Ph. G. Ciarlet

The finite element method for elliptic problems

Ser. Studies in Mathematics and Applications
North-Holland Publ. Co., Amsterdam, New York, Oxford, 1978,
XVII + 530 str., ISBN 0-444-85028-7

Recenzowana książka została wydana w 1978 r. przez North-Holland Publishing Company. Jej autor Philippe G. Ciarlet jest znanym matematykiem francuskim. Ma on istotny wkład w rozwój metody elementu skończonego (MES). Pracuje na Uniwersytecie im. Pierre'a i Marie Curie w Paryżu w Laboratorium Analizy Numerycznej. Wydanie tej książki zostało poprzedzone pojawieniem się dwóch skryptów opartych na wykładach, które Ph. G. Ciarlet wygłosił w Bangalore (Indie) i Montrealu (Kanada). Skrypty te noszą tytuły Wykłady z metody elementu skończonego i Analiza numeryczna metod elementu skończonego.

Kilka zdań o historii MES. Pierwszy wariant tej metody pojawił się już w 1943 r. w pracy napisanej przez znanego matematyka R. Couranta. Praca ta pozostawała jednak przez dłuższy czas w zapomnieniu. W połowie lat pięćdziesiątych inżynierowie mechanicy zaproponowali tę metodę jako nową do rozwiązywania swoich problemów. Okazała się ona bardzo użyteczna w praktyce i została nazwana metodą elementu skończonego. Od tego czasu datuje się jej szeroki rozwój. Jest ona wykorzystywana do rozwiązywania wielu zagadnień techniki, fizyki, mechaniki itd. Matematycy zainteresowali się tę metodą dopiero na początku lat sześćdziesiątych. W tym czasie MES nie była jeszcze zbadana z punktu widzenia zbieżności, oszacowania błędu itd. Tej analizy doczekała się pod koniec lat sześćdziesiątych i na początku siedemdziesiątych. Ustalono jej podstawowe własności między innymi quasi-optymalność w sensie oszacowań błędu zbieżności. Dodajmy, że ważnym momentem w rozwoju MES w aspekcie matematycznym było ustalenie, że MES tzw. zgodne (conforming method) są szczególnymi przypadkami znanych metod Ritza i Galerkina. Do rozwoju MES w dużym stopniu przyczyniła się książka O. C. Zienkiewicza The finite elements method in engineering science wydana w 1971 r.* W książce tej MES jest przedstawiona w ujęciu inżynierskim, dokładniej mechaniki budowlanej.

---

*O. C. Zienkiewicz, Metoda elementów skończonych, Arkady, Warszawa 1972.

W tym też czasie pojawiła się potrzeba napisania książki z zakresu MES w ujęciu matematycznym. Taką okazała się książka G. Stranga i G. J. Fixa An analysis of the finite element method (jest jej tłumaczenie rosyjskie)*, która odegrała wielką rolę w rozwoju i popularyzacji MES. Moim zdaniem autorom tej książki udało się powiązać ujęcie matematyczne z inżynierskim. Sformułowali oni wiele problemów, które zostały później rozwiązane. Nastąpił dwutorowy rozwój MES. Pierwszy dotyczył konstrukcji metody i jej realizacji na maszynach cyfrowych. Wiąże się to z tym, że MES jest trudna i czasochłonna w swojej realizacji, zaprogramowanie jej wymaga pewnej wiedzy praktycznej. W związku z tym pojawiło się kilka książek traktujących o tych sprawach. Drugi kierunek rozwoju MES dotyczył jej aspektów matematycznych. Fundamentalną książką z tego zakresu jest właśnie recenzowana książka Ph. G. Ciarleta. Zawiera ona stan wiedzy o MES do 1976 r. Przejdźmy do omówienia treści tej książki. Jej autor zakłada, że Czytelnik jest zaznajomiony z analizą matematyczną i funkcjonalną, z teorią równań różniczkowych w zakresie podstawowym, ale w ujęciu nowoczesnym. Z analizy funkcjonalnej wymagana jest znajomość przestrzeni unormowanych, przestrzeni Hilberta i Soboleva. Aby książka stanowiła logiczną całość jej autor podaje pewne pojęcia i twierdzenia z wyżej wymienionych dyscyplin, np. twierdzenia Soboleva o zanurzeniu, które odgrywają ważną rolę w analizie MES.

