ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria III: MATEMATYKA STOSOWANA XX (1982)

TADEUSZ GERSTENKORN (Łódź), JOANNA JARZĘBSKA (Częstochowa)

Momenty niekompletne odwrotnego rozkładu Pólyi

(Praca przyjęta do druku 20.12.1979)

Wstęp. Schemat losowania zwany — od nazwiska współautora pracy [3], w której go podano — *schematem Pólyi*, ustala użyteczny w statystyce rozkład, poddany szczegółowym badaniom w licznych pracach. Momenty niekompletne tego rozkładu zostały podane w pracy [5], a możliwe do uzyskania poprzez ten rozkład momenty dla innych rozkładów w pracy [4].

Praca obecna stanowi opracowanie tematu momentów czynnikowych (faktorialnych) niekompletnych dla rozkładu Pólyi zwanego odwrotnym, tzn. dla rozkładu, który przy założonym wyżej schemacie ustala prawdopodobieństwo liczby losowań potrzebnych do uzyskania żądanej ilości elementów określonego rodzaju. Zwrócono uwagę na możliwość operowania i takim rozkładem Pólyi odwrotnym, którego funkcja prawdopodobieństwa nie musi być związana z określonym schematem losowania i dla takiego (teoretycznego) przypadku wzory na momenty również uwzględniono. Ponieważ szczególnymi przypadkami rozważanego rozkładu są: ujemny rozkład dwumianowy oraz odwrotny rozkład hipergeometryczny, podano w pracy odpowiednie wzory i dla tych rozkładów.

Rozważania skoncentrowano głównie na momentach czynnikowych niekompletnych lewostronnych, ponieważ metoda ich otrzymania jest prosta. Z momentów niekompletnych lewostronnych otrzymuje się łatwo momenty kompletne oraz momenty niekompletne prawostronne.

Dla celów praktycznych podano również wzory rekurencyjne dla rozważanych rozkładów.

1. Odwrotny rozkład Pólyi i jego przypadki szczególne. Przyjmujemy, że urna zawiera N kul, wśród których jest M kul białych i $N-M$ kul czarnych. Z urny losujemy jedną kulę, po czym zwracamy ją dodając ponadto $b \gtreqless 0$ kul tego koloru, co wylosowana kula. Opisany schemat losowania nazywamy *schematem urnowym Pólyi.*

W odwrotnym zagadnieniu Pólyi interesuje nas prawdopodobieństwo tego, że liczba doświadczeń przeprowadzanych według schematu urnowego Pólyi będzie równa m, przy założeniu, że próby przeprowadzane będą tak długo, aż otrzymamy z góry ustaloną liczbę sukcesów równą k ($1 \leqslant k \leqslant m$). Prawdopodobieństwo to wyraża się wzorem

$$P(X = m) = p(k, Np, N, b) = \binom{m-1}{k-1} \frac{(Np)^{[k,-b]}(Nq)^{[m-k,-b]}}{N^{[m,-b]}}, \tag{1.1}$$

gdzie $m = k, k+1, \ldots, p = M/N$, $0 < p < 1$, $q = 1-p$, $1 \leqslant k \leqslant m$, b jest liczbą całkowitą, a dla $b < 0$ spełnione muszą być warunki

$$-kb \leqslant Np \quad \text{i} \quad -(m-k)b \leqslant Nq. \tag{1.2}$$

We wzorze rozkładu (1.1) używamy zapisu

$$x^{[k,b]} = x(x-b)(x-2b)\ldots[x-(k-1)b]$$

tzw. *wielomianów czynnikowych*, a w następnych wzorach korzystamy z następujących oznaczeń

$$x^{[h]} = x^{[h,1]}, \quad x^{[-h]} = x^{[h,-1]}, \quad x^h = x^{[h,0]}.$$

Przyjmując oznaczenie $m = k+r$, gdzie $r = 0, 1, 2, \ldots$, wzór (1.1) sprowadzamy do następującej postaci

$$P(X = r) = p(k, Np, N, b) = \binom{k+r-1}{r} \frac{(Np)^{[k,-b]}(Nq)^{[r,-b]}}{N^{[k+r,-b]}}, \tag{1.3}$$

a warunki (1.2) przechodzą w następujące

$$-kb \leqslant Np \quad \text{i} \quad -rb \leqslant Nq. \tag{1.4}$$

Gdy przyjmiemy $a = b/N$, wówczas prawdopodobieństwa określane wzorami (1.1) i (1.2) przedstawiamy następująco:

