:

$$\varrho_n(p,q) = x\cos\alpha + y\sin\alpha + \operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}(-x\sin\alpha + y\cos\alpha),$$

gdzie α jest największym kątem, będącym wielokrotnością kąta $\frac{\pi}{n}$, nie większym od φ.

PRZYKŁAD. Wyznaczymy wzór na odległość dowolnej pary punktów w przestrzeni z metryką 2-foremną (prostokątną). Dla tych par punktów, dla których kąt φ zawiera się w przedziałach $\left\langle\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\left\langle\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, $\left\langle\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$ możemy otrzymać odpowiednie wzory na odległość po wykonaniu obrotu układu współrzędnych odpowiednio o kąt $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$ i obliczeniu odległości według wzoru dla $\varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right)$ w nowym układzie współrzędnych:

$$n = 2, \qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{2n} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1,$$

a zatem:

a) $\varphi \in \left\langle\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $x \leqslant 0, y > 0$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\varrho_2(p,q) = x' + y' = y - x$;

b) $\varphi \in \langle \pi, \frac{3}{2}\pi)$, $x < 0$, $y \leqslant 0$, $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$, $\varrho_2(p,q) = x'+y' = -x-y$;

c) $\varphi \in \langle \frac{3}{2}\pi, \ 2\pi)$, $x \geqslant 0$, $y < 0$, $\cos\frac{3}{2}\pi = 0$, $\sin\frac{3}{2}\pi = -1$, $\varrho_2(p,q) = x'+y' = -y+x$.

Otrzymaliśmy więc znaną zależność określającą odległość pary punktów w przestrzeni z metryką prostokątną

$$\varrho_2(p,q) = |x|+|y| = |x_p-x_q|+|y_p-y_q|.$$

W analogiczny sposób, korzystając z twierdzenia 1 oraz wzorów na obrót układu współrzędnych, otrzymamy wzory wyrażające odległość pary punktów p, q w dowolnej metryce n-foremnej jako funkcję liczby n i współrzędnych w pierwotnym układzie punktu p i punktu q na płaszczyźnie. W tym celu należy wyznaczyć wzór na odległość pary punktów, dla których $\varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{n}\right)$, obliczyć wartość $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}$, a następnie, korzystając z twierdzenia 1 i wzorów na obrót, wyznaczyć wzory na odległość punktów, dla których kąt φ jest poza tym przedziałem.

Zwróćmy uwagę na następujące własności metryk n-foremnych.

1. Ponieważ dla każdej metryki $\varrho(p,q) = \varrho(q,p)$, dla kąta φ oraz $\varphi+k\cdot\pi$ obowiązują zawsze te same wzory na odległość.

2. Zgodnie z pierwotnymi założeniami kula jednostkowa jest symetryczna względem osi oX, a więc $f_n(\varphi) = f_n(-\varphi)$.

Dzięki własności 1 wystarczy wyznaczyć wzory na odległość pary punktów w zależności od wartości kąta $\gamma' = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $\gamma' \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Ze względu na własność 2 i symetrię zakresu kąta γ' można uzależnić wzory na odległość pary punktów od kąta $\gamma = |\gamma'| = \left|\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right|$, gdzie $\gamma \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right)$, i wartości $|x|$ oraz $|y|$.

W zależności od przedziału, do którego należy $\gamma = \left|\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right|$, wyznaczono wzory na odległość pary punktów w przestrzeniach z metrykami 2-, 3-, 4-, 5-, 6-, 8-foremnymi. Wyznaczone wzory przedstawiono w tablicy 2.

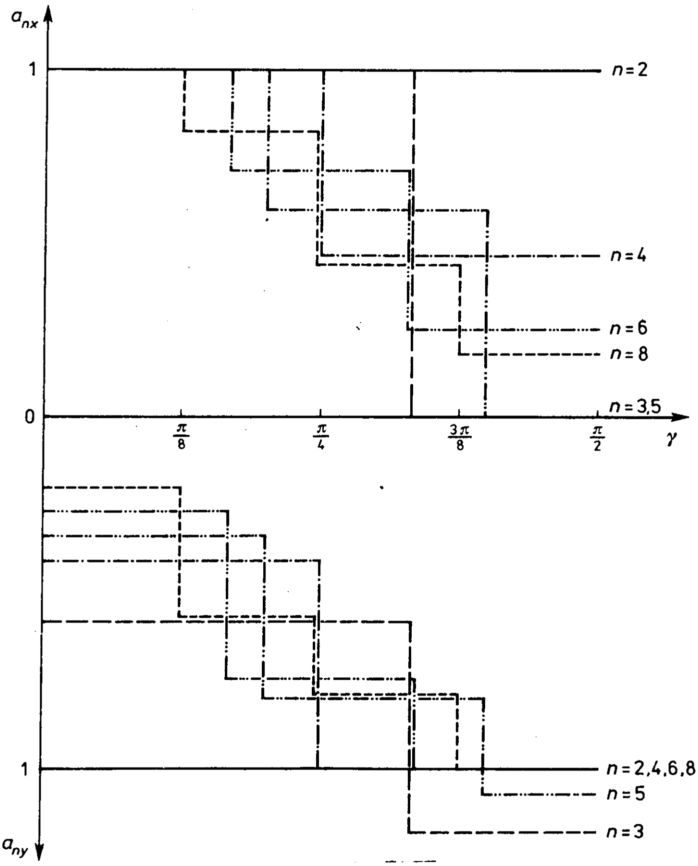
Rysunek 5 przedstawia wzory z tablicy 2 w sposób graficzny. Powyżej osi poziomej przedstawione są wykresy współczynnika a_{ny} w zależności od kąta $\gamma = \left|\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right|$ dla różnej liczby kierunków n. Odległość zadanej pary punktów p, q wynosi

