



ANTONI SMOLUK
Wrocław

Uwagi o problemie L. Flatto

(Praca wpłynęła do Redakcji 1983.06.24)

1. W pracy tej podajemy proste rozwiązania zadania Flatto [1] w przypadku gdy dziedzina S jest wypukła w określonym kierunku; problem Flatto okazuje się szczególnym przypadkiem aproksymacji inwariantnej [2].

2. Niech S oznacza niepusty kompakt^(*) w przestrzeni R^{m+n} , a T - rzut S na R^n , czyli

$$T := \{y \in R^n \mid (x, y) \in S, \quad x \in R^m\}.$$

Przestrzeń $C(S)$ ciągłych funkcji (ograniczonych) określonych na S o wartościami w R , z normą Czebyszewa jest przestrzenią Banacha.

(*) Założenie to można osłabić. Zasadniczy wynik jest prawdziwy w przestrzeni $CB(S)$ ciągłych i ograniczonych funkcji rzeczywistych (lub zespolonych) określonych na dowolnym podzbiore S przestrzeni R^{m+n} (odpowiednio C^{m+n}).

Ponieważ każdej funkcji $f \in C(T)$ można jednoznacznie przyporządkować funkcję $F \in C(S)$, niezależną od wektora $x \in R^m$, wzorem

$$F(x, y) := f(y), \quad (x, y) \in S,$$

więc przestrzeń $C(T)$ możemy utożsamić z domkniętą podprzestrzenią przestrzeni $C(S)$. Przyjmujemy więc dalej, że przestrzeń $C(T)$ jest włożona w przestrzeń $C(S)$, $C(T) \subset C(S)$. O funkcji $f \in C(S)$ takiej, że jednocześnie $f \in C(T)$, mówimy, że jest niezależna od wektora $x = (x_1, \dots, x_m) \in R^m$ albo że jest niezależna od m zmiennych rzeczywistych $x_1, \dots, x_m$. Symbolem P_k oznaczamy podzbiór przestrzeni $C(S)$ złożony z wielomianów stopnia nie przekraczającego k oraz funkcji zerowej; jest to domknięta podprzestrzeń liniowa przestrzeni $C(S)$.

3. Problem Flatto [1]. Scharakteryzować te podzbiory S przestrzeni R^{m+n} , dla których jest prawdziwa implikacja: dla dowolnej funkcji $F \in C(S)$, jeśli $f \in C(T)$, to w zbiorze $O(f, P_k)$ istnieje wielomian g taki, że g jest również elementem przestrzeni $C(T)$, gdzie $O(f, P_k)$ oznacza rodzinę wielomianów ze zbioru P_k leżącym najbliżej funkcji f , [2].

Opierając się na twierdzeniu Helly'ego o przekrojach zbiorów wypukłych w przestrzeni R^n Flatto podaje częściowe rozwiązanie tego zadania w przypadku gdy $m = 1$.

4. Zauważmy najpierw, że zadanie Flatto jest pewnym zadaniem aproksymacji inwariantnej. Jeżeli funkcja f nie zależy od wektora x , to dla jakich S zawsze istnieje wielomian g , optymalny dla f w zbiorze P_k , również nie zależący od wektora x ?

W pracy [2] jest udowodnione następujące twierdzenie o aproksymacji niezmienniczej^(*):

Jeżeli M jest podprzestrzenią liniową przestrzeni unormowanej E , niezmienniczą względem podizometrii liniowej $A : E \rightarrow E$ i ponadto, gdy $f \in \text{Fix}(A)$ oraz $A|_M$ jest operatorem zwartym na M , to istnieje element $g \in O(f, M)$ taki, że $A(g) = g$.

5. TWIERDZENIE. Jeżeli istnieje punkt $(a, b) \in S$ taki, że $\{a\} \times T \subset S$, to dla każdej funkcji $f \in C(T)$ istnieje wielomian optymalny $g \in O(f, P_k)$ taki, że $g \in C(T)$.

D o w ó d. Wykażemy, że dowodzone twierdzenie jest prostym wnioskiem z cytowanego w punkcie 4 twierdzenia.

Operator $A : C(S) \rightarrow C(S)$, określony wzorem

$$A(f)(x, y) := f(a, y), \quad (x, y) \in S,$$

jest oczywiście liniową podizometrią. Jeżeli $f \in C(T)$, to $A(f) = f$, czyli $\text{Fix}(A) = C(T)$. Podprzestrzeń skończonego wymiaru P_k jest podprzestrzenią niezmienniczą A oraz A jest operatorem zwartym na P_k (z tego właśnie powodu, że wymiar P_k jest skończony). Wystarczy teraz powołać się na wzmiankowane twierdzenie, aby otrzymać tezę.

6. Zagadnienia Flatto sformułował w ogólniejszej postaci dnia 26 maja 1983 dr Stanisław Grzegórski z Lublina.

^(*)Twierdzenie to w 1982 roku uogólnił mgr Leopold Habiniak z Wrocławia na dowolne podizometrie (zrezygnował z założenia liniowości A).

Niech I_r oznacza podzbiór przestrzeni $C(S)$, $r \in \mathbb{N}$, wszystkich funkcji postaci

$$f(x, y) := \sum_{i_1 + \dots + i_m \leq r} f_{i_1 \dots i_m}(y) x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m},$$

gdzie $(x, y) \in S$, $f_{i_1 \dots i_m} \in C(T)$.

Przy jakich założeniach o S prawdziwa jest implikacja:

jeżeli $f \in I_r$, to istnieje wielomian $g \in O(f, P_{k+r})$ taki, że $g \in I_r$?

Jeżeli $r = 0$, otrzymujemy zadanie Flatto.

PRACE CYTOWANE

- [1] L. Flatto, A geometric problem in approximation theory,
J. Approx. Theory 36 (1982), 326-327.
- [2] A. Smoluk, Aproksymacje niezmiennicze, Matematyka Stosowa-
na 17 (1981), 17-22.