ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria III: MATEMATYKA STOSOWANA XXX (1987)

TERESA REGIŃSKA
Warszawa

Zjawisko nadzbieżności w metodzie elementu skończonego dla dwupunktowych zagadnień brzegowych*

(*Praca wpłynęła do Redakcji 1986.03.15*)

Badając metodę elementu skończonego, stwierdzono w niektórych przypadkach zaskakującą na pierwszy rzut oka własność: *rząd zbieżności rozwiązania przybliżonego zagadnienia różniczkowego na pewnym szczególnym zbiorze punktów może być wyższy niż optymalny rząd błędu globalnego.* Zjawisko to nazwano *nadzbieżnością.* W ciągu ostatnich 15 lat pojawiło się wiele prac, w których dla konkretnych zadań i ich aproksymacji udowodniono nadzbieżność. Pierwsze tego rodzaju wyniki dotyczą metody kollokacji ([2]) i metody Galerkina ([5]) dla równania różniczkowego zwyczajnego rzędu drugiego w przypadku zastosowania funkcji sklejanych przedziałami wielomianowych. Przegląd wyników i bogaty spis literatury na ten temat można znaleźć w [7].

Celem pracy jest próba wyjaśnienia przyczyny zjawiska nadzbieżności oraz jego związku z przestrzeniami elementu skończonego. Ogólne rozważania omawiające genezę zjawiska i wskazujące na istnienie klasy metod posiadających własność nadzbieżności zawarte są w części pierwszej pracy. W pozostałych dwóch częściach przedstawione są techniki dowodu nadzbieżności dla konkretnych metod: dla metody Galerkina (na podstawie pracy [5] oraz dla aproksymacji zewnętrznej (na podstawie pracy [8]). Rozważania przeprowadzone są dla prostego zagadnienia brzegowego ze względu na uproszczenie oznaczeń i obliczeń, ale można je uogólnić, np. na równania wyższych rzędów [8].

---

* Problem MR I.1.

1. Uwagi ogólne. Weźmy pod uwagę następujące równanie

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} -u''+bu &= f, \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Będziemy zakładać, że b, f są funkcjami rzeczywistymi, $b \in L^\infty$, $f \in L^2$ oraz $b \geqslant b_0 > 0$. Wówczas istnieje jednoznaczne rozwiązanie należące do $H^2(0, 1)$. Rozwiązanie to można przedstawić w postaci

$$(1.2)\qquad u(t) = \int_0^1 G(t, \tau) f(\tau) d\tau,$$

gdzie $G(t, \tau)$ jest funkcją Greena zadania (1.1). Weźmy pod uwagę klasę takich metod przybliżonych rozwiązywania (1.1), które dają rozwiązanie przybliżone w postaci

$$(1.3)\qquad u_h(t) = \int_0^1 G_h(t, \tau) f(\tau) d\tau,$$

gdzie $G_h(t, \cdot) \in V_h$ $\forall$ $t \in (0, 1)$, przy czym $\{V_h\}$ jest zadaną rodziną podprzestrzeni $L^2(0, 1)$. Przypuśćmy na razie, że klasa tych metod jest niepusta (co zostanie potwierdzone w następnej części pracy).

Dla dowolnej metody z wyżej określonej klasy błąd

$$|u(t) - u_h(t)|.$$

w dowolnym ustalonym punkcie t nie może być mniejszy niż błąd optymalny

$$e_{V_h}(t) := \inf_{v_h \in V_h} \left|\int_0^1 \big(G(t, \tau) - v_h(\tau)\big) f(\tau) d\tau\right|.$$

Zajmijmy się zatem wielkością $e_{V_h}(t)$. Niech Π_{V_h} oznacza rzut ortogonalny w $L^2(0, 1)$ na V_h, a $(\ ,\ )$ i $\|\ \|_0$ iloczyn skalarny i normę w $L^2(0, 1)$. Korzystając z tych oznaczeń oraz z definicji rzutu ortogonalnego, otrzymujemy

$$e_{V_h}(t) = \big((1-\Pi_{V_h})G(t, \cdot), \mathrm{f}\big) = \big((1-\Pi_{V_h})G(t, \cdot), (1-\Pi_{V_h})f\big).$$

Dalej, w zależności od tego, którą z nierówności

$$|(v, z)| \leqslant \|v\|_0 \|z\|_0, \qquad |(v, z)| \leqslant \|v\|_{L^1} \|z\|_{L^\infty}$$

zastosujemy, otrzymujemy oszacowania

$$(1.4)\qquad e_{V_h}(t) \leqslant \|(1-\Pi_{V_h})G(t, \cdot)\|_0 \|(1-\Pi_{V_h})f\|_0$$

lub

$$(1.5)\qquad e_{V_h}(t) \leqslant \|(1-\Pi_{V_h})G(t, \cdot)\|_{L^1} \|(1-\Pi_{V_h})f\|_{L^\infty}.$$

Dla rzutów ortogonalnych w L^2 na podprzestrzenie funkcji przedziałami wielomianowych znane są oszacowania wielkości $\|(1-\Pi_{V_h})v\|$ we wszystkich użytych powyżej normach. Dla sformułowania tych twierdzeń sprecyzujmy oznaczenia. Niech $\Delta = \Delta(h)$ oznacza zbiór węzłów wyznaczających podział odcinka $[0, 1]$, $\Delta = \{x_0, \ldots, x_n\}$. Załóżmy dla prostoty, że jest to podział równomierny, tzn. $x_i = ih$ $(h = 1/n)$, ale dalsze rozważania są prawdziwe również dla podziałów nierównomiernych spełniających warunek

$$\max_{ij}\left((x_i - x_{i-1})/(x_j - x_{j-1})\right) \leqslant c.$$

Niech

$$V_h = S_h(L^2, r) = \{v \in L^2 \colon v \in P_r(x_i, x_{i+1}),\ i = 0, \ldots, n-1\}, \tag{1.6}$$

gdzie $P_r(x_i, x_{i+1})$ oznacza zbiór wielomianów określonych na (x_i, x_{i+1}) stopnia co najwyżej r. Symbole W_p^s, H^s oznaczają, jak zwykle, odpowiednie przestrzenie Sobolewa, a $\| \ \|_{s,p}$ i $\| \ \|_s$ — odpowiadające im normy. Ponadto

$$H_\Delta^s = \{u \in L^2 \colon u \in H^s((x_i, x_{i+1})),\ i = 0, \ldots, n-1\}$$

z normą

$$\|v\|_{\Delta s} = \Big(\sum_{i=0}^{n-1} \|v\|^2_{H^s(x_i, x_{i+1})}\Big)^{1/2}.$$

