ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria III: MATEMATYKA STOSOWANA XXIX (1987)

MARIA Z. WESOŁOWSKA (Warszawa)

O szeregach czasowych. Na marginesie skryptu *Analiza szeregów czasowych* pod redakcją Władysława Milo

(*Praca wpłynęła do Redakcji 1985.03.28*)

Time is perhaps the most mysterious thing in mysterious universe.

M. G. Kendall

W Wydawnictwie Uniwersytetu Łódzkiego w 1983 r. ukazał się skrypt pod redakcją Władysława Milo *Analiza szeregów czasowych.* W języku polskim podręczników i monografii o szeregach czasowych jest bardzo mało – oryginalnie polskiego opracowania (z wyjątkiem prac szczegółowych i skryptów przeznaczonych praktycznie na użytek jednej uczelni lub nawet jednego wykładu) nie ma wcale. Być może więc nie stało się źle, że Redakcja postanowiła zwrócić uwagę na nowy skrypt mający w tytule zapowiedź analizy szeregów czasowych, chociaż, jak sądzę, jest to skrypt również przeznaczony na użytek jednego wykładu i traktuje nie tyle o szeregach czasowych, ile o pewnych zagadnieniach procesów stochastycznych i pewnych statystycznych aspektach budowy modeli ekonometrycznych. Niestety, po przeczytaniu tego skryptu niewiele dobrego można o nim powiedzieć. Może więc raczej zacznę od kilku uwag, jakie nasuwają się przy lekturze tej pracy.

Przede wszystkim uwaga o nazwie *szereg czasowy.* O czym właściwie traktuje teoria szeregów czasowych? Co ją wyróżnia spośród innych nauk, a co i z jakimi dziedzinami wiąże?

Teoria szeregów czasowych stała się dziedziną matematyki – z tego co wiemy – w 1932 r. W tym to roku A. N. Chinczyn w artykule zamieszczonym w pracy Sulle Succesioni Stationare di Everti Giorn. Inst. Ital. Attuari 3, 1932 zaproponował, aby szereg czasowy, tj. liczbowy, uporządkowany w czasie i skończony zbiór obserwacji $x_1, \ldots, x_n$ zjawiska, o którym twierdzimy, że jest losowe, traktować jako wartości w chwilach $t_1, \ldots, t_n$ zmiennych losowych $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ tworzących proces stochastyczny $\{X_t, t \in T\}$. Dzięki temu odkryciu można było w badaniach szeregów czasowych zastosować cały bogaty już wówczas aparat teorii prawdopodobieństwa. Co więcej, na gruncie teorii prawdopodobieństwa analiza szeregów czasowych nabrała szczególnej głębi dzięki pracy N. Kołmogorowa z 1933 r., w której podał on tzw. warunki zgodności i symetrii, które gdy są spełnione, gwarantują, że łączny rozkład prawdopodobieństwa n-wymiarowych zmiennych losowych tworzących proces $\{X_t, t \in T\}$ jednoznacznie wyznacza strukturę probabilistyczną tego procesu; jednoznacznie wyznacza ten proces.

Jednakże szeregi czasowe analizowano za pomocą metod matematyki znacznie wcześniej: przynajmniej od roku 1807 – od chwili, gdy J. Fourier udowodnił, że wartości szeregu czasowego mogą być z dowolną dokładnością aproksymowane przez sumy harmoniczne postaci

$$X_t = \sum_i a_i \cos \frac{2\pi t}{T} i + \sum_j b_j \sin \frac{2\pi t}{T} j$$