$$\varrho(p,q) = a_{nx}|x| + a_{ny}|y|.$$

Tablica 2. Wzory na odległość punktów dla przestrzeni z metrykami 2-, 3-, 4-, 5-, 6-, 8-foremnymi

Liczba kierunków n	Zakres kąta $\gamma = \left\|\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right\|$	Wzór na odległość pary punktów	Wzór przybliżony
2	$\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$	$d_2(p,q) = \|x\| + \|y\|$	
3	$\left\langle 0, \frac{\pi}{3} \right\rangle$	$d_3(p,q) = \|x\| + \|y\| \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\|x\| + .57735\ \|y\|$
	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$	$d_3(p,q) = \|y\| \frac{2}{\sqrt{3}}$	$1.1547\ \|y\|$
4	$\left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle$	$d_4(p,q) = \|x\| + \|y\|(\sqrt{2}-1)$	$\|x\| + .41421\ \|y\|$
	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$	$d_4(p,q) = (\sqrt{2}-1) + \|y\|$	$.41421\ \|x\| + \|y\|$
5	$\left\langle 0, \frac{\pi}{5} \right\rangle$	$d_5(p,q) = \|x\| + \|y\| \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}$	$\|x\| + .32492\ \|y\|$
	$\left(\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5} \right\rangle$	$d_5(p,q) = \|x\| \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4} - \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{4}} \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}} \right) + \|y\| \left(\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{4}} + \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}} \right)$	$.61803\ \|x\| + .85067\ \|y\|$
	$\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$	$d_5(p,q) = \|y\| \sqrt{2 - \frac{2}{\sqrt{5}}}$	$1.0515\ \|y\|$
6	$\left\langle 0, \frac{\pi}{6} \right\rangle$	$d_6(p,q) = \|x\| + \|y\|(2-\sqrt{3})$	$\|x\| + .26795\ \|y\|$
	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right\rangle$	$d_6(p,q) = \|x\|(\sqrt{3}-1) + \|y\|(\sqrt{3}-1)$	$.73205\ \|x\| + .73205\ \|y\|$
	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$	$d_6(p,q) = \|x\|(2-\sqrt{3}) + \|y\|$	$.26795\ \|x\| + \|y\|$
8	$\left\langle 0, \frac{\pi}{8} \right\rangle$	$d_8(p,q) = \|x\| + \|y\| \frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$	$\|x\| + .19891\ \|y\|$
	$\left(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4} \right\rangle$	$d_8(p,q) = \|x\|(\sqrt{2+\sqrt{2}}-1) + \|y\|(1+\sqrt{2}) \cdot (1-\sqrt{2-\sqrt{2}})$	$.84776\ \|x\| + .56645\ \|y\|$

Liczba kierunków n	Zakres kąta $\gamma = \left\lvert \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right\rvert$	Wzór na odległość pary punktów	Wzór przybliżony
8	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}\right\rangle$	$d_8(p,q) = \lvert x\rvert(1+\sqrt{2})\cdot(1-\sqrt{2-\sqrt{2}}) + \lvert y\rvert(\sqrt{2+\sqrt{2}}-1)$	$.56645\lvert x\rvert+.84776\lvert y\rvert$
	$\left(\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$	$d_8(p,q) = \lvert x\rvert\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}+\lvert y\rvert$	$.19891\lvert x\rvert+\lvert y\rvert$



Rys. 5

5. Zastosowanie metryk *n*-foremnych do wyznaczania połączeń. Połączenia w układach scalonych oraz na pakietach urządzeń elektronicznych wykonuje się zwykle na najmniejszej możliwej liczbie warstw. Jest to uzasadnione ekonomicznie, wprowadzenie bowiem kolejnej warstwy połączeń pociąga za sobą dodatkowe koszty na różnych etapach pracy: przy projektowaniu, wykonaniu i testowaniu. Wprowadzenie każdej kolejnej warstwy daje jednak korzyści, w postaci skrócenia długości połączeń, które wynikać mogą z:

– uniknięcia konieczności omijania wcześniej poprowadzonych połączeń,

– możliwości wprowadzenia dodatkowego kierunku prowadzenia ścieżek.