$$P(X = m) = p(k, p, 1, a) = \binom{m-1}{k-1} \frac{p^{[k,-a]}q^{[m-k,-a]}}{1^{[m,-a]}}, \tag{1.5}$$

gdzie $m = k, k+1, \ldots$, $p = M/N$, $0 < p < 1$, $q = 1-p$, i (dla $a < 0$)

$$-ka \leqslant p \quad \text{i} \quad -(m-k)a \leqslant q \tag{1.6}$$

oraz

$$P(X = r) = p(k, p, 1, a) = \binom{k+r-1}{r} \frac{p^{[k,-a]}q^{[r,-a]}}{1^{[k+r,-a]}}, \tag{1.7}$$

$r = 0, 1, \ldots, p = M/N$, $0 < p < 1$, $q = 1-p$ i (dla $a < 0$)

$$-ka \leqslant p \quad \text{i} \quad -ra \leqslant q. \tag{1.8}$$

We wzorze (1.5) p oraz a są liczbami wymiernymi. Można wykazać, że (1.5) określa rozkład prawdopodobieństwa przy dowolnym (niekoniecznie wymiernym) $p > 0$ oraz dowolnym a.

Rozkład dany wzorem (1.7) jest szczególnym przypadkiem uogólnionego rozkładu hipergeometrycznego postaci

$$(1.9)\qquad P(r) = \frac{\binom{a}{r}\binom{c}{n-r}}{\binom{a+c}{n}}, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots,$$

rozpatrywanego w [8], przy następujących warunkach na parametry:

$$(1.10)\qquad n = -k, \quad a = \frac{Np-N}{b}, \quad c = \frac{N}{b}-1.$$

Szczególnymi przypadkami ujemnego rozkładu Pólyi są

— *odwrotny rozkład hipergeometryczny* (rozróżnienie terminologiczne: odwrotny — ujemny rozkład hipergeometryczny patrz [9], str. 29; rozkład ten bywa także nazywany *rozkładem hipergeometrycznym czasu czekania* (tamże, str. 27 lub [10], str. 141, [10a], str. 154),

— *ujemny rozkład dwumianowy* (*rozkład Pascala*).

Odwrotny rozkład hipergeometryczny otrzymujemy podstawiając w (1.1) lub (1.3) $b = -1$, tzn. rozkład ten przyjmuje jedną z postaci

$$(1.11)\qquad P(X = m) = p(k, p, N, -1) = \binom{m-1}{k-1}\cdot\frac{(Np)^{[k]}(Nq)^{[m-k]}}{N^{[m]}},$$

$m = k, k+1, \ldots, 0 < p < 1, q = 1-p,$

$$(1.12)\qquad P(X = r) = p(k, p, N, -1) = \binom{k+r-1}{r}\frac{(Np)^{[k]}(Nq)^{[r]}}{N^{[k+r]}}, \qquad r = 0, 1, \ldots,$$

$0 < p < 1, q = 1-p.$

Ujemny rozkład dwumianowy otrzymujemy wstawiając do (1.5) lub (1.7) $a = 0$. Mamy wtedy

$$(1.13)\qquad P(X = m) = p(k, p) = \binom{m-1}{k-1}p^k q^{m-k}, \qquad m = k, k+1, \ldots,$$

gdzie $0 < p < 1$, $q = 1-p$, oraz

$$(1.14)\qquad P(X = r) = p(k, p) = \binom{k+r-1}{r}p^k q^r, \qquad r = 0, 1, \ldots,$$

gdzie $0 < p < 1$, $q = 1-p$.

Jeżeli we wzorach (1.13) i (1.14) podstawimy $k = 1$, to otrzymamy szczególny przypadek rozkładu Pascala: *rozkład geometryczny*

$$(1.15)\qquad P(X = m) = pq^{m-1}, \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

gdzie $0 < p < 1$, $q = 1-p$, lub

$$(1.16)\qquad P(X = r) = pq^r, \qquad r = 0, 1, \ldots,$$

gdzie $0 < p < 1$, $q = 1-p$.