Zachodzi następująca nierówność ([3] tw. 3.1.6):

$$\|(1 - \Pi_{V_h})v\|_0 \leqslant c(h^{r+1} + h^s)\|v\|_{\Delta s}. \tag{1.7}$$

Π_{V_h} daje optymalną aproksymację nie tylko w przestrzeni L^2, ale także w L^1 i L^∞ ([6]):

$$\|(1 - \Pi_{V_h})v\|_{L^1} \leqslant c(h^{r+1} + h^s)\|v\|_{s,1}, \tag{1.8}$$

$$\|(1 - \Pi_{V_h})v\|_{L^\infty} \leqslant c(h^{r+1} + h^s)\|v\|_{s,\infty}. \tag{1.9}$$

Wobec (1.4), (1.5) i (1.7)-(1.9) oszacowanie $e_{V_h}(t)$ będzie zależało od regularności funkcji G i f.

Zagadnienie (1.1) jest samosprzężone, więc $G(t, \tau) = G(\tau, t)$. Zatem z ogólnego twierdzenia o funkcji Greena dla równań różniczkowych zwyczajnych ([4] tw. VII.2.2) wynika, że dla każdego ustalonego t funkcja $G(t, \cdot)$ jest rozwiązaniem równania jednorodnego $-v'' + bv = 0$ na każdym z przedziałów $(0, t)$ i $(t, 1)$ oraz że pochodna $\partial G/\partial\tau$ ma skok równy 1 w punkcie $\tau = t$. Z założenia o funkcji b wynika, że forma $(u', v') + (bu, v)$ jest H^1-eliptyczna, a więc istnieją w H^1 jednoznaczne rozwiązania (w sensie słabym) v_1, v_2 równania $v'' = bv$ z warunkami $v_1(0) = 1$, $v_1(1) = 0$, $v_2(0) = 0$, $v_2(1) = 1$. Ponieważ $\|v_i''\|_0 \leqslant \|b\|_\infty \|v_i\|_0$, $i = 1, 2$, więc $v_1, v_2 \in H^2$. Na każdym z przedziałów $(0, t)$ i $(t, 1)$, funkcja $G(t, \cdot)$ jest kombinacją liniową v_1 i v_2, a więc

$$G(t, \cdot)|_{(0,t)} \in H^2(0, t), \qquad G(t, \cdot)|_{(t,1)} \in H^2(t, 1).$$

Jeżeli b jest bardziej regularna, tzn. jeżeli $b \in H^{r-1}(\alpha, \beta)$, $r \geqslant 2$, na jakimś przedziale $(\alpha, \beta) \subset (0, 1)$, to korzystając z założenia indukcyjnego $v_i \in H^r(\alpha, \beta)$ $(\subset C^{r-1}[\alpha, \beta])$ oraz z faktów

$$v_i^{(k+1)} = (v_i b)^{(k-1)}, \quad i = 1, 2,$$

$$\|v_i^{(k)} b^{(r-1-k)}\|_0 \leqslant \sup_{x \in (\alpha,\beta)} |v_i^{(k)}| \, \|b^{(r-1-k)}\|_0 \quad \text{dla} \quad k \leqslant r-1,$$

dowodzimy przez indukcję, że $v_i \in H^{r+1}(\alpha, \beta)$. Zatem

$$(1.10) \qquad \begin{aligned} &G(t, \cdot)|_{(0,t)\cap(\alpha,\beta)} \in H^{r+1}\big((0, t) \cap (\alpha, \beta)\big), \\ &G(t, \cdot)|_{(t,1)\cap(\alpha,\beta)} \in H^{r+1}\big((t, 1) \cap (\alpha, \beta)\big). \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę skok pierwszej pochodnej oraz fakt, że na każdym z przedziałów $G(t, \cdot)$ należy co najmniej do H^2, stwierdzamy, że $G(t, \cdot)$ jako funkcja na całym przedziale $(0, 1)$ należy jedynie do $H^1(0, 1)$ (a więc również do $W_1^1(0, 1)$). Jeśli więc t jest punktem węzłowym, to gdy $b \in H_\Delta^{r-1}$, z (1.7) wynika, że

$$\| \, \|(1-\Pi_{V_h})G(t, \cdot)\|_0 \leqslant ch^{r+1}.$$

W przeciwnym przypadku istnieje przedział (x_i, x_{i+1}), w którym $G(t, \cdot)$ należy jedynie do $H^1(x_i, x_{i+1})$. Zatem z (1.7)

$$\|(1-\Pi_{V_h})\, G(t, \cdot)\|_0 \leqslant ch \|G(t, \cdot)\|_{H^1(x_i,x_{i+1})} + \\ + ch^{r+1} \|G(t, \cdot)\|_{H^{r+1}((0,x_i)\cup(x_{i+1},1))} \leqslant ch^{3/2} \|G(t, \cdot)\|_{H^2((0,t)\cup(t,1))}.$$

Korzystając natomiast z (1.8), mamy

$$\|(1-\Pi_{V_h})G(t, \cdot)\|_{L^1} \leqslant ch^2 \|G(t, \cdot)\|_{W_1^2((0,t)\cup(t,1))}.$$

Z (1.4), (1.5) i z powyższych oszacowań wynika następujący wniosek:

Wniosek 1. *Jeżeli $b, f \in H_\Delta^{r-1}$, to dla rodziny $\{V_h\}$ danej przez* (1.6)

$$e_{V_h}(t) \leqslant \begin{cases} ch^{2r}, & \text{gdy} \quad t \in \Delta, \\ ch^{r+1/2}, & \text{gdy} \quad t \notin \Delta, \\ ch^{r+1}, & \text{gdy} \quad t \notin \Delta \ \text{i} \ f \in W_\infty^{r-1}. \end{cases}$$

Zależność od t wynika z faktu, że regularność $G(t, \cdot)$ na podprzedziałach (x_i, x_{i+1}) zależy od położenia t.

