

WITOLD KONDRACKI
MICHAŁ KOZAK
Warszawa

Dynamika dla mechaniki z nieciągłymi hamiltonianami

(Praca wpłynęła do Redakcji 1983.05.06)

WSTĘP

W mechanice hamiltonowskiej, istniejącej już od dwóch stuleci, jednym z problemów, których do tej pory nie rozważano jest zagadnienie opisu dynamiki układu mechanicznego, którego hamiltonian jest zadany w postaci funkcji nieróżniczkowalnej, nieciągłej, a nawet numerycznej [1]. Tego rodzaju problemy pojawiają się przy rozważaniu odbić od twardej ściany, zderzeń twardych kul lub przechodzeniu cząstki przez barierę potencjału. Teoria sterowania również dostarcza przykładów tego rodzaju, gdyż sterowania optymalne [4], [5] są często nieciągłe, co w konsekwencji prowadzi do nieciągłych hamiltonianów. Pojawia się więc naturalna potrzeba rozszerzenia mechaniki na szerszą klasę hamiltonianów - istniejące dotąd wzory dawały możliwości rozważania hamiltonianów co najmniej klasy C^1 .

Celem niniejszej pracy było sformułowanie mechaniki hamiltonowskiej tak, by rozszerzyć klasę rozważanych hamiltonianów i uniknąć podanych powyżej trudności. Wymagało to wprowadzenia pojęcia

nadpotoku, które jest nieco ogólniejsze od pojęcia potoku pola wektorowego [6], [8]. Obiekt ten jest bardziej adekwatny do opisu dynamiki układu mechanicznego.

I. MECHANIKA HAMILTONOWSKA W JĘZYKU GEOMETRII SYMPLEKTYCZNEJ

W klasycznej mechanice hamiltonowskiej układ mechaniczny jest scharakteryzowany przez następujące pojęcia: zbiór stanów, hamiltonian, równania ruchu. Powyższa charakteryzacja przyjmuje w języku geometrii sympletycznej następującą postać:

1. Przestrzenią fazową jest $2n$ -wymiarowa różniczkowalna S klasy C^∞ .
2. Hamiltonian jest gładką funkcją na S , klasy C^∞ .
3. Równania ruchu zakodowane są w różniczkowej dwuformie zewnętrznej ω na S ($\omega \in \Gamma^\infty(\wedge^2 T^*S)$), mające następujące własności:

- $\forall s \in S \forall \tilde{x} \in T_s S \quad \tilde{x} \lrcorner \omega(s)$ jest niezerowym kowektorem, gdy $\tilde{x} \neq 0$ (niezdegenerowanie ω),
- $d\omega = 0$ (zamkniętość ω).

Parę (S, ω) będziemy nazywać różniczkową symplektyczną [6], [10]. Mając do dyspozycji trójkę (S, ω, H) , chcemy odpowiedzieć na podstawowe pytanie, jakie sobie stawiamy, zajmując się mechaniką, a mianowicie, jak zmienia się stan s układu ($s \in S$) po czasie t . Odpowiedzią na nie jest potok.

DEFINICJA 1.1. Potokiem na różniczkowej symplektycznej (S, ω) nazywamy ciągłe odwzorowanie $\varphi: S \times \mathbb{R}^1 \supset D \rightarrow S$, $D \supset S \times \{0\}$, spełniające warunki:

1. $\varphi(\cdot, 0) = \text{id}_S$;

2. Jeżeli $(m, s), (\varphi(m, s), t), (m, s+t) \in D$, to $\varphi(\varphi(m, s), t) = \varphi(m, s+t)$;

3. $\forall m \in S \exists U_m \ni m \wedge \varepsilon_m \in \mathbb{R}^1: \forall t \in]-\varepsilon_m, \varepsilon_m[$
otw

odwzorowanie $\varphi(\cdot, t) : U_m \rightarrow \varphi(U_m, t)$ jest gładkie;

4. φ jest gładkie względem drugiej zmiennej;

5. $\forall s \in S \{(s, t) : (s, t) \in D\}$ jest spójny.

Wygodnie jest przyjąć następujące oznaczenie $\varphi(s, t) = \varphi_t(s)$.

Jeśli w chwili $t = 0$ stan układu był s , to po czasie t stan układu będzie $\varphi_t(s)$. Jeśli układ ma hamiltonian H , to potok z nim związany będziemy oznaczać $\varphi_{(\cdot)}^H(\cdot)$.

Chcemy, aby potok spełnił następujące postulaty fizyczne:

1. Postulat symetrii.

Jeśli ξ jest symplektomorfizmem [6], [9] oraz $H' = H \circ \xi$, to $\varphi_t^{H'} = \xi \circ \varphi_t^H \circ \xi^{-1}$ (symplektomorfizm ξ jest to taki dyfeomorfizm S , który zachowuje dwuformę ω , tzn. $\xi^* \omega = \omega$).