odpowiednio dużej liczby składników. Nie można tego sprawdzić tutaj u samych źródeł, gdyż w polskich bibliotekach nie ma publikacji tak wczesnych, ale z informacji z drugiej ręki, z artykułów późniejszych (np. Schustera z 1906 r. Phil. Trans. A 206) wiemy, że zainteresowania Fouriera dotyczyły nie byle jakich funkcji i ich zastępowania szeregami harmonicznymi, ale właśnie szeregów czasowych (chociaż zdaje się, że jeszcze wówczas nie używano tej nazwy). W każdym razie, chodziło o badanie zjawisk przebiegających w czasie, obserwowanych w skończonej liczbie punktów czasu, o doświadczenia, których nie można powtórzyć, w odróżnieniu np. od doświadczenia polegającego na losowych rzutach monetą (a więc jedyność próby), o zjawiska niemożliwe do przewidzenia dokładnie, ale niekoniecznie losowe – chociaż nieustanne rozróżnienia: deterministyczne – losowe, tak charakterystyczne dla naszych czasów, wówczas nie były brane pod uwagę na gruncie nauk przyrodniczych i matematycznych. Takimi zjawiskami były na przykład zjawiska astronomiczne – ruchy komet, aktywność Słońca itp. Szczególnie „w modzie" były badania aktywności Słońca i być może za początek matematycznej teorii szeregów czasowych należy jednak uznać rok 1801 – rok, w którym Herschel opublikował pracę na temat wykrywania w przebiegu zjawisk ukrytej okresowości i obliczania długości tych okresów. Tytuł tej pracy: *Observations tending to investigate the nature of the sun* (Phil. Trans. of Royal Society of London 1801 r.) świadczy o tym, że głównym przedmiotem zainteresowań Herschela były badania nad cyklicznością aktywności Słońca. Można by więc może powiedzieć, że szeregi czasowe narodziły się na Słońcu?

Jednakże M. G. Kendall (por. *Time Series* 1973 r.) datę pojawienia się na świecie szeregów czasowych przesuwa jeszcze dalej w przeszłość – tysiąc lat wstecz. W X, a bodaj nawet już w IX w. mnisi w zakonach chrześcijańskich notowali swe pieśni w postaci graficznej szeregów czasowych. Na 11-liniowej „pięciolinii", której równe odcinki odpowiadały równym przedziałom czasu, wysokość tonu zaznaczano, umieszczając gwiazdkę na odpowiedniej linii. Jeśli zaś za szeregi czasowe uznać w różny sposób zapisywane np. obserwacje zjawisk astronomicznych dokonywane „w czasie", to można by powiedzieć, że już starożytni Rzymianie, Grecy, a może nawet Babilończycy czy Egipcjanie...

Nie są to być może stwierdzenia niewątpliwe, natomiast z pewnością można stwierdzić, że badania nad cyklicznością „zjawisk naturalnych" – jak wtedy mówiono – po 40 latach od Herschela doprowadziły do wypracowania pierwszej matematycznej metody obliczania długości cyklu zjawisk o ukrytej periodyczności: budowy tzw. tablic Buysa–Ballota (1847 r.). Metoda ta szczególnie dla „długich" prób była bardzo pracochłonna. Polega ona w skrócie na tym, że dane doświadczenia dzielono na pewną ilość grup; liczbę elementów w grupie ustalano według oczekiwanej długości cyklu. Następnie obliczano średnią arytmetyczną pierwszych elementów w grupie, średnią wszystkich drugich elementów, trzecich itd. Znajdowano potem odchylenia każdej ze znalezionych średnich od średniej ogólnej. Następnym krokiem było założenie, że długość cyklu jest najpierw krótsza, a potem, że jest dłuższa od pierwszej długości branej pod uwagę w pierwszym kroku i wszystkie obliczenia powtarzano od początku. Za poszukiwaną długość cyklu uważano tę, dla której odchylenia najlepiej pasowały do średniej ogólnej.

Po następnych 30 latach Stokes (G. C. Stokes, *Note on the raport of the comittee on solar physics*, Proc. the Royal Society 29 (1887)) zaproponował, aby do wyznaczania długości okresu zastosować współczynniki a_i, b_i szeregu Fouriera – długość okresu, dla której suma kwadratów jest najmniejsza, należy uznać za właściwą długość cyklu. Była to metoda być może nie mniej pracochłonna niż poprzednio opisane tablice Buysa–Ballota, ale przed analizą szeregów czasowych otworzyła nowe horyzonty – prowadziła do odkrycia periodogramu. Schuster w swej pracy z 1906 r., dotyczącej także obliczania i przewidywania długości cyklu w aktywności Słońca, stosuje już szeroko analizę periodogramu. Jednakże w tej samej pracy Schuster zauważa, że w tej metodzie periodogramu jest coś nie tak, gdyż jeśli dane podzielić na pół i na ich podstawie zbudować periodogramy, wyniki jakie uzyskujemy mogą być zupełnie różne.

