

MARIANNA CIOSEK

Kraków

Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wzrznego

POSZUKIWANIE ROZWIĄZANIA ZADANIA
NA RÓŻNYCH POZIOMACH MATEMATYCZNEGO DOŚWIADCZENIA

C z ę ś ć 1

1.1. Uwagi wstępne

W artykule poświęconym metodologii badań nad kształceniem umiejętności rozwiązywania problemów, prowadzonych w ciągu ostatnich dziesięciu lat w Stanach Zjednoczonych, F.K. Lester (1982) wyróżnia trzy kluczowe pytania, wokół których koncentrują się te badania. Są to następujące pytania:

(1) Co jednostka robi, zarówno poprawnie, jak i niepoprawnie (skutecznie i nieskutecznie), podczas rozwiązywania problemu?

(2) Co jednostka powinna umieć robić?

(3) Jak można rozwijać kompetencje jednostki w zakresie rozwiązywania problemów?

Odnosnie do pierwszego z wymienionych zagadnień autor artykułu zwraca uwagę na to, że ciągle jeszcze „... daleko za mało wiemy o naturze zdolności ludzi do rozwiązywania problemów” (Lester 1982, str. 44). Uświadamia także, że jakkolwiek wiemy, iż ten rodzaj umiejętności zmienia się u jednostki w czasie, to ciągle jeszcze nie rozumiemy specyfiki tych zmian. Lester podkreśla wreszcie znaczenie wyników badań związanych z pierwszym z wymienionych pytań w celu uzyskania odpowiedzi na dwa pozostałe. Stwierdza, że zanim przejdziemy do rozwijania użytecznych modeli kształcenia umiejętności rozwiązywania zadań, musimy mieć użyteczne modele rozwiązywania problemów przez jednostki, które specjalnego instruktazu w tym zakresie nie przechodziły.

Podzielam pogląd autora tych opinii. Warunkiem rzeczowej dyskusji i badań w zakresie kształcenia umiejętności typu heurystycznego jest głębokie wniknięcie w sam proces rozwiązywania zadania, poznanie specyficznych cech tego procesu, przyczyn trudności, warunków sukcesu czy porażki w tej dziedzinie.

Oczywiście, badania, jakie były do tej pory prowadzone, a także refleksje niektórych matematyków na temat odkrywczości matematycznej rzucają pewne światło na ten niezwykle skomplikowany proces. W interesujących pracach G. Polya (1964, 1975) znajdujemy opisy wielu strategii rozwiązywania zadań matematycznych. W „Odkryciu matematycznym” na przykładzie wielu zadań autor prezentuje instruktywne dydaktycznie sposoby tworzenia planu rozwiązania tych zadań. Te sposoby, jakkolwiek bardzo pouczające, są zapewne przykładami tworzenia planu rozwiązania zadania przez samego autora - wybitnego matematyka - i w związku z tym w przeważającej większości pokazują drogi od razu prowadzące do celu. Dydaktyka matematyki interesują te problemy w aspekcie nie tylko eksperta, ale również jednostki o mniejszym doświadczeniu matematycznym. Przede wszystkim jednak chodzi o analizę nie tych dróg, które mogłyby wystąpić, ale tych, które rzeczywiście wystąpiły w procesie rozwiązywania zadania, prowadząc ostatecznie, lub nie, do rozwiązania zadania. Sądzę, że „listy heurystyk” G. Polya nie można traktować jako zamkniętej. Matematyka ciągle się rozwija. Należy przypuszczać, że rozwijają się również heurystyczne metody badań w zakresie tej dyscypliny. Powinniśmy je poznawać, badając rzeczywisty proces rozwiązywania zadań.

1.2. Cel badania

Badania, które sygnalizuję w tym artykule, mają na celu właśnie wniknięcie w rzeczywisty proces rozwiązywania zadania. Są kontynuacją prowadzonych już wcześniej przeze mnie badań. W poprzednich analizowano prace pisemne finalistów Ogólnopolskiej Olimpiady Matematycznej, z punktu widzenia stosowanych przez nich metod, strategii i sposobów rozwiązania zadania (Krygowska, Ciosek, 1973; Ciosek, 1978). Obecnie zmieniono metodę badania oraz uwzględniono różne poziomy doświadczenia matematycznego.

