ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria III: MATEMATYKA STOSOWANA XXVII (1986)

GRAŻYNA HOBOT
TERESA POKORA
Lublin

Metody rzutowo-newtonowskie

(*Praca wpłynęła do Redakcji 1982.11.30*)

1. WSTĘP

W artykule tym będziemy rozpatrywać nieliniowe zadanie postaci

$$(1.1) \qquad Lu(x) = f(x, u(x)), \qquad x \in \Omega \subset R^2,$$

$$(1.2) \qquad u(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,$$

gdzie Ω jest obszarem ograniczonym, $\partial\Omega$ jest jego brzegiem, I - operatorem różniczkowym typu eliptycznego

$$(1.3) \qquad Lu(x) = -\sum_{i,k=1}^{2} D_i(a_{ik}(x)D_k u(x)) + \sum_{k=1}^{2} b_k(x)D_k u(x).$$

Załóżmy, że istnieje rozwiązanie u^* problemu (1.1) - (1.2). Dla zadania (1.1) - (1.2) podamy metodę przybliżoną, będącą połączeniem metody Newtona i metody Ritza jako metody rzutowania. Metoda ta została wprowadzona przez K. Witscha w pracach [17], [18].

Niech $H_{l,p}(\Omega)$ będzie przestrzenią Sobolewa, której elementami są funkcje o wartościach rzeczywistych, $l \geqslant 0$, $1 < p \leqslant \infty$. W przestrzeni tej naturalną normę będziemy oznaczać przez $|\cdot|_{l,p}$. W przypadku $p = 2$, będziemy krótko pisać $H_l(\Omega)$ i odpowiednio dla normy używać symbolu $|\cdot|_l$. Następnie przez $\overset{0}{H}_{1,p}(\Omega)$ oznaczymy podprzestrzeń przestrzeni $H_{1,p}(\Omega)$ funkcji o nośniku zwartym.

Ponieważ będziemy stosować metodę Ritza, wyjściowe zadanie sformułujemy, używając pewnej formy biliniowej.

Problem 1 [17]. Niech obszar Ω ma brzeg $\partial\Omega$ lipschitzowski. W $\overset{0}{H}_1(\Omega) \times \overset{0}{H}_1(\Omega)$ określamy silnie eliptyczną formę biliniową $a(\cdot,\cdot)$

$$(1.4) \qquad a(v,u) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}(x) D_k u(x) D_i v(x) + \sum_{k=1}^{2} b_k(x) D_k u(x) v(x) \right\} dx,$$

gdzie $a_{ik} \in C(\bar{\Omega})$, $b_k \in L_\infty(\bar{\Omega})$. Niech funkcja $f(x,u)$ będzie zdefiniowana na zbiorze

$$D_\delta = \{(x,v):\ x \in \Omega,\ v \in R,\ |u^*(x) - v| < \delta\}, \qquad \delta > 0,$$

oraz $f, f_u, f_{uu} \in C(\bar{D}_\delta)$. Przy tych założeniach $u^* \in \overset{0}{H}_1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ i

$$(1.5) \qquad a(v,u^*) = (v, f[u^*]) \qquad \forall v \in \overset{0}{H}_1(\Omega),$$

gdzie $f[u](x) = f(x,u(x))$.

Zakładamy dalej, że problem liniowy

$$(1.6) \qquad u \in \overset{0}{H}_1(\Omega), \quad a(v,u) - (v, f_u[u^*]u) = 0, \qquad \forall v \in \overset{0}{H}_1(\Omega),$$

ma tylko trywialne rozwiązanie.

Niech $\{V_n\}$, $n = 0,1, \ldots$, $V_n \subset \overset{0}{H}_1(\Omega)$ będzie ciągiem przestrzeni elementu skończonego. Z podprzestrzenią V_n jest związany parametr h_n, $h_n \leqslant h_{n-1} \leqslant K_1 h_n$, K_1 - stała, $n = 1,2,\ldots$ Oznacza on w przestrzeni elementu skończonego największą ze średnic elementów. Ponadto przestrzenie te spełniają pewne własności aproksymacyjne, których żąda się w twierdzeniu o zbieżności (twierdzenie 4.1).