Występujące powyżej zjawisko podwyższonego rzędu aproksymacji w węzłach nazywamy *nadzbieżnością*.

Przypuśćmy, że rozwiązanie u równania (1.1) należy do H_Δ^{r+1}, a u_h postaci (1.3) jest dobrą aproksymacją u dającą błąd optymalny, tzn. taki jak we wniosku 1. Okazuje się, że nadzbieżność nie jest własnością tylko tej szczególnej metody. Przekonamy się o tym, badając zaburzenia tej aproksymacji. Zauważmy przede wszystkim, że gdy prawa strona równania (1.1) należy do

H^r_Δ, wówczas zastąpienie jej funkcją $\Pi_{V_h} f$ w (1.3) nie powoduje zmiany rzędu aproksymacji. Mamy bowiem

$$\begin{aligned}\tilde{u}_h(t) &= \big(G_h(t,\cdot), \Pi_{V_h} f\big) = \big(\Pi_{V_h} G_h(t,\cdot), f\big) = \\ &= \big(G_h(t,\cdot), f\big) + \big((\Pi_{V_h}-1)G_h(t,\cdot), (\Pi_{V_h}-1)f\big) = \\ &= u_h(t) + \big((\Pi_{V_h}-1)G_h(t,\cdot), (\Pi_{V_h}-1)f\big),\end{aligned}$$

czyli różnica $u_h(t) - \tilde{u}_h(t)$ jest rzędu błędu optymalnego. Podobnie, pewne zmiany aproksymacji nie wprowadzające zaburzeń w aproksymacji części głównej operatora różniczkowego będą zachowywały nadzbieżność.

Przypuśćmy, że u_h jest postaci (1.3) oraz że u_h i $\tilde{u}_h$ są rozwiązaniami równań przybliżonych

$$-u_h'' + B_h u_h = f_h, \qquad -\tilde{u}_h'' + \tilde{B}_h \tilde{u}_h = f_h,$$

gdzie B_h i $\tilde{B}_h \in \mathscr{L}(L^2)$ (np. dla aproksymacji Galerkina $B_h u_h = \Pi_{V_h}(bu_h)$). Biorąc pod uwagę, że

$$-(u_h - \tilde{u}_h)'' + B_h(u_h - \tilde{u}_h) = (\tilde{B}_h - B_h)\tilde{u}_h$$

oraz założenie, że dla dowolnej prawej strony $f_h \in L^2$ rozwiązanie równania $-v'' + B_h v = f_h$ jest postaci (1.3) z przybliżoną funkcją Greena oznaczoną przez G_h, otrzymujemy

$$\begin{aligned}u_h(t) - \tilde{u}_h(t) &= \big(G_h(t,\cdot), (\tilde{B}_h - B_h)\tilde{u}_h\big) = \\ &= \big(G_h(t,\cdot) - G(t,\cdot), (\tilde{B}_h - B_h)\tilde{u}_h\big) + \big(G(t,\cdot), (\tilde{B}_h - B_h)\tilde{u}_h\big).\end{aligned}$$

Widać więc, że oszacowanie $|u_h(t) - \tilde{u}_h(t)|$ znowu zależy od regularności $G(t,\cdot)$, czyli od położenia punktu t:

$$\big|\big(G(t,\cdot), (B_h - \tilde{B}_h)\tilde{u}_h\big)\big| \leqslant c \begin{cases} \|(B_h - \tilde{B}_h)\tilde{u}\|_{(H^r \cap H_0^1)^*}, & \text{gdy} \quad t \in \Delta, \\ \|(B_h - \tilde{B}_h)\tilde{u}_h\|_{H^{-1}}, & \text{gdy} \quad t \notin \Delta, \end{cases}$$

a norma przestrzeni $(H^r \cap H_0^1)^*$ jest słabsza niż norma w $H^{-1} = (H_0^1)^*$.

2. Metoda Galerkina. Sformułujmy zadanie (1.1) w postaci wariacyjnej:

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{aligned}&\text{wyznaczyć takie } u \in H_0^1(I), \text{ że} \\ &(u', v') + (bu, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(I),\end{aligned}$$

gdzie $I = [0, 1]$, a $H_0^1(I)$ oznacza przestrzeń Sobolewa funkcji zerujących się na brzegu odcinka I, z normą

$$\|v\|_1 = (\|v\|_0^2 + \|v'\|_0^2)^{1/2}.$$

Niech $\{V_h\}$ będzie rodziną skończenie wymiarowych podprzestrzeni przestrzeni H_0^1. Będziemy rozważać następującą aproksymację zadania (2.1):

$$\text{(2.2)} \qquad \begin{aligned}&\text{wyznaczyć } u_h \in V_h \text{ takie, że} \\ &(u_h', v_h') + (bu_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall\, v_h \in V_h.\end{aligned}$$

Niech $\{\psi_{hi}\}_{i=1}^{m}$ będzie bazą przestrzeni V_h. Rozwiązanie przybliżone u_h ma postać

$$u_h = \sum_{j=1}^{m} u_{hj}\psi_{hj},$$

a wektor $U_h = [u_{h1}, \ldots, u_{hm}]^T$ jest rozwiązaniem układu równań algebraicznych

$$M_h U_h = F_h \tag{2.3}$$

z macierzą sztywności

$$M_h = \big((\psi'_{hi}, \psi'_{hj})\big)_{i,j=1}^{m} + \big((b\psi_{hi}, \psi_{hj})\big)_{i,j=1}^{m}$$

i prawą stroną

$$F_h = \big((f, \psi_{hj})\big)_{j=1}^{m}.$$

Przy przyjętym założeniu o dodatniości funkcji b, forma $a(u, v) := (u', v') + (bu, v)$ jest H^1-eliptyczna, a więc forma a obcięta do $V_h \times V_h$ jest V_h-eliptyczna dla każdej podprzestrzeni V_h. Zatem zarówno zadanie (2.2), jak i równoważne jemu równanie algebraiczne (2.3) mają jednoznaczne rozwiązanie. Macierz M_h jest więc nieosobliwa. Oznaczając elementy macierzy odwrotnej przez γ_{hij} $(= (M_h^{-1})_{ij})$, otrzymujemy

$$u_h(t) = \int_0^1 f(\tau) \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \gamma_{hij}\psi_{hj}(\tau)\psi_{hi}(t)\,d\tau. \tag{2.4}$$

Powyższa formuła może być interpretowana jako kwadratura aproksymująca całkę (1.2).

