ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria III: MATEMATYKA STOSOWANA XIX (1982)

KRZYSZTOF SZAJOWSKI (Wrocław)

Optymalny wybór obiektu o a-tej randze*

(*Praca wpłynęła do Redakcji 24.07.1979*)

0. Wprowadzenie. Przedmiotem tej pracy jest zagadnienie wyboru jednego obiektu o określonych cechach z N różnych obiektów, które badane są sekwencyjnie. Problemy tego typu w literaturze spotyka się pod różnymi nazwami, jak „problem sekretarki", „konkurs piękności" czy „problem posagu". W języku „problemu sekretarki" badany tutaj problem można przedstawić następująco. Na wolne miejsce sekretarki zgłosiło się N kandydatek. Napływające kandydatki są badane. Po zbadaniu każdej kandydatki należy podjąć decyzję: wybrać ją, czy odrzucić. Raz odrzucona kandydatka jest już całkowicie stracona. Decyzję wyboru można podjąć tylko raz. Przypiszmy kandydatkom rangi od 1 (najlepsza) do N (najgorsza). Interesuje nas wybór kandydatki o absolutnej randze równej a z maksymalnym prawdopodobieństwem. W czasie badania możemy obserwować tylko względną rangę badanej kandydatki i na tej podstawie podejmować decyzję.

Niech $1, 2, \ldots, N$ będą rangami kandydatek, a $x_1, x_2, \ldots, x_N$ permutacją tych rang. Załóżmy, że wszystkie permutacje są jednakowo prawdopodobne. Niech X_k będzie rangą k-tej badanej kandydatki i

$$Y_k = \operatorname{card}\{1 \leqslant i \leqslant k\colon X_i \leqslant X_k\}.$$

Zmienną losową Y_k nazywamy *relatywną rangą* k-tej badanej kandydatki względem kandydatek na miejscach $1, 2, \ldots, k$. Zamiast o kandydatkach na stanowisko sekretarki można myśleć o dowolnych obiektach.

Z sekwencyjną obserwacją obiektów ze zbioru N-elementowego związana jest więc przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, gdzie zdarzeniami elementarnymi są permutacje zbioru N-elementowego, a miara probabilistyczna P jest określona jako rozkład jednostajny na Ω. Ciąg Y_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, generuje ciąg σ-algebr $\mathscr{F}_k = \sigma\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Zmienne losowe Y_k są niezależne i $P\{Y_k = i\} = 1/k$. Oznaczmy przez $\mathfrak{M}^N$ zbiór wszystkich momentów Markowa τ względem rodziny σ-algebr $\{\mathscr{F}_k\}_{k=1}^N$. Niech $q(\cdot)$ będzie funkcją określoną na liczbach naturalnych o wartościach rzeczywistych. Funkcję $q(\cdot)$ będziemy nazywali *wypłatą*. Niech

$$v_N = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}^N} Eq(X_\tau).$$

* Finansowane: FPB P Wr (zlec. 8/78 z dnia 15.01.1978).

Problem optymalnego wyboru polega na wyznaczeniu $\tau^* \in \mathfrak{M}^N$ takiego, że

$$Eq(X_{\tau^*}) = v_N.$$

Ponieważ zbiór $\mathfrak{M}^N$ jest skończony, więc takie τ^* istnieje i v_N jest skończone.

W rozważanym tutaj przypadku

$$q(X_k) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } X_k = a, \\ 0, & \text{gdy } X_k \neq a, \end{cases}$$

i

$$v_N = P\{X_{\tau^*} = a\} = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}^N} P\{X_\tau = a\}.$$

Tego rodzaju problemy były rozważane przez Gilberta i Mostellera [3] oraz innych autorów referowanych tamże. Badali oni, między innymi, przypadki, gdy $q(X_k) = 1$ dla $X_k = 1$ i 0 poza tym oraz $q(X_k) = 1$ dla $X_k = 1$ lub 2 i 0 poza tym. Gusein-Zade [4] rozważał bardziej ogólny przypadek, gdy $q(X_k) = 1$ dla $X_k = 1, 2, \ldots, a$ i 0 poza tym. Chow, Moriguti, Robbins i Samuels [1] badali przypadek $q(X_k) = X_k$. Mucci [5], [6] rozszerzył ostatni przypadek rozpatrując $q(X_k) = p(X_k)$, gdzie $p(\cdot)$ jest nierosnącą funkcją rzeczywistą określoną na liczbach naturalnych. Rozpatrywany w tej pracy przypadek różni się tym od przytoczonych wyżej, że funkcja $q(\cdot)$ nie jest monotoniczna, gdyż $q(i) = 1$ dla $i = a$ i 0 poza tym. Brak monotoniczności funkcji wypłaty istotnie zmienia charakter strategii optymalnej i utrudnia jej uzyskanie.

1. Równania rekursywne. Niech funkcja wypłaty będzie następująca:

$$q(i) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i = a, \\ 0, & \text{gdy } i \neq a. \end{cases}$$

Mamy następujące zależności:

$$\begin{aligned} P\{X_\tau = a\} = Eq(X_\tau) &= \sum_{r=1}^{N} \int_{\{\tau=r\}} q(X_r)\,dP = \\ &= \sum_{r=1}^{N} \int_{\{\tau=r\}} P\{X_r = a|F_r\}\,dP = \\ &= \sum_{r=1}^{N} \int_{\{\tau=r\}} P\{X_r = a|Y_r\}\,dP = Eg_a(\tau, Y_\tau), \end{aligned} \tag{1.1}$$

gdzie

$$g_a(r, l) = P\{X_r = a|Y_r = l\} = \frac{\binom{a-1}{l-1}\binom{N-a}{r-l}}{\binom{N}{r}} \tag{1.2}$$

dla $a = 1, 2, \ldots, N$; $l = 1, 2, \ldots, \min(a, r)$; $r = 1, 2, \ldots, N$.

Zależności (1.1) wynikają z definicji prawdopodobieństwa warunkowego i następującej równości:

$$P\{X_r = a|Y_r = l, Y_{r-1} = l_{r-1}, \ldots, Y_2 = l_2, Y_1 = 1\} = P\{X_r = a|Y_r = l\}. \tag{1.3}$$

Równość (1.3) wynika z bezpośrednich obliczeń. Wzór (1.2) otrzymujemy z następujących rozważań kombinatorycznych. Spośród N obiektów r można wybrać na $\binom{N}{r}$ sposobów. Wszystkie rezultaty wyborów są jednakowo prawdopodobne z definicji rozkładu P. Mamy $a-1$ obiektów o absolutnej randze mniejszej niż a i $N-a$ o absolutnej randze większej niż a. Jeżeli relatywnie l-ty obiekt, pojawiający się w chwili r, ma być absolutnie a-ty, to pojawiające się w chwilach $1, 2, \ldots, r-1$ obiekty muszą być wybrane w ilości $l-1$ z obiektów o absolutnej randze mniejszej niż a, a pozostałe obiekty w ilości $r-l$ z obiektów o absolutnej randze większej niż a.

Niech $\mathfrak{M}_r^N = \{\tau \in \mathfrak{M}^N \colon r \leqslant \tau \leqslant N\}$ i $v_N(r) = \sup\limits_{\tau \in \mathfrak{M}_r^N} Eq(X_\tau)$.

