

Z. Govindarajulu

The sequential statistical analysis of hypothesis testing,
point and interval estimation, and decision theory

American Sciences Press, Inc., Columbus, Ohio, 1981,
IX + 680 str., ISBN 0-935950-02-8

Książka Z. Govindarajulu podejmuje próbę przedstawienia całokształtu metod sekwencyjnych w statystyce matematycznej. Jak sam autor zaznacza we wstępie, jest to próba nieudana, gdyż wiele problemów zostało pominiętych. W przeciwnym razie książka rozrosłaby się do rozmiarów monstrualnych. I rzeczywiście, po pionierskich wynikach Walda i Steina w latach czterdziestych ilość prac poświęconych metodom sekwencyjnym szybko rosła i obecnie nie ma chyba dzięki statystyki matematycznej, w którym nie próbowano zastosować podejścia sekwencyjnego. Govindarajulu najobszerniej przedstawia dziedzinę testów sekwencyjnych oraz zagadnienia estymacji sekwencyjnej.

Najogólniej można opisać metodę sekwencyjną następująco. Wykonywany jest ciąg eksperymentów. Po każdym eksperymencie należy zdecydować na podstawie dotychczasowych wyników:

- a) czy przerwać doświadczenie czy też je kontynuować,
- b) jak ma przebiegać następny eksperyment.

W wielu zadaniach statystyki wykonuje się ciąg jednakowych eksperymentów i wtedy rozważany jest tylko problem a). Książka również zajmuje się tylko zagadnieniami sekwencyjnymi typu a). W porównaniu z podejściem tradycyjnym eksperymentator zyskuje tu dodatkowy stopień swobody: liczba eksperymentów staje się zmienną losową zależną od wyników doświadczenia.

Na wstępie autor przedstawia prosty problem, w którym podejście sekwencyjne daje oczywiste korzyści. Załóżmy, że należy przyjąć lub odrzucić pewną partię wyrobów. Reguła postępowania jest następująca. Wybiera się próbkę złożoną z 50 wyrobów. Jeśli w próbce znajdzie się co najmniej osiem wyrobów wadliwych, to cała partia jest odrzucona, jeśli wyrobów wadliwych będzie mniej niż osiem, to cała partia wyrobów jest przyjmowana. Oczywiście jest, że metoda sekwencyjna



pozwala zmniejszyć w pewnych przypadkach wielkość próbki. Eksperyment można przerwać natychmiast po zaobserwowaniu ośmiu wadliwych lub czterdziestu trzech dobrych elementów. Jeśli badanie jakości związane jest z niszczeniem wyrobów, to taka oszczędność może być dla kontrolera jakości istotna.

Metoda sekwencyjna pozwala nie tylko zmniejszać licznosc próbek. W pewnych zadaniach statystyki jest to jedyna możliwa metoda rozwiązania. Przykładem może tu być zadanie rozwiązane przez Steina. Niech $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie normalnym $N(\mu, \sigma^2)$, gdzie wartość oczekiwana μ oraz wariancja σ^2 są nieznanymi. Należy skonstruować taki test hipotezy $\mu = \mu_0$, aby funkcja mocy tego testu była niezależna od wariancji. Dantzig udowodnił, że jeśli wielkość próbki n jest z góry ustalona, to test taki nie istnieje. Stein skonstruował sławną procedurę sekwencyjną, która rozwiązuje to zagadnienie. Powyższe zadanie można sformułować jako problem poszukiwania przedziału ufności. Mianowicie poszukiwany jest przedział ufności o żądanej szerokości 1 , który pokrywałby nieznaną wartość oczekiwaną z prawdopodobieństwem równym co najmniej α . Jak poprzednio, nie można tego zadania rozwiązać za pomocą próbki o ustalonej liczności, a Stein podał tu odpowiednią procedurę sekwencyjną. Z tych wyników Steina oraz z badań Walda nad sekwencyjnym testem ilorazowym wyrosły dwa kierunki analizy sekwencyjnej: dziedzina testów sekwencyjnych oraz estymacja sekwencyjna a w szczególności problem konstrukcji przedziałów ufności o zadanej z góry szerokości.