Metoda obliczania kolejnych przybliżeń $u_n \in V_n$ rozwiązania dokładnego u^* równania (1.5) jest określona następująco:

Dla dowolnego $u_0 \in V_0$ kolejne przybliżenie $u_n \in V_n$ otrzymujemy jako rozwiązanie liniowego równania

$$(1.7) \qquad a(v,u_n) - (v, f_u[u_{n-1}]u_n) = (v, f[u_{n-1}] - f_u[u_{n-1}]u_{n-1})$$

$$\forall v \in V_n, \; n = 1,2, \ldots$$

Opisaną wyżej metodę będziemy nazywać metodą rzutowo-newtonowską. Oznaczmy przez $k(n)$ wymiar podprzestrzeni V_n. Jeśli $\{\varphi_i^n\}$, $i = 1,2, \ldots, k(n)$, jest bazą w V_n, to

$$(1.8) \qquad u_n = \sum_{i=1}^{k(n)} \alpha_i^n \varphi_i^n,$$

a równanie (1.7) możemy zapisać w postaci

$$(1.9)\qquad (A - B(f_u, u_{n-1}))\,\alpha^n = b(f, f_u, u_{n-1}),$$

gdzie $\alpha^n = [\alpha_1^n, \alpha_2^n, \ldots, \alpha_{k(n)}^n]^T$, A, B - macierze kwadratowe:

$$A = \{a(\varphi_j^n, \varphi_i^n)\}, \qquad j, i = 1, 2, \ldots, k(n),$$

$$B = \{(\varphi_j^n, f_u[u_{n-1}]\,\varphi_i^n)\}, \qquad j, i = 1, 2, \ldots, k(n),$$

b - wektor:

$$b = \{(\varphi_j^n, f[u_{n-1}] - f_u[u_{n-1}]u_{n-1})\}, \qquad j = 1, 2, \ldots, k(n),$$

$$u_{n-1} = \sum_{i=1}^{k(n-1)} \alpha_i^{n-1}\varphi_i^{n-1},$$

$\{\varphi_i^{n-1}\}$, $i = 1, 2, \ldots, k(n-1)$, baza przestrzeni V_{n-1}.

Sposoby konstrukcji baz w przestrzeni elementu skończonego są opisane w [7]. Należy dodać, że układ (1.9) jest układem rzadkim, co wynika z własności baz w przestrzeni elementu skończonego. Stąd do rozwiązywania tych układów należy stosować specjalne metody (patrz np. [7], [11]). W każdym kroku dla n = 1,2, ... należy od nowa obliczać elementy macierzy A i B oraz wektora b. Przy wzroście k(n) rośnie wymiar układu (1.9).

W metodach rzutowo-newtonowskich bardzo ważną rzeczą jest wybór wymiaru k(n) podprzestrzeni V_n. Można stosować tutaj kilka algorytmów. Opisane one zostały w pracy [18]. Podamy dalej kilka z tych algorytmów:

(1) Obieramy $k(n) = k$. Wtedy metoda rzutowo-newtonowska jest identyczna z tzw. metodą newtonowsko-rzutową. Dla $n = 1,2, \ldots$ układ (1.9) jest zawsze układem liniowym o k niewiadomych. Macierz A nie zmienia się w kolejnych krokach, zmieniają się tylko elementy macierzy B i wektora b. Fakt ten wpływa w obliczeniach na oszczędność czasu.

(2) Obieramy $k(n)$ tak, aby $V_{n-1} \subset V_n$, $n = 1,2, \ldots$ Wtedy zamiast (1.8) wygodnie jest przyjąć

$$u_n = u_{n-1} + \sum_{i=1}^{k(n)} \beta_i^n \varphi_i^n, \tag{1.10}$$

a równanie (1.7) przekształcić do postaci

$$\begin{aligned} a(v, u_n - u_{n-1}) - (v, f_u[u_{n-1}](u_n - u_{n-1})) &= \\ = -a(v, u_{n-1}) + (v, f[u_{n-1}]) \qquad \forall v \in V_n, \quad n = 1,2, \ldots \end{aligned} \tag{1.11}$$