2. Zasada lokalności. Jeśli $\mathcal{O} \subset S$, $H_1|_{\mathcal{O}} = H_2|_{\mathcal{O}}$, to

$$\varphi_t^{H_1}|_{\mathcal{O}} = \varphi_t^{H_2}|_{\mathcal{O}}.$$

3. Cechowanie energii. Jeśli $H_1 = H_2 + e$, gdzie $e = \text{const}$,

to $\varphi_t^{H_1} = \varphi_t^{H_2}$. Postulat ten oznacza fizycznie niezmiennosc potoku ze względu na wybór zera energii mechanicznej układu.

4. Sprzężenie między jednostką czasu a energią:

$$H_1 = cH \rightarrow \varphi_{ct}^{H_1} = \varphi_t^H, c = \text{const}.$$

5. Zasada zachowania energii i praw mechaniki:

φ_t^H zachowuje H i ω :

$$\frac{d}{dt} H(\varphi_t^H(s)) = 0 \quad \forall s \in S, \quad \varphi_t^* \varphi = \omega,$$

gdzie $\varphi_t^* : \Gamma^\infty(\Lambda^2 T^*S) \longrightarrow \Gamma^\infty(\Lambda^2 T^*S)$ jest transportem dwuform.

Nasuwa się pytanie, w jaki sposób trójce (S, ω, H) przypisuje się potok $\varphi_{(\cdot)}^H(\cdot)$. Okazuje się, że istnieje procedura, która w sposób jednoznaczny określa potok, gdy mamy do dyspozycji trójkę (S, ω, H) . Jest ona mianowicie dana wzorem:

$$\frac{d}{dt} \Big|_0 \varphi_t^H \lrcorner \omega = X_H \lrcorner \omega = -dH,$$

gdzie X_H jest polem wektorowym hamiltonianu H , $X_H \in \Gamma^\infty(TS)$. Do tej pory, mówiąc o przestrzeni stanów układu mechanicznego, mieliśmy na myśli $2n$ -wymiarową rozmaitość S . Każdy jej punkt reprezentował pęd i położenie układu. Podejście to nie wyróżniało ani współrzędnych położeniowych, ani pędowych układu i choć niewątpliwie najogólniejsze, nie ułatwiało jakościowego opisu zachowania się układu mechanicznego. Bliższe naszej intuicji fizycznej i częstsze w zastosowaniach jest wyróżnienie przestrzeni, której punkty reprezentują położenie, a którą będziemy nazywać przestrzenią konfiguracyjną M . W tym ujęciu, definicje przestrzeni fazowej S , hamiltonianu H , dwuformy ω mają następujące sformułowania:

1. Przestrzenią fazową S układu jest przestrzeń wiązki kosmicznej do M :

$$S = T^*M$$

$(T^*M = (TM)^*$, TM - wiązka styczna do M). Zauważmy, że w każdym punkcie $x \in M$ mamy zaczepioną przestrzeń wektorową pędów, będącą włóknem nad punktem x - S_x .

2. Hamiltonian $H \in C^\infty(S)$ jest funkcją $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}^1$. Korzystając z liniowej struktury włókien, w każdym z nich można wprowadzić iloczyn skalarny $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i określić hamiltonian

$$H(x, p) = \langle p | p \rangle + \tilde{V}(n),$$

gdzie $\tilde{V}(n) = V(\pi(n))$ jest podniesieniem za pomocą rzutu π potencjału V określonego na przestrzeni konfiguracji M . $\langle p | p \rangle$ ma sens energii kinetycznej układu, natomiast $\tilde{V}(n)$ - jego energii potencjalnej.

3. Formę ω wprowadzamy w następujący sposób: jeśli α jest gładkim cięciem wiązki T^*M ($\alpha \in \Gamma^\infty(T^*M)$), to forma symplektyczna ω spełnia wzór:

$$\alpha^* \omega = d\alpha, \quad \alpha : M \rightarrow T^*M,$$

gdzie α^* jest transportem dwuform:

$$\alpha^* : \Gamma^\infty(\Lambda^2 T^*S) \rightarrow \Gamma^\infty(\Lambda^2 T^*M), \quad S = T^*M.$$

Okazuje się, że tak wprowadzona forma jest zamknięta i niezdegenerowana.

Dotychczas rozpatrywaliśmy hamiltonian, będący funkcją klasy C^∞ na przestrzeni fazowej S ($H \in C^\infty(S)$). Dzięki różniczkowalności hamiltonianu mogliśmy określić pole wektorowe hamiltonianu X_H

i potok φ_t^H , który opisywał dynamikę przestrzeni fazowej:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 \varphi_t^H \lrcorner \omega = X_H \lrcorner \omega = -dH.$$

Zauważmy, że jeśli weźmiemy pod uwagę hamiltonian, który jest funkcją nieróżniczkowalną bądź nieciągłą, to powyższa procedura traci swój sens, bowiem historia układu mechanicznego, opisywana przez potok φ_t^H w momencie osiągnięcia przez układ punktów nieróżniczkowalności hamiltonianu urywa się z uwagi na niemożność określenia dH , a co za tym idzie i potoku. Wyłania się zatem konieczność zastąpienia potoku pojęciem ogólniejszym, tzn. nadpotokiem, który w sposób całościowy opisuje historię układu mechanicznego, również po osiągnięciu przezeń punktów osobliwych hamiltonianu.

