Juliusz Lech Kulikowski

Zarys teorii grafów. Zastosowania w technice
PWN (Biblioteka Naukowa Inżyniera), Warszawa 1986, 510 stron, nakład 3500+180 egz., cena 480 zł, ISBN 83-01-05277-5

Pierwszą połowę lat osiemdziesiątych można uznać za okres wzmożonej aktywności wydawniczej Państwowego Wydawnicta Naukowego (PWN) w zakresie publikacji poświęconych teorii grafów. W 1980 r. ukazało się tłumaczenie książki Narsingha Deo [4], w 1985 r. – tłumaczenie książki

Wilsona [10] i wreszcie w 1986 r. – ukazuje się omawiana książka. Należy jeszcze wspomnieć o publikacji [7] z 1985 roku, w której dużo miejsca poświęcono algorytmom grafowym.

W książce Deo [4], wykład elementów teorii grafów został uzupełniony opisami i rozwiązaniami wielu rzeczywistych jej zastosowań w informatyce i w technice. W przypadku tej pozycji można jedynie mieć zastrzeżenia do językowej, a miejscami, i do merytorycznej strony tłumaczenia: polska terminologia jest mało spójna i daleka od powszechnie przyjętej, do widocznych usterek autora tłumacze dodali zaś od siebie kilka nowych. Niewielka objętościowo książka Wilsona [10], należy już do klasycznych publikacji w swojej dziedzinie i jest niemal idealną pomocą w semestralnych zajęciach z teorii grafów. Można jej jedynie zarzucić zbyt wysoki stopień trudności niektórych ćwiczeń. Algorytmy teorii grafów, opisy ich implementacji oraz ocena ich efektywności są naturalnym uzupełnieniem zastosowań teorii. W książkach [4] i [7] zamieszczone zostały osobne rozdziały zawierające opisy podstawowych algorytmów grafowych wraz z oszacowaniami ich złożoności obliczeniowej.

W porównaniu ze wspomnianymi wyżej trzema publikacjami, recenzowana książka niczym się nie wyróżnia. Wręcz przeciwnie, tak w zakresie samej teorii grafów, jak i jej zastosowań i algorytmów, jest pozycją mało aktualną, pełną błędów i mniejszych usterek, napisaną bardzo nieprecyzyjnym stylem i językiem. Swoją ocenę uzasadnię najpierw skrótowo, a następnie omówię szczegółowo wybrane fragmenty kolejnych rozdziałów.

Fakty teoretyczne nie wybiegają w zasadzie poza materiał zawarty w książkach [4] i [10], a bardzo wiele z nich jest podanych za jeszcze starszą książką Berge'a [3]. Najmłodsze rezultaty teoretyczne pochodzą z końca lat sześćdziesiątych. Prezentowane zastosowania są raczej ilustracjami użycia grafów, proponowane zaś sposoby ich rozwiązywania w wielu przypadkach wprowadzają czytelnika w błąd. Najsłabszą stroną książki są opisy metod obliczeniowych (w tym także algorytmów), rażące brakiem precyzji i pozbawione uzasadnień poprawności oraz oceny efektywności działania. Dzieje się tak w sytuacji, gdy teoria grafów wraz ze swoimi zastosowaniami i metodami obliczeniowymi dość prężnie rozwija się u nas w kraju. Autor nie korzystał z wielu dostępnych w języku polskim publikacji poświęconych grafom. Spośród książek, nie uwzględnione zostały przynajmniej dwie, [6] i wspomniana wyżej [7], których lektura mogła mieć pozytywny wpływ na poziom prezentacji algorytmów w recenzowanej książce. Podobnie, przeglądowe opracowania o wybranych zagadnieniach teorii grafów, por. [5], [8] i [9] mogły pomóc Autorowi rzetelniej opracować niektóre fragmenty swojej książki – piszę o tym szczegółowo dalej.

Reasumując ogólną ocenę książki, mam duże wątpliwości, czy Autor miał prawo napisać w Przedmowie iż „jest to książka matematyczna, ściślej –

książka z dziedziny matematyki stosowanej", a na obwolucie, że „zawiera podstawy matematyczne teorii grafów".

