ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria III: MATEMATYKA STOSOWANA XXIII (1984)

ADAM ZEMŁA
Warszawa

Metoda Galerkina przemiennych kierunków dla parabolicznych nierówności wariacyjnych z przeszkodą*

(Praca wpłynęła do Redakcji 20.11.1981)

1. WSTĘP

Praca jest próbą przeniesienia metody Galerkina przemiennych kierunków ADG, stosowanej do rozwiązywania równań różniczkowych (patrz [3] i [7], rozdz. 6), na grunt nierówności. Własności numeryczne schematu metody ADG omówiono na przykładzie następującego problemu wariacyjnego:

$$\begin{cases} \text{znaleźć funkcję } u: (0, T) \to K \subset V \subset H \text{ taką, że:} \\ (u' + Au - f, v - u)_H \geqslant 0 \ \forall \ v \in K \text{ i p.w. } t \in [0, T), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

gdzie V i H są przestrzeniami Hilberta funkcji określonych na $\Omega \subset R^2$. Rozpatrywane w niniejszej pracy zagadnienie nosi nazwę parabolicznej nierówności wariacyjnej z przeszkodą. Ograniczono się tutaj do zadań z operatorem A symetrycznym, którego współczynniki nie zależą od zmiennej czasowej.

Konstrukcję zadania przybliżonego przeprowadzono dla przypadku, gdy Ω jest kwadratem. Uzyskane wyniki łatwo przenoszą się na obszary prostokątne lub zbudowane z prostokątnych. Omawiana metoda powstaje z połączenia metody siatek i metody elementu skończonego,

---

*Artykuł ten jest fragmentem pracy magisterskiej napisanej przez autora pod kierunkiem doc. dr. hab. Maksymiliana Dryji.

przy czym metoda siatek stosowana jest względem zmiennej czasowej, a metoda elementu skończonego - względem zmiennych przestrzennych.

Otrzymany schemat metody ADG zbadano pod kątem istnienia i jednoznaczności rozwiązania, stabilności (tw. 1) oraz podano oszacowanie błędu zbieżności (tw. 2), przyjmując funkcje bazowe w postaci iloczynu funkcji daszkowych jednej zmiennej.

2. ZADANIE WYJŚCIOWE

Zadanie wyjściowe, będące szczególnym przypadkiem problemu noszącego nazwę parabolicznej nierówności wariacyjnej I typu, sformułujemy zgodnie z oznaczeniami przyjętymi w monografii [4], rozdz. 6, § 2.2.

Niech Ω będzie obszarem w R^2 z lipschitzowsko ciągłym brzegiem $\partial\Omega$ (patrz [5], rozdz. 1); jako przestrzenie Hilberta V i H przyjmujemy

$$(2.1)\qquad V = H_0^1(\Omega), \qquad H = L^2(\Omega).$$

Wprowadzamy funkcję φ określającą przeszkodę:

$$(2.2)\qquad \varphi \in H^2(\Omega), \qquad \varphi < 0 \text{ na } \partial\Omega .$$

Pierwszy z tych warunków, na mocy twierdzenia Sobolewa o zanurzeniu (patrz [8], rozdz. 1, § 9.4), gwarantuje ciągłość funkcji φ.

Zbiór K definiujemy w sposób następujący:

$$(2.3)\qquad K = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) :\ v(x) \geqslant \varphi(x) \quad \text{p.w. w } \Omega \right\}.$$

Tak skontruowany zbiór K jest domkniętym, wypukłym i niepustym podzbiorem przestrzeni V, przy czym nierówność $v(x) \geqslant \varphi(x)$ p.w. w Ω należy rozumieć jako "nierówność w sensie przestrzeni $H^1(\Omega)$" (patrz [9]).

Będziemy również zakładać, że:

$$(2.4)\qquad u_0 \in K \cap H^2(\Omega),$$

$$(2.5)\qquad f, \frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

(2.6) $a(\cdot,\cdot)$ - forma dwuliniowa symetryczna, określona na $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Forma $a(\cdot,\cdot)$ generuje operator $A \in L(H_0^1(\Omega); H^{-1}(\Omega))$ określony następująco:

$$\forall u,\ v \in H_0^1(\Omega):\quad \langle Au,\ v\rangle_* = a(u,\ v),$$

gdzie $\langle Au,\ v\rangle_*$ oznacza wartość funkcjonału Au na funkcji v.

Zakładamy ponadto, że

(2.7) $$\exists M > 0,\ \forall u,\ v \in H_0^1(\Omega):\quad |a(u,\ v)| \leqslant M\|u\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

(2.8) $$\exists \alpha > 0,\ \forall u \in H_0^1(\Omega):\quad a(u,\ u) \geqslant \alpha\|u\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Zadanie wyjściowe brzmi:

Znaleźć taką funkcję $u:(0,\ T) \longrightarrow K$, że:

(2.9) $$\begin{cases} u \in L^2(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)), & \dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,\ T;\ L^2(\Omega)), \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}(t),\ v - u(t)\right) + a(u(t),\ v - u(t)) \geqslant (f(t),\ v - u(t)) \\ \forall v \in K \ \text{ i p.w.}, t \in [0,\ T), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

gdzie $(\cdot,\cdot)$ oznacza iloczyn skalarny w $L^2(\Omega)$, $T < +\infty$.