DEFINICJA 2.2. Niech S będzie rozmaitością, a D - otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^1 \times S$. Odwzorowanie

$$D \ni (t, x) \longrightarrow \varphi_t(x) \in S$$

będziemy nazywać nadpotokiem, gdy spełnione są warunki:

1. Niech $(t, s) \in D$. Istnieje otwarte otoczenie \mathcal{O} punktu s w M , że $\varphi_t(\cdot)$ jest gładkim dyfeomorfizmem \mathcal{O} na $\varphi_t(\mathcal{O}) \subset S$.

2. $\forall s \in S$ $\varphi_{(\cdot)}(s)$ jest gładką krzywą w S sparametryzowaną przez otwarty podzbiór \mathbb{R}^1 tych t , dla których $(t, s) \in D$.

3. Jeżeli $(t, s), (1, s), (t + 1, s) \in D$, to $(1, \varphi_t(s)) \in D$ oraz $\varphi_1(\varphi_t(s)) = \varphi_{1+t}(s)$.

Wprowadzone pojęcie dopuszcza możliwość rozważania krzywych całkowych (krzywych postaci $\varphi_{(\cdot)}(s)$) określonych na niespójnych podzbiorach \mathbb{R}^1 . Dwa poniższe twierdzenia podają związki między potokiem a nadpotokiem:

TWIERDZENIE 1. Jeśli M jest rozmaitością, a N - jej otwartą podrozmaitością i $\varphi_t^0(x)$ potokiem na dziedzinie $d_0 \subset M$, to $\varphi_t(x) := \varphi_t^0(x)|_d$, gdzie d jest zbiorem tych punktów należących do d_0 , dla których $x \in N$ oraz $\varphi_t^0(x) \in N$, jest nadpotokiem.

TWIERDZENIE 2. Niech $\varphi_t(s)$ określona na $D \subset \mathbb{R}^1 \times S$ będzie nadpotokiem. Oznaczamy przez D_0 zbiór tych punktów $(t, s) \in D$, dla których $(\alpha t, s) \in D$ dla wszystkich $\alpha \in [0, 1]$. Wówczas D_0 jest otwartym i spójnym podzbiorem $\mathbb{R}^1 \times S$ oraz nadpotok $\varphi_t(s)|_{D_0}$ jest potokiem.

Zauważmy, że nadpotok wyznacza jednoznacznie pole wektorowe, natomiast pole wektorowe może wyznaczać na ogół wiele różnych nadpotoków (wystarczy bowiem z dziedziny potoku usuwać po jednym punkcie, aby uzyskiwać różne nadpotoki).

PRZYKŁAD. Niech $M = \mathbb{R}^1$. Rozważmy potok $\varphi_t^0(x) = x + t$ o dziedzinie $D_0 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$. Jeżeli z M usunąć punkt 0, to D będzie zbiorem takich punktów (t, x) , dla których $x \neq 0$ oraz $t + x \neq 0$. Wtedy $\varphi_t^0(x)$ jest nadpotokiem na $\mathbb{R}^1 - \{0\}$, bowiem krzywe całkowe $\varphi_{(\cdot)}^0(x)$ nie są spójne.

II. EWOLUCJA UKŁADU MECHANICZNEGO DLA OSOBLIWYCH HAMILTONIANÓW

Na wstępie rozważmy przypadki, w których przestrzeń konfiguracyjna $M = \mathbb{R}^1$. Następnie przeniesiemy nasze rozważania na problem wielowymiarowy.

Przypadek 1 - odbicie od nieskończonej twardej ściany. Rozważmy hamiltonian zadany wzorem

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, p) \rightarrow H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x) \in \mathbb{R}^1,$$

gdzie $V(x)$ jest funkcją określoną następująco:

$$\mathbb{R}^1 \ni x \rightarrow V(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R}^1 - \{0\}, \\ \infty, & x = 0. \end{cases}$$

Potencjał $V(x)$ będziemy przybliżać funkcjami gładkimi $V_n(x)$ spełniającymi warunki:

1. $V_n(x) \rightarrow V(x)$ punktowo na \mathbb{R}^1 ;
2. $V_n(x) \rightarrow V(x)$ niemal jednostajnie na zbiorze $\mathbb{R}^1 - \{0\}$;
3. $\forall E > 0 \exists N_1 \in \mathbb{N} \forall n > N_1 \quad V_n'(x) > 0$ dla $x \in]-\infty, x_0[$,
 $V_n'(x) < 0$ dla $x \in]x_1, \infty[$;
4. $\forall E > 0 \exists N_2 \in \mathbb{N} \forall n > N_2 \quad V_n''(x) \gg 0$, $x \in]-\infty, x_0[\cup]x_1, \infty[$,

gdzie $x_0, x_1 : V(x_0) = V(x_1) = E$, E - energia układu.