Przejdźmy teraz do szczegółowego skomentowania niektórych fragmentów książki, poczynając od Przedmowy. Omawiając dorobek Polaków w teorii grafów Autor wymienia w jednym rzędzie K. Kuratowskiego, E. Marczewskiego i S. Ulama. Nikt nie ma wątpliwości, że twierdzenie Kuratowskiego charakteryzujące grafy umieszczalne na płaszczyźnie należy do najważniejszych osiągnięć w teorii grafów (jak policzono ostatnio, jest to najczęściej cytowany wynik z teorii grafów). Natomiast wielu specjalistów miałoby zapewne dużo kłopotu z wymienieniem zasług Marczewskiego i Ulama w teorii grafów. Twierdzenie Marczewskiego mówiące o tym, że każdy graf jest grafem przekrojów pewnej rodziny zbiorów ma nietrywialny dowód dla grafów nieskończonych, natomiast dla grafów skończonych dowodzi się elementarnie i uznawane jest za część folkloru dziedziny. Nazwisko Ulama nie pojawia się w recenzowanej książce nigdzie poza Przedmową, a w literaturze specjalistycznej opatrywane nim jest często przypuszczenie mówiące o tym, że każdy graf można zrekonstruować na podstawie znajomości rodziny jego podgrafów powstałych przez usunięcie jednego wierzchołka.

W znajomości geografii zainteresowań teorią grafów i jej zastosowań w kraju Autor zdradza poważne braki. Pomniejszona została rola ośrodka wrocławskiego, który działa w ścisłej współpracy z WSP w Opolu oraz WSI i WSP w Zielonej Górze, a w ostatnich latach skupia także wiele osób z całej Polski. Zorganizowano tutaj m.in. Międzynarodową Konferencję dla uczczenia pamięci Profesora Kazimierza Kuratowskiego (Łagów, 1981 — materiały ukazały się w LN in Math„ Vol. 1018, Springer-Verlag, 1983) oraz Międzynarodową Konferencję z okazji 35-lecia WSP w Opolu (Pokrzywna, 1985 — materiały ukazały się w Zastosowaniach Matematyki 19 (1987), nr 3-4. Uczelnie zielonogórskie organizują także coroczne spotkania w Żaganiu. Ponadto, pominięta została całkowicie działalność ośrodka krakowskiego (IM AGH) oraz poznańskiego (IM UAM). W Poznaniu odbywają się co dwa lata (od 1983 r.) konferencje „Random Graphs" w bardzo silnej obsadzie międzynarodowej.

Właściwą treść książki rozpoczyna rozdział 1 wprowadzający podstawowe pojęcia matematyczne takie jak zbiory, relacje, odwzorowania i struktury algebraiczne, których większość, wbrew przekonaniu Autora, objętych jest programem nauczania wstępu do matematyki (lub matematyki) w wyższych uczelniach technicznych. Można więc było pominąć te rozważania, zwłaszcza że definicje pojęć i opisy ich własności rażą brakiem precyzji. Co więcej, w dalszych rozdziałach książki Czytelnik nie ma okazji korzystać z większości wprowadzonych tutaj pojęć. Dla przykładu, Autor pisze o mocy zbioru, w tym także o pewniku wyboru (!), chociaż w dalszej treści nie dowodzi żadnego istotnego rezultatu dla grafów nieskończonych. Podobnie jest ze strukturami algebraicznymi.