Książka zawiera 8 rozdziałów. W pierwszym przedstawione są zagadnienia eliptyczne brzegowe. Traktowane są one jako pewne równania abstrakcyjne (wariacyjne). Podany jest lemat Laxa-Milgrama, na podstawie którego dość łatwo ustala się poprawność pewnej klasy zagadnień eliptycznych. Rozpatrywane są niektóre przykłady zagadnień eliptycznych, określonych w przestrzeniach Soboleva. Rozdział 2 jest wprowadzeniem do MES tzw. zgodnych. Traktuje się je jako szczególny przypadek metod Galerkina i Ritza. Dlatego najpierw podana jest konstrukcja tych metod dla abstracyjnego równania eliptycznego i podstawowe twierdzenie o szacowaniu błędu zbieżności (lemat Céa). Konstrukcja wymienionych metod sprowadza się do określenia podprzestrzeni m-wymiarowych V_m przestrzeni V, w której rozważane jest zadanie wyjściowe. Aby otrzymać MES należy w specjalny sposób konstruować przestrzeń V_m. Obszar Ω, w któ-

*G. Strang, G. J. Fix, Teorija metoda konečnych èlementov, Mir, Moskva 1977.

rym określone są funkcje należące do V, dzielimy na podobszary, zwane elementami. Za elementy V_m przyjmujemy funkcje, które na elementach są wielomianami określonego stopnia i są one w odpowiedni sposób sklejone. Przestrzenie te przyjęto nazywać przestrzeniami elementu skończonego. Taka konstrukcja gwarantuje istnienie funkcji bazowych, różnych od zera tylko w pewnych elementach sąsiednich.

W rozdziale 2 podana jest konstrukcja przestrzeni elementu skończonego dla elementów trójkątnych i prostokątnych. Opiera się ona na tzw. trójkach $\{K, P, \Sigma\}$, gdzie K jest elementem, P - zbiorem wielomianów określonych w K, Σ zaś jest zbiorem funkcjonałów liniowych nad P. Jest to nowe podejście zaproponowane w pracach autora książki. Koncepcja ta z matematycznego punktu widzenia jest moim zdaniem udana. Zawarte jest w niej sedno konstrukcji MES. Dokładniej omówiony jest przypadek oparty na przekształceniach afinicznych. Należy jednak dodać, że to podejście może nastręczać wiele trudności Czytelnikowi nieobeznanemu z MES w zrozumieniu jej konstrukcji.

Rozdział 3 zawiera analizę zbieżności MES w przestrzeniach Soboleva. Dlatego najpierw przedstawiona jest interpolacja funkcji w tych przestrzeniach. Punkt ten warto polecić również Czytelnikom interesującym się teorią aproksymacji funkcji i jej zastosowaniom. Mając twierdzenie o szacowaniu błędu interpolacyjnego, łatwo jest już podać oszacowania błędu zbieżności MES na podstawie wyżej wymienionego lematu Céa. Takie oszacowania błędu podane są w przestrzeni Soboleva H^1 dla równań eliptycznych drugiego rzędu i dla wariantów afinicznych MES, rozważanych w poprzednim rozdziale. Wykazana jest również szybkość zbieżności MES w L^2 za pomocą znanego „triku" Aubina-Nitsche'a-Oganesjana oraz zbieżność jednostajna. W książce podano, że autorami tego „triku" są Aubin i Nitsche. W późniejszej literaturze wymienia się również Oganesjana, który uzyskał ten sam rezultat.

Rozdział 4 zatytułowany jako inne metody elementu skończonego dla zagadnień eliptycznych drugiego rzędu zawiera kilka bardzo ważnych tematów. Jednym z nich jest numeryczne całkowanie. Otóż dyskretyzacja zagadnienia różniczkowego MES prowadzi do układu równań algebraicznych, którego współczynnikami są całki od danych funkcji zagadnienia i funkcji bazowych. Stąd konieczność stosowania kwadratur numerycznych. Powstaje tutaj naturalny problem. Jaką wybrać kwadraturę, aby utrzymać szybkość zbieżności wybranego wariantu MES. Do rozstrzygnięcia tej sprawy pomocnym okazuje się lemat Stranga sformułowany w postaci abstrakcyjnej. Sytuacja ta spowodowała powstanie szeregu specjalnych kwadratur dla całek wielokrotnych, określonych w specjalnych obszarach, tj. na elementach.

Innym ważnym tematem są tzw. niezgodne MES (nonconforming methods). Takie metody pojawiają się wtedy, gdy skonstruowana przestrzeń elementu skończonego nie jest podprzestrzenią przestrzeni, w której rozważane jest zadanie wyjściowe. Tego rodzaju MES są bliskie metodom różnic skończonych.

Podział na elementy prostoliniowe tj. trójkąty, prostokąty jest możliwy tylko dla pewnych obszarów. W przypadku obszarów dowolnych wykorzystujemy tzw. elementy krzywoliniowe. Jednym z najczęściej używanych są tzw. izoparametryczne MES, rozważane również w rozdziale 4. Podajmy, że realizacja tych metod istotnie opiera się na kwadraturach numerycznych.

W rozdziale 5 podana jest konstrukcja i analiza MES, zastosowanych do pewnych problemów nieliniowych. Rozważany jest tzw. problem z przeszkodą sformułowany jako nierówność wariacyjna. Przeprowadzona jest analiza MES trójkątami liniowej dla tego zagadnienia. Następny problem to zagadnienie minimalnej powierzchni. Wreszcie rozważana jest klasa zagadnień z monotonicznym operatorem. Wybór tej klasy nie jest przypadkowy. Udaje się bowiem dla niej przeprowadzić analizę MES.