Badani są osobami w różnym wieku i o różnym poziomie wiedzy i doświadczenia matematycznego. Obserwowano je indywidualnie w toku rozwiązywania tego samego zadania. Analiza ich rozumowania ujawnia różne skomplikowane aktywności i formy rozumowania. Wnioskowanie z przesłanek jest tylko jedną z takich form. Występuje jeszcze wiele innych. Niektóre z nich są znane - np. wnioskowanie empiryczne, rozumowanie intuicyjne (Krygowska, 1977, część I), inne - nie mają jeszcze nazwy i trudno je opisać (np. hipoteza motywowana przez rozwiązującego zadanie silnym poczuciem wiary w jej słuszność, a nie uzasadniona merytorycznie).

Jednym z celów przedstawianego tu badania jest właśnie rozróżnienie i scharakteryzowanie elementów rozumowania. Uwzględnienie grup o różnym poziomie doś-

wiadczenia matematycznego ma na celu uzyskanie odpowiedzi na następujące pytania:

(1) Czy i jakie elementy rozumowania matematycznego są wspólne dla tych różnych grup?

(2) Jakie różnice jakościowe - w odniesieniu do jednego typu rozumowania - ujawniają się na różnych poziomach?

(3) Jakie strategie rozwiązywania zadań matematycznych stosują eksperci z tej dziedziny, tj. matematycy?

Rezultaty tych badań mogłyby być uwzględnione w szerokiej na świecie dyskusji ważnych zarówno dla teorii, jak i praktyki nauczania matematyki, zagadnień:

- jakie formy matematycznego rozumowania są dostępne dla wszystkich?
- w jakie narzędzia heurystycznego typu powinna wyposażać ucznia szkoła, by mógł samodzielnie i skutecznie podejmować rozwiązywanie problemu?

1.3. Metoda zbierania materiału

W badaniu zastosowano połączenie dwu metod. Jedną z nich jest metoda tzw. „głośnego myślenia”. Osoba badana otrzymuje do rozwiązania zadanie, przy czym prosi się ją, aby informowała obserwatora o przychodzących jej na myśl próbach rozwiązania. Obserwator śledzi i rejestruje (taśma magnetofonowa, własne notatki) pracę badanego, sygnalizowaną przez jego głośne wypowiedzi oraz wykonywane zapisy, rysunki. W szczególności prowadzący badania notuje, np. w odniesieniu do zadań geometrycznych, w jakiej kolejności pojawiają się różne elementy rysunku. Jest to ważne dla uchwycenia momentów, w których rozwiązujący zadanie powraca do poprzednio wykonanego już rysunku i nanosi nowe elementy, w wyniku czego zmienia czasem pierwotną odpowiedź.

Metodę „głośnego myślenia” wzbogacono w opisywanym badaniu o pewien element wprowadzony do badań psychologicznych nad myśleniem w celu złagodzenia jednej z trudności w rozwiązywaniu zadania, jaką stanowi brak wiadomości (Puszkina, 1970). Mianowicie, na każdym etapie rozwiązywania zadania osoba badana może zadawać eksperymentatorowi pytania dotyczące jakiegoś faktu matematycznego „przerabianego” w szkole, którego dokładnie nie pamięta, a którego znajomość uznaje w danym momencie za ważną. Na przykład, badany może zadać pytanie w rodzaju: czy takie to a takie twierdzenie jest prawdziwe?

Drugą z uwzględnionych w badaniu metod jest pewna forma introspekcji. Po zasygnalizowaniu przez rozwiązującego zadanie zakończenia pracy, następuje

drugi etap obserwacji. Eksperymentator przedstawia osobie badanej drogę jej myśli, przypominając poszczególne etapy rozwiązywania zadania. Czasem zadaje pytania, na które odpowiadając, badany wyjaśnia, dlaczego w danym momencie zmienił aparat badania (np. z geometrii syntetycznej na geometrię analityczną), dlaczego postawił taką hipotezę itp. W tym drugim etapie obserwacji osoba rozwiązująca zadanie czasem także samorzutnie informuje o swoich myślach i odczuciach, których nie ujawniła w pierwszym etapie, nierzadko wyrażając również opinię o rozwiązywanym zadaniu. Pewna forma introspekcji wystąpiła także w etapie poprzedzającym badania właściwe, w etapie wstępnym. Przed przystąpieniem do obserwacji innych osób, osoba prowadząca badania rozwiązywała sama wiele zadań otwartych. Za każdym razem analizowała własną drogę rozmowy, starając się dotrzeć do tych momentów, które miały istotny wpływ na rozwiązanie zadania. Ten wstępny etap traktowano jako swoisty trening przed przystąpieniem do głównego etapu obserwacji, ułatwiający zarówno samą obserwację, jak i analizę otrzymanego w ten sposób materiału. Miał on także istotny wpływ na dobór zadań uwzględnianych w badaniu.