W rozdziale 2 zdefiniowane zostały podstawowe pojęcia związane z grafami oraz ich elementarne własności. Chociaż w przedmowie Autor zastrzega się, iż w dziedzinie terminologii będzie przejawiał mało własnej inicjatywy, to jednak nie uniknął propozycji całkiem nowych, które budzą wiele zastrzeżeń. Poważne wątpliwości pojawiają się już przy definicji grafu, którym jest „$G = [A, C, \varphi]$, gdzie A jest przeliczalnym zbiorem elementów a_i zwanych węzłami (lub wierzchołkami) grafu, C jest przeliczalnym zbiorem elementów l_{ij} zwanych łukami grafu, a φ jest odwzorowaniem postaci φ: $A \times A \to C$ zwanym relacją przyległości (incydencji) w grafie". Z definicji tej nie wynika, że każdy łuk $l_{ij} \in C$ jest w jakimś obrazie odwzorowania φ. Ponadto, błędem jest utożsamianie łuku l_{ij} z $\varphi[a_i, a_j]$ (por. str. 41 u góry), gdyż ta druga wielkość jest na ogół zbiorem, należałoby więc pisać $l_{ij} \in \varphi[a_i, a_j]$. Najprościej, i najczęściej tak definiowane są grafy, odwzorowanie φ przyporządkowuje łukom dwa wierzchołki będące ich końcami. Wtedy można pisać $\varphi(l_{ij}) = [a_i, a_j]$. Autor nigdzie dalej nie powtarza założenia o przeliczalności zbiorów A i C oraz z niej nie korzysta. Nazwa relacji φ sugeruje, że dalej nie rozróżnia się przyległości od incydencji, chociaż ta pierwsza relacja powinna być zdefiniowana między wierzchołkami albo połączeniami, ta druga zaś — między wierzchołkami i połączeniami.

Wiele nieporozumień stwarza pojęcie krawędzi, zdefiniowane zarówno w grafach skierowanych (jako przeciwnie skierowane łuki), jak i w grafach nieskierowanych. W tym drugim przypadku, same grafy, jak i określenie krawędzi (ostatni akapit na str. 41) wprowadzone są w sposób nie mający pierwowzoru w żadnym innym opracowaniu, i wraz ze wspomnianą wyżej definicją grafu są przejawem własnej mało udanej inicjatywy Autora.

Autor wprowadził także pojęcie grafu dyzjunktywnego, o którym ponownie wspomina dopiero na przedostatniej stronie książki, przy okazji omawiania perspektyw rozwoju teorii grafów, dając tym przykład dość słabego rozeznania w tym co się rzeczywiście dzieje w teorii grafów i jej zastosowaniach.

Dalej omówione są działania na grafach włącznie z algebrą grafów (§ 2.2) i macierzowe reprezentacje grafów (§ 2.3). Macierze związane z grafami wykorzystywane są w omawianej książce głównie jako reprezentacje grafów. To podejście ma swoje uzasadnienie tam, gdzie rozważania w sposób naturalny mogą być prowadzone w języku operacji na macierzach. Natomiast traci swoje zalety w przypadkach strukturalnej analizy grafów, gdzie macierze stwarzają zbyt sztywne ramy. Przykładów nie trzeba szukać daleko (o innych piszę także dalej) bo już na początku § 2.3 Autor pisze, że „macierz przyległości pozwala w stosunkowo prosty sposób stwierdzić izomorfizm grafów". Prosty zapewne w opisie ale na pewno nie w sensie pracochłonności. Problem izomorfizmu grafów nie doczekał się jeszcze bowiem żadnego efektywnego algorytmu rozstrzygania.

W rozdziale 3 omówiono strukturalne własności grafów, czyli takie, które nie zależą od numeracji wierzchołków i krawędzi. Mowa jest więc o różnych rodzajach i stopniach spójności oraz o tych elementach grafów, które związane są ze spójnością. W § 3.4 udowodniono zasadniczo tylko tw. Gallai o zbiorach pokrywających i niezależnych ilustrując je klasycznymi już przykładami. Paragraf 3.5 poświęcony jest cykliczności grafów i rozpatrzono w nim związek macierzy cykli z macierzą incydencji grafów. Rozdział 3 kończy opis metody, która odtwarza graf na podstawie danej jego macierzy cykli. Niestety, opis ten jest bardzo nieścisły i podany tylko na przykładzie, chociaż sam problem należy do bardzo ważnych w zastosowaniach teorii grafów.