2. Momenty niekompletne odwrotnego rozkładu Pólyi. Moment czynnikowy rzędu l zmiennej losowej X o rozkładzie dyskretnym $p(x)$ określamy wzorem

$$\alpha_{[l]} = \sum_{x} x^{[l]} p(x). \tag{2.1}$$

Jeżeli sumowanie po x jest ograniczone przez ustaloną wartość zmiennej losowej X, na przykład przez s, to moment czynnikowy nazywamy *niekompletnym lewostronnym* i oznaczamy przez $\alpha'_{[l]}(s)$; jeżeli sumowanie zaczyna się dopiero od wartości $r = s+1$, to mówimy o *momencie niekompletnym prawostronnym* i piszemy $\alpha''_{[l]}(s+1)$. Biorąc pod uwagę rozpatrywane tutaj rozkłady dyskretne, mamy

$$\alpha'_{[l]}(s) = \sum_{r=0}^{s} r^{[l]} P(X = r), \tag{2.2}$$

$$\alpha''_{[l]}(s+1) = \sum_{r=s+1}^{\infty} r^{[l]} P(X = r). \tag{2.3}$$

Między momentami podanych rodzajów zachodzi związek

$$\alpha_{[l]} = \alpha'_{[l]}(s) + \alpha''_{[l]}(s+1),$$

który pozwala uzyskać np. momenty prawostronne przy wyznaczonych uprzednio momentach lewostronnych i kompletnych.

Momenty zwykłe α_l otrzymuje się z czynnikowych w oparciu o wzór ([1], (54), str. 398; [2], (15), str. 134; [6], (7.3), str. 217)

$$\alpha_l = \sum_{k=1}^{l} S_{k,l}\, \alpha_{[k]}$$

oraz tablicę liczb Stirlinga $S_{k,l}$ drugiego rodzaju, zamieszczoną np. w [7], str. 52 lub [7a], str. 49.

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 1. *Moment czynnikowy niekompletny lewostronny rzędu l odwrotnego rozkładu Pólyi* (1.7) *wyraża się wzorem*

$$\alpha'_{[l]}(s) = \begin{cases} \text{(a)}\quad 0, & l > s, \\[2mm] \text{(b)}\quad (k+s-1)^{[s]} \dfrac{p^{[k,-a]} q^{[s,-a]}}{1^{[k+s,-a]}}, & l = s, \\[2mm] \text{(c)}\quad \displaystyle\sum_{r=l}^{s} \frac{1}{(r-l)!}\, \alpha'_{[r]}(r), & l < s. \end{cases} \tag{2.4}$$

Dowód. Korzystając z definicji momentu czynnikowego lewostronnego i uwzględniając wzór na prawdopodobieństwo odwrotnego rozkładu Pólyi (1.7), mamy

$$\alpha'_{[l]}(s) = \sum_{r=0}^{s} r^{[l]} \binom{k+r-1}{r} \frac{p^{[k,-a]} q^{[r,-a]}}{1^{[k+r,-a]}}.$$

Niech $l > s$; wówczas z uwagi na to, że $r^{[l]} = 0$ dla $r = 0, 1, \ldots, s$,

$$\alpha'_{[l]}(s) = 0.$$

Niech $l = s$. Wtedy

$$\alpha'_{[s]}(s) = \sum_{r=0}^{s} r^{[s]} \binom{k+r-1}{r} \frac{p^{[k,-a]} q^{[r,-a]}}{1^{[k+r,-a]}}.$$

$r^{[s]} \neq 0$ tylko dla $r = s$, więc wstawiając do odwrotnego rozkładu Pólyi s zamiast r i uwzględniając, że $s^{[s]} = s!$, otrzymujemy (2.4b).

Niech $l < s$. Wówczas

$$\alpha'_{[l]}(s) = \sum_{r=0}^{s} r^{[l]} \binom{k+r-1}{r} \frac{p^{[k,-a]} q^{[r,-a]}}{1^{[k+r,-a]}} =$$

$$= \sum_{r=l}^{s} \frac{(k+r-1)^{[r]}}{(r-l)!} \frac{p^{[k,-a]} q^{[r,-a]}}{1^{[k+r,-a]}} = \sum_{r=l}^{s} \frac{1}{(r-l)!} \alpha'_{[r]}(r),$$

czyli zachodzi (2.4c).

WNIOSEK 1. *Moment czynnikowy rzędu l odwrotnego rozkładu Pólyi postaci* (1.7) *wyraża się wzorem*

$$\alpha_{[l]} = \frac{(-k)^{[l]} q^{[l,-a]}}{(a-p)^{[l,-a]}}. \tag{2.5}$$

D o w ó d. Jeżeli sumowanie po r w równości (c) wzoru (2.4) rozszerzymy do nieskończoności, tzn. $r = 0, 1, \ldots$, to wzór ten będzie wyrażał moment kompletny odwrotnego rozkładu Pólyi.