W dziedzinie estymacji sekwencyjnej Govindarajulu omawia trzy obszerne klasy problemów jakie tu wyróżniono:

- 1) zminimalizować błąd estymacji przy narzuconym ograniczeniu na wartość oczekiwaną liczby obserwacji,
- 2) zminimalizować wartość oczekiwaną liczby obserwacji przy narzuconym ograniczeniu na wielkość błęd estymacji,
- 3) zminimalizować sumaryczną stratę wynikającą z błęd estymacji oraz z kosztu obserwacji.

W każdym z tych przypadków należy znaleźć optymalną w odpowiednim sensie procedurę sekwencyjną, na którą składa się estymator (a właściwie ciąg estymatorów określonych dla każdej możliwej wielkości próby) oraz reguła zatrzymania (to znaczy zmienna losowa określająca wielkość próby). Na początku lat pięćdziesiątych podjęto próby systematycznego rozwiązywania tych problemów. Okazało

się, że szereg znanych twierdzeń teorii estymacji jest prawdziwych w przypadku sekwencyjnym. I tak, przeniesiono pojęcia dostateczności, zupełności oraz niezmienniczości estymatorów. W przypadku, gdy błąd estymacji mierzymy za pomocą kwadratowej funkcji straty, przeniesiono też nierówność Rao-Cramera oraz pojęcie estymatora najefektywniejszego. Na przykład, estymator można konstruować na podstawie ciągu estymatorów dostatecznych znalezionych dla przypadku niesekwencyjnego; gdy funkcja straty jest wypukła, wówczas prawdziwa jest nierówność Rao-Blackwella i wystarczy rozpatrywać estymatory nierandomizowane. Jako jeszcze jeden przykład przytoczymy następujący wynik. Niech X_1, X_2, \dots będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie z gęstością $f(x, \theta)$, gdzie $E_{\theta} X_i = \theta$. Niech dla każdego n statystyka $T_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ będzie dostateczną dla θ . Załóżmy dalej, że miarę błędu estymacji jest wariancja estymatora. Rozwiązaniem problemu 1) jest wtedy procedura niesekwencyjna, tzn. liczbę obserwacji można z góry ustalić. Poszukiwania te dały jednak niewiele podobnych do powyższego ogólnych twierdzeń estymacji sekwencyjnej i w następnych latach skupiono się raczej na badaniu konkretnych problemów. Okazały się one zresztą równie trudne jak zadania sformułowane bardziej ogólnie. Govindarajulu prezentuje bardzo wiele takich problemów. Wiele miejsca zajmują zadania typu 2) w sytuacji, gdy błąd estymacji kontrolowany jest za pomocą przedziału ufności o zadanej szerokości. Najbardziej znany problem tego typu mamy, gdy obserwacje X_1, X_2, \dots mają rozkład normalny o nieznannej średniej i wariancji, a szacowanym parametrem jest wartość oczekiwana. Można udowodnić, że wówczas najlepszym estymatorem jest średnia z próby:

$$\bar{x}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}.$$

Problem sprowadza się wtedy do poszukiwania takiej reguły zatrzymania N , że dla dowolnych rzeczywistych μ oraz $\sigma > 0$

$$(a) \quad P_{\mu, \sigma}(|\bar{x}_N - \mu| \leq d) \geq \alpha$$

oraz

$$(b) \quad E_{\mu, \sigma} N \text{ jest minimalna,}$$

gdzie $d > 0$ oraz $0 < \alpha < 1$ są z góry zadane.

Jak wspomnieliśmy wcześniej pierwszą regułę zatrzymania o własności (a) podał Stein, ale dotychczas nieznaną jest reguła zatrzymania, która posiadałaby obie te własności, tzn. by była optymalna. Jest to dobry przykład trudności występujących przy stosowaniu metod sekwencyjnych: pełne rozwiązanie postawionego problemu jest tu bardzo rzadkie. W książce można znaleźć szczegółowe przedstawienie znalezionych dotychczas wyników i własności różnych reguł zatrzymania.