Rozdział 4 poświęcony jest drzewom, drzewom rozpinającym grafów (zwanym w książce szkieletami), najkrótszym drzewom rozpinającym, drzewom skierowanym i związkom drzew z przekrojami w grafach. W § 4.1 znalazły się równoważne określenia drzew oraz dyskusje o tym jak testować drzewa (czyli rozpoznawać grafy będące drzewami), z której Czytelnik nie dowie się jednak jak można prosto, tj. w czasie $O(n)$, badać czy dany graf jest drzewem. Autor proponuje bardzo pracochłonną „metodę analityczną" polegającą na liczeniu wyznacznika pewnej macierzy związanej z macierzą przyległości (sąsiedztwa). W następnym paragrafie omówiono metodę generowania wszystkich drzew rozpinających bazującą na operacji wymiany krawędzi. Niestety, brak jest twierdzenia, które mówiłoby, że w ten sposób można wygenerować wszystkie drzewa bez powtórzeń (jest to twierdzenie Cumminsa o istnieniu cyklu Hamiltona w grafie drzew rozpinających). Paragraf 4.3 zawiera opisy dwóch podstawowych algorytmów (Kruskala i Prima–Dijkstry) wyznaczania najkrótszych drzew rozpinających w sieciach, oraz dyskusję o efektywności algorytmów, która wyraźnie odsłania jeszcze jedną słabą stronę książki — brak umotywowanego złożonością wyboru metod obliczeniowych. Sama dyskusja jest pełna nieścisłości i błędów (np. w definicji $\mathcal{NP}$-zupełności i w porównaniu złożoności obu algorytmów). Paragraf o drzewach skierowanych zawiera jedynie ich macierzową charakteryzację, a powiązania między drzewami i przekrojami omówione zostały w terminach macierzy związanych z grafami.

W rozdziale 5 mowa jest o własnościach i wyznaczaniu optymalnych dróg i cykli w grafach i sieciach. Omówiono problemy wyznaczania najkrótszych dróg oraz istnienia cykli Eulera i Hamiltona. Ponadto, przedstawiono metody rozwiązywania problemów chińskiego listonosza i komiwojażera. Metody obliczania długości najkrótszych dróg reprezentowane są przez algorytm Dijkstry (dla nieujemnych wag) i algorytm Warshalla–Floyda (dla dowolnych wag). Komentarz Autora do obu algorytmów zaciemnia nieco ich opis sygnalizując trudności w ich realizacji związane z istnieniem wielu dróg optymalnych, chociaż liczba dróg nie ma praktycznie wpływu na implementację obu algorytmów. Autor prezentuje także formalne podejście do generowania wszystkich dróg optymalnych między parą wierzchołków. Czytelnikowi nie dostarcza jednak żadnego uzasadnienia dla rozpatrywania tego zagadnienia w takiej ogólności. Żaden także rzeczywisty problem zastosowań nie wymaga generowania explicite wszystkich dróg.

Spośród zagadnień eulerowskich, Autor przedstawił charakteryzacje skierowanych i nieskierowanych grafów Eulera, algorytm Fleury'ego wyznaczania cyklu Eulera oraz omówił metodę wyznaczania najkrótszego cyklu zawierającego każdą krawędź grafu przynajmniej jeden raz, zwanego w literaturze przedmiotu (nie nazwanego jednak w książce) problemem chińskiego listonosza (w skręcie, CCP). Zaproponowana metoda rozwiązywania CPP pokrywa się w zasadzie z podstawowym sposobem rozwiązywania tego problemu, z wyjątkiem realizacji kroku polegającego na znalezieniu najtańszego skojarzenia w grafie. Niestety, Autor nie poświęca skojarzeniom w grafach osobnych rozważań w książce. W tym miejscu zaś, proponuje bądź metodę pełnego przeglądu, bądź metodę programowania całkowitoliczbowego, obie niewielomianowe, chociaż najtańsze skojarzenie może być znalezione algorytmem wielomianowym. Reasumując, Autor proponuje rozwiązywać problem wielomianowy, jakim jest CPP, algorytmem niewielomianowym, i to w książce, której jednym z celów są zastosowania. Podobna sugestia zawarta jest w następnym paragrafie, gdzie mowa jest o problemach cykli Hamiltona w grafach i sieciach. Jako przykład zastosowania (przykład 5.6, str. 198), Autor podaje problem znalezienia optymalnego uszeregowania n prac wykonywanych na dwóch maszynach. Rozwiązanie jest oczywiście permutacją i zgodnie z warunkiem optymalności podanym przez Johnsona (por. wzór na str. 199), może być wyznaczone w czasie $O(n \log n)$. Autor zaś proponuje, by szukać cyklu Hamiltona w odpowiednio zdefiniowanym grafie skierowanym. Zatem ponownie pada propozycja rozwiązywania algorytmem niewielomianowym problemu, który ma algorytm wielomianowy.