Skorzystamy w dowodzie z następującej równości:

$$(-1)^r \frac{(-p/a)^{[k]}}{(-1/a)^{[k+r]}} = \frac{(1/a-1)^{[-k-r]}}{(p/a-1)^{[-k]}}.$$

Mamy więc

$$\alpha_{[l]} = \sum_{r=l}^{\infty} \frac{1}{(r-l)!} \alpha'_{[r]}(r) = \sum_{r=l}^{\infty} \frac{(k+r-1)^{[r]}}{(r-l)!} \cdot \frac{p^{[k,-a]} q^{[r,-a]}}{1^{[k+r,-a]}} =$$

$$= \sum_{r=l}^{\infty} \frac{\binom{k+r-1}{r} r!}{(r-l)!} \frac{(-p/a)^{[k]}(-q/a)^{[r]}}{(-1/a)^{[k+r]}} =$$

$$= \sum_{r=l}^{\infty} \frac{\binom{-k}{r} r!}{(r-l)!} \frac{(1/a-1)^{[-k-r]}(-q/a)^{[r]}}{(p/a-1)^{[-k]}} =$$

$$= \frac{(-k)^{[l]}(-q/a)^{[l]}}{(p/a-1)^{[l]}} \sum_{r=l}^{\infty} \frac{(-k-l)^{[r-l]}}{(r-l)!} \frac{(1/a-1)^{[-k-r]}(-q/a-l)^{[r-l]}}{(p/a-1-l)^{[-k-l]}} =$$

$$= \frac{(-k)^{[l]}q^{[l,-a]}}{(a-p)^{[l,-a]}} \sum_{r=l}^{\infty} \binom{-k-l}{r-l} \frac{(-1)^{r-l}(-p/a+l)^{[k+l]}(-q/a-l)^{[r-l]}}{(-1/a)^{[k+r]}} =$$

$$= \frac{(-k)^{[l]}q^{[l,-a]}}{(a-p)^{[l,-a]}} \sum_{r=l}^{\infty} \binom{k+r-1}{r-l} \frac{(p-la)^{[k+l,-a]}(q+la)^{[r-l,-a]}}{1^{[k+r,-a]}} = \frac{(-k)^{l}q^{[l,-a]}}{(a-p)^{[l,-a]}},$$

ponieważ przyjmując $u = k+l$, $v = r-l$ mamy

$$\sum_{r=l}^{\infty} \binom{k+r-1}{r-l} \frac{(p-la)^{[k+l,-a]}(q+la)^{[r-l,-a]}}{1^{[k+r,-a]}} =$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} \binom{u+v-1}{v} \frac{(p-la)^{[u,-a]}(q+la)^{[v,-a]}}{1^{[u+v,-a]}} = \sum_{v=0}^{\infty} P(X=v) = 1.$$

WNIOSEK 2. *Moment czynnikowy niekompletny lewostronny rzędu $l < s$ odwrotnego rozkładu Pólyi* (1.7) *wyraża się wzorem*

(2.6) $$\alpha'_{[l]}(s) = \alpha_{[l]}\alpha'_0(k+l, p-la, 1, s-l),$$

gdzie moment $\alpha_{[l]}$ jest dany przez (2.5), *a $\alpha'_0(k+l, p-la, 1, s-l)$ oznacza niekompletny lewostronny moment rzędu zerowego odwrotnego rozkładu Pólyi postaci*

(2.7) $$P(X = r-l) = p(k+l, p-la, 1, s-l) = $$
$$= \binom{k+r-1}{r-l} \frac{(p-la)^{[k+l,-a]}(q+la)^{[r-l,-a]}}{1^{[k+r,-a]}}.$$

D o w ó d. Korzystając z postaci (c) wzoru (2.4) oraz stosując przekształcenia analogicznie jak w dowodzie wniosku 1, otrzymujemy

$$\alpha'_{[l]}(s) = \sum_{r=l}^{s} \frac{1}{(r-l)!} \alpha'_{[r]}(r) = \sum_{r=l}^{s} \frac{(k+r-1)^{[r]}}{(r-l)!} \frac{p^{[k,-a]}q^{[r,-a]}}{1^{[k+r,-a]}} =$$

$$= \alpha_{[l]} \sum_{r=l}^{s} \binom{k+r-1}{r-l} \frac{(p-la)^{[k+l,-a]}(q+la)^{[r-l,-a]}}{1^{[k+r,-a]}} =$$

$$= \alpha_{[l]} \sum_{u=0}^{s-l} \binom{k+l+u-1}{u} \frac{(p-la)^{[k+l,-a]}(q+la)^{[u,-a]}}{1^{\ k+l+u,-a]}} =$$

$$= \alpha_{[l]}\alpha'_0(k+l, p-la, 1, s-l).$$

Powyższe twierdzenie i wnioski można również odnieść do rozkładu Pólyi związanego ze schematem urnowym (1.3) jak i do szczególnych przypadków odwrotnego rozkładu Pólyi.