Następująca technika rekursywna pozwala wyznaczyć v_N.

$$v_N(N) = Eq(X_N) = 1/N. \tag{1.4}$$

Niech

$$v_N(N, l) = q(l) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } l = a, \\ 0, & \text{gdy } l \neq a, \end{cases} \tag{1.5}$$

$$v_N(r, l) = \max\{g_a(r, l),\ Ev_N(r+1,\ Y_{r+1})\}, \tag{1.6}$$

$$v_N(r) = Ev_N(r,\ Y_r) = \frac{1}{r}\sum_{l=1}^{r} v_N(r, l). \tag{1.7}$$

Mamy stąd $v_N = v_N(1)$. Ta rekursywna technika zwana *indukcją wsteczną* definiuje optymalną regułę zatrzymania τ^* w następujący sposób: należy zatrzymać się na obserwacji $Y_r = l$, chyba że $v_N(r, l) > g_a(r, l)$. Inaczej, optymalny moment zatrzymania można podać, zadając optymalny zbiór zatrzymania, to znaczy zbiór stanów, po osiągnięciu którego przez ciąg niezależnych zmiennych losowych Y_r, niezwłocznie należy zatrzymać się. Jest to zbiór stanów (r, l) takich, że $g_a(r, l) \geqslant v_N(r+1)$.

W naszym przypadku funkcja $g_a(r, l)$ dana przez (1.2) jest równa 0 dla $l > \min(a, r)$ i dodatnia dla $l \leqslant \min(a, r)$. Oznacza to, że szansa na wybranie interesującego nas obiektu istnieje tylko w stanach (r, l), w których $l \leqslant \min(a, r)$.

Niech $W_0 = (1, Y_1) = (1, 1)$, $\gamma_t = \inf\{r > \gamma_{t-1} : Y_r \leqslant \min(a, r)\}$ $(\inf \emptyset = \infty)$ i $W_t = (\gamma_t, Y_{\gamma_t})$. Jeśli $\gamma_t = \infty$, to umówimy się, że $W_t = (\infty, \infty)$. W_t jest łańcuchem Markowa o następujących prawdopodobieństwach przejścia w jednym kroku:

$$p(r, s) = \tag{1.8}$$

$$= P\{W_{t+1} = (s, l_s) \mid W_t = (r, l_r)\} = \begin{cases} \dfrac{1}{s}, & \text{gdy } r < a,\ s = r+1, \\ \dfrac{(r)_a}{(s)_{a+1}}, & \text{gdy } a \leqslant r < s, \\ 0, & \text{gdy } r \geqslant s \text{ lub } r < a,\ s \neq r+1, \end{cases}$$

$$p(\infty, \infty) = 1, \qquad p(r, \infty) = 1 - a\sum_{s=r+1}^{N} p(r, s),$$

gdzie $(s)_a = s(s-1)(s-2) \ldots (s-a+1)$; $(s)_0 = 1$.

Fakt, że W_t jest łańcuchem Markowa, wynika z niezależności relatywnych rang, a wzór (1.8) z następującej równości:

$$P\{W_{t+1} = (s, l_s) | W_t = (r, l_r)\} =$$
$$= \frac{P\{Y_s = l_s,\ Y_u \neq m,\ u = s-1,\ s-2, \ldots, r+1,\ m = a,\ a-1, \ldots, 1, Y_r = l_r\}}{P\{Y_r = l_r\}}.$$

Oznaczmy przez $P_{(r,l)}(\cdot)$ miarę probabilistyczną związaną z łańcuchem Markowa W_t, którego realizacje zaczynają się w stanie (r, l), a przez $E_{(r,l)}$ wartość oczekiwaną względem tej miary. Ze wzoru (1.8) widać, że prawdopodobieństwa przejścia nie zależą od relatywnych rang, a jedynie od momentów r pojawienia się relatywnych rang $l \leqslant \min(a, r)$.

LEMAT 1.

(1.9) $$Ev_N(r+1, Y_{r+1}) = E_{(r,l)} v_N(W_1) \quad \textit{dla każdego } l \leqslant \min(a, r).$$

D o w ó d. Dowód przeprowadzimy metodą indukcji wstecznej. Dla $r = N-1$ bezpośrednie sprawdzenie pokazuje prawdziwość równości (1.9).

Załóżmy, że

$$Ev_N(s+1,\ Y_{s+1}) = E_{(s,l)} v_N(W_1) \quad \text{dla } s = N-1, N-2, \ldots, r+1.$$

Wówczas

$$Ev_N(r+1,\ Y_{r+1}) = \frac{1}{r+1} \sum_{m=1}^{r+1} v_N(r+1, m) =$$
$$= \frac{r+1-a}{r+1} v_N(r+2) + \frac{1}{r+1} \sum_{m=1}^{a} v_N(r+1, m) =$$
$$= \frac{r+1-a}{r+1} Ev_N(r+2,\ Y_{r+2}) + \frac{1}{r+1} \sum_{m=1}^{a} v_N(r+1, m) =$$
$$= \frac{r+1-a}{r+1} \sum_{m=1}^{a} \sum_{i=r+2}^{N} p(r+1, i) v_N(i, m) + \frac{1}{r+1} \sum_{m=1}^{a} v_N(r+1, m) =$$
$$= \sum_{m=1}^{a} \Big(\sum_{i=r+2}^{N} p(r, i) v_N(i, m) + p(r, r+1) v_N(r+1, m) \Big) =$$
$$= \sum_{m=1}^{a} \sum_{i=r+1}^{N} p(r, i) v_N(i, m) = E_{(r,l)} v_N(W_1),$$

co dowodzi równości (1.9) dla $r = 1, 2, \ldots, N$.

Niech $\Gamma_r = \{(s, l)\colon s > r, g_a(s, l) \geqslant E_{(s,l)} v_N(W_1)\}$ i $\sigma_r = \inf_t \{t\colon W_t \in \Gamma_r\}$. Momentowi σ_r w klasie $\mathfrak{M}_{r+1}^N$ odpowiada moment $\tau_{r+1}^* = \inf_{s>r} \{s\colon (s, Y_s) \in \Gamma_r\}$. Moment

τ^*_{r+1} jest optymalny w $\mathfrak{M}^N_{r+1}$, co wynika z definicji zbioru Γ_r. Z równości (1.7) i (1.9) mamy:

$$v_N(r+1) = E_{(r,l)} v_N(W_1),$$

natomiast z równości (1.6) i optymalności τ^*_{r+1} w $\mathfrak{M}^N_{r+1}$ otrzymujemy:

$$v_N(r+1) = Eg_a(\tau^*_{r+1}, Y_{\tau^*_{r+1}}) = E_{(r,l)} g_a(W_{\sigma_r}).$$