Przez następnych dwadzieścia lat periodogram był nieustannie krytykowany (por. np. pracę Beveridge z 1922 r.) i jednocześnie stosowany jako jedyna, obok tablic Buysa–Ballota, metoda wykrywania i badania periodyczności zjawisk. Dopiero Yule w pracach z lat 1926 i 1927 nadał teorii szeregów czasowych nowy impuls do rozwoju, wpadając na pomysł autokorelacji.

W pracy opublikowanej w 1926 r. Yule przede wszystkim pokazał, że założenie w analizie periodogramu, o tym, że amplitudy $\sqrt{a_i^2+b_i^2}$ i okresy w szeregu harmonicznym Fouriera są stałe, dla zjawisk dziejących się w świecie rzeczywistym nie jest spełnione. W artykule z 1927 r. Yule zaproponował, aby wobec tego, do opisu tych zjawisk zastosować raczej szereg harmoniczny „zakłócony", gdzie okresy i amplitudy są zmienne w czasie i gdzie dodany jest składnik uwzględniający wartości, jakie szereg czasowy przyjmował w „przeszłości". Pięć lat później – jak już wspomniałam w 1932 r. – szeregi czasowe przeistoczyły się w „ucięte" realizacje procesów stochastycznych i od tej chwili teoria szeregów czasowych stała się właściwie działem teorii procesów stochastycznych. Deterministyczna analiza szeregów czasowych praktycznie przestała istnieć.

Jakie jest współczesne rozumienie przedmiotu badań teorii szeregów czasowych – zdaje się, że nikt dokładnie nie wie.

Ze względu na to, że szeregi czasowe uważamy za realizację procesów stochastycznych, monografie, których tytuły zapowiadają, że rzecz będzie o szeregach czasowych są czasem pełnym wykładem teorii procesów stochastycznych, np. M. G. Kendall, *Time Series* (1973), H. Wold, *A Study on the Analysis of Stationary Time Series* (1954). W niektórych przypadkach tytuły Time Series kryją prace o procesach stochastycznych o czasie skokowym – o ciągach losowych. Na przykład E. J. Hannan, *Time Series Analysis* (1960), G. E. Box, G. M. Jenkins, *Time Series Analysis* (1970), T. W. Anderson, *The Statistical Analysis of Time Series* (1971).

Najwięcej wątpliwości budzi przypisywanie nazwy: *analiza szeregów czasowych* zagadnieniom statystyki procesów stochastycznych i zagadnieniom budowy i estymacji modeli ekonometrycznych. Zagadnienia te nie są bowiem analizowaniem szeregu czasowego, ale wnioskowaniem statystycznym na podstawie szeregu czasowego; szereg czasowy spełnia tu rolę próby losowej, tak jak jest ona rozumiana na gruncie statystyki matematycznej, a więc, jeśli nawet nie przy założeniu, że jest to próba „generowana" przez niezależne zmienne losowe o identycznych rozkładach, to w każdym razie przy założeniu, że mamy do czynienia ze zjawiskami masowymi, z doświadczeniami powtarzalnymi – ze zdarzeniami, których prawdopodobieństwo ma interpretacje i intuicje częstościowe. Szereg czasowy, w takim znaczeniu tej nazwy, jakie było kształtowane od początków XIX w., tych założeń nie spełnia. Szereg czasowy jest jedyną realizacją danego procesu, jest wynikiem obserwacji zjawisk niepowtarzalnych, takich jak np. fluktuacje aktywności Słońca, zjawiska ekonomiczne, zjawiska społeczne itp.