WNIOSEK 3. *Moment czynnikowy niekompletny lewostronny rzędu l odwrotnego rozkładu Pólyi związanego ze schematem urnowym* (1.3) *wyraża się wzorem*

$$\alpha'_{[l]}(s) = \begin{cases} 0, & l > s, \\ (k+s-1)^{[s]} \dfrac{(Np)^{[k,-b]}(Nq)^{[s,-b]}}{N^{[k+s,-b]}}, & l = s, \\ \displaystyle\sum_{r=l}^{s} \frac{1}{(r-l)!}\, \alpha'_{[r]}(r), & l < s. \end{cases} \tag{2.8}$$

D o w ó d. Wzór (2.8) otrzymujemy ze wzoru (2.4) stosując przekształcenie $a = b/N$.

WNIOSEK 4. *Moment czynnikowy rzędu l odwrotnego rozkładu Pólyi związanego ze schematem urnowym Pólyi* (1.3) *wyraża się wzorem*

$$\alpha_{[l]} = \frac{(-k)^{[l]}(Nq)^{[l,-b]}}{(b-Np)^{[l,-b]}}. \tag{2.9}$$

D o w ó d. Wzór (2.9) otrzymujemy podstawiając $a = b/N$ do wzoru (2.5).

WNIOSEK 5. *Moment czynnikowy niekompletny lewostronny rzędu $l < s$ odwrotnego rozkładu Pólyi związanego ze schematem urnowym Pólyi* (1.3) *wyraża się wzorem*

$$\alpha'_{[l]}(s) = \alpha_{[l]}\alpha'_0(k+l, Np-lb, N, s-l), \tag{2.10}$$

gdzie moment $\alpha_{[l]}$ jest dany wzorem (2.9), *a $\alpha'_0(k+l, Np-lb, N, s-l)$ oznacza niekompletny lewostronny moment rzędu zerowego odwrotnego rozkładu Pólyi postaci*

$$P(X = r-l) = p(k+l, Np-la, N, b) = \tag{2.11}$$

$$= \binom{k+r-1}{r-l} \frac{(Np-lb)^{[k+l,-b]}(Nq+lb)^{[r-l,-b]}}{N^{[k+r,-b]}}.$$

D o w ó d. Powyższe wzory otrzymujemy ze wzorów wniosku 2 przyjmując oznaczenie $a = b/N$.

WNIOSEK 6. *Moment czynnikowy niekompletny lewostronny rzędu l odwrotnego rozkładu hipergeometrycznego* (1.12) *wyraża się wzorem*

$$\alpha'_{[l]}(s) = \begin{cases} 0, & l > s, \\ (k+s-1)^{[s]} \dfrac{(Np)^{[k]}(Nq)^{[s]}}{N^{[k+s]}}, & l = s, \\ \displaystyle\sum_{r=l}^{s} \frac{1}{(r-l)!}\, \alpha'_{[r]}(r), & l < s. \end{cases} \tag{2.12}$$

D o w ó d. Wzór (2.12) otrzymujemy ze wzoru (2.8) stosując podstawienie $b = -1$.

WNIOSEK 7. *Moment czynnikowy odwrotnego rozkładu hipergeometrycznego* (1.12) *wyraża się wzorem*

$$\alpha_{[l]} = \frac{(-k)^{[l]}(Nq)^{[l]}}{(-1-Np)^{[l]}}. \tag{2.13}$$

D o w ó d. Powyższy wzór otrzymujemy podstawiając $b = -1$ we wzorze (2.9).