Współczynniki poprawki, tzn. wektor $\beta^n = [\beta_1^n, \beta_2^n, \ldots, \beta_{k(n)}^n]^T$, obliczamy z układu równań

$$(A - B(f_u, u_{n-1}))\, \beta^n = b_1(f, u_{n-1}), \tag{1.12}$$

gdzie elementy macierzy A i B są określone tak, jak w układzie (1.9), natomiast

$$b_1(f, u_{n-1}) = \{-a(\varphi_j^n, u_{n-1}) + (\varphi_j^n, f[u_{n-1}])\}, \; j = 1,2, \ldots, k(n).$$

Koniec obliczeń następuje wtedy, gdy przy z góry zadanym $\varepsilon > 0$ spełniony jest warunek $\|u_n - u_{n-1}\| < \varepsilon$. W praktyce bada się zwykle wektor β^n współczynników poprawki, tzn. sprawdza się, czy $\|\beta^n\|_\infty < \varepsilon$.

W następnym paragrafie omówimy metody rzutowo-newtonowskie w przypadku nieliniowego równania operatorowego $G(u) = 0$.

2. METODY RZUTOWO-NEWTONOWSKIE DLA RÓWNANIA OPERATOROWEGO

Niech V i S będą przestrzeniami unormowanymi. Rozpatrzmy operator nieliniowy $G: D \subset V \longrightarrow S$. W celu otrzymania kolejnych przybliżeń u_n rozwiązania u^* równania

$$(2.1) \qquad G(u) = 0,$$

stosujemy najpierw metodę Newtona, tzn. dla dowolnego $v_0 \in D$ kolejne przybliżenie v_n otrzymujemy jako rozwiązanie liniowego równania

$$(2.2) \qquad G'(v_{n-1})(v_n - v_{n-1}) = -G(v_{n-1}), \qquad n = 1,2, \ldots$$

Następnie liniowe równanie (2.2) będziemy rozwiązywać w przybliżeniu, stosując metodę rzutową. Tak jak w pracy [16] wprowadzamy dwa ciągi podprzestrzeni $\{V_n\}$, $\{S_n^*\}$, $n = 0,1, \ldots,$ aproksymujących odpowiednio przestrzenie V i S^*($*$ oznacza przestrzeń dualną), $V_n \subset V$, $S_n^* \subset S^*$ oraz $\dim V_n = \dim S_n^* < \infty$.

Dla dowolnego $u_0 \in V_0$ kolejne przybliżenie $u_n \in V_n$ określamy jako rozwiązanie równania

$$(2.3)\qquad (v, G'(u_{n-1})(u_n - u_{n-1})) = -(v, G(u_{n-1})) \qquad \forall v \in S_n^*,\ n = 1, 2, \ldots$$

Aby przybliżenie u_n było wyznaczone z (2.3) w sposób jednoznaczny, zakładamy, że

$$\left(u_n \in V_n,\ (v, G'(u_{n-1})u_n) = 0, \qquad \forall v \in S_n^*\right) \Longrightarrow u_n = 0.$$

Sposób otrzymywania kolejnych przybliżeń u_n rozwiązania u^* równania (2.1) opisany wzorem (2.3) będziemy nazywać <u>metodą rzutowo-newtonowską</u> (krótko <u>metodą P-N</u>).

Przybliżenie u_n określone wzorem (2.3) można zapisać w inny sposób, korzystając z operatora rzutowania Q_n. Tak jak w pracy [16] operator Q_n: $V \longrightarrow V_n$ wraz z operatorem liniowym A: $V \longrightarrow S$ będziemy nazywać <u>operatorem rzutowania ortogonalnego</u> na $A^* S_n^*$, jeśli

$$u_n = Q_n u \Longleftrightarrow u_n \in V_n, \qquad (v, Au_n) = (v, Au) \qquad \forall v \in S_n.$$

W naszym przypadku przyjmujemy $A = G'(u_{n-1})$ i (2.3) możemy zapisać w postaci

$$(2.4)\qquad u_n = Q_n u_{n-1} - Q_n G'(u_{n-1})^{-1} G(u_{n-1}).$$

Szczególnymi przypadkami metody (2.3) są

- metoda Ritza-Galerkina, $S_n^* = V_n$,
- metoda najmniejszych kwadratów, gdy $S_n^* = G'(u_{n-1})V_n$,
- metoda kollokacji, S_n^* jest przestrzenią funkcjonałów określonych na funkcjach powstałych przez dyskretyzację funkcji należących do S.