Metoda zastosowana w badaniu jest pewną odmianą metody, która występuje w literaturze dydaktycznej od niedawna, pod nazwą „mutual observation” (wzajemna obserwacja) (Brink, 1981).

1.4. Metoda analizy zebranego materiału

Analiza materiału dostarczonego przez obserwację przebiega w kilku etapach.

Etap wstępny to przygotowanie dla każdej osoby szczegółowego protokołu obserwacji uwzględniającego różne elementy:

- (a) arkusz pracy badanego, tj. kartkę, na której ta osoba wykonywała różnego rodzaju zapisy, rysunki w czasie rozwiązywania zadania,
- (b) głośne wypowiedzi badanego (odtworzone z notatek eksperymentatora oraz taśmy magnetofonowej),
- (c) informacje o kolejności pojawiania się poszczególnych zapisów, rysunków czy poszczególnych elementów w obrębie jednego rysunku.

Ostatecznie tak zebrany materiał stanowi podstawę szczegółowego opisu postępowania obserwowanej osoby, od momentu otrzymania przez nią tematu zadania, aż do momentu zasygnalizowania przez nią zakończenia pracy.

Na tym etapie studiowanie protokołu obserwacji każdej osoby oddzielnie pozwala uzyskać odpowiedzi na pytania:

- co pozwoliło na osiągnięcie postępu w pracy nad zadaniem,
- co utrudniało ten postęp,

- jakie elementy rozumowania (wnioskowanie empiryczne, rozumowanie intuicyjne, rozumowanie formalne itd.) można wyróżnić na drodze, którą postępowała myśl rozwiązującego zadanie.

W wyniku takiego studium powstaje - dla każdej osoby oddzielnie - „arkusz spostrzeżeń” zawierający próbę odpowiedzi na powyższe pytania.

Etap drugi można nazwać etapem analizy porównawczej. Polega on na poszukiwaniu podobieństw i różnic w rozumowaniach różnych osób w obrębie tego samego poziomu doświadczenia matematycznego oraz poszukiwaniu podobieństw i różnic w aktywnościach osób rozwiązujących zadanie znajdujących się na różnych poziomach.

Można mieć nadzieję, że powyższa analiza pozwoli zarysować pewne ogólne postawy i zachowania heurystyczne zarówno te, które umożliwiają, jak i te, które utrudniają rozwiązanie zadania.

1.5. Poziom matematyczny badanych osób

W badaniach uwzględniono cztery poziomy wiedzy i doświadczenia matematycznego reprezentowane przez:

- (1) uczniów ostatniej klasy szkoły podstawowej,
- (2) uczniów szkoły średniej,
- (3) studentów kierunku matematycznego,
- (4) matematyków - nauczycieli akademickich na kierunku matematycznym.

1.6. Dobór materiału zadaniowego

Każde z zadań, w toku rozwiązywania którego obserwowano różne osoby, dobrano tak, że spełnia następujące warunki:

- (a) jego treść jest zrozumiała i łatwa do zapamiętania już dla ucznia wyższej klasy szkoły podstawowej,
- (b) jego rozwiązanie nie wymaga zaawansowanego aparatu matematycznego (środki matematyczne pozwalające na jego rozwiązanie nie wykraczają poza zakres wiadomości szkoły podstawowej),
- (c) nie można go rozwiązać przez zastosowanie znanego schematu postępowania: wymaga ono tak od ucznia, jak i matematyka, pewnego aktu twórczego. Można więc to zadanie nazwać zadaniem - problemem w świetle niektórych klasyfikacji dydaktycznych (Krygowska, 1977) lub problemem wymagającym podejścia twórczego - w świetle innych (Kilpatrick, 1982),

(d) jest zadaniem otwartym (lub otwarto-otwartym według klasyfikacji podanej przez J. Kozieleckiego (1966)) w tym sensie, że daje możliwość wielu różnorodnych podejść, sposobów postępowania przy jego rozwiązywaniu.

W spełnieniu tego ostatniego warunku, istotnego z punktu widzenia omawianego badania, bardzo ważną rolę odegrała faza wstępna obserwacji. Przypomnijmy - polegała ona na tym, że osoba prowadząca badanie, przed przystąpieniem do właściwych obserwacji, rozwiązywała wiele zadań i dla każdego z nich analizowała własną drogę postępowania. Ta analiza pozwoliła przewidzieć, które z rozpatrywanych zadań będzie „dobre” do obserwacji (otwarte w sensie wyjaśnionym w punkcie (d)).