Co więc jest analizą szeregów czasowych bez żadnych wątpliwości? Na pewno to, co wynika z samej nazwy: analizowanie danych doświadczenia pod kątem wykrycia na ich podstawie głównych charakterystyk szeregu czasowego, a więc wykrycie okresowości (dziś raczej mówimy: sezonowości), obliczanie długości okresu, częstotliwości, amplitud i faz w harmonicznym przedstawieniu szeregu, badanie stacjonarności zjawiska, oddzielanie z procesu tzw. szumu, części losowej. Także dokonywanie prognozy i filtracji procesu – jednakże te zagadnienia mieszczą się w ramach „ortodoksji" teorii szeregów czasowych do momentu, w którym „prawdziwe" wartości i charakterystyki procesu i zmiennych losowych wchodzących w jego skład nie zostają zastąpione ich estymatorami.

Analiza szeregów czasowych dokonywana jest klasycznie w dwojaki sposób: przez badanie procesu stochastycznego „po czasie", a więc poprzez badanie własności funkcji kowariancji procesu, lub „po przestrzeni" (inaczej po częstotliwościach), tj. poprzez badanie własności funkcji gęstości spektralnej procesu. Twierdzenia, orzekające o tym, że obie funkcje: kowariancji i gęstości spektralnej dają tyle samo i te same informacje o procesie, mają w tej teorii podstawowe znaczenie.

Klasycznych technik badawczych możemy tu wyróżnić pięć: pierwsza i ogromnie popularna w latach 70 naszego stulecia to tzw. schematy autokorelacji i średnich ruchomych (od chwili ukazania się książki Boxa i Jenkinsa w 1970 r. najczęściej nazywane modelami ARMA i ARIMA). Druga technika to stosowanie tzw. modeli transfer-function zakładających zależność pomiędzy dwoma procesami w postaci równania różnicowego:

$$Y_t+\beta_1 Y_{t-1}+ \dots +\beta_5 Y_{t-5} = \alpha_0 X_{t-5}-\alpha_1 X_{t-s-1}- \dots -\alpha_r X_{t-s-r},$$

gdzie X_t jest procesem wejściowym (input process), a Y_t procesem na wyjściu (output process).

Trzecia, to technika stosowania filtrów, przede wszystkim filtrów Wienera-Kołmogorowa, Kalmana, Kalmana-Bucy'ego.

Technika czwarta to metody „wygładzania" (smoothing methods) – różne metody wygładzania wykładniczego, wygładzania liniowe, kwadratowe jedno lub wieloparametrowe, harmoniczna metoda Harrisona (1965), metoda wychładzania współczynników sezonowości itp.

I wreszcie piąta technika to metody dekompozycji procesu, „rozłamywanie" procesu na części: cykliczną, nieregularną, czysto losową, deterministyczną, wydzielanie trendu wysokich, dużych częstotliwości itp.

Tak mniej więcej w grubym zarysie przedstawia się klasyka teorii szeregów czasowych. Skrypt *Analiza szeregów czasowych* pomija prawie wszystkie z tych zagadnień lub traktuje je – jak np. analizę harmoniczną procesów – w sposób wielce niedostateczny. Pewne elementy analizy szeregów czasowych można jednak w nim znaleźć i w końcu nie tytuł jest tu najważniejszy. Ważniejszy problem to sprawa przydatności skryptu w pracy dydaktycznej. Główna uwaga, jaka się nasuwa po przeczytaniu skryptu to ta, że na to, aby zrozumieć, o czym jest mowa w skrypcie *Analiza szeregów czasowych*, trzeba naprawdę nieźle znać teorię szeregów czasowych, a także statystykę, ekonometrię i teorię procesów stochastycznych. Jeśli czytelnik zechce się czegoś dowiedzieć, na przykład na temat prognozy dokonywanej w oparciu o analizę szeregów, to aby zrozumieć, co to jest prognoza, jaka jest jej definicja, na jakie pytania jest odpowiedzią, jakie są metody prognozowania, jak należy ocenić wyniki uzyskane tymi metodami – będzie musiał sięgnąć po inną książkę. Ale jeśli już z innej książki tego się dowie, to nie ma po co wracać do skryptu, gdyż nie dowie się z jego lektury niczego więcej; nie ma tu nowych w tej dziedzinie tzw. wyników własnych. Własnych jest kilka twierdzeń o własnościach estymatorów parametrów „modeli liniowych" (wcześniej już przez autorów opublikowanych.) Sięganie po uzupełniające wiadomości do innych podręczników jest tu ponadto bardzo utrudnione przez to, że skrypt jest hermetyczny. Jest to moim zdaniem duża wada podręcznika, gdy nie da się z niego korzystać w ten sposób, że czytelnik zainteresowany pewnym hasłem (a mający tzw. rozeznanie w tematyce) wyszukuje dane hasło w skorowidzu, zagląda na odpowiednią stronę i rozumie o czym się tu pisze bez dodatkowego słownika i bez konieczności studiowania książki od jej pierwszych rozdziałów.