Zatem

$$E_{(r,l)} v_N(W_1) = E_{(r,l)} g_a(W_{\sigma_r}). \tag{1.10}$$

Przy korzystaniu z równości (1.10) potrzebna jest znajomość rozkładów zmiennych losowych W_ν, gdzie $\nu = \inf_t \{t\colon W_t \in \Gamma\}$, a Γ jest zadanym podzbiorem zbioru stanów łańcucha W_t. Szczególnie interesujące będą rozkłady zmiennych losowych W_ν dla pewnych typów zbiorów Γ. Wprowadźmy oznaczenia:

$$\Gamma_{r,s}(k) = \{(u,l)\colon r < u \leqslant s, l = m_1, m_2, \ldots, m_k\}$$

dla $k \leqslant a$, $m_i \leqslant a$, $i = 1, 2, \ldots, k$; $1 \leqslant r < s \leqslant N$,

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_{r_{i-1}, r_i}(k_i)$$

oraz

$$\Gamma(i) = \bigcup_{j=i}^{n} \Gamma_{r_{j-1}, r_j}(k_j).$$

Niech $\nu_{r,s}(k) = \inf_t \{t\colon W_t \in \Gamma_{r,s}(k)\}$ i $\nu(i) = \inf_t \{t\colon W_t \in \Gamma(i)\}$. Dla $r' \leqslant r$, $1 \leqslant l' \leqslant a$, mamy:

$$P_{(r',l')}\{W_{\nu_{r,s}(k)} = (u, m_i)\} = \frac{(r)_k}{(u)_{k+1}} \quad \text{dla} \quad r < u \leqslant s,\ i = 1, 2, \ldots, k. \tag{1.11}$$

$$P_{(r',l')}\{W_{\nu(i)} = (u,l)\} = \begin{cases} \dfrac{(r_{i-1})_{k_i}}{(r_i)_{k_i}} P_{(r',l')}\{W_{\nu(i+1)} = (u,l)\} & \text{dla } (u,l) \in \Gamma(i+1), \\ \dfrac{(r_{i-1})_{k_i}}{(r_i)_{k_i+1}} & \text{dla } (u,l) \in \Gamma_{r_{i-1}, r_i}(k_i). \end{cases} \tag{1.12}$$

Pokażemy najpierw równość (1.11).

$$P_{(r',l')}\{W_{\nu_{r,s}(k)} = (u, m_i)\} =$$
$$= \frac{P\{Y_u = m_i, Y_t \neq m_j, r < t < u, j = 1, 2, \ldots, k, Y_{r'} = l'\}}{P\{Y_{r'} = l'\}} = \frac{(r)_k}{(u)_{k+1}}.$$

Ze wzoru (1.11) wynika natychmiast wzór (1.12) dla $(u,l) \in \Gamma_{r_{i-1}, r_i}(k_i)$. Drugą część wzoru (1.12) otrzymujemy w następujący sposób.

$$P_{(r',l')}\{W_{\nu(i)} = (u,l)\} =$$
$$= \frac{P\{Y_u = l, (t, Y_t) \notin \Gamma(i+1),\ r_i < t < u, (t, Y_t) \notin \Gamma_{r_{i-1}, r_i}(k_i), r_{i-1} < t \leqslant r_i, Y_{r'} = l'\}}{P\{Y_{r'} = l'\}} =$$
$$= P\{(t, Y_t) \notin \Gamma_{r_{i-1}, r_i}(k_i), r_{i-1} < t < r_i\} \times$$
$$\times \frac{P\{Y_u = l, (t, Y_t) \notin \Gamma(i+1), r_i < t < u, Y_{r'} = l'\}}{P\{Y_{r'} = l'\}} =$$

$$= P\{(t, Y_t) \notin \Gamma_{r_{i-1},r_i}(k_i), r_{i-1} < t \leqslant r_i\} P_{(r',l')}\{W_{\nu(i+1)} = (u,l)\} =$$

$$= \frac{(r_{i-1})_{k_i}}{(r_i)_{k_i}} P_{(r',l')}\{W_{\nu(i+1)} = (u,l)\}.$$

Wzory (1.11) i (1.12) pokazują w jaki sposób można rekurencyjnie otrzymać rozkłady W_ν dla $\nu = \inf_t\{t;\ W_t \in \Gamma\}$ dla dowolnych zbiorów Γ.

Korzystając z (1.2), (1.4)–(1.7), lematu 1 i wzorów (1.11) i (1.12) zbiór optymalnego zatrzymania Γ w problemie wyboru a-tego obiektu z maksymalnym prawdopodobieństwem wyznaczymy następująco:

(i) $(N, l) \in \Gamma$ dla każdego l; $(N-1, l) \in \Gamma$ dla $l = a, a-1$ i nie należy dla $l \neq a, a-1$.

(ii) Załóżmy, że $(s, l) \in \Gamma$ dla $l = a, a-1, s > r$ i oznaczmy:

(1.13) $\quad \Gamma_r = \{(s,l)\colon\ l = a, a-1,\ s > r\} \quad$ oraz $\quad \sigma_r = \inf_t\{t\colon\ W_t \in \Gamma_r\}.$

Założenie to oznacza, że

(1.14) $\quad g_a(s,l) \geqslant E_{(s,l)} g_a(W_{\sigma_r}) \quad$ dla $s > r, l = a, a-1$

oraz

(1.15) $\quad g_a(s,l) < E_{(s,l)} g_a(W_{\sigma_r}) \quad$ dla $s > r, l \neq a, a-1.$

(iii) Założenie indukcyjne w postaci (ii) jest słuszne tak długo, dopóki prawdziwe są nierówności (1.14) i (1.15). Niech $r = r_0$ będzie największym r takim, dla którego nastąpiła zmiana znaku w nierówności (1.14) bądź (1.15).

(a) Jeśli zmiana znaku nierówności wystąpiła dla nierówności (1.14), to założenie indukcyjne dla $r = r_0$ zmieni się w następujący sposób: podzbiorem zbioru optymalnego zatrzymania Γ będzie $\Gamma_{r_0-1} = \Gamma_{r_0-1,r_0}(1) \cup \Gamma_{r_0,N}(2)$, gdzie $\Gamma_{r_0-1,r_0}(1) = \{(r_0, l)\}$, a l jest numerem nierówności, która nie zmieniła znaku; $\Gamma_{r_0,N}(2) = \Gamma_{r_0}$ dane jest wzorem (1.13).

(b) Jeśli zmienią znak nierówności (1.15), to $\Gamma_{r_0-1} = \Gamma_{r_0-1,r_0}(k) \cup \Gamma_{r_0,N}(2)$, gdzie $k-2$ jest liczbą tych nierówności (1.15), które zmieniły znak w r_0. Jeśli będą to nierówności o numerach $l = m_1, m_2, \ldots, m_{k-2}$, to

$$\Gamma_{r_0-1,r_0}(k) = \{(r_0, l)\colon\ l = a, a-1, m_1, m_2, \ldots, m_{k-2}\}.$$

(c) Jeśli w chwili r_0 nie zmienią znaku nierówności typu (1.14) o numerach $l = m_1', m_2', \ldots, m_{k_1}'$ a zmienią znak nierówności typu (1.15) o numerach $l = m_1'', m_2'', \ldots, m_{k_2}''$, to

$$\Gamma_{r_0-1} = \Gamma_{r_0-1,r_0}(k_1+k_2) \cup \Gamma_{r_0,N}(2),$$

gdzie $\Gamma_{r_0-1,r_0}(k_1+k_2) = \{(r_0, l)\colon\ l = m_1', m_2', \ldots, m_{k_1}', m_1'', m_2'', \ldots, m_{k_2}''\}$.