Opierając się na twierdzeniu 2.1 z monografii [4], rozdz. 6, wnioskujemy, że zagadnienie (2.9) przy założeniach (2.1) — (2.8) ma jednoznaczne rozwiązanie u takie, że:

$$u,\ \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,\ T;\ H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(0,\ T;\ L^2(\Omega)).$$

W dalszej części pracy przyjmiemy następujące uproszczone oznaczenia:

$$a(v) = a(v,\ v),$$

$$|v|_k = \left(\sum_{|p|=k} \int_\Omega |D^p v|^2 dx\right)^{1/2},$$

$$\|v\|_k = \left(\sum_{|p|\leqslant k} \int_\Omega |D^p v|^2 dx\right)^{1/2},$$

gdzie $p = [p_1,\ p_2]$ jest wielowskaźnikiem.

3. KONSTRUKCJA ZADANIA PRZYBLIŻONEGO

Rozwiązywanie nierówności wariacyjnych metodą elementu skończonego wymaga skonstruowania odpowiednich przestrzeni skończenie wymiarowych $V_h \subset V$ oraz zbiorów $K_h \subset V_h$ (patrz [4], rozdz. 1, § 4). Parametr h charakteryzuje wymiar przestrzeni V_h w tym sensie, że $\dim V_h \to \infty$ wraz z $h \to 0$. W związku z tym parametr h będzie wykorzystywany do określenia dokładności, z jaką funkcje z przestrzeni V lub zbioru K są przybliżane funkcjami odpowiednio z przestrzeni V_h lub zbioru K_h. W celu uproszczenia analizy będziemy zakładać, że Ω jest kwadratem:

$$\Omega = (0, 1) \times (0, 1).$$

Określimy siatkę przestrzenną Ω_h i czasową ω_τ. Niech:

$$\overline{\Omega}_h = \Big\{x = (x_1, x_2): \; x_1 = ih, \; x_2 = jh, \; i, j = 0, \ldots, M, \; Mh = 1\Big\},$$

$$\Omega_h = \overline{\Omega}_h \cap \Omega ,$$

$$\omega_\tau = \Big\{t = t_n: \; t_n = n\tau, \; n = 0, \ldots, N, \; N\tau = T\Big\}.$$

Przechodzimy do wyboru funkcji bazowych przestrzeni V_h. Funkcjami tymi będą iloczyny funkcji daszkowych jednej zmiennej.

Z każdym punktem $x = (ih, jh) \in \Omega_h$ wiążemy funkcję określoną w $\overline{\Omega}$ postaci

$$\varphi_{ij}(x) = \varphi_{ij}(x_1, x_2) = \varphi_i(x_1) \cdot \varphi_j(x_2),$$

gdzie φ_k jest funkcją daszkową, tzn.

$$\varphi_k(t) = \varphi\left(\frac{t}{h} - k\right),$$

φ jest funkcją postaci:

$$\varphi(s) = \begin{cases} 1 - |s| & \text{dla } |s| \leqslant 1, \\ 0 & \text{dla } |s| > 1. \end{cases}$$

Przestrzeń V_h określamy następująco:

$$V_h = \operatorname{lin} \{\varphi_{ij}\}_{(ih, jh) \in \Omega_h} . \tag{3.1}$$

Zauważmy, że konstrukcja przestrzeni $V_h \subset V = H_0^1(\Omega)$ została tak przeprowadzona, aby

$$\forall\, v \in V_h: \quad D_1 D_2 v \in L^2(\Omega).$$

Określimy teraz aproksymację K_h zbioru K danego wzorem (2.3). Warto podkreślić, że zwykle nie wymagamy, aby $K_h \subset K$. W przypadku naszego zadania przyjmujemy

$$(3.2) \qquad K_h = \left\{ v \in V_h: \quad v(x) \geqslant \Phi(x) \quad \forall x \in \Omega_h \right\}.$$

Zauważmy, że tak określona przestrzeń V_h i zbiór K_h spełniają wymagania aproksymacji wewnętrznej omówione w monografii [4], rozdz. 1, § 4.

Podamy teraz dwie ważne własności ((3.3) i (3.4)) skonstruowanych przestrzeni V_h i zbioru K_h:

$$(3.3) \qquad \forall\, u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \quad \exists\, \Pi_h u \in V_h:$$

$$\left| u - \Pi_h u \right|_k \leqslant C h^{2-k} \qquad \text{dla} \quad k = 0,\ 1,\ 2,$$

gdzie stała $C \neq C(h) > 0$, natomiast

$$\Pi_h u(x) = \sum_{(ih,\, jh) \in \Omega_h} u(ih,\, jh) \cdot \varphi_{ij}(x) \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}$$

(patrz [5], tw. 3.1.5 oraz diagram 3.1.2);

$$(3.4) \qquad \forall\, v_h \in K_h \quad \exists\, w_h \in K: \quad \left| v_h - w_h \right|_0 \leqslant C h^2,$$

przy czym stała $C = C(\Omega, \Phi) > 0$, natomiast

$$w_h : w_h(x) = \max \left\{ v_h(x), \Phi(x) \right\} \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

(patrz [9], str. 169, por. [6]).