WNIOSEK 8. *Moment czynnikowy niekompletny lewostronny rzędu $l < s$ odwrotnego rozkładu hipergeometrycznego* (1.12) *wyraża się wzorem*

$$\alpha'_{[l]}(s) = \alpha_{[l]}\alpha'_0(k+l, Np+l, N, s-l), \tag{2.14}$$

gdzie moment $\alpha_{[l]}$ jest dany wzorem (2.13), *a $\alpha'_0(k+l, Np+l, N, s-l)$ oznacza niekompletny lewostronny moment rzędu zerowego odwrotnego rozkładu hipergeometrycznego postaci*

$$P(X = r-l) = p(k+l, Np+l, N, -1) = \binom{k+r-1}{r-l}\frac{(Np+l)^{[k+l]}(Nq-l)^{[r-l]}}{N^{[k+r]}}. \tag{2.15}$$

D o w ó d. Powyższe wzory otrzymujemy wstawiając $b = -1$ do wzorów (2.10) i (2.11).

WNIOSEK 9. *Moment czynnikowy niekompletny lewostronny rzędu l ujemnego rozkładu dwumianowego* (1.14) *wyraża się wzorem*

$$\alpha'_{[l]}(s) = \begin{cases} 0, & l > s, \\ (k+s-1)^{[s]}p^k q^s, & l = s, \\ \sum\limits_{r=l}^{s} \frac{1}{(r-l)!}\alpha'_{[r]}(r), & l < s. \end{cases} \tag{2.16}$$

D o w ó d. Wzór (2.16) otrzymujemy ze wzoru (2.4) stosując podstawienie $a = 0$.

WNIOSEK 10. *Moment czynnikowy rzędu l ujemnego rozkładu dwumianowego* (1.14) *wyraża się wzorem*

$$\alpha_{[l]} = k^{[-l]}\left(\frac{q}{p}\right)^l. \tag{2.17}$$

D o w ó d. Powyższy wzór otrzymujemy wstawiając $a = 0$ do wzoru (2.5).

WNIOSEK 11. *Moment czynnikowy niekompletny lewostronny rzędu $l < s$ ujemnego rozkładu dwumianowego* (1.14) *wyraża się wzorem*

$$\alpha'_{[l]}(s) = \alpha_{[l]}\alpha'_0(k+l, p, s-l), \tag{2.18}$$

gdzie moment $\alpha_{[l]}$ jest dany wzorem (2.17), *a $\alpha'_0(k+l, p, s-l)$ oznacza niekompletny lewostronny moment rzędu zerowego ujemnego rozkładu dwumianowego postaci*

$$P(X = r-l) = p(k+l, p) = \binom{k+r-1}{r-l}p^{k+l}q^{r-l}. \tag{2.19}$$

D o w ó d. Powyższe wzory otrzymujemy podstawiając $a = 0$ do wzorów (2.6) i (2.7).

WNIOSEK 12. *Moment czynnikowy niekompletny lewostronny rzędu l rozkładu geometrycznego* (1.16) *wyraża się wzorem*

$$\alpha'_{[l]}(s) = \begin{cases} 0, & l > s, \\ s!\, pq^s, & l = s, \\ \sum_{r=l}^{s} \frac{1}{(r-l)!} \alpha'_{[r]}(r), & l < s. \end{cases} \tag{2.20}$$

D o w ó d. Wzór (2.20) otrzymujemy ze wzoru (2.16) stosując podstawienie $k = 1$.

WNIOSEK 13. *Moment czynnikowy rzędu l rozkładu geometrycznego* (1.16) *wyraża się wzorem*

$$\alpha_{[l]} = l! \left(\frac{q}{p}\right)^l. \tag{2.21}$$

D o w ó d. Powyższy wzór otrzymujemy wstawiając $k = 1$ do wzoru (2.17).

WNIOSEK 14. *Moment czynnikowy niekompletny lewostronny rzędu $l < s$ rozkładu geometrycznego* (1.16) *wyraża się wzorem*

$$\alpha'_{[l]}(s) = \alpha_{[l]}\alpha'_0(1+l, p, s-l), \tag{2.22}$$

gdzie moment $\alpha_{[l]}$ jest dany wzorem (2.21), *a $\alpha'_0(1+l, p, s-l)$ oznacza niekompletny lewostronny moment rzędu zerowego rozkładu geometrycznego postaci*

$$P(X = r-l) = p(1+l, p) = \binom{r}{r-l} p^{l+1} q^{r-l}. \tag{2.23}$$

D o w ó d. Powyższe wzory otrzymujemy podstawiając $k = 1$ do wzorów (2.18) i (2.19).