Pozostałe rozdziały z wyjątkiem 7 zawierają opis MES dla konkretnych, bardzo ważnych zagadnień. Rozdział 6 dotyczy zagadnienia płyty, rozdział 8 zaś - zagadnienia cienkiej powłoki. Dla tych zagadnień podana jest konstrukcja wraz z analizą MES, zgodnych i niezgodnych wariantów.

W rozdziale 7 przedstawione są tzw. mieszane MES. Wiele modeli fizycznych w ujęciu matematycznym daje się sformułować jako pewne zadanie z rachunku wariacyjnego. Postacie te mogą istotnie różnić się między sobą. Wybierając jedną z nich tzw. mieszanego typu (mixed type) i stosując odpowiednie warianty MES otrzymujemy metodę, którą nazywamy MES mieszanego typu. Podejście to jest przedstawione na przykładzie równania biharmonicznego.

Recenzowana książka zawiera bogatą bibliografię do 1976 r. włącznie. Dołączony jest słownik używanych podstawowych symboli i definicji. Książka zawiera również indeks z dużą ilością haseł. Do każdego z rozdziałów dołączone są ćwiczenia. Zawierają one sporo ważnych tematów. Opracowanie ich doprowadziłoby do istotnego powiększenia objętości książki. Tematy te mogą być wykorzystane na zajęciach seminaryjnych dla studentów specjalizujących się w analizie numerycznej równań różniczkowych.

Należy również podkreślić, że każdy z rozdziałów zaopatrzony jest w bibliografię z komentarzem. Zawierają one informację o pracach związanych z tematyką danego rozdziału. Są one rzetelne i mogą być bardzo pomocne między innymi dla tych, którzy interesują się historią rozwoju MES. Nie należy sądzić, że w tak obszernej monografii (zawiera 530 stron) przedstawione są wszystkie podstawowe działy MES. Najbardziej odczuwalny jest brak MES rozwiązywania zagadnień, które zależą od czasu, tj. dla zagadnień niestacjonarnych. Autor książki w przedmowie tłumaczy to tym, że tematyka ta wymaga oddzielnej monografii. Warto dodać, że jest ona dość obszernie przedstawiona w pracy G. Fairweathera "Finite element methods for diffenential equation", która ukazała się w "Lecture notes in pure and applied mathematics" v. 34. Po omówieniu treści przejdźmy do uwag ogólnych. Jak już wyżej podkreślaliśmy książka jest monografią matematyczną z MES i w tej tematyce jest ona fundamentalną. Na tę książkę powołują się z reguły autorzy prac z zakresu MES. Moim zdaniem będzie ona jeszcze przez wiele lat książką podstawową z problematyki MES. Przyczyniała się i będzie się przyczyniać do rozwoju badań MES. O jej roli może zaświadczyć między innymi fakt, że została ona przetłumaczona na język rosyjski po dwóch latach od ukazania się oryginału. Natomiast nie odgrywa ona już takiej roli w popularyzowaniu MES. Napisana jest językiem bardzo zwięzłym i „suchym" - co charakteryzuje książki napisane przez matematyków ze szkoły J. L. Lionsa (wpływ mistrza). Nie sądzę, aby można było ją polecić jako podręcznik osobom pragnącym zapoznać się z MES. Studenci korzystający z tej książki mają sporo kłopotów przy jej czytaniu. Przekonałem się o tym w swej pracy dydaktycznej na Uniwersytecie.

Wydaje mi się też, że książka ta może okazać się mało przydatna dla inżynierów wykorzystujących MES, przede wszystkim dlatego, że brak w niej podejścia konstrukcyjnego. Pominięto problematykę realizacji MES obejmującą szereg etapów, takich jak wyznaczanie układów równań algebraicznych, wybór węzłów, ich numeracja itd. wybór algorytmu rozwięzującego ten układ, zaprogramowanie metody itd. Książka ta może być przydatna w pracy inżyniera wtedy, gdy interesuje go strona matematyczna używanej MES. Na podstawie twierdzeń zawartych w książce może ustalić, czy używana metoda jest poprawna, tj. daje jednoznaczne rozwiązanie mało wrażliwe na zaburzenia prawych stron, jak też ustalić, czy jest ona zbieżna, jaka jest szybkość zbieżności itd.

Podając wyżej krytyczne uwagi należy podkreślić, że autor książki nie stawiał sobie celu, aby napisać książkę „uniwersalną", w której można pogodzić teorię z praktyką. Byłoby to bardzo trudne, a może i nie wykonalne.

Napisanie recenzowanej książki wymagało dużo trudu i wyrzeczeń od jej autora zarówno w pracy naukowej, jak i w życiu osobistym. Dlatego w tym miejscu pragnę wyrazić podziw dla autora tej książki i podziękowanie za napisanie tak fundamentalnego dzieła.

MAKSYMILIAN DRYJA