U w a g a. Na mocy przyjętego założenia (2.4) dla funkcji u_0 możemy określić interpolację $\Pi_h u_0$ zdefiniowaną w (3.3). Zauważmy, że $\Pi_h u_0 \in K_h$.

4. ZAGADNIENIE PRZYBLIŻONE

Zagadnienie przybliżone dla zadania wyjściowego (2.9) sformułujemy następująco:

Szukamy takich funkcji $U^n \in K_h$ $(n = 0, \dots, N)$, że:

$$
(4.1)\quad \begin{cases} (U_t^n, V - U^{n+1}) + \theta\tau(\nabla U_t^n, \nabla(V - U^{n+1})) + \\ \quad + \theta^2\tau^2(D_1D_2U_t^n, D_1D_2(V - U^{n+1})) + a(U^n, V - U^{n+1}) \geqslant \\ \quad \geqslant (f^{n+1}, V - U^{n+1}) \quad \forall V \in K_h, \quad n = 0, \dots, N-1, \\ U^0 = \Pi_h u_0, \end{cases}
$$

gdzie θ jest parametrem dodatnim, który wybierzemy później, natomiast

$$
U^n \equiv U(n\tau), \qquad U_t^n \equiv (U^{n+1} - U^n)/\tau .
$$

Rola parametru θ w zadaniu (4.1) zasadniczo różni się od tej, jaką pełni on w schematach z wagą. Tutaj stałą θ określimy tak, aby otrzymać bezwarunkową stabilność i bezwarunkową zbieżność schematu.

U w a g a. Ze względu na założenia (2.5) za f^n w zadaniu (4.1) powinniśmy przyjąć uśrednienie całkowe na odcinku np. $[t_n, t_{n+1}]$. Możemy jednak ograniczyć się do przypadku, gdy funkcja $f \in C(0, T; L^2(\Omega))$, gdyż błąd aproksymacji funkcji f względem t jest tego samego rzędu co uzyskany dalej błąd metody (tw. 2). W związku z tym będziemy oznaczać: $f^n \equiv f(n\tau)$, zakładając dodatkowo ciągłość funkcji f (patrz (2.5)) względem zmiennej t. Pozwoli nam to uprościć analizę rozpatrywanych dalej schematów, przy czym uzyskane oszacowania błędów będą słuszne również dla f o regularności (2.5).

Określmy formę $b(\cdot,\cdot)$ (patrz zadanie (4.1)):

$$
b(U^{n+1}, V) = (U^{n+1}, V) + \theta\tau(\nabla U^{n+1}, \nabla V) +
$$

$$
+ \theta^2\tau^2(D_1D_2U^{n+1}, D_1D_2V).
$$

Jak łatwo sprawdzić, forma $b(\cdot,\cdot)$ jest dwuliniowa, symetryczna i V_h - eliptyczna. Istnienie i jednoznaczność rozwiązania zadania (4.1) wynika z własności przestrzeni V_h, zbioru K_h oraz wyżej określonej formy $b(\cdot,\cdot)$, gdyż sę spełnione założenia twierdzenia 1.1.1 z monografii [5].

U w a g a. W przypadku $\theta = 0$, V_h - eliptyczność formy $b(\cdot,\cdot)$ wynika z następującej własności przestrzeni V_h (3.1):

$$(4.2) \qquad \exists C = C(\Omega), \quad \forall v \in V_h : \|v\|_1 \leqslant S(h)\, |w|_0,$$

gdzie $S(h) = C/h$ (patrz [5], nierówność (3.2.37)).

W trakcie dalszej analizy będziemy często wykorzystywać kilka elementarnych tożsamości. Zapiszemy je w postaci lematu:

LEMAT 1. Dla każdej formy $(\!(\cdot,\cdot)\!)$ dwuliniowej i symetrycznej prawdziwe są tożsamości:

$$(\mathrm{I}) \qquad (\!(w^n, w^n_t)\!) = \frac{1}{2}\left\{(\!(w^n, w^n)\!)\right\}_t - \frac{1}{2}\tau\,(\!(w^n_t, w^n_t)\!),$$

$$(\mathrm{II}) \qquad (\!(w^{n+1}, w^n_t)\!) = \frac{1}{2}\left\{(\!(w^n, w^n)\!)\right\}_t + \frac{1}{2}\tau\,(\!(w^n_t, w^n_t)\!),$$

$$(\mathrm{III}) \qquad \tau\sum_{n=0}^{k}(\!(w^n_t, s^{n+1})\!) = -\tau\sum_{n=0}^{k}(\!(w^n, s^n_t)\!) + (\!(w^{k+1}, s^{k+1})\!) - (\!(w^0, s^0)\!).$$

5. STABILNOŚĆ

Zanim przystąpimy do sformułowania twierdzenia o stabilności dla schematu (4.1), zdefiniujemy pewną stałą $w > 0$, zależną tylko od średnicy obszaru Ω :

$$(5.1) \qquad w = w(\Omega) > 0: \quad \|v\|_1^2 \leqslant w\,|v|_1^2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Nierówność powyższa jest elementarnym wnioskiem z nierówności Friedrichsa (patrz [5], str. 23). Stała w, określona przez (5.1), będzie często występowała w naszych oszacowaniach, więc symbol w zarezerwujemy dla jej określenia.