Traktując dalej (r_0, l) jako początkowy punkt indukcji wstecznej i iterując postępowanie podane w (ii) i (iii) wyznaczymy cały zbiór w momencie osiągnięcia stanu (1,1). $E_{(s,l)} g_a(W_{\sigma_r})$ liczymy zgodnie z rozkładami prawdopodobieństwa danymi rekurencyjnie przez (1.11) i (1.12).

PRZYKŁAD 1. Niech $a = 1$, wówczas $g_1(s, 1) = s/N$ i prawdopodobieństwa przejścia dane są wzorami

$$p(r, s) = \begin{cases} \dfrac{r}{s(s-1)} & \text{dla } s > r, \\ 0 & \text{dla } s \leqslant r, \end{cases}$$

$$p(r, \infty) = 1 - \sum_{s=r+1}^{N} \frac{r}{s(s-1)}; \qquad p(\infty, \infty) = 1.$$

Otrzymujemy zatem $v_N(N-1, 1) = (N-1)/N = g_1(N-1, 1)$ i wobec tego $(N-1, 1)$ należy do obszaru optymalnego zatrzymania. Załóżmy dla indukcji wstecznej, że obszar optymalnego zatrzymania zawiera $\Gamma_r = \{(s, 1): s = r+1, r+2, \ldots, N\}$ i $\sigma_r = \inf_t \{t\colon W_t \in \Gamma_r\}$. Ze wzoru (1.11) mamy:

$$P_{(r,1)}\{W_{\sigma_r} = (u, 1)\} = \frac{r}{u(u-1)} \qquad \text{dla } (u, 1) \in \Gamma_r$$

oraz

$$E_{(r,1)} g_1(W_{\sigma_r}) = \frac{r}{N} \sum_{u=r+1}^{N} \frac{1}{u-1}.$$

Nierówność $g_1(r, 1) \geqslant E_{(r,1)} g_1(W_{\sigma_r})$ jest prawdziwa, gdy tylko

$$\sum_{u=r+1}^{N} \frac{1}{u-1} \leqslant 1. \tag{1.16}$$

Niech r_α będzie najmniejszym r takim, dla którego nierówność (1.16) jest spełniona. $\Gamma_{r_\alpha - 1}$ jest obszarem optymalnego zatrzymania. Należy więc w optymalnym poszukiwaniu najlepszego obiektu przepuścić $r_\alpha - 1$ obiektów nie wybierając żadnego i wybrać pierwszy relatywnie najlepszy, który pojawi się po obiekcie $r_\alpha - 1$. r_α/N dąży do e^{-1}, gdy N dąży do nieskończoności. Również $\lim_{N\to\infty} v_N = e^{-1}$. Przykład ten to klasyczny „problem sekretarki" ([2]–[4], [7]).

PRZYKŁAD 2. Chcemy wybrać obiekt o absolutnej randze $a = 2$. W tym przypadku

$$g_2(r, l) = \begin{cases} \dfrac{r(N-r)}{N(N-1)}, & \text{gdy } l = 1, \\ \dfrac{r(r-1)}{N(N-1)}, & \text{gdy } l = 2 \end{cases}$$

oraz

$$p(r, s) = \begin{cases} \dfrac{1}{s} & \text{dla } r < 2,\ s = r+1, \\ \dfrac{r(r-1)}{s(s-1)(s-2)} & \text{dla } s > r, \\ 0 & \text{dla } r \leqslant s \text{ lub } s > r,\ r < 2,\ s \neq r+1. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że $v_N(N-1,l) = g_2(N-1,l)$ dla $l = 1,2$. Załóżmy dla indukcji wstecznej, że obszar optymalnego zatrzymania zawiera $\Gamma_r = \{(s,l): l = 1,2;\ r < s \leqslant N\}$. Oznaczymy przez σ_r moment pierwszego osiągnięcia Γ_r przez W_t. Ze wzoru (1.11) otrzymujemy:

$$P_{(r,l)}\{W_{\sigma_r} = (u,m)\} = p(r,u) \quad \text{dla } u > r;\ l,m = 1,2$$

oraz

$$E_{(r,l)} g_2(W_{\sigma_r}) = \sum_{u=r+1}^{N} p(r,u)[g_2(u,1)+g_2(u,2)] =$$

$$= \frac{r(r-1)}{N} \sum_{u=r+1}^{N} \frac{1}{(u-1)(u-2)} = \frac{r}{N}\frac{(N-r)}{(N-1)} = g_2(r,1).$$

Wobec powyższych wzorów, jako pierwsza zmieni znak nierówność $v_N(r+1) \leqslant \leqslant g_2(r,2)$, to znaczy $\frac{r(N-r)}{N(N-1)} \leqslant \frac{r(r-1)}{N(N-1)}$, a więc $r \geqslant (N+1)/2$. Niech $r_\alpha = \min\{r: r \geqslant (N+1)/2\}$. Dla $r \geqslant r_\alpha$, $v_N(r,l) = g_2(r,l)$, $l = 1,2$, więc $\Gamma_{r_\alpha-1}$ jest zawarte w obszarze optymalnego zatrzymania. Załóżmy dla indukcji wstecznej, że również zbiór $\Gamma_{r_1} = \Gamma_{r_\alpha-1} \cup \{(s,1): r_1 < s < r_\alpha\}$ jest zawarty w obszarze optymalnego zatrzymania. Z (1.12) otrzymujemy

$$P_{(s,l)}\{W_{\sigma_{r_1}} = (u,m)\} = \begin{cases} \dfrac{r_1}{u(u-1)} & \text{dla } r_1 < u < r_\alpha,\ s \leqslant r_1,\ m = 1, \\[2ex] \dfrac{r_1(r_\alpha-2)}{u(u-1)(u-2)} & \text{dla } r_\alpha \leqslant u \leqslant N,\ m = 1,2,\ s \leqslant r_1, \end{cases}$$

oraz

$$E_{(s,l)} g_2(W_{\sigma_{r_1}}) = \sum_{u=r_1+1}^{r_\alpha-1} \frac{r_1}{u(u-1)}\frac{u(N-u)}{N(N-1)} + \sum_{u=r_\alpha}^{N} \frac{r_1(r_\alpha-2)}{u(u-1)(u-2)}\frac{u}{N} =$$

$$= \frac{r_1}{N(N-1)} \sum_{u=r_1+1}^{r_\alpha-1} \frac{N-u}{u-1} + \frac{r_1}{r_\alpha-1}\frac{(r_\alpha-1)(N-r_\alpha+1)}{N(N-1)}.$$