U w a g a 1. W przypadku zadania opisanego w paragrafie 1 mamy $V = H_1^0(\Omega)$, $S^* = V$, a operator G jest zdefiniowany następująco:

$$\text{dla } u \in V, \quad G(u) = g \in S \Longleftrightarrow a(v,u) - (v, f[u]) = (v,g) \qquad \forall v \in V.$$

Dotychczas metody P-N nie były często używane w przeciwieństwie do często używanych metod newtonowsko-rzutowych. W metodach tych przybliżenie $w_k \in \bar{V}_k \subset V$ rozwiązania u^* definiujemy jako rozwiązanie równania

$$(2.5) \qquad (v, G(w_k)) = 0 \qquad \forall v \in \bar{S}_k^*,$$

gdzie $\bar{S}_k^* \subset S^*$ i $\dim \bar{V}_k = \dim \bar{S}_k^*$.

Często operator G ma postać $G(u) = Au - F(u)$, gdzie A jest operatorem liniowym, a $A^{-1}F$ operatorem zwartym. Wprowadzając operator rzutowania Q_k, wystarczy w tym przypadku wykazać, że $w_k = Q_k T(w_k)$, tzn. w_k jest punktem stałym operatora $Q_k T$, gdzie $T(w) = A^{-1}F(w)$. Fakt ten jest wykorzystywany przy badaniu zbieżności metody.

Wielu autorów badało sprawę istnienia przybliżenia w_k i zbieżności $w_k \longrightarrow u^*$, $k \longrightarrow \infty$, przy założeniu, że ciąg $\{\bar{V}_k\}$ jest zupełny w przestrzeni V (definicję zupełności podaje autor w pracy [16]). W szczególności dla nieliniowych zadań brzegowych sprawy istnienia oraz oszacowanie błędu były szczegółowo omówione dla postępowania Ritza np. w pracach [1], [3-5], [8-9], dla metody kollokacji w [2], [13-14] i dla podobnych metod w [19].

W praktyce obliczanie w_k prowadzi do rozwiązania nieliniowego równania (2.5). Do rozwiązania tego równania można stosować metody iteracyjne opisane w [11].

Przedstawimy dalej przypadek, w którym do rozwiązania równania (2.5) będzie stosowana metoda Newtona. Wychodzimy od pewnego przybliżenia startowego $w_{k,0} \in \bar{V}_k$ i definiujemy kolejne przybliżenie $w_{k,n} \in \bar{V}_k$ jako rozwiązanie liniowego równania

$$(2.6) \quad (v, G'(w_{k,n-1})(w_{k,n}-w_{k,n-1})) = -(v, G(w_{k,n-1})) \qquad \forall v \in \bar{S}_k^*, \; n=1,2, \ldots$$

W tym przypadku mówimy o metodzie newtonowsko-rzutowej (krótko o metodzie N-P). Zbieżność konkretnych metod N-P w przypadku metody kollokacji dla równań różniczkowych zwyczajnych była omówiona w pracach [2], [14], a dla postępowania Ritza w odniesieniu do pewnego zadania brzegowego typu eliptycznego w [6]. W [2], [14] autorzy wykazują, przy pewnych ograniczających założeniach, zbieżność podanych metod w kulach zawierających u^*, których promienie nie zależą od k. Dla bardziej złożonego problemu przedstawionego w [6] autor otrzymuje podobny wynik, żądając, aby $w_{k,0}$ leżało w pewnej kuli, której promień maleje przy wzroście wymiaru podprzestrzeni $\bar{V}_k$.

Russel w [15] zwrócił uwagę, że metoda N-P może mieć zastosowanie w kilku pierwszych krokach metody P-N, gdy obliczenia przeprowadzane są w przestrzeniach, których wymiar jest niewielki. Otrzymujemy wtedy dobre początkowe przybliżenia, które potem są wykorzystywane do dalszych obliczeń.

Ustalając $\bar{V}_k$, $\bar{S}_k^*$ oraz przyjmując w metodzie P-N $V_n = \bar{V}_k$, $S_n^* = \bar{S}_k^*$, $u_0 = w_{k,0}$, $n = 1,2, \ldots$, otrzymujemy ze wzoru (2.3) przybliżenie u_n pokrywające się z przybliżeniem $w_{k,n}$ obliczonym ze wzoru (2.6). Oznacza to, że przy przyjętych założeniach obie metody, tzn. N-P i P-N są identyczne.