Dalej interesować nas będą tylko szczególne rodzaje podprzestrzeni dające pasmową macierz M_h, mianowicie podprzestrzenie funkcji sklejanych (przedziałami wielomianowych), wspomniane w pierwszej części pracy.

Interesuje nas dokładność, z jaką rozwiązanie przybliżone u_h przybliża rozwiązanie dokładne u w przypadku, gdy metoda (2.2) zdefiniowana jest przez podprzestrzenie postaci

$$V_h = S_h(H_0^1, r) = \{v \in H_0^1 \colon v \in P_r(x_i, x_{i+1}),\ i = 0, \ldots, n-1\}. \tag{2.5}$$

Rozpocznijmy od zbadania różnicy pomiędzy u i u_h w węzłach $x_i \in \Delta(h)$. Wzór na tę różnicę możemy uzyskać prosto w następujący sposób (por. [5]). Przyjmując $v = v_h$ w równaniu (2.1) i odejmując od niego równanie (2.2), otrzymujemy

$$\big((u-u_h)', v_h'\big) + \big(b(u-u_h), v_h\big) = 0 \quad \forall\, v_h \in V_h. \tag{2.6}$$

Między innymi równanie to jest spełnione dla $v_h = K(x_i, \cdot)$

$$K(t, x) = \begin{cases} (1-t)x & \text{dla} \quad x \in [0, t], \\ (1-x)t & \text{dla} \quad x \in [t, 1], \end{cases}$$

ponieważ dla $t = x_i$, $x_i \in \Delta$, $K(x_i, \cdot) \in V_h$. Z drugiej strony, funkcja $K(t, x)$ jest funkcją Greena równania $-y'' = f$, $y \in H_0^1$, więc $\forall\ y \in H_0^1$

$$y(t) = -\int_0^1 K(t, x) y''(x) dx = \big(K'_x(t, \cdot), y'\big).$$

Wobec tego, z (2.6), podstawiając $v_h = K(x_i, \cdot)$, otrzymujemy

$$u(x_i) - u_h(x_i) = -\big(b(u-u_h), K(x_i, \cdot)\big). \tag{2.7}$$

Dla uzyskania poszukiwanego oszacowania rozpatrzmy równanie pomocnicze

$$\begin{cases} -z'' + bz = bK(x_i, \cdot), \\ z(0) = z(1) = 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

które oczywiście ma rozwiązanie $z \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$. Korzystając z niego, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \big(u-u_h, bK(t, \cdot)\big) &= (u-u_h, -z''+bz) = \\ &= (u'-u'_h, z') + \big(b(u-u_h), z\big) = \\ &= (u'-u'_h, z'-v'_h) + \big(b(u-u_h), z-v_h\big) \quad \forall\ v_h \in V_h. \end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika z (2.6). Biorąc pod uwagę (2.7), dochodzimy do oszacowania

$$|u(x_i) - u_h(x_i)| \leqslant c \|u-u_h\|_1 \inf_{v_h \in V_h} \|z-v_h\|_1, \tag{2.9}$$

z którego natychmiast wynika, że rząd zbieżności w węzłach $x_i \in \Delta$ jest wyższy niż rząd zbieżności w normie H^1. Powyższy chwyt z zastosowaniem równania pomocniczego nosi nazwę *chwytu Aubina Nitschego* (por. [3]). Korzystając z H_0^1-eliptyczności formy a, a następnie z (2.6), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|u-u_h\|_1^2 &\leqslant \frac{1}{\beta}\big[(u'-u'_h, u'-u'_h) + \big(b(u-u_h), u-u_h\big)\big] = \\ &= \frac{1}{\beta}\big[(u'-u'_h, u'-v'_h) + \big(b(u-u_h), u-v_h\big)\big] \quad \forall\ v_h \in V_h, \end{aligned}$$

a więc

$$\|u-u_h\|_1 \leqslant c \inf_{v_h \in V_h} \|u-v_h\|_1 \tag{2.10}$$

i różnica w węzłach (por. (2.9)) zależy od własności aproksymacyjnych przestrzeni V_h

$$|u(x_i) - u_h(x_i)| \leqslant c \inf_{v_h \in V_h} \|u-v_h\|_1 \inf_{v_h \in V_h} \|z-v_h\|_1. \tag{2.11}$$

Gdy $r=1$, $\inf\limits_{v_h\in S_h(H_0^1,1)} \|u-v_h\|_1 \leqslant c\|u'-\tilde{v}_h'\|_0$, gdzie $\tilde{v}_h\in S_h(H_0^1, 1)$ oraz $\tilde{v}_h(x_i) = u(x_i)$ $\forall$ $x_i\in\Delta$. Wówczas $\tilde{v}_h'$ jest ilorazem różnicowym na każdym podprzedziale (x_i, x_{i+1}) i wiadomo, że $\|u'-\tilde{v}_h'\|_0 \leqslant ch\|u\|_2$. W ogólności ([3] tw. 3.1.6)

(2.12)
$$\inf_{v_h\in S_h(H_0^1,r)} \|u-v_h\|_1 \leqslant ch^{s-1}\|u\|_{\Delta s} \quad \forall\, s\leqslant r+1.$$