Ponieważ $v_N(r_1+1) = E_{(r_1,l)} g_2(W_{\sigma_{r_1}})$ jest nierosnącą funkcją r_1, a $g_2(r_1,2)$ jest funkcją rosnącą, więc $v_N(r_1+1) > g_2(r_1,2)$ dla $r_1 < r_\alpha$, ponieważ $v_N(r_\alpha) > > g_2(r_\alpha-1,2)$. $v_N(r_1+1) \leqslant g_2(r_1,1)$ dla $r_1 = r_\beta = r_\alpha-1$ i $v_N(r_1+1) > g_2(r_1,1)$ dla $r_1 < r_\beta$. Stąd obszarem optymalnego zatrzymania jest $\Gamma_{r_\beta-1}$. Zarówno r_α/N jak i r_β/N dąży do $1/2$, gdy N dąży do nieskończoności i

$$\lim_{N\to\infty} v_N = \lim_{N\to\infty} \frac{(r_\beta-1)(N-r_\alpha+1)}{N(N-1)} = \frac{1}{4}.$$

2. Asymptotycznie optymalne rozwiązanie. Już w przypadku $a = 2$ widać, że dla dużych a dokładne wyznaczenie zbioru optymalnego zatrzymania będzie uciążliwe. Celem dalszych rozważań będzie podanie możliwie prostego sposobu wyznaczenia asymptotycznie optymalnej strategii wyboru a-tego obiektu. W tym celu zamiast łańcucha $(W_t, \mathscr{F}_t, P_{(1,1)})$ o zbiorze stanów $\{1, 2, \ldots, N\} \times \{1, 2, \ldots, a\}$ rozpatrzymy równoważny mu łańcuch $\{W'_t, \mathscr{F}'_t, P_{(1/N,1)}\}$ ze zbiorem stanów $\{1/N, 2/N, \ldots, 1\} \times \{1, 2, \ldots, a\}$. Funkcja wypłaty $g_a([Nx], l)$ dąży jednostajnie, przy N dążącym do nieskończoności, do

$$(2.1) \qquad g_a(x, l) = \binom{a-1}{l-1} x^l (1-x)^{a-l}, \qquad l = 1, 2, \ldots, a.$$

Zatem, jeżeli N dąży do nieskończoności i r/N dąży do $x \in (0, 1]$, to

$$E_{(r/N, l')} g_a(W'_1) = \sum_{l=1}^{a} \sum_{s=r+1}^{N} p(r, s) g_a(s, l), \qquad r \geqslant a$$

dąży jednostajnie do $E_{(x,l')} g_a(W''_1)$, gdzie $(W''_t, \mathscr{F}''_t, P_{(x,1)})$ jest łańcuchem Markowa o stanach $(0, 1] \times \{1, 2, \ldots, a\}$ i gęstości prawdopodobieństw przejścia

$$(2.2) \qquad p(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^a}{y^{a+1}} & \text{dla } 0 < x < y \leqslant 1, \\ 0 & \text{dla } x \geqslant y, \end{cases}$$

a

$$E_{(x,l')} g_a(W''_1) = \sum_{l=1}^{a} \int_x^1 p(x, y) g_a(y, l) dy.$$

Równania rekursywne (1.4)–(1.7) zastąpimy teraz równaniami:

$$(2.3) \qquad v(1) = 0,$$

$$(2.4) \qquad v(x, l) = \max\{g_a(x, l),\ E_{(x,l)} v(W''_1)\},$$

$$(2.5) \qquad v(x) = E_{(x,l)} v(W''_1),$$

gdzie $v(x, l)$ jest granicą $v_N(r, l)$, gdy r/N dąży do $x \in (0, 1]$, a $v(x)$ jest granicą $v_N([Nx]/N)$, gdy N dąży do nieskończoności. Ponieważ funkcja $v_N(r)$ jest nierosnącą funkcją r, więc $v(x)$ jest nierosnącą funkcją $x \in (0, 1]$. Wyznaczenie asymptotycznie optymalnej strategii wyboru a-tego obiektu będzie polegało na rozwiązaniu równań rekursywnych (2.3)–(2.5). Wzory (1.11) i (1.12) uzyskane dla ustalonego N, gdy N dąży do nieskończoności i r/N dąży do x przejdą w odpowiednie warunkowe gęstości:

$$(2.6) \qquad f_{(x',l')}((y, m_i)) = \frac{x^k}{y^{k+1}} \qquad \text{dla } x' \leqslant x < y \leqslant 1,\ i = 1, 2, \ldots, k,$$

$$(2.7) \qquad f_{(x',l')}((y, l)) = \begin{cases} \dfrac{x_{i-1}^{k_i}}{x_i^{k_i}} f_{(x',l')}((y, l)) & \text{dla } (y, l) \in \Gamma'(i+1), \\ \dfrac{x_{i-1}^{k_i}}{y^{k_i+1}} & \text{dla } (y, l) \in \Gamma_{x_{i-1}, x_i}(k_i), \end{cases}$$

gdzie $\Gamma_{x,z}(k) = \{(y, l)\colon\ x < y \leqslant z,\ l = m_1, m_2, \ldots, m_k\}$, $\Gamma'(i+1) = \bigcup_{j=i}^{n} \Gamma_{x_{j-1}, x_j}(k_j)$.

PRZYKŁAD 3. Niech $a = 3$. Wówczas

$$g_3(x, l) = \begin{cases} x(1-x)^2 & \text{dla } l = 1, \\ 2x^2(1-x) & \text{dla } l = 2, \\ x^3 & \text{dla } l = 3. \end{cases}$$

Z równań (2.3)–(2.5) oraz wzoru (2.6) otrzymujemy, $v(x, l) = g_3(x, l)$ dla $l = 2, 3$ i $v(x, 1) \neq g_3(x, 1)$ w lewostronnym otoczeniu 1. Wynika to również z faktu, że dla $x < 1, v(x) > 0$, a funkcja $g_3(r, l)$ dla $r = N-1$ i $l = 1$ jest równa 0. Możemy zatem założyć, że obszar optymalnego zatrzymania zawiera $\Gamma_x^1 = \{(y, l): l = 2, 3; x < y \leqslant 1\}$ i $\sigma_1 = \inf_t\{t: W_t'' \in \Gamma_x^1\}$. Ze wzoru (2.6) otrzymujemy:

$$f_{(x',l')}((y, l)) = x^2/y^3 \quad \text{dla } (y, l) \in \Gamma_x^1,\ x' \leqslant x$$

oraz

$$v(x) = -x^2(2\ln x + 1 - x).$$

Niech

$$h_l(x) = g_3(x, l) - v(x) \qquad \text{dla } l = 1, 2, 3.$$

$h_1(x) < 0$ dla $x \in (0, 1)$. Funkcja $h_2(x)$ jest nieujemna w $[x_2, 1]$, gdzie x_2 jest pierwiastkiem równania $2\ln x = 3x - 3$. Pierwiastek równania $h_3(x) = 0$ jest równy $x_3 = \alpha = e^{-1/2}$. Funkcja $h_3(x) \geqslant 0$ dla $x \geqslant x_3$ i $h_2(x_3) = (1/e)(2 - 3e^{-1/2}) > 0$, więc $x_3 > x_2$. Załóżmy dalej, że podzbiór

$$\Gamma_x^2 = \Gamma_{x,\alpha^-}(1) \cup \Gamma_{\alpha^+,1}(2) = \{(y, l): x < y < \alpha;\ l = 2;\ \alpha \leqslant y \leqslant 1,\ l = 2, 3\}$$