3. ZBIEŻNOŚĆ METOD RZUTOWO-NEWTONOWSKICH

Niech u^* będzie dokładnym rozwiązaniem równania (2.1). W twierdzeniu o zbieżności założenia można podzielić na dwie grupy. Pierwsza z nich dotyczy operatora G i przybliżenia u_N. Założenia te mają postać taką, jak w twierdzeniu dotyczącym klasycznej metody Newtona. Druga grupa założeń związana jest z operatorem rzutowania Q_n.

TWIERDZENIE 3.1 [18]. Niech $G: K \subset V \longrightarrow S$, gdzie $K = K(u^*,r) = \{u \in V: \|u^* - u\| \leqslant r\}$. Załóżmy, że operator G jest różniczkowalny w sensie Frécheta w K oraz

(a) pochodna jest lipschitzowska w K:

$$\|G'(u) - G'(v)\| \leqslant L \|u - v\| \qquad \forall u,v \in K, \tag{3.1}$$

odwracalna i

$$\|G'(u)^{-1}\| \leqslant B; \tag{3.2}$$

(b) operatory Q_n są jednostajnie ograniczone, tzn.

$$\|Q_n\| \leqslant C, \qquad n > N > 0, \tag{3.3}$$

i dobrze aproksymują u^*, tzn.

(3.4) $\|Q_n u^* - u^*\| < \varepsilon$,

gdzie $\varepsilon < 1/(4D)$, $D = BCL/2$;

(c) przybliżenie u_N spełnia oszacowanie

(3.5) $\|u^* - u_N\| \leqslant (1 + \sqrt{1-4D\varepsilon})/(2D)$

i $r \geqslant r_0 = \max\{\|u^* - u_N\|, 2\varepsilon\}$.

Wtedy przybliżenia u_n dla $n = N+1, N+2, \ldots$ określone wzorem (2.3) spełniają oszacowanie

(3.6) $\|u^* - u_n\| \leqslant r_0$, $n = N+1, N+2, \ldots$

Oznaczmy dodatkowo przez $E_n(u^*,V) = \inf\{\|u^*-v_n\|: v_n \in V_n\}$.
Jeśli $E_n(u^*,V) \to 0$, $n \to \infty$, to $u_n \to u^*$, $n \to \infty$.

U w a g a 2. Przyjmijmy $V_n = \bar{V}_k$, $S_n^* = \bar{S}_k^*$ dla $\forall n \geqslant N$, gdzie $\bar{V}_k$ i $\bar{S}_k^*$ ustalone podprzestrzenie. Załóżmy, że $\|Q_n\| \leqslant C$, $n > N$, oraz $u_N \in K(u^*, 2\varepsilon)$. Wtedy ciąg $\{u_n\}$ jest zbieżny do elementu w_k otrzymanego metodą nieliniowego rzutowania, a określonego wzorem (2.5).

Twierdzenie 3.1 wykazuje zbieżność ciągu $\{u_n\}$ do u^*. Sprawą interesującą jest również szybkość tej zbieżności.

TWIERDZENIE 3.2 [18]. Niech będą spełnione założenia poprzedniego twierdzenia dotyczące operatora G. Załóżmy, że ciąg $\{Q_n\}$ jest jednostajnie ograniczony, a ciąg $\{u_n\}$ jest zbieżny do u^*. Następnie niech będzie dany ciąg liczb rzeczywistych $\{e_n\}$, $e_n > 0$, $e_n \to 0$ $(n \to \infty)$ taki, że

(3.7) $\|u^* - Q_n u^*\| \leqslant e_n$, $\quad e_{n-1} \leqslant K_1 e_n$,

K_1 - stała dla $n = 1,2, \ldots$

Przy tych założeniach

(3.8) $\|u^* - u_n\| \leqslant e_n (1 + \mathcal{O}(e_n))$, $\quad n \to \infty$.