TWIERDZENIE 3. Jeśli ciąg funkcji V_n spełnia powyższe założenia, to ciąg potoków φ_n odpowiadających hamiltonianom

$$H_n = \frac{p^2}{2m} + V_n(x) \text{ zbiega punktowo na } \mathbb{R}^2 - (\{0\} \times \mathbb{R}^1) \text{ do}$$

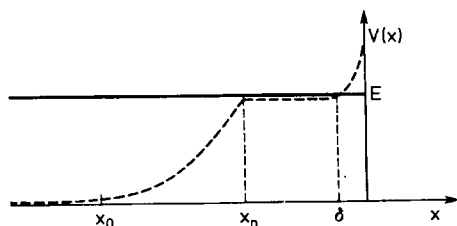
nadpotoku ($t \neq \frac{xm}{p}$)

$$\varphi_t(x,p) = (-|x + \frac{pt}{m}|, p \operatorname{sgn}(\frac{xm}{p} - t)), \quad p > 0, \quad x < 0.$$

Będziemy mówić, że nadpotok odpowiada hamiltonianowi H z potencjałem V .

Na mocy twierdzenia, które mówi, że gdy współczynniki pola wektorowego zbiegają niemal jednostajnie, wówczas odpowiadające im potoki zbiegają co najmniej punktowo, otrzymujemy natychmiast zbieżność potoków na odcinku $]-\infty, 0[$ dla $t < \frac{-xm}{p}$. Aby udowodnić zbieżność dla całego potoku, tzn. dla $t > \frac{-xm}{p}$, wystarczy wykazać, że czas potrzebny na przejście od stanu (x_0, p) , $x_0 < 0$, $p > 0$, do stanu $(x_0, -p)$ z odbiciem od ściany dąży do $|2x_0| \cdot \frac{m}{p}$.

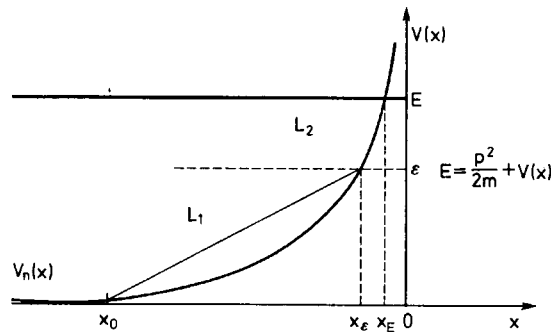
Chcemy, aby ciągowi hamiltonianów $H_n(x,p) = \frac{p^2}{2m} + V_n(x)$ odpowiadał zbieżny ciąg czasów przejścia od stanu (x_0, p) do stanu $(x_0, -p)$. Dlatego konieczne jest przyjęcie założeń 3 i 4 na funkcje gładkie $V_n(x)$. Chodzi o to, by wyeliminować np. sytuacje, w których $V_n(x)$ spełnia założenia 1,2 i ma siodło (tzn. $V_n^1(x) = 0$) o wartości E , na odcinku $]x_n, \delta[$ (rys. 1).



Rys. 1

Wówczas przejście od stanu (x_0, p) , $x_0 < x_n < 0$, $p > 0$, $p = \sqrt{2mE}$ do stanu $(x_0, -p)$ nie jest możliwe w skończonym czasie, bowiem w momencie osiągnięcia siodła przez układ jego stan nie ulega zmianie.

Tego rodzaju zachowanie układu będziemy nazywać stratami czasu. Rozważmy stan o energii E , przeprowadzimy rozumowanie dla lewej półosi, co nie ogranicza ogólności rozważań (rys. 2).



Rys. 2

Wprowadzimy oznaczenia:

$t_{x_0 x_1}$ - czas przejścia układu od stanu (x_0, p) do stanu (x_1, p) ,

$t_{x_0 0 x_0}$ - czas przejścia układu od stanu (x_0, p) do stanu $(x_0, -p)$.

Niech ϵ : $0 < \epsilon < E$, x_ϵ : $V_n(x_\epsilon) = \epsilon$, x_E : $V_n(x_E) = E$. Mamy ogólny wzór

$$t_{x_0 x_1} = \sqrt{-\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx'}{\sqrt{E - V(x')}}.$$

Zauważmy, że $t_{x_0 0 x_0}$ jest ograniczony z dołu przez $t_{\min x_0 0 x_0}$ - czas swobodnego przejścia od stanu (x_0, p) do stanu $(x_0, -p)$, gdzie $t_{\min x_0 0 x_0}$ odpowiada potencjałowi $V(x) = 0$,

$$x \in [x_0, 0[\quad i \quad t_{\min x_0 0 x_0} = -x_0 \sqrt{\frac{2m}{E}} \quad (x_0 < 0).$$