jest podzbiorem zbioru optymalnego zatrzymania i $\sigma_2 = \inf_t\{t: W_t'' \in \Gamma_x^2\}$. $((\alpha^+)\ \alpha^-$ w symbolu $\Gamma_{x,\alpha^-}(k)$ oznacza, że punkty (α, l) (należą) nie należą do zbioru $\Gamma_{x,\alpha}(k)$). Ze wzoru (2.7) mamy:

$$f_{(x',l')}((y, l)) = \begin{cases} x/y^2 & \text{dla } (y, l) \in \Gamma_{x,\alpha^-}(1), \\ \alpha x/y^3 & \text{dla } (y, l) \in \Gamma_{\alpha^+,1}(2), \end{cases}$$

$$v(x) = E_{(x,l)} g_3(W_{\sigma_2}'') = \int_x^\alpha \frac{x}{y^2}\, 2y^2(1-y)\,dy + \int_\alpha^1 \frac{\alpha x}{y^3}[y^3 + 2y^2(1-y)]\,dy =$$

$$= x[(\alpha - x)(2 - \alpha - x) - \alpha(2\ln\alpha - \alpha + 1)].$$

Zbadajmy różnicę

$$h_2(x) = g_3(x, 2) - v(x) =$$
$$= x[2x(1-x) - (\alpha - x)(2 - \alpha - x) + \alpha(2\ln\alpha - \alpha + 1)] = x l_2(x).$$

Równanie $l_2(x) = 0$ ma pierwiastek $\beta = (2 - \sqrt{4 - 6\alpha})/3 = 0{,}4664$ i $l_2(x) > 0$ dla $x \in (\beta, \alpha)$, $l_2(x) < 0$ dla $x \in (0, \beta)$; $h_1(x) < 0$ dla $x < \alpha$ ponieważ $E_{(x,l)} g_3(W_{\sigma_1}'') \leqslant v(x)$ dla $x < \alpha$. Wobec tego Γ_β^2 jest obszarem optymalnego zatrzymania i dla dużych N, asymptotycznie optymalne postępowanie przy wyborze absolutnie trzeciego obiektu będzie polegało na zatrzymaniu się przy osiągnięciu po raz pierwszy obszaru $\Gamma_{r_\beta-1} = \Gamma_{r_\beta-1, r_\alpha-1}(1) \cup \Gamma_{r_\alpha-1, N}(2) = \{(s, l)\colon r_\beta \leqslant s < r_\alpha, l = 2;\ r_\alpha \leqslant s \leqslant N,\ l = 2, 3\}$, gdzie $r_\alpha \cong \alpha \cdot N$, a $r_\beta \cong \beta \cdot N$. Graniczne prawdopodobieństwo otrzymania absolutnie trzeciego obiektu przy zastosowaniu asymptotycznie optymalnej strategii jest równe:

$$\lim_{N\to\infty} v_N(1) = v(0^+) = E_{(x',l')} g_3(W''_{\sigma_2}) = \beta[(\alpha-\beta)(2-\alpha-\beta)+\alpha^2] \cong 0{,}2322.$$

Widać stąd, że przy optymalnym wyborze 3-go obiektu dla dużych N należy brać pod uwagę tylko obiekty o relatywnej randze 2 i 3. Do momentu badania $r_\beta - 1$ obiektu nie wybieramy żadnego obiektu, od chwili r_β wybieramy pierwszy relatywnie drugi obiekt, który pojawi się, a od chwili r_α również relatywnie trzeci, o ile wcześniej nie wybraliśmy żadnego obiektu i nasze postępowanie nie zakończyło się.

Dla bliższego poznania strategii optymalnej przy $a \geqslant 4$ zbadamy rodzinę funkcji $g_a(x, l)$, $l = 1, 2, \ldots, a$, $x \in (0, 1]$.

LEMAT 2. *Rodzina funkcji* $g_a(x, l)$, $l = 1, 2, \ldots, a$, $x \in (0, 1]$, *określona przez* (2.1), *ma następujące własności:*

(i) *Funkcja* $g_a(x, l)$ *ma dokładnie jedno maksimum w* $(0, 1]$ *w punkcie*

$$x_l = l/a \qquad dla\ l = 1, 2, \ldots, a$$

oraz $g_a(0, l) = g_a(1, l) = 0$ *dla* $l = 1, 2, \ldots, a-1$ *i* $g_a(0, a) = 0$, $g_a(1, a) = 1$.

(ii) *Wartości maksimów funkcji z tej rodziny rosną wraz z* l.

(iii) l*-ta funkcja przecina się z* $(l+1)$*-wszą w* $(0, 1)$ *w maksimum funkcji* l*-tej. Jest to jedyny punkt przecięcia tych dwóch funkcji w* $(0, 1)$.

Łatwy dowód lematu pomijamy.

WNIOSEK 1. Z lematu 2 i tego, że $v(x)$ jest funkcją niemalejącą, ciągłą i $v(x) \geqslant 0$ wynika, że istnieje taki punkt x_0, że dla $x < x_0$, $g_a(x, l) < v(x)$ dla każdego l. Oznacza to, że asymptotycznie optymalna strategia wymaga, aby nie wybierać żadnego obiektu aż do chwili $k_0 \cong [Nx_0]$.

Niech

$$\Gamma_x^1 = \{(y, l)\colon l = a, a-1;\ x < y \leqslant 1\} \quad \text{i} \quad \sigma_1 = \inf_t \{t\colon W''_t \in \Gamma_x^1\}.$$

Ze wzoru (2.6) otrzymujemy:

$$E_{(x,l)} g_a(W''_{\sigma_1}) = \int_x^1 \frac{x^2}{y^3}[y^a + (a-1)y^{a-1}(1-y)]dy =$$

$$= x^2\left[\frac{2}{a-3} + x^{a-2} - \frac{a-1}{a-3}x^{a-3}\right].$$

Dla $a \geqslant 4$ w lewostronnym otoczeniu $x = 1$ mamy (z wyłączeniem samej jedynki) $g_a(x, l) \geqslant E_{(x,l)} g_a(W''_{\sigma_1})$ dla $l = a, a-1$ i $g_a(x, l) < E_{(x,l)} g_a(W''_{\sigma_1})$ dla $l \neq a, a-1$. Wynika stąd, że w pewnym otoczeniu jedynki Γ_x^1 jest podzbiorem zbioru optymalnego zatrzymania. Należało spodziewać się tego, ponieważ dla $a \geqslant 4$ $v_N(N-1, a) =$

$= g_a(N-1, a)$ i $v_N(N-1, a-1) = g_a(N-1, a-1)$, gdy $N > a$ i $v_N(N-1, l) \neq$ $\neq g_a(N-1, l)$ dla $l \neq a, a-1$. Rozpatrzmy rodzinę równań:

$$E_{(x,l)} g_a(W''_{\sigma_1}) - g_a(x, l) = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, a \tag{2.8}$$

i oznaczmy przez α maksymalny pierwiastek równań (2.8) w $(0, 1)$. Oznaczmy przez α_l maksymalny pierwiastek równania l-tego z (2.8) w $(0, 1)$. Jeżeli równanie nie ma pierwiastka w $(0, 1)$ przyjmujemy $\alpha_l = 0$.