Możemy teraz sformułować twierdzenie o stabilności schematu (4.1):

TWIERDZENIE 1. Schemat (4.1) aproksymujący zadanie (2.9) jest bezwarunkowo stabilny dla $\theta \geqslant \frac{1}{2} wM$ w sensie następującego oszacowania:

$$\alpha \max_n \|U^n\|_1^2 + \tau\sum_{n=0}^{N-1}|U^n_t|_0^2 + \tau\sum_{n=0}^{N-1}\theta^2\tau^2\,|D_1D_2U^n_t|_0^2 \leqslant C(f, u_0),$$

gdzie stałe w, α, M określone są przez (5.1), (2.8), (2.7), natomiast:

$$C(f, u_0) = \tau\sum_{n=0}^{N-1} \left|f^{n+1}\right|_0^2 + M\left\|U^0\right\|_1^2 .$$

D o w ó d. Wcześniej wykazaliśmy, że rozpatrywano zagadnienie przybliżone ma jednoznaczne rozwiązanie. Przyjmijmy zatem w nierówności zadania (4.1) $V = U^n$ na każdej z n warstw ($n = 0, \ldots, N-1$). Wówczas

$$-\tau\left|U_t^n\right|_0^2 - \theta\tau^2\left|U_t^n\right|_1^2 - \theta^2\tau^3\left|D_1D_2U_t^n\right|_0^2 - \tau a(U^n, U_t^n) \geqslant -\tau(f^{n+1}, U_t^n).$$

W otrzymanej nierówności wykorzystujemy lemat 1 (I), gdyż forma $a(\cdot,\cdot)$ jest symetryczna i dwuliniowa, następnie obie strony mnożymy przez -2 i odpowiednio grupujemy składniki:

$$2\tau\left|U_t^n\right|_0^2 + 2\theta\tau^2\left|U_t^n\right|_1^2 + 2\theta^2\tau^3\left|D_1D_2U_t^n\right|_0^2 + a(U^{n+1}) \leqslant \tag{5.2}$$

$$\leqslant a(U^n) + \tau^2 a(U_t^n) + 2\tau(f^{n+1}, U_t^n).$$

Do trzeciego wyrazu prawej strony stosujemy nierówność Schwarza i ε- nierówność, natomiast do drugiego - oszacowanie (2.7) i (5.1). W wyniku otrzymamy

$$\tau(2-\varepsilon)\left|U_t^n\right|_0^2 + (2\theta - wM)\tau^2\left|U_t^n\right|_1^2 + 2\theta^2\tau^3\left|D_1D_2U_t^n\right|_0^2 + \tag{5.3}$$

$$+ a(U^{n+1}) \leqslant a(U^n) + \frac{\tau}{\varepsilon}\left|f^{n+1}\right|_0^2 .$$

Dowód zakończymy przyjmując $\varepsilon = 1$, sumując nierówność (5.3) względem n od 0 do $k \leqslant N-1$ i uwzględniając oszacowania (2.7), (2.8).

U w a g a. W przypadku $\theta < \frac{1}{2}wM$, można wykazać warunkową stabilność schematu (4.1), tzn. gdy $\tau \leqslant Ch^2$ (wystarczy odpowiednio zastosować (4.2) do (5.2)).

W trakcie dalszej analizy, jeżeli nie będzie to prowadziło do nieporozumień, wszelkie dodatnie stałe niezależne od τ i h będziemy oznaczać jednym łącznym symbolem C.

6. ZBIEŻNOŚĆ

Naszym celem jest ustalenie szybkości zbieżności rozwiązania zadania (4.1) do rozwiązania u zadania (2.9).

Wprowadźmy oznaczenie:

(6.1) $$\varrho^n = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{n+1} - u_t^n .$$

Przechodzimy do sformułowania twierdzenia o oszacowaniu błędu metody.

W twierdzeniu tym będziemy wymagać od rozwiązania u zadania (2.9) następującej regularności:

$$u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) .$$

Klasa zadań (2.9) o tej regularności rozwiązania nie jest pusta. Świadczy o tym poniższy przykład (por. [4], rozdz. 6, § 4.3). Niech

$$\Omega = (0, 1) \times (0, 1), \quad T = 1,$$

$$K = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) \; : \; v \geqslant 0 \quad w \; \Omega \right\}.$$

Jako rozwiązanie zadania

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f, v - u\right)_{L^2(\Omega)} \geqslant 0 & \forall v \in K, \quad t \in [0, T), \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

przyjmijmy

$$u = \begin{cases} -x(x - \alpha(t))^3 y(1 - y) & \text{dla} \quad x \leqslant \alpha(t), \\ 0 & \text{dla} \quad x > \alpha(t), \end{cases}$$

z warunkiem początkowym

$$u_0 = \begin{cases} -x\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 y(1 - y) & \text{dla} \quad x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{dla} \quad x > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

przy czym $\alpha(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin(2\pi t)$. Temu rozwiązaniu u odpowiada następująca funkcja:

$$f = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u & \text{dla} \quad x \leqslant \alpha(t), \\ A \leqslant 0 & \text{dla} \quad x > \alpha(t), \end{cases}$$

gdzie A dowolne.