W szczególnym przypadku, gdy $e_n = \|u^* - Q_n u^*\|$, dostajemy

$$\|u^* - u_n\| = e_n (1 + \mathcal{O}(e_n)).$$

U w a g a 3. W praktyce ważne jest oszacowanie e_n przez $E_n(u^*,V)$, np. postaci

$$e_n = \|u^* - Q_n u^*\| \leqslant (1 + \|Q_n\|) E_n(u^*,V).$$

W przestrzeni elementu skończonego, której elementami są przedziałami wielomiany stopnia s, $E_n(u^*,V) \leqslant ch_n^s$, gdzie h_n charakteryzuje rozmiar elementu. Stąd i ze wzoru (3.8) dostajemy oszacowanie

(3.9) $\|u^* - u_n\| \leqslant c_1 h_n^s$.

Oprócz tego, aby była spełniona druga część wzoru (3.7) wystarczy, aby $h_{n-1} \leqslant K_1 h_n$, co w praktyce nie stanowi istotnego ograniczenia.

W przypadku $s = 2$, otrzymujemy metodę o zbieżności kwadratowej.

4. METODY RZUTOWO-NEWTONOWSKIE DLA NIELINIOWYCH ZADAŃ BRZEGOWYCH

W paragrafie tym zajmiemy się nieliniowym zadaniem brzegowym (1.1)-(1.2) w postaci wariacyjnej (1.5). Kolejne przybliżenia u_n rozwiązania u^* równania (1.5) określamy ze wzoru (1.7). W dalszej części skorzystamy z twierdzeń 3.1 i 3.2, dlatego określimy dla zadania (1.5) operator G i jego pochodną. Przyjmujemy $V = \overset{0}{H}_1(\Omega)$, $S = V^*$ i definiujemy dla $u \in V$

$$(4.1) \qquad G(u) = g \in S \Longleftrightarrow a(v,u) - (v, f[u]) = (v,g) \qquad \forall v \in V.$$

Pochodna operatora G jest dana wzorem

$$(4.2) \qquad G'(u)h = g \in S \Longleftrightarrow a(v,h) - (v, f_u[u]h) = (v,g) \qquad \forall v \in V.$$

Obieramy ciąg podprzestrzeni $\{V_n\}$, $V_n \subset \overset{0}{H}_1(\Omega)$, $n = 0, 1, \ldots$, spełniających następujący warunek aproksymacyjny:

(A) dla $k > 1$ i $u \in \overset{0}{H}_1(\Omega) \wedge H_k(\Omega)$ $\quad \exists v_n \in V_n$ taki, że

$$(4.3) \qquad |u - v_n|_1 \leqslant c h_n^{k-1} |u|_k ,$$

gdzie h_n - parametr charakteryzujący podprzestrzeń V_n, $h_n \leqslant h_{n-1} \leqslant K_1 h_n$, K_1 - stała $n = 1, 2, \ldots$

U w a g a 4. Warunek (4.3) zachodzi w przestrzeni elementu skończonego, której elementami są przedziałami wielomiany stopnia k-1.

TWIERDZENIE 4.1 [17]. Niech funkcja $f(x,u)$ będzie zdefiniowana w obszarze $\bar{\Omega}\times R$. Załóżmy, że

(a) $f(x,u)$, $f_u(x,u)$, $f_{uu}(x,u) \in C(\bar{\Omega}\times R)$,

$|f_u(x,u)|$, $|f_{uu}(x,u)| \leqslant L$ w $\bar{\Omega}\times R$,

(b) ciąg podprzestrzeni $\{V_n\}$ spełnia warunek (A),

(c) $u^* \in \overset{0}{H}_1(\Omega) \cap H_k(\Omega)$,

(d) parametr h_N charakteryzujący podprzestrzeń V_N jest tak dobrany, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i $u_N \in V_N$

$$(4.4)\qquad |u_N - u^*|_1 \leqslant c h_n^{k-1} |u^*|_k < \varepsilon ,$$

Wtedy przybliżenia $u_n \in V_n$ dla $n = N+1, N+2, \ldots$ określone ze wzoru (1.7) spełniają oszacowanie

$$(4.5)\qquad |u^* - u_n|_1 \leqslant c_2(u^*)h_n^{k-1}, \qquad n = N+1, N+2, \ldots$$