LEMAT 3.

$$\max_{1 \leqslant l \leqslant a} \{\alpha_l\} = \max\{\alpha_a, \alpha_{a-2}\} \qquad \textit{dla } a \geqslant 4. \tag{2.9}$$

Dowód. Z lematu 2 i tego, że $E_{(1,l)} g_a(W''_{\sigma_1}) - g_a(1, l) = 0$ dla $l = 1, 2, \ldots, a-1$, mamy

$$\max_{1 \leqslant l \leqslant a} \{\alpha_l\} = \max\{\alpha_a, \alpha_{a-1}, \alpha_{a-2}\},$$

ponieważ $v(x) \geqslant g_a(x, l)$ dla $l \neq a, a-1$ i $v(x) < g_a(x, l)$ dla $l = a, a-1$ i x należących do dostatecznie małego otoczenia $x = 1$.

Funkcja

$$E_{(x,l)} g_a(W''_{\sigma_1}) - g_a(x, a-1) = \tag{2.10}$$
$$= x^2 \left[\frac{2}{a-3} - \frac{(a-1)(a-2)}{a-3} x^{a-3} + a x^{a-2}\right] = x^2 b(x)$$

ma następujące własności. Zmiana znaku (2.10) w $(0, 1)$ jest równoważna zmianie znaku przez $b(x)$. Funkcja $b(x)$ ma jedyne minimum w $(a-1)/a$, $b(0) > 0$, $b(1) = 0$, więc $\alpha_{a-1} < (a-1)/a$. Dla $x > \alpha_{a-1}$ (2.10) jest ujemne. Ponieważ $g_a(x, a) >$ $> g_a(x, a-1)$ dla $x > (a-1)/a > \alpha_{a-1}$, więc $\alpha_a > \alpha_{a-1}$. To dowodzi (2.9).

WNIOSEK 2. Na każdym etapie wyznaczania optymalnej procedury poszukiwania a-tego obiektu wystarczy badać co najwyżej trzy nierówności z (1.14) i (1.15).

Wynika to z lematu 2 i monotoniczności $v(x)$.

Algorytm służący do wyznaczenia asymptotycznie optymalnej procedury wyboru a-tego obiektu jest taki sam jak algorytm dla wyznaczenia procedury optymalnej podany w części pierwszej niniejszej pracy, z tym jednak zastrzeżeniem, że funkcje $g_a(r, l)$ i $v_N(r, l)$ należy zastąpić ich granicami, gdy N dąży do nieskończoności a r/N do x.

PRZYKŁAD 4. Niech $a = 4$. Wówczas $\alpha = \max\{\alpha_4, \alpha_2\} = \alpha_4 = 2/3$. Oznaczmy:

$$\Gamma_x^2 = \Gamma_{x,\alpha^-}(1) \cup \Gamma_{\alpha^+,1}(2),$$

gdzie $\Gamma_{x,\alpha^-}(1) = \{(y, 3)\colon x < y < \alpha\}$, a $\Gamma_{\alpha^+,1}(2) = \{(y, l)\colon \alpha \leqslant y \leqslant 1,\ l = 3, 4\}$, oraz $\sigma_2 = \inf_t\{t\colon W''_t \in \Gamma_x^2\}$. Ze wzoru (2.7) mamy:

$$f_{(x,l)}((y, l)) = \begin{cases} \dfrac{x}{y^2}, & \text{gdy } x < y < \alpha,\ l = 3, \\[2mm] \dfrac{\alpha \cdot x}{y^3}, & \text{gdy } \alpha \leqslant y \leqslant 1,\ l = 3, 4, \end{cases}$$

oraz

$$E_{(x,l)}g_4(W''_{\sigma_1}) = \tfrac{3}{2}x(\alpha^2-x^2)+x^4 \stackrel{\mathrm{df}}{=} d(x).$$

Dla $x \in (0, \alpha)$, $d(x) > g_4(x, 4)$. Zbadajmy następujące różnice:

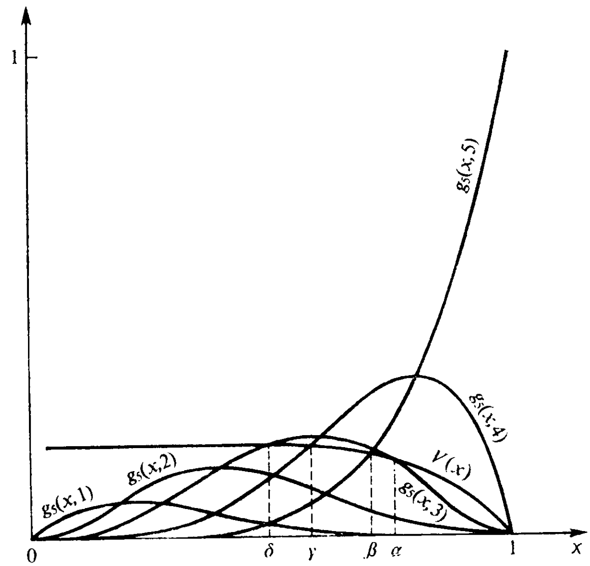
$$c_l(x) = d(x)-g_a(x,l) \quad \text{dla } x \in (0, \alpha),\ l = 2, 3.$$

Równanie $c_3(x) = 0$ ma w $(0, \alpha)$ pierwiastek $\beta = 0{,}5286$, a funkcja $c_2(x)$ ma dodatnie jedyne minimum w $(0, \alpha)$ w punkcie $x = \frac{1}{2}$, więc $c_2(x) > 0$ dla $x \in (0, \alpha)$. Stąd $\Gamma^2_{\beta+}$ jest zbiorem optymalnego zatrzymania.

$$v(0^+) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ r/N\to 0}} v_N(r) = d(\beta) = \tfrac{3}{2}\beta(\alpha^2-\beta^2)+\beta^4 \cong 0{,}2089.$$

W przypadku skończonym asymptotycznie optymalne postępowanie polega na zatrzymaniu się po osiągnięciu po raz pierwszy zbioru $\Gamma_{[N\beta]-1,[N\alpha]-1}(1) \cup \Gamma_{[N\alpha]-1,N}(2)$. Inaczej, należy przepuścić $[N\beta]-1$ obiektów, następnie wybrać pierwszy relatywnie trzeci, który pojawi się po obiekcie $[N\beta]$, a od obiektu $[N\alpha]$ również wybierać obiekt relatywnie czwarty.

Przykład 5. Niech $a = 5$ (rysunek 1). Wówczas $\alpha_5 = 1/\sqrt{2} = 0{,}7071$, a $\alpha_3 = (5+\sqrt{5})/10 = 0{,}7236$ i na podstawie lematu 3 $\alpha = \alpha_3$.