Ważny jest fakt, że przejście od stanu (x_0, p) do stanu $(x_0, -p)$ nie pociąga za sobą strat czasu. Zauważmy jednak, że dla $t_{x_0 0 x_0}$ istnieje oszacowanie z góry, które oznaczamy przez $t_{\sup x_0 0 x_0}$, przez aproksymację $V_n(x)$ na odcinkach $[x_0, x_\varepsilon]$, $[x_\varepsilon, x_E]$ na podstawie założeń 3 i 4 przez liniowe funkcje L_1 i L_2 :

$$L_1(x) = \frac{\varepsilon - V_n(x_0)}{x_\varepsilon - x_0} (x - x_0) + V_n(x_0).$$

$$L_2(x) = \frac{E - \varepsilon}{x_E - x_\varepsilon} (x - x_\varepsilon) + \varepsilon.$$

Pozwala to na wyliczenie $t_{\sup x_0 0 x_0}$ explicite:

$$t_{\sup x_0 0 x_0} = 2 \sqrt{\frac{m}{2}} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left(\int_{x_0}^{x_\varepsilon} \frac{dx'}{\sqrt{E - L_1(x')}} + \int_{x_\varepsilon}^{x_E} \frac{dx'}{\sqrt{E - L_2(x')}} \right) =$$

$$= 2 \sqrt{\frac{m}{2}} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left(\int_{x_0}^{x_\varepsilon} \frac{dx'}{\sqrt{E - \frac{\varepsilon - V_n(x_0)}{x_\varepsilon - x_0} (x' - x_0) - V_n(x_0)}} \right) +$$

$$+ 2 \sqrt{\frac{m}{2}} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left(\int_{x_\varepsilon}^{x_E} \frac{dx'}{\sqrt{E - \frac{E - \varepsilon}{x_E - x_\varepsilon} (x' - x_\varepsilon) - \varepsilon}} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \sqrt{\frac{m}{2}} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left(\int_{x_0}^{x_\varepsilon} \frac{dx'}{\sqrt{-\left(\frac{\varepsilon - V_n(x_0)}{x_\varepsilon - x_0}\right)x' + E + \frac{\varepsilon - V_n(x_0)}{x_\varepsilon - x_0}x_0 - V_n(x_0)}} \right) + \\
&+ 2 \sqrt{\frac{m}{2}} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left(\int_{x_\varepsilon}^{x_E} \frac{dx'}{\sqrt{-\left(\frac{E - \varepsilon}{x_E - x_\varepsilon}\right)(x' + E + \left(\frac{E - \varepsilon}{x_E - x_\varepsilon}\right)x_\varepsilon) - \varepsilon}} \right) = \\
&= 2 \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \frac{-x_0}{\sqrt{E}} = -x_0 \sqrt{\frac{2m}{E}}.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że $t_{\sup x_0 0 x_0} \geq t_{x_0 0 x_0} \geq t_{\min x_0 0 x_0}$ oraz

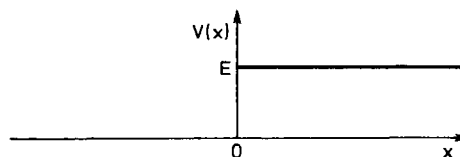
$$t_{\sup x_0 0 x_0} = t_{\min x_0 0 x_0} = -x_0 \sqrt{\frac{2m}{E}}. \text{ Zatem } t_{x_0 0 x_0} = -x \sqrt{\frac{2m}{E}},$$

co chcieliśmy wykazać.

Przypadek 2. Rozważmy hamiltonian $\mathbb{R}^2 \ni (x, p) \rightarrow H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$:

$$\mathbb{R}^1 \ni x \rightarrow V(x) = \begin{cases} 0, & x \in]-\infty, 0[, \\ E, & x \in [0, \infty[. \end{cases}$$

(Patrz rysunek 3.)



Rys. 3

(a) Rozważmy stan o energii $E_0 < E$. Podobnie jak w przypadku 1, potencjał $V(x)$ będziemy przybliżać funkcjami $V_n(x)$, spełniającymi warunki:

1. $V_n(x) \rightarrow V(x)$ niemal jednostajnie wraz z pierwszą pochodną na zbiorze $\mathbb{R}^1 - \{0\}$;

2. $V_n(x) \rightarrow V(x)$ punktowo dla $x = 0$;

3. $V'_n(x) \geq 0$ dla $x \in]-\infty, \infty[$;

4. $\exists N \forall n > N \quad V''_n(x) \geq 0$ na odcinku $]-\infty, x_0[$,

gdzie $x_0: V_n(x_0) = E_0$.

Stosując tę samą procedurę, co w przypadku 1, uzyskujemy, że czas przejścia od stanu (x_1, p) do stanu $(x_1, -p)$ jest równy $-2x_1 \cdot \frac{m}{p}$. Nadpotok ma postać

$$\varphi_t(x, p) = \left(- \left| x + \frac{pt}{m} \right|, p \operatorname{sgn}\left(\frac{xm}{p} - t\right) \right), \quad t \neq \frac{xm}{p}.$$

(b) Stany o energii $E_0 = E$. Ewolucja ma sens tylko do momentu osiągnięcia przez układ punktu $x = 0$.