TWIERDZENIE 2. Niech U będzie rozwiązaniem zadania (4.1), u zaś rozwiązaniem zadania (2.9). Oznaczmy $Z^n = u^n - U^n$. Niech będą spełnione następujące założenia:

(6.2) $$u \in C\left([0, T];\ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right),$$

(6.3) $$\left|\varrho^n\right|_0^2 \leqslant C(u)\,|\,\lambda\,(\tau)$$ dla pewnej dodatniej stałej $C(u)$,

(6.4) $$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2\,(0,\ T;\ H^2(\Omega)).$$

Wówczas dla $\theta \geqslant wM$ jest prawdziwe oszacowanie:

$$\max_n\left|Z^n\right|_0^2 + \theta^2\tau^2\max_n\left|D_1D_2Z^n\right|_0^2 + \tau^2\sum_{n=0}^{N-1}\left|Z_t^n\right|_0^2 + \alpha\tau\sum_{n=0}^{N-1}\left\|Z^{n+1}\right\|_1^2 +$$
$$+ \theta^2\tau^4\sum_{n=0}^{N-1}\left|D_1D_2Z_t^n\right|_0^2 \leqslant C(u)|\lambda\,(\tau)| + Ch^2 + C\,\tau^2,$$

gdzie M, α, w, ϱ określone są przez (2.7), (2.8), (5.1) oraz (6.1), natomiast funkcja $\lambda(\tau)$ spełnia warunek $\lambda(\tau) \xrightarrow[\tau\to 0]{} 0$.

U w a g a. Jeżeli na zadanie (2.9) nałożymy takie warunki jak w pracy [1], to w punkcie (6.3) otrzymamy:

$$C(u)\,|\lambda(\tau)| = C\varepsilon^{-2}\tau^{2-2\varepsilon} \qquad \text{dla} \qquad \varepsilon \in \left(0,\ \tfrac{1}{2}\right],$$

natomiast w przypadku założeń przyjętych w pracy [2]:

$$C(u)\,|\lambda(\tau)| = C\tau^{3/2}\left(\log\tau^{-1}\right)^{1/2}$$ dla dostatecznie małego τ.

D o w ó d t w i e r d z e n i a 2. Nierówności zadań (2.9) i (4.1) na poszczególnych warstwach dodajemy do siebie stronami. W wyniku (np. na n-tej warstwie) otrzymamy

$$(u_t^n + \varrho^n,\ v - u^{n+1}) + a(u^{n+1},\ v - u^{n+1}) + (U_t^n,\ V - U^{n+1}) +$$
$$+ a(U^n,\ V - U^{n+1}) + \theta\tau\,(\nabla U_t^n,\ \nabla\,(V - U^{n+1})) +$$
$$+ \theta^2\tau^2(D_1D_2U_t^n,\ D_1D_2(V - U^{n+1})) \geqslant (f^{n+1},\ v - u^{n+1} + V - U^{n+1})$$
$$\forall v \in K, \qquad \forall V \in K_h, \quad n = 0, \ldots, N-1,$$

przy czym $u^0 = u_0$, natomiast $U^0 = \Pi_h u_0$ (patrz (3.3)).

Stosując proste przekształcenia tożsamościowe, polegające na dodaniu i odjęciu odpowiednich wyrazów pod znakami form występujących w powyższej nierówności, możemy, po odpowiednim pogrupowaniu składników, zapisać ją w równoważnej postaci:

$$(z_t^n, z^{n+1}) + a(z^{n+1}) + \theta^2\tau^2(D_1D_2z_t^n, D_1D_2z^{n+1}) \leqslant I_1^n + I_2^n + I_3^n, \tag{6.5}$$

gdzie
$$\begin{aligned} I_1^n = {} & (u_t^n + \varrho^n - f^{n+1}, v - u^{n+1} + V - U^{n+1}) + \\ & + a(u^{n+1}, v - u^{n+1} + V - U^{n+1}) - (z_t^n, V - u^{n+1}) - \\ & - a(z^{n+1}, V - u^{n+1}) - (\varrho^n, V - U^{n+1}), \end{aligned}$$

$$I_2^n = a(U^n - U^{n+1}, V - U^{n+1}) + \theta\tau(\nabla U_t^n, \nabla(V - U^{n+1})),$$

$$\begin{aligned} I_3^n = {} & \theta^2\tau^2(D_1D_2u_t^n, D_1D_2z^{n+1}) + \theta^2\tau^2(D_1D_2u_t^n, D_1D_2(V - u^{n+1})) - \\ & - \theta^2\tau^2(D_1D_2z_t^n, D_1D_2(V - u^{n+1})). \end{aligned}$$

Ze względu na dowolność wyboru funkcji $v \in K$ i $V \in K_h$ ustalamy, że składnikom I_1^n, I_2^n, I_3^n odpowiadają

$$V = \Pi_h u^{n+1}$$

oraz

$$v : v(x) = \max\left\{U^{n+1}(x),\ \phi(x)\right\} \quad \text{dla} \quad x \in \Omega.$$

Ponieważ wymagamy spełnienia założenia (6.2), więc na mocy (3.3) i (3.4) prawdziwe są następujące własności wybranych funkcji:

$$\begin{cases} V \in K_h, & |V - u^{n+1}|_k \leqslant Ch^{2-k} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, 2, \\ v \in K, & |v - U^{n+1}|_0 \leqslant Ch^2. \end{cases} \tag{6.6}$$

Konstrukcję powyższą przeprowadzamy dla każdego $n = 0, \ldots, N - 1$.