Autorzy skryptu proponują nową notację: „syntetyczny, formalnologiczny" (por. str. 15) zapis „modeli". Zapisy te wzorowane na zapisach tzw. modeli statystycznych spopularyzowanych przez monografię Barry *Matematyczne podstawy statystyki*, w tym przypadku, to jest zastosowane do modeli ekonometrycznych i do procesów stochastycznych i szeregów czasowych, nie tylko nie czynią tej notacji wygodniejszą, ale ją komplikują.

À propos słowa model, to w skrypcie nie tylko brak definicji czy choćby wyjaśnienia tego terminu, ale pojęcie to jest mocno nadużywane. Często używa się wyrażenia „model trendu", ale także model wahań, model szeregu czasowego – najczęściej chodzi o model ekonometryczny, w tym sensie, w jakim rozumie się ten termin w ekonometrii (ale to nigdzie nie jest powiedziane). Jeśli chodzi o wyrażenie „model trendu", to także brak jest dostatecznie ścisłego lub choćby dostatecznie jasnego określenia, co to jest trend. Na stronie 15 czytamy: „słowo trend oznacza ogólny kierunek zmian lub tendencję rozwojową". W następnym zdaniu jest już mowa o „wyrażeniu opisującym wahania wokół trendu procesu Y", a „trend w procesie, to ... część systematyczna procesu". Co to jest część systematyczna procesu? Jeśli tego się nie wyjaśni, to zdanie: „wahania wokół ogólnego kierunku zmian, czy wokół części systematycznej procesu" nie ma żadnej konkretnej treści. Tym bardziej, że nie wiadomo, co się waha.

Tekst jest przeładowany znaczkami – czyta się go jak książkę buchalteryjną. Na przykład (str. 39) „Z określeń Y, B_1, Y_1, $T^0 MA \operatorname{tg}_1 W$, tw. 1.2.8, tw. 1.2.10, wn. 1.2.10, tw. 2.1.1. i określania MSE wynika tw. 2.1.5 ..." następuje 9 wierszy samych symboli. Dalej jest twierdzenie 2.1.6 podobnie numerkami zredagowane i uwaga: „Dowód tw. 2.1.6 jest analogiczny do dowodu tw. 2.1.5" – ale wcale nie było dowodu tw. 2.1.5.

Upodobanie do tych znaczków prowadzi do takiej na przykład ... przesady: zamiast zapisu ARMA, który jest zrozumiały raczej dla wszystkich, którzy wiedzą, co to jest proces ARMA (a jeśli nie wiedzą, to ze skryptu tego się nie dowiedzą), stosuje się zapis:

$$T^0 MAG_2 W = (R^{n\times k}, \lambda', Y = Y_{-\alpha} + x\beta_r E, E = E_{-}\gamma + \mu, \varepsilon Y = \\ = \mathfrak{M}\alpha + x\beta + \varepsilon(E), D(Y) = \Omega\omega).$$

Wyjaśnienie tego, co te wszystkie literki oznaczają zajęłoby chyba całą stronę. Skrypt jest wypełniony znaczkami, niestety na niekorzyść treści — właściwie jest pozbawiony treści; pisany jest przez wyliczenia faktów i nazw. Przytoczono wiele wyników: testów, estymatorów, predyktorów, twierdzeń orzekających o ich własnościach (niestety na ogół bez dowodów i nie zawsze ze wskazaniami, gdzie szukać brakujących dowodów) — ale o tym, co to jest, do czego to pasuje, gdzie i kiedy się stosuje, czy w ogóle się stosuje, a jeśli tak, to przy jakich założeniach — tego nie ma. Wybrane suche fakty, o których nie bardzo jasno wiadomo, w jaki sposób wiążą się już nie tylko z praktyką, ale także z teorią: teorią procesów stochastycznych, ekonometrii, statystyką itp.