(c) Stan o energii $E_0 > E$. Nadpotok ma postać

$$\varphi_t(x, p) = \left(x + \frac{pt}{m}, p - \theta(x) \sqrt{2mE} \right),$$

gdzie wybraliśmy $x \in]-\infty, 0[$, $p > 0$.

Zauważmy, że czas przejścia od stanu (x_1, p) do stanu (x_2, p) , gdzie $x_1 x_2 > 0$, $p > 0$, jest oczywiście równy

$$|x_1 - x_2| \frac{p}{m}.$$

Zastanówmy się, czy przejście od stanu (x_1, p) do stanu

$(x_2, p - \sqrt{2mE})$, $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $p > 0$, nie pociąga za sobą strat czasu. W tym celu obliczmy czas przejścia od stanu $(-\varepsilon, p)$ do stanu $(\varepsilon, p - \sqrt{2mE})$, $\varepsilon > 0$:

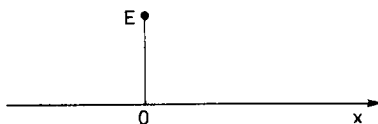
$$t_{-\varepsilon\varepsilon} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{dx'}{\sqrt{E_0 - V(x')}}.$$

Przechodząc do granicy $\varepsilon \rightarrow 0$ i pamiętając, że $E_0 > E$, mamy całkę po dążącym do 0 odcinku ze skończonego wyrażenia podcałkowego, a zatem $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} t_{-\varepsilon\varepsilon} = 0$, co oznacza, że przy przechodzeniu od stanów (x_1, p) do stanów $(x_2, p - \sqrt{2mE})$ wspomnianych powyżej nie ma strat czasu.

Przypadek 3. Rozważmy hamiltonian $\mathbb{R}^2 \ni (x, p) \rightarrow H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$, gdzie

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R}^1 - \{0\}, \\ E, & x = 0. \end{cases}$$

(Patrz rysunek 4.)



Rys. 4

(a) Rozważmy stan energii $E_0 < E$. Analogicznie do przypadku 2 potencjał $V(x)$ będziemy przybliżać gładkimi funkcjami $V_n(x)$ spełniającymi warunki:

1. $V_n(x) \rightarrow V(x)$ niemal jednostajnie wraz z pierwszą pochodną na zbiorze $\mathbb{R}^1 - \{0\}$;
2. $V_n(x) \rightarrow V(x)$ punktowo dla $x = 0$;
3. $\forall E_0 < E \quad \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_1 \quad V'_n(x) \gg 0, \quad x \in]-\infty, x_{01}[,$
 $V'_n(x) \ll 0, \quad x \in]x_{02}, \infty[;$
4. $\forall E_0 < E \quad \exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_2 \quad V''_n(x) \gg 0, \quad x \in]-\infty, x_{01}[\cup]x_{02}, \infty[,$

gdzie

$$x_0: V_n(x_0) = E_0, \quad x_0 = \begin{cases} x_{01}, & x_0 < 0, \\ x_{02}, & x_0 > 0. \end{cases}$$

Opierając się na wynikach przypadku 1, uzyskujemy: czas przejścia od stanu $(x_1, -p)$, do stanu (x_1, p) , gdzie $x_1 < 0$, $p > 0$, jest równy $t_{x_1 0 x_1} = -2x_1 \left(-\frac{m}{p}\right)$.

Nadpotok ma postać

$$\varphi_t(x, p) = \left(-\left|x + \frac{pt}{m}\right|, p \operatorname{sgn}\left(-\frac{xm}{p} - t\right)\right), \quad t \neq \frac{xm}{p}.$$

(b) Stany o energii $E_0 = E$. Jeśli stan początkowy jest (x, p) , $x < 0$, $p > 0$, to ewolucję układu można określić tylko do momentu osiągnięcia przez niego punktu $x = 0$.

(c) Stany o energii $E_0 > E$. Nadpotok ma postać

$$\varphi_t(x, p) = \begin{cases} \left(x + \frac{pt}{m}, p - \sqrt{2mE}\right), & x = 0, \\ \left(x + \frac{pt}{m}, p\right), & x \in \mathbb{R}^1 - \{0\}, \end{cases}$$

gdzie wybraliśmy $x \in]-\infty, 0[$, $p > 0$. Czas przejścia od stanu (x_1, p) do stanu (x_2, p) , gdzie $x_1 x_2 > 0$, $p > 0$, jest oczywiście równy $|x_1 - x_2| \cdot \frac{p}{m}$. Również $t_{x_1 x_2} = |x_1 - x_2| \cdot \frac{p}{m}$ dla $p > 0$,

$x_1 x_2 < 0$, ponieważ nie ma strat czasu przy przejściu układu od stanu (x_1, p) do stanu (x_2, p) , $x_1 x_2 < 0$. Mamy bowiem

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} t_{-\varepsilon\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{dx'}{\sqrt{E_0 - V(x')}} \right) = 0,$$

bo podobnie jak w przypadku 2, mamy całkę po odcinku dążącym do zera, ze skończonego wyrażenia podcałkowego z uwagi na to, że $E_0 > E$.