Rozważania o istnieniu cykli Hamiltona w grafie są pełne podstawowych błędów i nieścisłości. Autora zwiodło pozorne podobieństwo cykli Hamiltona do cykli Eulera i proponuje badać istnienie tych pierwszych w grafach krawędziowych. Pisząc o tych szczególnych rodzajach grafów, Autor podaje nieprawdziwy wzór na liczbę krawędzi w takich grafach (str. 202), z którego wyciąga fałszywy wniosek, iż graf krawędziowy grafu G jest drzewem wtedy i tylko wtedy, gdy G jest drzewem. A wystarczyło wziąć 3-ramienną gwiazdę $K_{1,3}$, by się przekonać, że jest to nieprawdą. Nie jest także prawdą zdanie o izomorfiźmie grafów krawędziowych — trójkąt i gwiazda $K_{1,3}$ mają izomorficzne grafy krawędziowe. Podane zostały dwa warunki wystarczające (Ore i Diraca) na to, aby graf zawierał cykl Hamiltona, z których Autor wyciąga mylny wniosek (wystarczy wziąć dowolny cykl), iż grafy Hamiltona „muszą odznaczać się dostatecznie dużą gęstością połączeń wewnętrznych(?)". Dla rozwiązywania problemu komiwojażera zaproponowany został algorytm Christofidesa, wyraźnie ustępujący efektywnością innym algorytmom. Większości błędów w rozdziale 5 można było uniknąć, zaglądając przy jego pisaniu do obszernej pracy przeglądowej [8].

Rozdział 6 poświęcony jest grafom planarnym i zawiera m.in. metodę rozpoznawania takich grafów. Definicja podstawowego pojęcia, jakim jest region jest mało precyzyjna – region nie jest wyznaczony przez dowolny cykl grafu, a tylko przez taki, który nie ogranicza innych elementów grafu. Twierdzenia 6.1 i 6.2 wymagają istotnego założenia, że graf jest 2-spójny. Kryterium płaskości McLane'a (tw. 6.2) pojawiło się w literaturze przed tw. 6.1. Wyprowadzenie wzoru Eulera (str. 223) z poprawnej wersji tw. 6.1 ogranicza jego stosowanie tylko do grafów 2-spójnych, chociaż jest on słuszny dla dowolnych grafów płaskich. W twierdzeniu Kuratowskiego (tw. 6.3) jest błąd! Z dyskusji o grafach dualnych (§ 6.2) Czytelnik nie dowie się, czy są one jednoznaczne (str. 232, u góry) i czy dualność abstrakcyjna (str. 233) rzeczywiście odnosi się do dowolnych grafów (por. tw. 6.8 i 6.9). W § 6.3 przedstawiona została metoda określania planarności grafów zaproponowana oryginalnie przez Demoucrona i współautorów. Opis metody jest mało przejrzysty i Czytelnik może wnioskować, iż do badania planarności potrzebny jest cykl Hamiltona w grafie. W rzeczywistości, ten pierwszy cel może być osiągnięty algorytmem wielomianowym, ten drugi zaś nie doczekał się jeszcze efektywnej metody nawet w klasie grafów planarnych. Efektywny i jasno opisany algorytm badania planarności grafów znaleźć można w książkach [4] i [7].