Do pierwszego i trzeciego składnika lewej strony (6.5) stosujemy lemat 1 (II), całość mnożymy przez 2τ i sumujemy od 0 do $k \leqslant N - 1$. Po uwzględnieniu oszacowania: $|z^0|_l \leqslant Ch^{2-l}$ dla $l = 0$ i 2 otrzymamy

$$
(6.7)\qquad \left|z^{k+1}\right|_0^2 + \tau^2 \sum_{n=0}^{k} \left|z_t^n\right|_0^2 + 2\tau \sum_{n=0}^{k} a(z^{n+1}) +
$$

$$
+ \theta^2\tau^2 \left|D_1D_2z^{k+1}\right|_0^2 + \theta^2\tau^4 \sum_{n=0}^{k} \left|D_1D_2z_t^n\right|_0^2 \leqslant
$$

$$
\leqslant 2\tau \sum_{n=0}^{k} (I_1^n + I_2^n + I_3^n) + C(h^2 + \tau^2).
$$

Oszacowania poszczególnych składników prawej strony nierówności (6.7) podamy w postaci lematów, których dowody przedstawimy później. Lematy są prawdziwe dla każdego $k = 0, \ldots, N - 1$.

LEMAT 2. Jeśli spełnione są warunki (6.2), (6.3), (6.6), to:

$$
(6.8)\qquad 2\tau \sum_{n=0}^{k} I_1^n \leqslant \tau \frac{3\alpha}{5} \sum_{n=0}^{k} \left\|z^{n+1}\right\|_1^2 +
$$

$$
+ \frac{1}{2}\left|z^{k+1}\right|_0^2 + Ch^2 + C(u)\left|\lambda(\tau)\right| .
$$

LEMAT 3. Jeśli spełnione są warunki (6.2), (6.6) oraz $\theta \geqslant wM$, to

$$
(6.9)\qquad 2\tau \sum_{n=0}^{k} I_2^n \leqslant \tau \frac{2\alpha}{5} \sum_{n=0}^{k} \left\|z^{n+1}\right\|_1^2 + C(h^2 + \tau^2).
$$

LEMAT 4. Jeśli spełnione są warunki (6.2), (6.4), (6.6), to

$$
(6.10)\qquad 2\tau \sum_{n=0}^{k} I_3^n \leqslant C\theta^2\tau^3 \sum_{n=0}^{k} \left|D_1D_2z^n\right|_0^2 +
$$

$$
+ \frac{1}{2}\theta^2\tau^2 \left|D_1D_2z^{k+1}\right|_0^2 + C\tau^2 .
$$

Tezę twierdzenia 2 otrzymamy, wykorzystując w (6.7) oszacowania (2.8), (6.8), (6.9), (6.10), porządkując odpowiednio wyrazy i stosując do uzyskanej w ten sposób nierówności nierówność Gronwalla. Dowód twierdzenia 2 będzie zakończony, jeśli udowodnimy przytoczone wyżej lematy 2, 3 i 4.

Dowód lematu 2. Szacujemy kolejne składniki elementu I_1^n:

$$(u_t^n + \varrho^n - f^{n+1}, V - U^{n+1} + v - u^{n+1}) +$$

$$+ a(u^{n+1}, V - U^{n+1} + v - u^{n+1}) \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} + Au^{n+1} - f^{n+1}\right|_0 \left\{\left|v - u^{n+1}\right|_0 + \left|V - U^{n+1}\right|_0\right\} Ch^2.$$

Oszacowanie to wynika z własności zadania (2.9) oraz z (6.2) i (6.6).

Składniki czwarty i piąty elementu I_1^n szacujemy w sposób następujący:

$$a(z^{n+1}, v - u^{n+1}) \leqslant M\|z^{n+1}\|_1 \|v - u^{n+1}\|_1 \leqslant \frac{\alpha}{10}\|z^{n+1}\|_1^2 + Ch^2.$$

Zastosowaliśmy tutaj nierówność Schwarza, ε-nierówność dla $\varepsilon = \frac{5M}{\alpha}$ oraz (6.6), natomiast

$$(\varrho^n, V - U^{n+1}) = (\varrho^n, v - u^{n+1}) + (\varrho^n, z^{n+1}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha}{10}\|z^{n+1}\|_1^2 + C(u)\,|\lambda(\tau)| + Ch^4$$

otrzymaliśmy, stosując ε-nierówność dla $\varepsilon = \frac{5}{\alpha}$ oraz oszacowanie (6.3).