D o w ó d. Sprawdzimy założenia twierdzenia 3.1 dotyczące operatora G. Z ograniczoności f_u wynika, że funkcja f spełnia warunek Lipschitza. Stąd i z założeń dotyczących formy $a(v,u)$ (patrz §1, problem 1) wynika istnienie całek występujących we wzorze (4.1). Operator G jest dobrze zdefiniowany, różniczkowalny, a jego pochodna wyraża się wzorem (4.2). Wykażemy, że $G(u)$ spełnia warunek Lipschitza. Aby to wykazać skorzystamy z tego, że $V^* = V$, bo $V = \overset{0}{H}_1(\Omega)$ i jest to przestrzeń Hilberta. Stąd $S = V$. Przyjmując kolejno we wzorze (4.2) $u = u_1$ i $g = g_1$ oraz $u = u_2$ i $g = g_2$, dostajemy

$$a(v,h)-(v,f_u[u_1]h)=(v,g_1), \qquad a(v,h)-(v,f_u[u_2]h)=(v,g_2).$$

Stąd po odjęciu stronami otrzymujemy

$$(v, f_u[u_1]h - f_u[u_2]h) = (v, g_1 - g_2) \qquad \forall v \in V.$$

Dla $V = g_1 - g_2$

$$\| g_1 - g_2 \|^2 \leqslant L \| g_1 - g_2 \| \| u_1 - u_2 \| \| h \| ,$$

skąd

$$\frac{\| g_1 - g_2 \|}{\| h \|} \leqslant L \| u_1 - u_2 \| ,$$

czyli

$$\| G'(u_1) - G'(u_2) \| \leqslant L \| u_1 - u_2 \|_1 \leqslant \frac{L}{q_1} | u_1 - u_2 |_1 ,$$

bo normy $\| \cdot \|_1$ i $| \cdot |_1$ są równoważne, tzn. istnieje $q_1 > 0$ taka, że

$$q_1 \| u \|_1 \leqslant | u |_1 \leqslant \| u \|_1 .$$

Następnie wykażemy, że jeśli istnieje operator $G'(u)^{-1}$, to jest on ograniczony. Z założenia forma $a(v,u)$ jest silnie eliptyczna, tzn. istnieje $\gamma > 0$ taka, że

$$a(v,v) \geqslant \gamma \| v \|_1^2 \qquad \forall v \in V.$$

Stąd i ze wzoru (4.2), w którym podstawiamy v = h dostajemy

$$|\gamma - L|\,\|h\|_1^2 \leqslant |(h,h)| \leqslant \|h\|\,\|g\| \leqslant \|h\|_1\,\|G(u)h\| ,$$

skąd

$$(4.6) \qquad \|G(u)h\| \geqslant m\,\|h\|_1 .$$

Z tej nierówności na podstawie [10, tw. 14.11] wynika, że operator odwrotny do liniowego operatora $G'(u)$ jest liniowy i ciągły, a stąd ograniczony.

Z (1.6) wynika istnienie $G'(u^*)^{-1}$, a z poprzedniej części dowodu $\|G'(u^*)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{2}B$. Ponadto

$$\|G'(u^*)^{-1}(G'(u)-G'(u^*))\| \leqslant \|G'(u^*)^{-1}\|\,\|G'(u)-G'(u^*)\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{BL}{2}\,\|u-u^*\|_1 \leqslant \frac{BL}{2q_1}\,|u-u^*|_1 .$$

Dla $|u-u^*|_1 \leqslant r$, gdzie $r < \frac{q_1}{BL}$, istnieje operator $G'(u)^{-1}$, bo $\frac{BL}{2q_1}\,|u-u^*|_1 < q < \frac{1}{2}$ i

$$G'(u)^{-1} = \{I + G'(u^*)^{-1}(G'(u) - G'(u^*))\}^{-1}G'(u^*)^{-1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\{G'(u^*)^{-1}(G'(u) - G'(u^*))\}^i G'(u^*)^{-1} ,$$

gdzie I oznacza operator tożsamościowy. Z ostatniego wzoru dostajemy

$$\| G'(u)^{-1} \| \leqslant \frac{\| G'(u^*)^{-1} \|}{1-q} < B.$$

Przejdziemy do założeń dotyczących operatora rzutowania Q_n. Z definicji $Q_n: V \longrightarrow V_n$ i

$$u_n = Q_n u \Longleftrightarrow (v, G'(u_{n-1}) u_n) = (v, G'(u_{n-1}) u) \qquad \forall v \in V.$$