W rozdziale 7 Autor omawia kolorowanie wierzchołków grafu, poświęcając osobny paragraf (§ 7.2) kolorowaniu map, czyli grafów planarnych. W paragrafie tym przedstawiona została krótka historia dowodu twierdzenia o czterech barwach, w której niestety jest wiele luk i nieporozumień. Autor nie wspomina o najbardziej znanym fałszywym dowodzie tego twierdzenia pochodzącym od Kempego z roku 1879, którego nazwiskiem opatruje się łańcuchy odgrywające podstawową rolę w dowodach twierdzeń o kolorowaniu. Błąd w dowodzie Kempego wykrył 10 lat później Heawood, który poprawnie użył łańcuchów Kempego w dowodzie twierdzenia o 5 kolorach (por. tw. 7.4). Największym nieporozumieniem w § 7.2 jest informacja o tym, że to Ringel i Youngs udowodnili twierdzenie o 4 barwach w połowie lat sześćdziesiątych. Autor wysnuł ten wniosek zapewne na podstawie jedynie tytułu książki G. Ringela *Map Color Theorem*, w której w rzeczywistości opisane są zmagania uwieńczone dowodami oszacowania liczby chromatycznej dla wszystkich powierzchni, ale z wyjątkiem sfery (por. drugi wzór na str. 276). Pierwszy dowód przypuszczenia o 4 barwach został ukończony w 1976 r. przez Appela i Hakena przy wydatnej pomocy Kocha i komputera (por. [1] i najnowsze opracowanie Appela i Hakena [2]). Dotychczas nie udowodniono tego przypuszczenia bez pomocy komputera.

Najpoważniejszym faktem o liczbie chromatycznej dowolnego grafu jest tw. Brooksa. Niestety, Autor wykorzystuje to twierdzenie tylko do wyprowadzenia oszacowania liczby chromatycznej grafu od dołu przez liczbę klikową, które wynika wprost z definicji liczby chromatycznej. Brak jest ulepszeń oszacowania Brooksa, wynikających z sekwencyjnej metody kolorowania.

Autor podał także szereg prostych relacji wiążących liczby chromatyczne grafu i jego dopełnienia (tw. Nordhausa i Gadduma) oraz dwóch grafów i wyniku operacji na nich. Omówiony został także wielomian chromatyczny oraz klasyczna metoda jego konstrukcji polegająca na rozszczepianiu grafu.

Ostatni paragraf rozdziału 7 zawiera omówienie algorytmów kolorowania grafu. Przedstawiona metoda dokładna sprowadza k-pokolorowanie grafu do rozwiązania problemu programowania całkowitoliczbowego, w którym liczba zmiennych i ograniczeń rośnie kwadratowo ze wzrostem rozmiaru grafu. Metoda ta ma bardzo niewielkie znaczenie praktyczne. Jako metodę przybliżoną Autor proponuje algorytm Wooda, który jest jedną z najgorszych metod przybliżonego kolorowania w sensie pracochłonności i jakości otrzymywanych rozwiązań.

Nie jest prawdą, że efektywność heurystycznych algorytmów kolorowania grafów jest problemem otwartym (str. 297-13). Aby się o tym przekonać, wystarczyło sięgnąć do pracy M. Kubali [5] zawierającej szczegółowy opis przybliżonych metod kolorowania grafów, oszacowania ich pracochłonności i jakości generowanych rozwiązań oraz ich porównanie.