Wprowadzenie n warstw pozwala przyjąć n dopuszczalnych kierunków prowadzenia połączeń: po jednym dla każdej warstwy. Długość połączenia w takich przypadkach będzie ograniczona z dołu przez odległość pary punktów w odpowiedniej przestrzeni z metryką n-foremną. Zatem znajomość funkcji kierunkowych dla metryk n-foremnych i n-kierunkowych oraz wzorów na odległość punktów w metrykach n-foremnych pozwala na oszacowanie korzyści w postaci skrócenia długości połączeń, które wynikają z wprowadzenia dodatkowego kierunku dopuszczalnego. Szczegółowe omówienie zagadnienia zastosowania metryk n-kierunkowych i n-foremnych do wyznaczania połączeń zawarto w pracach [3] i [4].

6. Podsumowanie. W pracy na podstawie analizy funkcji kierunkowych metryk n-foremnych wyprowadzono wzory na maksymalny i średni stopień zwiększenia odległości w metrykach n-foremnych w stosunku do metryki euklidesowej. Odległość punktów w przestrzeni z metryką n-foremną odpowiada długości połączenia tych punktów przy założeniu, że połączenia mogą być wprowadzone tylko w określonych n-kierunkach. Długość połączenia może być utożsamiana z kosztem jego wykonania [4]. Dzięki określeniu zwiększenia odległości punktów w metrykach n-foremnych w stosunku do metryki euklidesowej można porównywać koszt prowadzenia połączeń w różnych przestrzeniach z metrykami n-foremnymi i w przestrzeni euklidesowej. Na przykład połączenia na pakietach urządzeń elektronicznych i w układach scalonych często wykonuje się tylko w dwóch prostopadłych kierunkach, co odpowiada metryce 2-foremnej (zwanej także metryką prostokątną lub metryką Manhattan [2], [3]), Wielką zaletą metryki prostokątnej jest prostota wszelkich obliczeń i łatwość określania przebiegu połączeń na płaszczyźnie. Jak jednak wynika z przeprowadzonej analizy, stosowanie metryki 2-foremnej jest z punktu widzenia długości połączeń najgorsze. Już wprowadzenie trzech kierunków daje ponad 60%, a wprowadzenie czterech kierunków 75% tego skrócenia długości połączeń, które można by uzyskać, wprowadzając metrykę euklidesową. Dlatego celowe wydaje się rozważenie możliwości prowadzenia połączeń w większej liczbie kierunków niż 2, co pozwoli na skrócenie ich długości w stosunku do długości w metryce prostokątnej, zwłaszcza przy stosowaniu kilku warstw połączeń. Ponieważ ze wzrostem liczby kierunków n dalsze skrócenie połączeń jest coraz mniejsze, a obliczenia są coraz bardziej złożone, najbardziej korzystne wydaje się prowadzenie połączeń w przestrzeniach z metrykami n-foremnymi, gdy n jest niewielką liczbą całkowitą. Gdy istotne jest każde, choćby najmniejsze skrócenie długości połączeń, należy stosować metrykę euklidesową, która zapewnia bezwzględnie najkrótsze połączenie.

W przypadku korzystania z metryk n-foremnych przydatne będą wzory na odległość punktów, wyprowadzone w rozdziale 3 i w rozdziale 4. W pracy [3] przedstawiono metodę wyznaczania połączeń w 2, 3, 4 i 6 kierunkach, która może być zastosowana do projektowania pakietów urządzeń elektronicznych i układów scalonych.

Prace cytowane

[1] L.M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, Oxford 1953.
[2] M. A. Breuer, *Automatyczne projektowanie maszyn cyfrowych*, PWN, Warszawa 1976.
[3] M. H. Rudowski, *Wyznaczanie połączeń w przestrzeniach z metrykami n-kierunkowymi*, Rozprawa doktorska, Wydział Elektroniki Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1985.
[4] C. Stępień, *Zastosowanie metryki Minkowskiego do określania przebiegu i kosztu wykonania połączeń na pakietach z obwodami drukowanymi*, Archiwum Automatyki i Telemechaniki XXIX.3 (1984), 359 - 376.