Pozostaje oszacować następujący wyraz:

$$(6.11) \quad I = \left|2\tau \sum_{n=0}^{k} (z_t^n, v - u^{n+1})\right| .$$

Przy oznaczeniu $\eta^n = v - u^n$ stosujemy lemat 1 (III), ε-nierówność, a także nierówność z pracy [2], str. 603

$$|\eta_t^n|_0 \leqslant \frac{Ch}{\sqrt{\tau}} \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^2(t_n,\, t_{n+1};\, H^1(\Omega))} .$$

W wyniku otrzymamy

$$I \leqslant \frac{\tau}{\varepsilon_1} \sum_{n=0}^{k} |z^n|_0^2 + \varepsilon_1 Ch^2 + \frac{1}{\varepsilon_2} |z^{k+1}|_0^2 + \varepsilon_2 Ch^4.$$

Przyjmijmy $\varepsilon_1 = \frac{5}{\alpha}$ i $\varepsilon_2 = 2$. Wówczas prawdziwe jest oszacowanie:

$$I \leqslant \tau \frac{\alpha}{5} \sum_{n=0}^{k} \|z^{n+1}\|_1^2 + \frac{1}{2} |z^{k+1}|_0^2 + Ch^2.$$

Odpowiednie połączenie uzyskanych oszacowań kończy dowód lematu 2.

D o w ó d l e m a t u 3. Zauważmy, że I_2^n można zapisać w następnej równoważnej postaci:

$$I_2^n = J_1^n + J_2^n + J_3^n + J_4^n ,$$

gdzie

$$J_1^n = \tau a(z_t^n , z^{n+1}) - \theta\tau (\nabla z_t^n, \nabla z^{n+1}),$$

$$J_2^n = \tau a(z_t^n , v - u^{n+1}) - \theta \tau(\nabla z_t^n , \nabla(v - u^{n+1})),$$

$$J_3^n = -\tau a(u_t^n , z^{n+1}) + \theta\tau(\nabla u_t^n, \nabla z^{n+1}),$$

$$J_4^n = -\tau a(u_t^n , v - u^{n+1}) + \theta\tau(\nabla u_t^n , \nabla(v - u^{n+1})).$$

Stosując lemat 1 (II), oszacowania (2.7), (5.1) i (6.6), wykazujemy, że

$$2\tau \sum_{n=0}^{k} J_1^n \leqslant \tau(Mw - \theta) |z^{k+1}|_1^2 +$$

$$+ \tau^3(Mw - \theta) \sum_{n=0}^{k} |z_t^n|_1^2 + C\tau h^2.$$

Rozumując podobnie jak przy szacowaniu I (6.11), można wykazać, że

$$2\tau \sum_{n=0}^{k} J_2^n \leqslant \tau \frac{\alpha}{5} \sum_{n=0}^{k} \|z^{n+1}\|_1^2 + C\tau^2 + C\tau h^2.$$

Wykorzystaliśmy tutaj nierówność

$$\left\| \eta_t^n \right\|_1^2 \leqslant \frac{c}{\tau} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2_{L^2(t_n,\, t_{n+1};\, H^1(\Omega))} ,$$

gdzie $\eta^n = V - u^n$ (patrz [2]). Opierając się na prostej do sprawdzenia nierówności

$$\left\| u_t^n \right\|_1 \leqslant \frac{c}{\sqrt{\tau}} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(t_n,\, t_{n+1};\, H^1(\Omega))} ,$$

wykazujemy, że

$$2\tau \sum_{n=0}^{k} (J_3^n + J_4^n) \leqslant \tau \frac{\alpha}{5} \sum_{n=0}^{k} \left\| z^{n+1} \right\|_1^2 + c(\tau^2 + h^2).$$

Przyjmując $\theta \geqslant Mw$ i łącząc uzyskane oszacowania, kończymy dowód lematu 3.

D o w ó d l e m a t u 4. Zakładamy, że u jako rozwiązanie zadania (2.9) spełnia dodatkowo warunek (6.4). Prawdziwe są więc następujące nierówności:

$$\left\| u_t^n \right\|_2 \leqslant \frac{c}{\sqrt{\tau}} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(t_n,\, t_{n+1};\, H^2(\Omega))} ,$$

$$\left\| \eta_t^n \right\|_2 \leqslant \frac{c}{\sqrt{\tau}} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(t_n,\, t_{n+1};\, H^2(\Omega))} ,$$

gdzie $\eta^n = u^n - \Pi_h u^n$ (patrz [2], str. 602, 603).

Pierwsze dwa składniki elementu I_3^n (6.5) oznaczmy przez L_1^n, natomiast trzeci składnik przez L_2^n. Opierając się na pierwszej z podanych wyżej nierówności można pokazać oszacowanie:

$$2\tau \sum_{n=0}^{k} L_1^n \leqslant \frac{c\tau^2}{\varepsilon_1} + \varepsilon_1 \theta^2 \tau^3 \sum_{n=0}^{k} \left| D_1 D_2 z^{n+1} \right|_0^2 + c\tau^2,$$

natomiast druga nierówność zapewnia po zastosowaniu lematu 1 (III) (por. (6.11))

$$2\tau \sum_{n=0}^{k} L_2^n \leqslant \theta^2 \tau^3 \varepsilon_2 \sum_{n=0}^{k} \left| D_1 D_2 z^n \right|_0^2 +$$

$$+ c(\varepsilon_2,\, \varepsilon_3)\tau^2 + \theta^2 \tau^2 \varepsilon_3 \left| D_1 D_2 z^{k+1} \right|_0^2 .$$

Zauważmy, że bez większych ograniczeń można założyć $\tau \leqslant C_1$ dla pewnej stałej dodatniej C_1, gdyż o zadaniu (2.9) zakładamy w ogólności $T < +\infty$. Wobec powyższego można tak dobrać stałe dodatnie pochodzące z ε-nierówności, że $\tau\varepsilon_1 + \varepsilon_3 \leqslant C_1\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_i \neq \varepsilon_i(\tau, h)$, oraz $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = C$, gdzie C jest pewną stałą dodatnią, $C \neq C(\tau, h)$. Tym samym dowód lematu 4 został zakończony.