Rozdział 8 poświęcony jest wyłącznie grafom zorientowanym (w skrócie orgrafom), zwanym najczęściej digrafami (por. [10]), które pojawiają się także w innych rozdziałach. Omówiono podstawowe ich własności (§ 8.1), związki z relacjami (§ 8.2) oraz automatami (§§ 8.3. i 8.4). W § 8.1 rozważania dotyczą przede wszystkim różnych rodzajów spójności w grafach. Niestety, dla określenia stopnia spójności digrafu, Autor poleca Czytelnikowi analizę macierzy przyległości, co związane może być z przeglądaniem wszystkich uporządkowań wierzchołków. W twierdzeniu 8.1 pochodzącym od H. E. Robbinsa brak jest istotnego założenia o spójności grafu G. Paragraf 8.2 poświęcony jest przede wszystkim orgrafom i relacjom częściowego porządku (nazywanym w książce relacjami półuporządkowania). Zaproponowano macierzową metodę liczenia macierzy przechodniego domknięcia orgrafu, która wymaga wykonania $O(n^4)$ operacji, gdzie n jest liczbą wierzchołków, podczas gdy niewielka modyfikacja algorytmu 5.2 (str. 177), znana w literaturze pod nazwą algorytmu Warshalla wymaga o rząd mniej operacji, tj. $O(n^3)$. Charakteryzacja orgrafów bezobwodowych (tw. 8.7) jest w terminach macierzy przyległości i uporządkowań wierzchołków, i jak sam Autor zauważa „może być w praktyce dość pracochłonna". Jako usprawnienie proponuje się liczyć wartość pewnych wyznaczników. A wszystko to w sytuacji, gdy znany jest algorytm liniowy (względem liczby łuków) oparty na trywialnej wręcz obserwacji, że każdy orgraf bezobwodowy i każdy jego podgraf mają wierzchołek, do którego nie wchodzi żaden łuk.

Twierdzenie 8.12 pochodzi od L. Redei'ego. W §§ 8.3 i 8.4, gdzie mowa jest o automatach skończonych i sieciach Petriego, orgrafy służą do bardziej przejrzystego opisu tych obiektów. Odzwierciedla to aktualny stan obu dziedzin, teorii grafów i teorii automatów, żadna z nich jednak poza ilustracjami nie czerpie z drugiej poważniejszych rezultatów.

W rozdziale 9 omówione zostały sposoby przeliczania i generowania grafów z różnych klas. Rozważania te zajmują niewspółmiernie wiele miejsca (prawie 50 stron) w stosunku do swojego praktycznego znaczenia. Paragraf 9.1 jest przeglądem wzorów na moc kilku podstawowych klas grafów. Udowodniono m.in. tw. Cayleya o liczbie oznaczonych (w książce, zaetykietowanych) drzew. Zamieszczony dowód korzysta z macierzowego twierdzenia o liczbie drzew rozpinających w grafie. Przy okazji, Autor niesłusznie zarzuca niepełność dowodowi tego twierdzenia zamieszczonemu m.in. w książce [4] (§ 10.2), a pochodzącemu od Prüfera. Ten drugi dowód, w przeciwieństwie do większości pozostałych dowodów tw. Cayleya jest dowodem konstrukcyjnym. W § 9.2 omówione zostały podstawowe własności permutacji, potrzebne do sformułowania i zrozumienia twierdzenia Pólyi, wieńczącego ten paragraf. Rozważania w tym paragrafie, chociaż teoretyczne, przedstawione są w formie poglądowej, bez dowodów, za to z wieloma ilustracjami i przykładami. W następnych dwóch paragrafach zilustrowano zastosowanie tw. Pólyi do przeliczania grafów, multigrafów i drzew nieoznaczonych. Ostatni paragraf tego rozdziału poświęcony jest generowaniu grafów nieoznaczonych. Omówiono tutaj szczegółowo jedynie generowanie drzew.

W rozdziale 10 Autor skupił uwagę na grafach losowych. Chociaż jest to dziedzina kombinatoryki i teorii prawdopodobieństwa przeżywająca bujny rozkwit w ostatnim dziesięcioleciu, rezultaty, o których jest mowa w książce, pochodzą sprzed połowy lat siedemdziesiątych. Co więcej; brak jest omówienia najważniejszych zastosowań grafów losowych, jakimi są badania nad niezawodnością sieci oraz probabilistyczne metody oceny oczekiwanej dobroci i złożoności algorytmów.