Na przykład, w rozdziale szumnie zatytułowanym „analiza spektralna szeregów czasowych" mamy podanych kilka wybranych faktów dotyczących estymacji funkcji gęstości spektralnej. Ale najpierw rozdział zaczyna się od przypomnienia, co to jest liczba zespolona (!), sprzężenie liczby zespolonej, wzory Eulera — za to nie ma definicji funkcji gęstości spektralnej; nic nie pisze się o jej własnościach, poza tym, że: „...między funkcjami gęstości spektralnej i kowariancji istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość. Przewaga funkcji $f(\cdot)$ polega na tym, że jest ona określona w przedziale $(-\pi, \pi)$, podczas gdy $K(j)$ w przedziale $(-\infty, \infty)$" (!). Drugie z tych zdań jest, trzeba przyznać, dość zdumiewające. Następuje krytyka estymatora funkcji f, o którym nie wiadomo, skąd się wziął, twierdzenie o własnościach innego estymatora, enigmatyczne stwierdzenia, że ten estymator może być „ze względu na pewne własności okien" (jakie? co to jest okno?) mocno zniekształcony (co to znaczy zniekształcony?), że wtedy stosuje się filtr liniowy, definicja filtru i na tym koniec rozdziału. Chciałoby się zadać tutaj bardzo wiele pytań, np. co się staje z tym złym estymatorem po zastosowaniu filtru liniowego? itp.

Autorzy kilkakrotnie skarżą się na brak miejsca, a przeznaczają je na wykład wiadomości elementarnych (jak choćby właśnie o liczbach zespolonych), bez znajomości których doprawdy nieprawdopodobne, aby ktokolwiek rozpoczynał czytanie pracy o szeregach czasowych. Rozdział I liczący 20 stron jest najbardziej wyraźnym przykładem takiego marnotrawstwa miejsca. Poza tym, że szkoda miejsca, to trudno się powstrzymać z uwagą, że jeśli książka o — jakby nie było — procesach stochastycznych zaczyna się od określenia i pięciu przykładów (z których jeden jest błędny) pierścienia zbiorów, to nie wróży to niczego dobrego. I rzeczywiście, nad rozdziałem I można by się znęcać w sposób dowolnie okrutny (pięć definicji zmiennej losowej — trzy z nich błędne merytorycznie). Autor do swego dzieła ma zwykle uczucia tak ciepłe, jak do własnego dziecka i być może, że czasem ucierpi na tym jego krytycyzm, ale dziwić się należy, że takie rzeczy „przechodzą" przez recenzje.

Język, jakim pisany jest skrypt, jest bardzo brzydki. Przykłady: „Ze względu na ograniczenia w bilansie stron tego rozdziału i książki zrezygnowaliśmy z podejścia Fisza" (str. 20); „Stanowi ono niezbędne ogniwo o podłożu empiryczno-intuicyjnym pierwszej warstwy struktury logiczno-formalnej pojęć probabilistycznych" (mowa o określeniu zdarzenia losowego) lub: „Zastosowanie procedury testowej potwierdza istotność autokorelacji w modelu na poziomie istotności $\alpha = 0 = 05$" (str. 209). Język jest nie tylko brzydki, ale nonszalancki w stosunku do terminów – szczególnie pojęcia topologiczne (metryka, odległość pomiędzy procesami stochastycznymi, długość zmiennej losowej) rzucane są często i od niechcenia.

Niewątpliwą i dużą zaletą skryptu są przykłady i zadania (z wyjątkiem rozdziału I) w większości oryginalne, jasno i starannie zredagowane, dobrze dobrane – trafnie ilustrujące treść rozdziałów, po których następują. Być może więc książka byłaby o wiele lepsza, gdyby ją napisać jako zbiór zadań? W jej obecnym kształcie niestety nie można jej polecić jako dobrej.