Dla rozkładu normalnego sformułowano też zadanie typu 3) przy założeniu, że błąd estymacji mierzony jest wariancją estymatora. Dokładniej problem brzmi tak: znaleźć taką regułę zatrzymania N , że wielkość

$$AE_{\mu, \sigma} (\bar{X}_N - \mu)^2 + cE_{\mu, \sigma} N$$

jest minimalna jednostajnie ze względu na μ oraz σ , gdzie $A > 0$, $c > 0$ - zadane stałe (c jest tu kosztem pojedynczej obserwacji). Tu wyniki są jeszcze skromniejsze niż w poprzednim przypadku. Skonstruowano pewną regułę zatrzymania, która jest optymalna asymptotycznie przy koszcie obserwacji c dążącym do zera. Ta sama reguła pozostaje asymptotycznie optymalna w znacznie szerszej klasie rozkładów o skończonym ósmym momencie. Tego rodzaju wyniki asymptotyczne są łatwiejsze do osiągnięcia i jest ich znacznie więcej niż wyników nieasymptotycznych.

Oprócz powyższych można znaleźć w książce wiele innych zagadnień analizy sekwencyjnej jak na przykład:

- estymacja współczynników regresji liniowej,
- konstrukcja przedziałów ufności o ustalonej szerokości dla współczynnika zmienności oraz dla $P(X < Y)$.
- estymacja rozmiaru populacji skończonej,
- nieparametryczny przedział ufności o zadanej szerokości dla kwantyli,
- estymacja sekwencyjna średniej wielowymiarowego rozkładu normalnego,
- sekwencyjna estymacja parametrów rozkładu jednostajnego oraz wykładniczego.

Druga część książki poświęcona jest testom sekwencyjnym. Dokładnie dyskutowany jest sekwencyjny test ilorazowy Walda. Ma on, jak wiadomo postać następującą. Obserwujemy niezależne zmienne losowe X_1, X_2, \dots o jednakowej gęstości rozkładu $f(x, \theta)$. Testu-

jemy hipotezę $H_0: \theta = \theta_0$ przeciw hipotezie alternatywnej $H_1: \theta = \theta_1$.
Niech

$$L_n = \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i, \theta_1)}{\prod_{i=1}^n f(x_i, \theta_0)}$$

oraz niech $0 < A < B$ są zadanymi stałymi. Przyjmujemy hipotezę H_0 , jeśli $L_n \leq A$, odrzucamy H_0 , gdy $L_n \geq B$, kontynuujemy losowanie, gdy $A < L_n < B$.

W książce omówione są dokładnie dwa związane z tym testem problemy, które badano przez wiele lat: mianowicie, jak wygląda funkcja mocy takiego testu oraz jak zachowuje się wartość oczekiwana liczby obserwacji jako funkcja parametru. Problemy te są niełatwe i doczekały się wielu częściowych rozwiązań. Znane są obecnie liczne przybliżenia obu tych funkcji. Badano też, w jakim sensie test Walda jest lepszy od innych testów. Wyniki na ten temat również można znaleźć w książce, na przykład taki: Spośród wszystkich testów hipotezy H_0 przeciw hipotezie H_1 o błędzie pierwszego rodzaju $\leq \alpha$ oraz błędzie drugiego rodzaju $\leq \beta$ test Walda, który też spełnia te warunki, ma najmniejszą wartość oczekiwaną liczby obserwacji.

Dyskutowane są też w książce różne warianty testu Walda, jak na przykład test obcięty, gdzie narzucone jest górne ograniczenie na liczbę obserwacji czy uogólniony sekwencyjny test ilorazowy, w którym stałe A oraz B są zastąpione ciągami A_n oraz B_n . Następnie omawiane są bardziej skomplikowane problemy testów sekwencyjnych dla hipotez złożonych. Komplikują się tu problemy badania optymalności oraz obliczania funkcji mocy i wartości oczekiwanej liczby obserwacji. Dokładnie omówione są sekwencyjne testy t , F oraz testy nieparametryczne na przykład sekwencyjny test Kołmogorowa-Smirnowa oraz sekwencyjny test rangowy.

Dwa wymienione poprzednio działy metod sekwencyjnych są przedstawione przez autora bardzo dokładnie. W książce można znaleźć prawie wszystkie wyniki znane dotychczas tylko z artykułów. Część wyników jest podana wraz z dowodami. Ta kompletność książki sprawia, że mimo licznych usterek warto się z nią zapoznać. Pozwala ona ocenić wartość metod sekwencyjnych i wskazuje jak wiele jeszcze jest w tej dziedzinie do zrobienia.