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli $b, f\in H_\Delta^{r-1}$, to istnieje taka stała c niezależna od h, że*
$$|u(x_i)-u_h(x_i)| \leqslant ch^{2r} \quad \forall\, x_i\in\Delta,$$
$$\|u-u_h\|_1 \leqslant ch^r$$
oraz jeżeli $f\in W_\infty^{r-1}$, to
$$\|u-u_h\|_\infty \leqslant ch^{r+1}.$$

Dowód. Pierwsze dwa oszacowania wynikają z (2.10), (2.11) i (2.12) oraz z faktu, że zarówno $u\in H_\Delta^{r+1}$, jak i $z\in H_\Delta^{r+1}$. Oszacowanie w L_∞ uzyskano w pracy [6]. ■

WNIOSEK 2. *Metoda Galerkina generowana przez podprzestrzenie funkcji sklejanych $S_h(H_0^1, r)$ daje błąd tego samego rzędu co błąd optymalny* $e_{V_h}(t)$ (por. wniosek 1).

3. Aproksymacja zewnętrzna. Wykażemy teraz, że własność nadzbieżności zachowuje się, gdy zamiast zadania przybliżonego uzyskanego metodą Galerkina weźmiemy pod uwagę zadanie następującej postaci:

(3.1)
$$\begin{aligned}&\text{wyznaczyć } u_h^e\in V_h, \text{ takie, że}\\ &(u_h^{e\prime}, v_h')+(b\varphi_h u_h^e, \varphi_h v_h) = (f, \varphi_h v_h) \quad \forall\, v_h\in V_h,\end{aligned}$$

gdzie φ_h jest liniowym odwzorowaniem V_h w $L^2(0, 1)$. Ciąg zadań (3.1) może być interpretowany jako aproksymacja zewnętrzna zadania (1.1), ponieważ otrzymuje się go przez zastosowanie aproksymacji zewnętrznej przestrzeni H_0^1 ([1], rozdz. XI.2). Taki rodzaj aproksymacji zewnętrznej Aubin [1] nazywa *aproksymacją częściową.*

W odróżnieniu od rozwiązania przybliżonego u_h otrzymanego w metodzie Galerkina, rozwiązanie równania (3.1) oznaczać będziemy przez u_h^e.

Niech, jak poprzednio, $\{\psi_{hi}\}_{i=1}^m$ będzie bazą przestrzeni V_h oraz niech $U_h^e = [u_{hi}^e]_{i=1}^m$ oznacza wektor złożony ze współczynników rozwinięcia u_h^e w bazie $\{\psi_{hi}\}_{i=1}^m$. Wówczas równanie (3.1) jest równoważne następującemu układowi równań algebraicznych:

(3.2)
$$M_h^e U_h^e = F_h^e$$

z macierzą
$$M_h^e = \big((\psi_{hi}', \psi_{hj}')+(b\varphi_h\psi_{hi}, \varphi_h\psi_{hj})\big)_{i,j=1}^m$$

oraz z prawą stroną

$$F_h^e = [(f, \varphi_h \psi_{hi})]_{i=1}^m .$$

Zauważmy, że przy założeniu $b \geqslant 0$, forma

$$a_h(u_h, v_h) := (u_h', v_h') + (b\varphi_h u_h, \varphi_h v_h)$$

występująca w równaniu (3.1) jest V_h-eliptyczna dla każdej podprzestrzeni V_h. Zatem dla każdego h zadanie (3.1) ma jednoznaczne rozwiązanie u_h^e, co jest równoważne z nieosobliwością macierzy M_h^e w równaniu (3.2). Oznaczając elementy macierzy odwrotnej do M_h^e przez γ_{hij}^e $\left(\gamma_{hij}^e := (M_h^{e^{-1}})_{ij}\right)$, składowe wektora U_h^e możemy napisać następująco:

$$u_{hi}^e = \left(f, \varphi_h \sum_{\nu=1}^m \gamma_{hi\nu} \psi_{h\nu}\right).$$

Zatem

$$u_h^e(t) = \int_0^1 f(\tau) \sum_{i=1}^m \sum_{\nu=1}^m \gamma_{hi\nu}^e \varphi_h \psi_{h\nu}(\tau) \psi_{hi}(t) d\tau, \tag{3.3}$$

czyli metoda opisana przez (3.1) należy do klasy metod rozważanych w części pierwszej.

Porównajmy otrzymane powyżej rozwiązanie przybliżone u_h^e z rozwiązaniem u_h otrzymanym metodą Galerkina (2.2) generowaną przez tę samą rodzinę podprzestrzeni $\{V_h\}$. Oznaczając przez G_h przybliżoną funkcję Greena odpowiadającą metodzie Galerkina (por. (2.4))

$$G_h(t, \tau) = \sum_{i,j=1}^m \gamma_{hij} \psi_{hj}(\tau) \psi_{hi}(t),$$

po prostym przekształceniu otrzymujemy

$$\begin{aligned} u_h(t) - u_h^e(t) &= \left(f, (1-\varphi_h) G_h(t, \cdot)\right) + \\ &+ \left(f, \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\gamma_{hij} - \gamma_{hij}^e) \varphi_h \psi_{hj}(\cdot) \psi_{hi}(t)\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Celem naszym jest teraz oszacowanie każdego ze składników występujących po prawej stronie (3.4).