Przyjmując w tym wzorze $v = G'(u_{n-1}) u_n$ i wykorzystując wzór (4.6), dostajemy

$$m \| u_n \|_1 \leqslant \| G'(u_{n-1}) u_n \| \leqslant \| G'(u_{n-1}) u \| ,$$

natomiast ze wzoru (4.2)

$$\| G'(u_{n-1}) u \| \leqslant C_1 \| u \|_1 .$$

a stąd i z nierówności podanej wyżej

$$\| Q_n u \|_1 \leqslant \frac{C_1}{m} \| u \|_1 = C \| u \|_1 \qquad \forall u \in V, \ n = 1, 2, \ldots$$

co dowodzi jednostajnej ograniczoności operatorów Q_n.

Przyjmując $e_n = (1 + C) c h_n^{k-1} | u^* |_k$ i uwzględniając założenia (b) i (d) twierdzenia 4.1, mamy $e_N < \varepsilon'$. Ponieważ $h_n \leqslant h_{n-1} \leqslant K_1 h_n$, więc zachodzi wzór (3.7) oraz $e_n < \varepsilon'$ dla $n \geqslant N$. Na podstawie tezy twierdzenia 3.2 otrzymujemy tezę twierdzenia 4.1.

Metody typu P-N mogą być stosowane do innych nieliniowych zadań brzegowych typu eliptycznego [18].

PRACE CYTOWANE

[1] J.I. Blair, Error Bounds for the Solution of Nonlinear Two-point Boundary Value Problems by Galerkin Method, Numer. Math. 19 (1972), 99-109.

[2] C. De Boor, B. Swartz, Collocation at Gaussian Points, SIAM J.Numer.Anal. 10 (1973), 582-606.

[3] P.G. Ciarlet, An $O(h^2)$ Method for a Non-smoth Boundary Value Problem, Aequationes Math.2, (1968), 39-49.

[4-5] P.G. Ciarlet, M.H. Schultz, R.S. Varga, Numerical Methods of High-order Accuracy for Nonlinear Boundary Value Problems, I.Numer.Math.9(1967), 394-430, V.Numer.Math.13 (1969), 51-77.

[6] J. Douglas, T. Dupont, A Galerkin Method for a Nonlinear Dirichlet Problem, Math.Comput.29 (1975), 689-696.

[7] M. Dryja, J. Jankowska, M. Jankowski, Przegląd metod i algorytmów numerycznych, część 2, WNT, Warszawa 1982.

[8] I. Gladweel, Rayleigh-Ritz Methods for Nonlinear Boundary Value Problems, J.Inst.Math.Appl. 11 (1972), 191-211.

[9] T.R. Lucas, G.W. Redien, A High Order Projection Method for Nonlinear Two-point Boundary Value Problems, Numer.Math. 20 (1972), 257-270.

[10] J. Musielak, Wstęp do analizy funkcjonalnej, PWN, Warszawa 1976.

[11] J.M. Ortega, W.C. Rheinboldt, Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press, New York 1970.

[12] F.M. Perrin, H.S. Price, R.S. Varga, On Higher-order Numerical Methods for Nonlinear Two-point Boundary Value Problems, Numer.Math. 13 (1969), 180-198.

[13] G.W. Reddien, Approximation Methods for Two-point Boundary Value Problems with Nonlinear Boundary Conditions, SIAM.J. Numer.Anal. 13 (1976), 405-411.

[14] R.D. Russel, Collocation for Systems of Boundary Value Problems, Numer.Math. 23 (1974), 119-133.

[15] R.D. Russel, A Comparision of Collocation and Finite Differences for Two-point Boundary Value Problems, SIAM.J. Numer.Anal. 14 (1977), 19-39.

[16] K. Witsch, Konvergenzaussagen für Projektionsverfahren bei Linearen Operatoren, Numer.Math. 27 (1977), 339-354.

[17] K. Witsch, Projective Newton-Verfahren bei Elliptischen Randwertaufgaben, Numer.Math. 30 (1978), 33-348.

[18] K. Witsch, Projective Newton-Verfahren und Anwendungen auf Nichlineare Randwertaufgaben, Numer.Math. 31 (1978), 209-230.

[19] K.A. Wittenbrink, High Order Projection Methods of Moment and Collocation-type for Nonlinear Boundary Value Problems, Computing 11 (1973), 255-274.