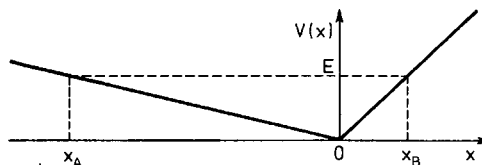
Przypadek 4. Jako ostatni rozpatrzmy hamiltonian:

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, p) \rightarrow H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x) \in \mathbb{R}^1,$$

gdzie

$$V(x): \mathbb{R}^1 \ni x \rightarrow V(x) = \begin{cases} -\alpha x, & x \in]-\infty, 0[, \quad \alpha > 0, \\ \beta x, & x \in [0, \infty[\quad , \quad \beta > 0. \end{cases}$$

(Patrz rysunek 5.)



Rys. 5

Rozważmy stan o energii $E > 0$. Analogicznie do przypadków poprzednich potencjał $V(x)$ przybliżamy funkcjami gładkimi $V_n(x)$, spełniającymi warunki:

1. $V_n(x) \rightarrow V(x)$ niemal jednostajnie wraz z pierwszą pochodną na zbiorze $\mathbb{R}^1 - \{0\}$;

2. $V_n(x) \rightarrow V(x)$ punktowo na \mathbb{R}^1 ;

3. $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \in \mathbb{N} \forall n > N_1 \begin{cases} V'_n(x) < 0, & x \in]x_{01} - \varepsilon, 0[, \varepsilon > 0, \\ V'_n(x) > 0, & x \in]0, x_{02} + \varepsilon[, \varepsilon > 0; \end{cases}$

4. $\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 \in \mathbb{N} \forall n > N_2 \quad V''_n(x) \geq 0, \quad x \in]x_{01} - \varepsilon, x_{02} + \varepsilon [.$

gdzie

$$x_0: V_n(x_0) = E, \quad x_0 = \begin{cases} x_{01}, & x_0 < 0, \\ x_{02}, & x_0 > 0; \end{cases}$$

$$\text{Oczywiście } t_{x_1 x_2} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx'}{\sqrt{E - V(x')}}.$$

Niech $x_A, x_B: V(x_A) = V(x_B) = E$. Analizując kształt potencjału, łatwo zauważyć, że układ nie doznaje strat czasu. Mogłoby się to zdarzyć jedynie w otoczeniach punktów x_A i x_B , lecz założenie 3 usuwa wątpliwości tego rodzaju. Nadpotok ma postać: jako początkowy stan układu wybieramy stan $(-x, p)$, gdzie $x > 0, p > 0$:

$$\varphi_t(-x, p) = (x(t), p(t)),$$

$$x(t) = \begin{cases} -x + \frac{pt}{m} + \frac{\alpha t^2}{2}, & t \in A, \\ \sqrt{\frac{p^2}{m^2} + 2x\alpha} \left[t + \frac{p}{m\alpha} - \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{p^2}{m^2} + 2x\alpha} \right] - \\ \quad - \frac{\beta}{2} \left[t + \frac{p}{m\alpha} - \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{p^2}{m^2} + 2x\alpha} \right]^2, & t \in B, \\ \frac{1}{2\beta} \left(\frac{p^2}{m^2} + 2x\alpha \right) - \frac{\beta}{2} \left[t - \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{p^2}{m^2} + 2x\alpha} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} \right) + \frac{p}{m\alpha} \right]^2, & t \in C, \\ -\sqrt{\frac{p^2}{m^2} + 2x\alpha} \left[t - \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{p^2}{m^2} + 2x\alpha} \left(2 + \frac{\beta}{\alpha} \right) + \frac{p}{m\alpha} \right] + \\ \quad + \frac{\alpha}{2} \left[t - \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{p^2}{m^2} + 2x\alpha} \left(2 + \frac{\beta}{\alpha} \right) + \frac{p}{m\alpha} \right]^2, & t \in D, \end{cases}$$

$$p(t) = \begin{cases} p + \alpha tm, & t \in A, \\ m \sqrt{\frac{p^2}{m^2} + 2x\alpha} - m\beta \left(t + \frac{p}{m\alpha} - \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{p^2}{m^2} + 2x\alpha} \right), & t \in B, \\ -m\beta \left[t - \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{p^2}{m^2} + 2x\alpha} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} \right) + \frac{p}{m\alpha} \right], & t \in C, \\ -m \sqrt{\frac{p^2}{m^2} + 2x\alpha} + m\alpha \left[t - \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{p^2}{m^2} + 2x\alpha} \left(2 + \frac{\beta}{\alpha} \right) + \frac{p}{m\alpha} \right], & t \in D, \end{cases}$$

$$A = \left[nT, -\frac{p}{m\alpha} + \sqrt{\frac{p^2}{m^2} + 2x\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} + nT \right],$$