U w a g a. Ponieważ celem pracy było systematyczne, całościowe ujęcie tematu, nie pominięto w niej i tych wzorów, które co prawda są znane, ale były otrzymane na innej drodze. Dotyczy to wzorów na momenty ujemnego rozkładu dwumianowego, które w pracy [4] otrzymano przez transformację rozkładu dwumianowego, tutaj natomiast są one prostym, szczególnym przypadkiem wyjściowego rozkładu Pólyi (rozkład geometryczny uwzględniono jako szczególny przypadek ujemnego rozkładu dwumianowego dla wygody użytkownika wzorów w zastosowaniach). Wzór (2.5) jest możliwy do otrzymania z (15) ([8], str. 208) za pomocą podstawień (1.10) dotyczących rozkładu (1.9).

3. Wzory rekurencyjne na momenty niekompletne odwrotnego rozkładu Pólyi i jego przypadków szczególnych. Na podstawie paragrafu 2 otrzymujemy następujące związki rekurencyjne na momenty czynnikowe niekompletne lewostronne:

(a) Dla odwrotnego rozkładu Pólyi postaci (1.7) na podstawie (2.4) mamy

$$(3.1)\qquad \alpha'_{[l]}(s)=\begin{cases}0, & l>s,\\ \dfrac{k\big(p+(k-1)a\big)\big(q+(s-1)a\big)}{1+(k+s-1)a}\,\alpha'_{[s-1]}(s), & l=s,\\ \displaystyle\sum_{r=l}^{s}\frac{k}{(r-l)!}\,\frac{\big(p+(k-1)a\big)\big(q+(r-1)a\big)}{1+(k+r-1)a}\,\alpha'_{[r-1]}(r), & l<s.\end{cases}$$

Biorąc pod uwagę, że (patrz wzór (2.5))

$$(3.2)\qquad \alpha_{[l]}=\frac{(-k-l+1)\big(q+(l-1)a\big)}{\big(a-p+(l-1)a\big)}\,\alpha_{[l-1]},$$

otrzymujemy na podstawie (2.6), dla $l<s$,

$$(3.3)\qquad \alpha'_{[l]}(s)=\frac{(-k-l+1)\big(q+(l-1)a\big)}{\big(a-p+(l-1)a\big)}\,\alpha_{[l-1]}\alpha'_0(k+l,\,p-la,\,1,\,s-l).$$

(b) Dla odwrotnego rozkładu Pólyi związanego ze schematem urnowym postaci (1.3) wzór rekurencyjny na moment czynnikowy niekompletny lewostronny rzędu l otrzymujemy na podstawie (2.8)

$$(3.4)\qquad \alpha'_{[l]}(s)=\begin{cases}0, & l>s,\\ \dfrac{k\big(Np+(k-1)b\big)\big(Nq+(s-1)b\big)}{N+(k+s-1)b}\,\alpha'_{[s-1]}(s), & l=s,\\ \displaystyle\sum_{r=l}^{s}\frac{k}{(r-l)!}\,\frac{\big(Np+(k-1)b\big)\big(Nq+(r-1)b\big)}{N+(k+r-1)b}\,\alpha'_{r-1]}(r), & l<s.\end{cases}$$

Biorąc pod uwagę, że (patrz wzór (2.9))

$$(3.5)\qquad \alpha_{[l]}=\frac{(-k-l+1)\big(Nq+(l-1)b\big)}{\big(b-Nq+(l-1)b\big)}\,\alpha_{[l-1]},$$

otrzymujemy na podstawie (2.10), dla $l<s$,

$$(3.6)\qquad \alpha'_{[l]}(s)=\frac{(-k-l+1)\big(Nq+(l-1)b\big)}{\big(b+Nq+(l-1)b\big)}\,\alpha_{[l-1]}\alpha'_0(k+l,\,Np-lb,\,N,\,s-l).$$

(c) Dla odwrotnego rozkładu hipergeometrycznego (1.12) wzór rekurencyjny na moment czynnikowy niekompletny lewostronny rzędu l uzyskujemy na podstawie (2.12)

$$(3.7)\qquad \alpha'_{[l]}(s)=\begin{cases}0, & l>s,\\ \dfrac{k(Np-k+1)\,(Nq-s+1)}{N-(k+s-1)}\,\alpha'_{[s-1]}(s), & l=s,\\ \displaystyle\sum_{r=l}^{s}\frac{k}{(r-l)!}\,\frac{(Np-k+1)(Nq-r+1)}{N-(k+r-1)}\,\alpha'_{[r-1]}(r), & l<s.\end{cases}$$