Powyższe warunki spełnia na przykład następujące zadanie:

Dla dowolnych odcinków a , b na płaszczyźnie znaleźć zbiór środków wszystkich odcinków XY takich, że X należy do odcinka a , Y - do odcinka b .

C z ę ś ć 2. Analiza rozwiązań wybranego zadania

2.1. Różne podejścia do zadania

Zilustrujemy omawianą w części 1 metodę analizy na przykładzie zadania podanego tam, jako egzemplifikację uwzględnianego w badaniu materiału zadaniowego. Wymienione zadanie jest niewielką modyfikacją zadania znajdującego się w jednej z książek serii „Le livre du problème” (IREM, 1973). W oryginale zakładano, że odcinki a , b są nierównoległe. Można ten problem rozwiązać na wysokim poziomie wiedzy matematycznej, ale także na poziomie nie przekraczającym zakresu wiadomości przewidzianego przez program matematyki szkoły podstawowej.

Oto rozwiązanie, jakie podano w cytowanej książce (IREM, 1973, str. 91):

Przed jednoczesnym uzmiennieniem punktów X i Y zacznijmy od ustalenia punktu X na odcinku AB , zmieniając Y na odcinku CD . Środki odcinków XY wyznaczają więc odcinek S_X , który można dokładnie określić. Następnie uwolnijmy punkt X na odcinku AB . Odcinek S_X zamiecie poszukiwany zbiór, którego ograniczenie jest wyznaczone przez boki równoległoboku.

A teraz przyjrzyjmy się, jak rozwiązywały to zadanie obserwowane osoby - przedstawiciele każdego z czterech poziomów zasygnalizowanych w Części 1.

Skład badanej grupy jest następujący:

- 11 osób z pełnym wykształceniem matematycznym,

- 19 studentów (III i IV rok matematyki, I rok fizyki),
- 11 uczniów szkoły średniej (I, II, III, IV klasa liceum ogólnokształcącego),
- 6 uczniów kończących szkołę podstawową.

Wszystkie badane osoby wyraziły zainteresowanie rozwiązywaniem zaproponowanego im zadania i zgodę na poddanie się badaniu.

Ogólnie można wyróżnić pięć podejść do tego zadania.

Pierwsze z nich to postępowanie zgodne z ideą rozwiązania znajdującego się w książce „Le livre du problème”.

Drugie podejście polega na tym, że wychodzi się od razu od tak zwanego ogólnego przypadku położenia danych odcinków (odcinki nie są ani równoległe, ani prostopadłe, nie mają punktów wspólnych, nie są tej samej długości itp.). Badanie tego położenia zaczyna się od rozważenia skrajnych przypadków położenia punktów na tych odcinkach, otrzymując od razu intuicyjną informację o kształcie poszukiwanej figury.

Trzecie podejście charakteryzuje się rozróżnianiem przypadków wzajemnego położenia danych odcinków i poszukiwaniem odpowiedzi w każdym z tych przypadków, jednak bez wyraźnej jednej metody ich badania.

Czwarte podejście określa sformułowanie od razu gotowej, nie umotywowanej merytorycznie hipotezy co do szukanej figury, która to hipoteza jest następnie weryfikowana.

Piąte podejście ma zarówno cechę trzeciego, jak i pierwszego podejścia: rozważa się przypadki wzajemnego położenia danych odcinków, ale bada się je w pewien jednolity sposób.

2.2. Przykłady rozwiązań

Podamy teraz cztery przykłady rozwiązań reprezentujących kolejno wyróżnione podejścia: od pierwszego, do czwartego. Każde z nich opiszemy przedstawiając:

- (a) arkusz pracy autora rozwiązania,
- (b) opis jego postępowania w trakcie rozwiązywania zadania,
- (c) komentarz.