Ograniczymy się teraz do przypadku, gdy $V_h = H_0^1 \cap S_h(H^2, 2)$ lub $V_h = S_h(H_0^1, 2)$ oraz gdy φ_h jest rzutem ortogonalnym w $L^2(0, 1)$ na $S_h(L^2, 1)$. Z ortogonalności rzutu wynika, że

$$\|(1-\varphi_h) f\|_0 = \operatorname{dist}\left(f, S_h(L^2, 1)\right),$$

a zatem, biorąc pod uwagę własności aproksymacyjne przestrzeni $S_h(L^2, 1)$, otrzymujemy dla $\nu = 0, 1$

$$\|(1-\varphi_h) f\|_\nu \leqslant c h^{2-\nu} \|f\|_{\Delta 2} \quad \forall\ f \in H_\Delta^2. \tag{3.5}$$

Odnotujmy jeszcze jedną własność rzutów φ_h, mianowicie ich wspólną ograniczoność w przestrzeni $L(H^2_\Delta, H^k_\Delta)$ dla dowolnego $k \geqslant 1$. Zauważmy po pierwsze, że dla każdego k $\|\varphi_h f\|_{\Delta k} = \|\varphi_h f\|_{\Delta 1}$, ponieważ $\varphi_h f \in S_h(L^2, 1)$. Przestrzeń H^1_Δ jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym

$$(u, v)_{\Delta 1} = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \big(u'(t)v'(t)+u(t)v(t)\big)dt.$$

A zatem ma sens mówienie o rzucie ortogonalnym $\tilde{\varphi}_h$ w H^1_Δ na $S_h(L^2, 1)$. Norma rzutu ortogonalnego w danej przestrzeni Hilberta jest zawsze równa 1. Ponadto

$$\|(1-\tilde{\varphi}_h)f\|_{\Delta 1} \leqslant \|(1-\varphi_h)f\|_{\Delta 1}.$$

Korzystając z nierówności odwrotnej dla $S_h(L^2, 1)$ ([3], tw. 3.2.6) i z (3.5), otrzymujemy

$$\begin{aligned}\|\varphi_h f\|_{\Delta 1} &\leqslant \|\tilde{\varphi}_h f\|_{\Delta 1} + \|(\tilde{\varphi}_h - \varphi_h)f\|_{\Delta 1} \leqslant \\ &\leqslant \|f\|_{\Delta 1} + \frac{1}{h}\big[\|(\tilde{\varphi}_h - 1)f\|_0 + \|(1-\varphi_h)f\|_0\big] \leqslant c\|f\|_{\Delta 2},\end{aligned}$$

czyli istnieje $c < \infty$ takie, że dla każdego f z H^2_Δ i $k = 1, 2, \ldots$

$$\|\varphi_h f\|_{\Delta k} = \|\varphi_h f\|_{\Delta 1} \leqslant c\|f\|_{\Delta 2}. \tag{3.6}$$

Do dalszych rozważań potrzebna jest znajomość pewnych własności przybliżonej funkcji Greena G_h występującej w (3.4). Zauważmy po pierwsze, że $\forall\, g \in L^2(0, 1)$

$$\big(g, G(t, \cdot) - G_h(t, \cdot)\big) = u_g(t) - u_{hg}(t),$$

gdzie u_g i u_{hg} są odpowiednio rozwiązaniami równań (2.1) i (2.2) z funkcją $f := g$ po prawej stronie. Zatem z oszacowań (2.11) i (2.12) dla $r = 2$ i $s = 2$ wynika, że

$$\big(g, G(x_k, \cdot) - G_h(x_k, \cdot)\big) \leqslant ch^2\|u_g\|_{\Delta 2} \leqslant \tilde{c}h^2\|g\|_0. \tag{3.7}$$

Podstawiając $g = G(x_k, \cdot) - G_h(x_k, \cdot)$, otrzymujemy

$$\|G(x_k, \cdot) - G_h(x_k, \cdot)\|_0 \leqslant \tilde{c}h^2. \tag{3.8}$$

Ponadto można wykazać, że dla każdego punktu węzłowego $x_k \in \Delta$, $\|G_h(x_k, \cdot)\|_{\Delta 2}$ są wspólnie ograniczone niezależnie od h. Mianowicie, biorąc pod uwagę nierówność

$$\|G_h(x_k, \cdot)\|_{\Delta 2} \leqslant \|G_h(x_k, \cdot) - \varphi_h G(x_k, \cdot)\|_{\Delta 2} + \|\varphi_h G(x_k, \cdot)\|_{\Delta 2}$$

oraz stosując nierówność odwrotną dla $S_h(L^2, 2)$ ([3], tw. 3.2.6), a następnie oszacowania (3.5), (3,6) i (3.8), otrzymujemy

$$\|G_h(x_k, \cdot)\|_{\Delta 2} \leqslant c\|G(x_k, \cdot)\|_{\Delta 2} \quad \forall\, h \text{ i } \forall\, x_k \in \Delta. \tag{3.9}$$

LEMAT 1. *Jeżeli* $f \in H^2_\Delta$, *to istnieje stała* C *niezależna od* h *i taka, że dla każdego* h *i dla każdego węzła* $x_i \in \Delta$ *zachodzi nierówność*

$$|(f, (1-\varphi_h)G_h(x_i, \cdot))| \leqslant Ch^4.$$

Dowód. Z definicji rzutu ortogonalnego w L^2 wynika, że dla każdego f, g z $L^2(0, 1)$

$$(\varphi_h f, (1-\varphi_h)g) = 0.$$

Zatem

$$|(f, (1-\varphi_h)G_h(x_i, \cdot))| = |((1-\varphi_h)f, (1-\varphi_h)G_h(x_i, \cdot))| \leqslant$$
$$\leqslant \|(1-\varphi_h)f\|_0 \|(1-\varphi_h)G_h(x_i, \cdot)\|_0.$$

Stosując teraz oszacowania (3.5) i (3.9), otrzymujemy tezę lematu. ∎

LEMAT 2. *Jeżeli* $b \in H^2_\Delta$, *to istnieje stała* c *niezależna od* h *i taka, że dla* h *dostatecznie małego* ($h < h_0$) *i dla każdego węzła* $x_k \in \Delta$ *zachodzi oszacowanie*

$$\Big|\Big(\varphi_h f, \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} (\gamma_{hij} - \gamma^e_{hij})\psi_{hj}(\cdot)\psi_{hi}(x_k)\Big)\Big| \leqslant ch^4.$$