Biorąc pod uwagę, że (wzór (2.13))

$$\alpha_{[l]} = \frac{(k-l+1)(Nq-l+1)}{-Np-l}\,\alpha_{[l-1]}, \tag{3.8}$$

otrzymujemy na podstawie (2.14), dla $l < s$,

$$\alpha'_{[l]}(s) = \frac{(-k-l+1)(Nq-l+1)}{-Np-l}\,\alpha_{[l-1]}\alpha'_0(k+l, Np+l, N, s-l). \tag{3.9}$$

(d) Dla ujemnego rozkładu dwumianowego postaci (1.14) wzór rekurencyjny na moment czynnikowy niekompletny lewostronny rzędu l otrzymujemy na podstawie (2.16)

$$\alpha'_{[l]}(s) = \begin{cases} 0, & l > s, \\ kpq\,\alpha'_{[s-1]}(s), & l = s, \\ \sum\limits_{r=l}^{s} \dfrac{k}{(r-l)!}\,pq\alpha'_{[r-1]}(r), & l < s. \end{cases} \tag{3.10}$$

Biorąc pod uwagę, że (patrz wzór (2.17))

$$\alpha_{[l]} = (k+l-1)\frac{q}{p}\,\alpha_{[l-1]}, \tag{3.11}$$

otrzymujemy na podstawie (2.18), dla $l < s$,

$$\alpha'_{[l]}(s) = (k+l-1)\frac{q}{p}\,\alpha_{[l-1]}\alpha'_0(k+l, p, s-l). \tag{3.12}$$

(c) Dla rozkładu geometrycznego postaci (1.16) wzór rekurencyjny na moment czynnikowy niekompletny lewostronny rzędu l otrzymujemy na podstawie (2.20)

$$\alpha'_{[l]}(s) = \begin{cases} 0, & l > s, \\ pq\alpha'_{[s-1]}(s), & l = s, \\ \sum\limits_{r=l}^{s} \dfrac{1}{(r-l)!}\,pq\alpha'_{[r-1]}(r), & l < s. \end{cases} \tag{3.13}$$

Biorąc pod uwagę, że (patrz (2.21))

$$\alpha_{[l]} = l\,\frac{q}{p}\,\alpha_{[l-1]}, \tag{3.14}$$

otrzymujemy na podstawie (2.21), dla $l < s$,

$$\alpha'_{[l]}(s) = l\,\frac{q}{p}\,\alpha_{[l-1]}\alpha'_0(1+l, p, s-l). \tag{3.15}$$

Prace cytowane

[1] G. Bohlmann, *Formulierung und Begründung zweier Hilfssätze der mathematischen Statistik*, Math. Ann., 74 (1913), 341–409.

[2] W. Dyczka, *The moments of Pólya distribution. Special case*, Ann. Soc. Math. Polonae, ser. I Comment. Math. (Prace Matem.), 13 (1969), 129–139.

[3] F. Eggenberger, G. Pólya, *Über die Statistik verketteter Vorgänge*, Z. Angew. Math. Mech., 3, 4 (1923), 279–289.

[4] T. Gerstenkorn, *Incomplete moments of basic discrete probability distributions*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 26, 3 (1981), 405–416.

[5] —, *Incomplete moments of the Pólya distribution*, Bull. Inst. Internat. Statist., Proc. of the 40th Session Warsaw, 46, 3 (contributed papers) (1975), str. 290–294.

[6] —, *Numerische Methoden zur Anwendung der Formeln für die Momente der Wahrscheinlichkeitsverteilungen*, Wiss. Z. Techn. Hochsch. Otto von Guericke Magdeburg, 13, 3/4 (1969), 213–219.

[7] A. Kaufmann, *Introduction à la combinatorique en vue des applications*, Dunod, Paris 1968.

[7a] А. Кофман, *Введение в прикладную комбинаторику*, Наука (перевод с франц.), Москва 1975.

[8] C.D. Kemp, A.W. Kemp, *Generalized hypergeometric distributions*, J. Roy. Statist. Soc. Ser B, 18, 2 (1956), 202–211.

[9] G. Patil, S.W. Joshi, C.R. Rao, *A dictionary and bibliography of discrete distributions*, Oliver and Boyd, Edinburgh 1968.

[10] S.S. Wilks, *Mathematical statistics*, New York 1962.

[10a] С. Уилкс, *Математическая статистика*, Наука (перевод с анг.), Москва 1967.