Rys. 1

Niech

$$\Gamma^2_x = \{(y,l)\colon \alpha < y \leqslant 1;\ l = 4, 5;\ x < y \leqslant \alpha,\ l = 3, 4, 5\}$$

i $\sigma_2 = \inf_t\{t\colon W''_t \in \Gamma^2_x\}$. Ze wzorów (2.6) i (2.7) mamy

$$f_{(x,l)}((y,l)) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{y^4} & \text{dla } x < y \leqslant \alpha,\ l = 3, 4, 5, \\[2ex] \dfrac{x^3\alpha^2}{\alpha^3 y^3} & \text{dla } \alpha < y \leqslant 1,\ l = 4, 5, \end{cases}$$

i

$$E_{(x,l)}g_5(W''_{\sigma_2}) = x^3\left[\tfrac{5}{2}\alpha^2-10\alpha+\frac{1}{\alpha}+6\ln\alpha+8x-\tfrac{3}{2}x^2-6\ln x\right].$$

Niech

$$b_l(x) = E_{(x,l)}g_5(W''_{\sigma_2})-g_5(x,l), \qquad l = 1,2,\ldots,5.$$

Rozwiązując równania $b_l(x) = 0$ dla $l = 2, 3$ i 5 w $(0, \alpha)$ otrzymujemy, że największy pierwiastek występuje dla $l = 5$ i wynosi $\beta = 0{,}7071$, a $E_{(\beta,l)}g_5(W''_{\sigma_2}) = 0{,}1768$.

Niech teraz

$$\Gamma^3_x = \Gamma^1_{\beta+} \cup \{(y,l)\colon x < y < \beta,\ l = 3,4\} \quad \text{i} \quad \sigma_3 = \inf_t\{t\colon W''_t \in \Gamma^3_x\}.$$

Ze wzorów (2.6) i (2.7) otrzymujemy:

$$f_{(x,l')}((y,l)) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{y^3} & \text{dla } x < y < \beta,\ l = 3,4,\\ \dfrac{x^2\beta^3}{\beta^2 y^4} & \text{dla } \beta \leqslant y \leqslant \alpha,\ l = 3,4,5,\\ \dfrac{x^2\beta^3\alpha^2}{\beta^2\alpha^3 y^3} & \text{dla } \alpha < y \leqslant 1,\ l = 4,5, \end{cases}$$

i

$$E_{(x,l)}g_5(W''_{\sigma_3}) = x^2\left[-6x+4x^2-\tfrac{2}{3}x^3+6\beta-4\beta^2+\tfrac{2}{3}\beta^3+\frac{E_{(\beta,l)}g_5(W''_{\sigma_2})}{\beta^2}\right].$$

Ponieważ

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} g_5(x,2) < E_{(\beta,l)}g_5(W''_{\sigma_2}), \tag{2.11}$$

więc należy zbadać następujące funkcje w $(0, \beta)$:

$$c_l(x) = E_{(x,l)}g_5(W''_{\sigma_3})-g_5(x,l) \qquad \text{dla } l = 3,4,$$

aby wyznaczyć zbiór optymalnego zatrzymania. Funkcja $c_3(x)/x^2$ ma ujemne minimum w punkcie $x = 0{,}6$; jest ujemna w $x = \beta$; rosnąca w przedziale $(0{,}6, \beta)$, punkt $x = 0{,}6$ jest punktem przecięcia funkcji $g_5(x, 4)$ i $g_5(x, 3)$ (lemat 2) i dlatego pierwiastek równania $c_3(x) = 0$ jest mniejszy niż pierwiastek równania $c_4(x) = 0$. Rozwiązaniem tego ostatniego jest $\gamma = 0{,}5809$, a $E_{(\gamma,l)}g_5(W''_{\sigma_3}) = 0{,}1909$.

Niech

$$\Gamma^4_x = \Gamma^3_{\gamma+} \cup \{(y,3)\colon x < y < \gamma\} \quad \text{i} \quad \sigma_4 = \inf_t\{t\colon W''_t \in \Gamma^4_x\}.$$

Ze wzorów (2.6) i (2.7) mamy:

$$f_{(x,l')}((y,l)) = \begin{cases} \dfrac{x}{y^2} & \text{dla } x < y < \gamma,\ l = 3,\\ \dfrac{x\gamma^2}{\gamma y^3} & \text{dla } \gamma \leqslant y < \beta,\ l = 3,4,\\ \dfrac{x\gamma^2\beta^3}{\gamma\beta^2 y^4} & \text{dla } \beta \leqslant y \leqslant \alpha,\ l = 3,4,5,\\ \dfrac{x\gamma^2\beta^3\alpha^2}{\gamma\beta^2\alpha^3 y^3} & \text{dla } \alpha < y \leqslant 1,\ l = 4,5 \end{cases}$$

i

$$E_{(x,1)}g_5(W''_{\sigma_4}) = x\left[-\tfrac{3}{2}x^4+4x^3-3x^2+3\gamma^2-4\gamma^3+\tfrac{3}{2}\gamma^4+\frac{E_{(\gamma,1)}g_5(W''_{\sigma_3})}{\gamma}\right].$$

Ponieważ funkcja $v(x)$ jest malejąca i mamy (2.11), $v(\beta) = E_{(\beta,1)}g_5(W''_{\sigma_2})$, więc wystarczy rozpatrzyć tylko równanie $E_{(x,1)}g_5(W''_{\sigma_4})-g_5(x, 3) = 0$. Największy pierwiastek tego równania mniejszy od γ jest równy $\delta = 0{,}5124$ i $E_{(\delta,1)}g_5(W''_{\sigma_4}) = 0{,}1919$. Zatem zbiorem optymalnego zatrzymania dla $a = 5$ jest $\Gamma^4_{\delta+}$. Wynika stąd, że asymptotycznie optymalne postępowanie jest następujące: przepuszczamy $[N\delta]$ obiektów, następnie wybieramy pierwszy relatywnie trzeci obiekt jaki się pojawi; od obiektu $[N\gamma]$ wybieramy również relatywnie czwarty obiekt; między obiektami $[N\beta]$ i $[N\alpha]$ wybieramy obiekty relatywnie trzeci, czwarty i piąty, a od obiektu $[N\alpha]$ do końca relatywnie czwarty i piąty. Graniczna wartość prawdopodobieństwa wybrania absolutnie piątego obiektu wynosi

$$v(0^+) = \lim_{N\to\infty} v_N(1) = E_{(\delta,1)}g_5(W''_{\sigma_4}) = 0{,}1919.$$

Chcę podziękować Recenzentowi i prof. St. Trybule za uwagi i rady udzielone w trakcie przygotowywania niniejszej pracy.

Prace cytowane

[1] Y. S. Chow, S. Moriguti, H. Robbins and S. M. Samuels, *Optimal selection based on relative rank (the "Secretary Problem")*, Israel J. Math. 2 (1964), str. 81–90.

[2] Е. Б. Дынкин, А. А. Юшкевич, *Теоремы и задачи о процесах Маркова*, Г. 3, Изд. „Наука", Москва 1967.

[3] J. P. Gilbert and F. Mosteller, *Recognizing the maximum of a sequence*, J. Amer Stat. Assoc. 61 (1966), str. 35–73.

[4] С. М. Гусейн-Заде, *Задача выбора и оптимальное правило остановки последовательности независимых испытаний*, Теория вер. и её прим. 11 (1966), str. 534–537.

[5] A. G. Mucci, *Differential equation and optimal choice problem*, Ann. Stat. 1 (1973), str. 104–113.

[6] —, *On a class of secretary problems*, Ann. Prob. 1 (1973), str. 417–427.

[7] А. Н. Ширяев, *Статистический последовательный анализ*, Г. 2, Изд. „Наука", Москва 1969.