7. WNIOSEK Z ANALIZY SCHEMATU (4.1)

Rozpatrzmy następujący schemat dla zadania (2.9):

szukamy takich funkcji $U^n \in K_h$ $(n = 0, \dots, N)$, że:

$$(7.1)\quad \begin{cases} (U_t^n, V - U^{n+1}) + \theta\tau(\nabla U_t^n, \nabla(V - U^{n+1})) + a(U^n, V - U^{n+1}) \geqslant \\ \geqslant (f^{n+1}, V - U^{n+1}) \qquad \forall V \in K_h, \quad n = 0, \dots, N-1, \\ U^0 = \Pi_h u_0, \quad \theta \geqslant 0, \quad K_h \text{ określone przez (3.2).} \end{cases}$$

Parametr θ określimy tak, aby schemat (7.1) był bezwarunkowo stabilny i bezwarunkowo zbieżny (por. schemat (4.1)).

Prawdziwe jest następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 3. Zadanie (7.1) aproksymujące zagadnienie (2.9) ma następujące własności:

(I) Zadanie (7.1) ma jednoznaczne rozwiązanie.

(II) Schemat (7.1) jest dla $\theta \geqslant \frac{1}{2}Mw$ bezwarunkowo stabilny w sensie oszacowania:

$$\alpha \max_n \|U^n\|_1^2 + \tau \sum_{n=0}^{N-1} |U_t^n|_0^2 \leqslant C(f, u_0) =$$

$$= \tau \sum_{n=0}^{N-1} |f^{n+1}|_0^2 + M\|U^0\|_1^2 .$$

(III) Jeśli spełnione są założenia (6.2) i (6.3), to dla $\theta \geqslant Mw$ prawdziwe jest oszacowanie:

$$\max_n |z^n|_0^2 + \tau^2 \sum_{n=0}^{N-1} |z_t^n|_0^2 + \alpha\tau \sum_{n=0}^{N-1} \|z^{n+1}\|_1^2 \leqslant$$

$$\leqslant C(u)|\lambda(\tau)| + C(\tau^2 + h^2),$$

gdzie stałe M, α, w określone są przez (2.7), (2.8) i (5.1), natomiast $z^n = u^n - U^n$, u i U są zaś rozwiązaniami zadań (2.9) i (7.1).

Dowód powyższego twierdzenia wynika wprost z dowodów twierdzeń 1 i 2 (wystarczy pominąć składniki $\theta^2\tau^2(D_1D_2\,\cdot\,, D_1D_2\,\cdot\,))$.

Istotną zaletę schematu (7.1) jest to, że na każdej warstwie rozwiązujemy nierówność wariacyjną eliptyczną z operatorem pochodzącym od laplasjanu, tzn. musimy umieć rozwiązywać efektywnie tylko zadanie następującej postaci:

szukamy takiego $U \in K_h$, że:

$$(U, V - U) + \theta\tau(\nabla U, \nabla(V - U)) \geqslant (F, V - U) \qquad \forall V \in K_h.$$

Dzięki temu unikamy kłopotów łączących się z rozwiązywaniem zadań z operatorem pochodzącym od formy $a(\cdot,\cdot)$, przy czym proponowany schemat jest bezwarunkowo stabilny i bezwarunkowo zbieżny. Dodajmy, że konstruując dla zadania (2.9) schemat z wagą uzyskamy ten sam rząd zbieżności jedynie w przypadku schematu pełnego zamkniętego.

PRACE CYTOWANE

[1] A. E. Berger, R. S. Falk, An error estimate for the truncation method for the solution of parabolic obstacle variational inequalities, Math. of Comp. 31 (1977), str. 619-628.

[2] C. Johnson, A convergence estimate for an approximation of a parabolic inequality, SIAM J. Numer. Anal. 13 (1976), str. 599-606.

[3] M. Dryja, Metoda Galerkina przemiennych kierunków dla quasi-liniowych równań parabolicznych, Matematyka Stosowana XV (1979).

[4] R. Glowinski, J. L. Lions, R. Trémolières, Čislennoe issledovanie variacionnych neravenstv, Mir, Moskva 1979.

[5] Ph. G. Ciarlet, The finite element method for elliptic problems, North - Holland 1978 (tłum. ros. Metod konečnych èlementov dlja èlliptičeskich zadač, Mir, Moskva 1980).

[6] R. S. Falk, Error estimates for the approximation of a class of variational inequalities, Math. of Comp. 28 (1974), str. 963-971.

[7] G. Fairweather, Finite Element Galerkin Method for Differential Equations, Marcel Dekker, New York 1978.

[8] J. L. Lions, E. Magenes, Problèmes aux limities non homogenes et applications, Paris 1968 (tłum. ros. Neodnorodnye graničnye zadači i ich priloženija, Mir, Moskva 1971).

[9] H. Lewy, G. Stampacchia, On the regularity of the solution of a variational inequality, Comm. Pure Appl. Math. 22 (1969), str. 153-188.