$$B = \left[nT + \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{p^2}{m^2} + 2x\alpha} - \frac{p}{m\alpha}, \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{p^2}{m^2} + 2x\alpha} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) - \frac{p}{m\alpha} + nT \right],$$

$$C = \left[nT + \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{p^2}{m^2} + 2x\alpha} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) - \frac{p}{m\alpha}, \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{p^2}{m^2} + 2x\alpha} \left(2 + \frac{\beta}{\alpha}\right) - \frac{p}{m\alpha} + nT \right],$$

$$D = \left[nT + \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{p^2}{m^2} + 2x\alpha} \left(2 + \frac{\beta}{\alpha}\right) - \frac{p}{m\alpha}, \left(\frac{2}{\beta} + \frac{2}{\alpha}\right) \sqrt{\frac{p^2}{m^2} + 2x\alpha} - \frac{p}{m\alpha} + nT \right],$$

$$T - \text{okres ruchu } T = \left(\frac{2}{\beta} + \frac{2}{\alpha}\right) \sqrt{\frac{p^2}{m^2} + 2x\alpha}.$$

Powyższe przypadki łatwo jest uogólnić na przypadek, gdy przestrzeń konfiguracyjna M układu mechanicznego jest n -wymiarowa. Przyjmują one wtedy postać następującego twierdzenia.

TWIERDZENIE 4. Niech rozmierność M będzie przestrzenią konfiguracyjną układu mechanicznego, $\dim M = n$. Niech M_0 oznacza $(n-1)$ -wymiarową domkniętą podrozmierność w M . Niech w wiązce T^*M będzie zadana forma kwadratowa energii kinetycznej $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Załóżmy, że na T^*M mamy zadany hamiltonian $H = \langle P|P \rangle + V$, gdzie V jest podniesieniem za pomocą rzutu π funkcji określonej na M , gładkiej w punktach $M - M_0$. V ma poza tym następującą własność: dla każdego $x \in M_0$ istnieje mapa κ taka, że otoczenie $M \supset U$ x przechodzi
otw

na $\mathcal{H}(U) \subset \mathbb{R}^n$, przy czym

$$\mathcal{H}(U \cap M_0) \longrightarrow \mathcal{H}(U) \cap \mathbb{R}^{n-1}, \quad V|_U = V(\mathcal{H}(U)).$$

$V(x^1, \dots, x^n) = V(x^1)$, przy czym (x^2, \dots, x^n) są współrzędnymi wzdłuż \mathbb{R}^{n-1} , a $V(x^1)$ ma w punkcie $x^1 = 0$ kielek równy kielkom w 0 potencjałów rozważanych w przypadku 1, 2, 3, 4. Wówczas istnieje nadpotok φ_t^H odpowiadający hamiltonianowi H w taki sposób, że spełnione są wszystkie postulaty z paragrafu 1.

W celu przeprowadzenia dowodu wystarczy zapisać problem w mapie tak, jak w założeniu twierdzenia, co sprowadza się do jednego z podanych powyżej przypadków. Gładkie hamiltoniany H_n rozważane w tych przypadkach spełniają oczywiście postulaty, i widać, że granica odpowiadających im potoków φ_n również je spełnia.

Podsumowując, wprowadzone pojęcie nadpotoku pozwala opisać dynamikę układów mechanicznych o nieróżniczkowalnych, a nawet nieciągłych hamiltonianach. Historia układu mechanicznego opisywana za pomocą potoku urywała się w momencie osiągnięcia przezeń punktów osobliwych hamiltonianu, natomiast użycie nadpotoku pozwala na usunięcie tych trudności, umożliwiając opis zachowania się systemu również po osiągnięciu punktów nieróżniczkowalności bądź nieciągłości hamiltonianu. Nie zachodzi też konieczność usuwania punktów osobliwych hamiltonianu z przestrzeni fazowej, jak dla potoku.

PRACE CYTOWANE

[1] R. Abraham, Foundations of mechanics, Benjamin, New York 1967.

- [2] A. Arnold, Mathematical methods of classical mechanics, Springer Verlag, New York 1978.
- [3] G. Białkowski, Mechanika klasyczna, PWN, Warszawa 1975.
- [4] J. Bołtianski, Matematyczne metody sterowania optymalnego, WNT, Warszawa 1971.
- [5] A. Girsanow, Lectures on mathematical theory of extremum problems, Springer Verlag, Berlin 1972.
- [6] W. Kondracki, J. Rogulski, Metody geometryczne w mechanice klasycznej i klasycznej teorii pola, Warszawa 1978.
- [7] J.M. Souriau, Structure des systemes dynamiques, DUNOD, Paris 1970.
- [8] Sh. Sternberg, Lectures on differential geometry, Englewood Cliffs, 1964.
- [9] J. Marsden, Geometric methods in mathematical physics, Berlin 1980.
- [10] A. Weinstein, Lectures on symplectic manifolds, Providence 1977 AMS.
- [11] K. Maurin, Analiza, cz. I Elementy, PWN, Warszawa 1977.