W rozdziale 11 zatytułowanym „Sieci komunikacyjne" rozważane są w zasadzie strumienie w sieciach bardziej znane w polskiej literaturze pod nazwą przepływów w sieciach. Materiał zawarty w tym rozdziale oraz sposób jego prezentacji, z wyjątkiem dwóch krótkich fragmentów nie stanowią żadnego postępu w stosunku do klasycznej publikacji z tej dziedziny autorstwa L. R. Forda i D. R. Fulkersona, *Przepływy w sieciach*, która w oryginale ukazała się w 1962 r., a w tłumaczeniu polskim (wydanym przez PWN) w 1967 r. O tym drugim fakcie Autor nie wspomina, może po prostu nie wie, i niepotrzebnie stosuje nowe nazewnictwo w dziedzinie, która ma już dobrze ugruntowaną terminologię polską. Ciekawostką jest dwukrotny dowód twierdzenia Forda–Fulkersona (tw. 11.2): skomplikowany i mało zrozumiały dowód pochodzący od Eliasa, Feinsteina i Shannona oraz oryginalny dowód autorów twierdzenia, którym jest algorytm w § 11.2. Ten drugi, z modyfikacją Edmondsa i Karpa dowodzi to twierdzenie dlą dowolnych, rzeczywistych przepustowości połączeń

Rozważania w rozdz. 12, umotywowane potrzebami analizy topologicznej układów dynamicznych, poświęcone są klasycznym metodom rozwiązywania równań liniowych ze współczynnikami symbolicznymi (tzn. nieliczbowymi) wykorzystującymi grafy Coatesa i Masona. Techniki te, pochodzące z drugiej połowy lat pięćdziesiątych, zostały w międzyczasie wzbogacone głębokimi dociekaniami i wynikami kombinatorycznymi. Nie ma jednak ani słowa o tym w tej książce. Godne polecenia są na przykład prace japońskiej grupy kierowanej przez prof. M. Iri'ego.

Przedstawione w zakończeniu książki „niektóre perspektywy dalszego rozwoju teorii grafów i jej zastosowań" napisane zostały na podstawie publikacji z połowy lat siedemdziesiątych, w większości – krajowe i mało reprezentatywne dla głównych kierunków badań i zastosowań w tej dziedzinie.

Podsumowując powyższe uwagi, recenzowaną książkę należy ocenić negatywnie i to niemal pod każdym względem: merytorycznym (błędy i nieścisłości w rozważaniach oraz niewielki zakres zamieszczonych zagadnień), aplikacyjnym (bardzo elementarne przykłady zastosowań i niewłaściwe metody ich rozwiązywania), algorytmicznym (zły dobór algorytmów oraz mało nowoczesny i niepełny sposób ich prezentacji) oraz redakcyjnym (bardzo nieprecyzyjny, jak na pracę matematyczną, styl i język prezentacji). Chociaż winę za to ponosi przede wszystkim Autor, można mieć także pretensje do Wydawnictwa, że dopuściło do ukazania się tej książki w takiej postaci.

Cytowane opracowania

[1] K. Appel, W. Haken, *Zagadnienie czterech barw*, str. 170-198, w: *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów*, pod red. L. S. Steena, WNT, Warszawa 1983.

[2] K. Appel, W. Haken, *The four color proof suffices*, Mathematical Intelligencer 8,1 (1986), str. 10-20, 58.

[3] C. Berge, *Théorie des Graphes et ses Applications*, Dunod, Paris 1958 (tłum. ros. 1962).

[4] N. Deo, *Teoria grafów i jej zastosowania w technice i informatyce*, PWN, Warszawa 1980.

[5] M. Kubale, *Analiza efektywności algorytmów kolorowania grafów*, Mat. Stos. 19 (1982), str. 23-41.

[6] W. Lipski, Jr., *Kombinatoryka dla programistów*, WNT, Warszawa 1982.

[7] E. M. Reingold, J. Nievergelt, N. Deo, *Algorytmy kombinatoryczne*, PWN, Warszawa 1985.

[8] M. M. Sysło, Z. Skupień, *Stosowana teoria grafów, Grafy Eulera i Hamiltona. Zagadnienie komiwojażera*, Mat. Stos. 10 (1977), 5-54.
[9] M. M. Sysło, *Stosowana teoria grafów. Zastosowanie teorii grafów w metodach numerycznych*, Mat. Stos. 5 (1975), str. 69-87.
[10] R. J. Wilson, *Wprowadzenie do teorii grafów*, Warszawa, PWN 1985.

MACIEJ M. SYSŁO