Dowód. Jeżeli przez C_h oznaczymy macierz $(c_{ij})^m_{i,j=1}$, gdzie

$$c_{ij} = \frac{1}{h}[(b\psi_{hi}, \psi_{hj}) - (b\varphi_h\psi_{hi}, \varphi_h\psi_{hj})],$$

to

$$M^e_h = M_h - hC_h$$

oraz

$$M^{e^{-1}}_h = (1 - hM_h^{-1}C_h)^{-1}M_h^{-1}.$$

Zauważmy, że zarówno normy macierzy M_h^{-1}, jak i macierzy C_h są wspólnie ograniczone przez stałe niezależne od h. Zatem dla dostatecznie małego h ($h < h_0$) $\|hM_h^{-1}C_h\| < 1$, a wtedy $M^{e^{-1}}_h$ można rozwinąć w szereg

$$M^{e^{-1}}_h = M_h^{-1} + hM_h^{-1}C_hM_h^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} h^k(M_h^{-1}C_h)^k M_h^{-1}. \tag{3.10}$$

Widać więc, że $\gamma_{hij} - \gamma^e_{hij}$ jest tego samego rzędu względem h, co ij-ty element macierzy $hM_h^{-1}C_hM_h^{-1}$, który można napisać w następujący sposób:

$$(hM_h^{-1}C_hM_h^{-1})_{ij} = h\sum_{k=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{m} \gamma_{hik}c_{k\nu}\gamma_{h\nu j} =$$
$$= \Big(b(1-\varphi_h)\sum_{k=1}^{m}\gamma_{hik}\psi_{hk}, \sum_{\nu=1}^{m}\gamma_{h\nu j}\psi_{h\nu}\Big) +$$
$$+ \Big(b\varphi_h\sum_{k=1}^{m}\gamma_{hik}\psi_{hk}, (1-\varphi_h)\sum_{\nu=1}^{m}\gamma_{h\nu j}\psi_{h\nu}\Big).$$

Korzystając z wprowadzonego wyżej oznaczenia $G_h(t, \tau)$ i zmieniając kolejność całkowania, otrzymujemy

$$\int_0^1 \varphi_h f(\tau) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (hM_h^{-1} C_h M_h^{-1})_{ij} \psi_{hi}(x_k) \psi_{hj}(\tau) d\tau =$$

$$= \Big(b(1-\varphi_h) G_h(x_k, \cdot) + (1-\varphi_h) b G_h(x_k, \cdot), \int_0^1 \varphi_h f(\tau) G_h(\cdot, \tau) d\tau\Big).$$

Ponieważ φ_h jest rzutem ortogonalnym, więc prowadzi to do następującej nierówności:

$$(3.11)\qquad \Big|\int_0^1 \varphi_h f(\tau) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (hM_h^{-1} C_h M_h^{-1})_{ij} \psi_{hi}(x_k) \psi_{hj}(\tau) d\tau\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \|(1-\varphi_h) G_h(x_k, \cdot)\|_0 \Big\|(1-\varphi_h) b \int_0^1 \varphi_h f(\tau) G_h(\cdot, \tau) d\tau\Big\|_0 +$$

$$+ \|(1-\varphi_h) b G_h(x_k, \cdot)\|_0 \Big\|(1-\varphi_h) \int_0^1 \varphi_h f(\tau) G_h(\cdot, \tau) d\tau\Big\|_0.$$

Z faktu, że

$$\tilde{u}_h = \int_0^1 \varphi_h f(\tau) G_h(\cdot, \tau) d\tau$$

jest rozwiązaniem równania (2.2) z prawą stroną $(\varphi_h f, v_h)$, a więc jest aproksymacją Galerkina dokładnego rozwiązania $\tilde{u}$ równania (1.1) z prawą stroną zastąpioną $\varphi_h f$, wynika jednostajna względem h ograniczoność $\tilde{u}_h$ w normie H_Δ^2. Biorąc ponadto pod uwagę (3.9) oraz założenie $b \in H_\Delta^2$ i stosując oszacowania (3.5) do (3.11), stwierdzamy, że wyrażenie stojące po lewej stronie nierówności (3.11) jest rzędu $O(h^4)$. Ponieważ $\gamma_{hij} - \gamma_{hij}^e = (1+O(h))(hM_h^{-1} C_h M_h^{-1})_{ij}$, więc daje to już tezę lematu 2. ∎

Oszacowania uzyskane w lematach 1 i 2 prowadzą do następującego wniosku:

Twierdzenie 2. *Jeżeli $b, f \in H_\Delta^2$ i u_h^e jest rozwiązaniem równania* (3.1) *generowanego przez podprzestrzeń $V_h = H_0^1 \cap S_h(H^2, 2)$ lub $V_h = S_h(H_0^1, 2)$ oraz rzut ortogonalny φ_h na $S_h(L^2, 1)$, to dla każdego węzła x_k*

$$|u_h^e(x_k) - u(x_k)| \leqslant ch^4.$$

Dowód. Oczywiste jest, że

$$|u_h^e(x_k) - u(x_k)| \leqslant |u_h(x_k) - u(x_k)| + |u_h^e(x_k) - u_h(x_k)|.$$

Pierwszy ze składników stojących po prawej stronie jest, na mocy twierdzenia 1, rzędu $O(h^4)$. Z (3.4) i z lematów 1 i 2 wynika, że również i drugi składnik jest rzędu $O(h^4)$, co kończy dowód. ∎

Uwaga 1. Silniejsze niż w twierdzeniu 1 założenia dotyczące regularności b i f (H_Δ^2 zamiast H_Δ^1) wynikają z żądania, aby $\|(1-\varphi_h) f\|_0$ i $\|(1-\varphi_h) b\|_0$ były rzędu $O(h^2)$. W metodzie Galerkina wyrażenia te znikają ($\varphi_h = 1$).

Powyżej udowodniliśmy nadzbieżność dla pewnej szczególnej metody aproksymacji zewnętrznej zadania (1.1). Wynik ten został uogólniony w pracy [8] na równania wyższych rzędów i aproksymacje związane z rzutami nieortogonalnymi. Dla sformułowania ogólniejszego wyniku dla zadania (1.1) wprowadźmy następujące podprzestrzenie związane z rodziną rzutów $\{\varphi_h\}$:

$$N(\varphi_h) = \{v \in L^2 \colon \varphi_h v = 0\},$$

$$W_h = \{w \in L^2 \colon (w, v) = 0 \ \forall \ v \in N(\varphi_h)\}.$$

Widać, że $W_h \perp N(\varphi_h)$ i w przypadku gdy φ_h jest rzutem ortogonalnym, $W_h = \varphi_h L^2$.

TWIERDZENIE 3. *Niech u_h^e będzie rozwiązaniem równania* (3.1) *generowanego przez podprzestrzeń V_h i rzut φ_h spełniające następujące warunki*:

(i) $$\inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_1 \leqslant ch^s \|v\|_{\Delta s+1},$$

(ii) $$\|(1-\varphi_h)v\|_0 \leqslant ch^k \|v\|_{\Delta k}, \quad k = 1, \ldots, s,$$

(iii) $$\inf_{w \in W_h} \|v - w\|_0 \leqslant ch^l \|v\|_{\Delta s}, \quad l \leqslant s.$$

Jeżeli $b, f \in H_\Delta^s$, to $\forall \ x_k \in \Delta$

$$|u(x_k) - u_h^e(x_k)| \leqslant ch^{s+l}$$

oraz

$$\|u - u_h^e\|_1 \leqslant ch^s \|u\|_{\Delta s+1}.$$

Dowód wynika z twierdzeń 1 i 2 w pracy [8]. Metoda dowodu polega na bezpośrednim badaniu różnicy $u - u_h^e$. ∎

Na zakończenie powróćmy do przypadku, gdy $V_h = S_h(H^2, 2) \cap H_0^1$, a φ_h jest rzutem ortogonalnym na $S_h(L^2, 1)$. Dla wyznaczenia macierzy sztywności i prawej strony w układzie $M_h^e U_h^e = F_h^e$, musimy znać $\varphi_h \psi_{hi}$, $i = 1, \ldots, n$. Weźmy bazę ψ_{hi} daną wzorami

$$\psi_{hi} = \psi\left(\frac{x}{h} - i + 2\right), \quad i = 2, \ldots, n-1,$$

$$\psi_{h1} = \psi_1\left(\frac{x}{h}\right), \quad \psi_{hn} = \psi_2\left(\frac{x}{h} - n + 2\right),$$

gdzie

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & x \in (0, 1), \\ \frac{3}{4} - (x - \frac{3}{2})^2, & x \in (1, 2), \\ \frac{1}{2}(3-x)^2, & x \in (2, 3), \end{cases}$$

$$\psi_1(x) = \begin{cases} 3x - \frac{9}{4}x^2, & x \in (0, 1), \\ \frac{3}{4}(2-x)^2, & x \in (1, 2), \end{cases}$$

$$\psi_2(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x^2, & x \in (0, 1), \\ \frac{3}{4}(x-2)(2-3x), & x \in (1, 2). \end{cases}$$

Wówczas z warunku ortogonalności łatwo obliczyć, że

$$\varphi_h\psi_{hi}(x) = \left[-\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{h}-i+2\right)\right]\chi\left(\frac{x}{h}-i+2\right)+$$

$$+\frac{2}{3}\chi\left(\frac{x}{h}-i+1\right)+\left[\frac{5}{12}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{h}-i\right)\right]\chi\left(\frac{x}{h}-i\right), \quad i = 2, \ldots, n-1,$$

$$\varphi_h\psi_{h1}(x) = \left[\frac{3}{8}+\frac{3}{4}\frac{x}{h}\right]\chi\left(\frac{x}{h}\right)+\left[\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\left(\frac{x}{h}-1\right)\right]\chi\left(\frac{x}{h}-1\right),$$

$$\varphi_h\psi_{hn}(x) = \left[-\frac{1}{8}+\frac{3}{4}\left(\frac{x}{h}-n+2\right)\right]\chi\left(\frac{x}{h}-n+2\right)+$$

$$+\left[\frac{9}{8}-\frac{3}{4}\left(\frac{x}{h}-n+1\right)\right]\chi\left(\frac{x}{h}-n+1\right).$$

Zauważmy na koniec, że do wyznaczenia macierzy w układzie równań algebraicznych odpowiadających zadaniu (3.1) potrzebna jest mniejsza liczba operacji, niż to było w przypadku metody Galerkina. Mianowicie, gdy V_h i φ_h są zdefiniowane jak wyżej, wtedy w M_h^e i F_h^e występuje łącznie $5n$ całek postaci

$$\int_{ih}^{(i+1)h} x^k b(x)dx, \quad i = 0, \ldots, n-1, \; k = 0, 1, 2;$$

$$\int_{ih}^{(i+1)h} x^l f(x)dx, \quad i = 0, \ldots, n-1, \; l = 0, 1,$$

podczas gdy do obliczenia M_h i F_h odpowiadających metodzie Galerkina potrzeba $8n$ całek powyższej postaci, tzn. dla $i = 0, \ldots, n-1$, $k = 0, \ldots, 4$, $l = 0, 1, 2$. W innych metodach zewnętrznych typu (3.1) również występują podobne obliczeniowe udogodnienia.

Bibliografia

[1] J. P. Aubin, *Approximation of elliptic boundary-value problems*, Wiley-Interscience 1972.

[2] C. de Boor, B. Swartz, *Collocation at Gaussian points*, SIAM J. Numer. Anal. 10 (1973), 582-606.

[3] P. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland Publishing Company 1978.

[4] E. A. Coddington, N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, Mc Graw-Hill Book Company 1955.

[5] J. Douglas, T. Dupont, *Some superconvergence results for Galerkin methods for the approximate solution of two-point boundary problems. Topics in numerical analysis* — Proceedings of the Royal Irish Academy Conference on Numerical Analysis (1973), 88-92.

[6] J. Douglas, T. Dupont, L. Wahlbin, *Optimal L_∞ error estimates for Galerkin*

approximations to solutions of two-point boundary value problems, Math. Comput. 29 (1975), 475-483.

[7] M. Křížek, P. Neittaanmäki, *On superconvergence techniques*, Preprint 34, University of Jyväskylä 1984.

[8] T. Regińska, *Error estimates for external approximation of ordinary differential equations and the superconvergence property* Aplikace Mat. (1988).