2.2.1. Przykład pierwszego podejścia (Uczeń U_1 - III klasa liceum ogólnokształcącego)

Opis postępowania ucznia U_1

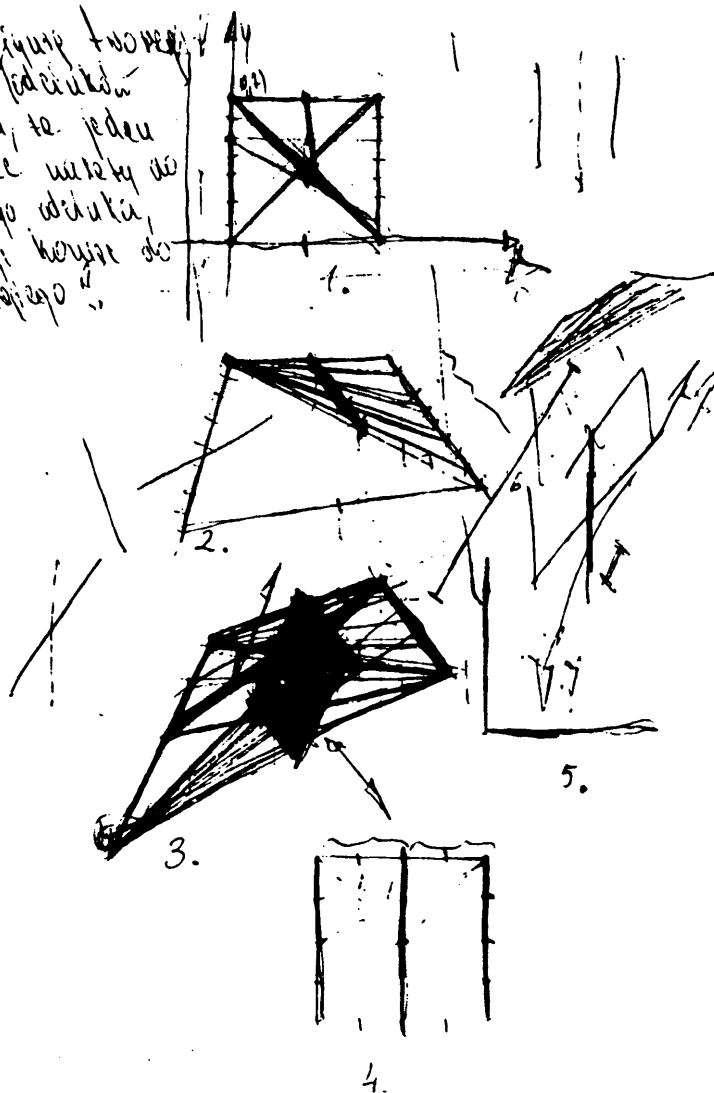
F a z a 1. Na początku U_1 mówi: „Odcinki mogą być równoległe”.

G. H.

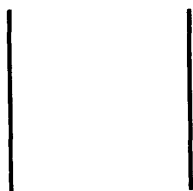
25-0A-25

X. w c

4.4. figury tworzący
 środki podziałów
 trójkątów, to jeden
 koniec należy do
 drugiego wierzchołka,
 drugi koniec do
 drugiego "



Wykonuje odpowiedni rysunek (rys. 1.a).

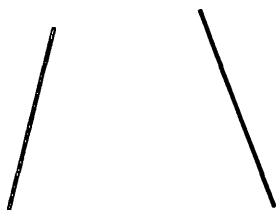


Rys. 1.a

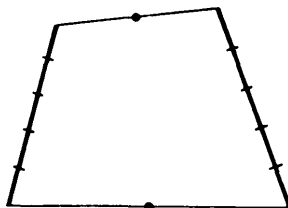
Wskazuje kilka odcinków żądanego typu, znajduje ich środki, po czym zauważa: „W sumie jest bardzo dużo możliwości. Gdybym miał wiele godzin, to mógłbym kształt tej figury w przybliżeniu określić. To chyba nie ma sensu ... Analitycznie też nie bardzo można, bo jest przecież bardzo dużo tych punktów”.

Po chwili namysłu kontynuuje: „Zastanawiam się, czy geometrycznie, czy analitycznie. Wydaje mi się, że analitycznie raczej nie ... Geometrycznie chyba”.

Rysuje teraz odcinki w innym położeniu (rys. 1.b) i mówi: „Podzielmy te odcinki na jednakową ilość części. Weźmy jeden punkt z jednego odcinka i połączmy go z punktem drugiego odcinka, znajdziemy środek tego odcinka”.



Rys. 1.b

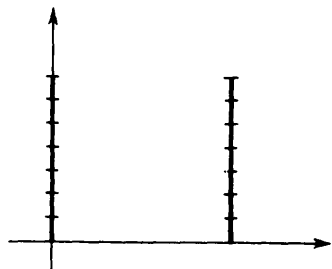


Rys. 1.c

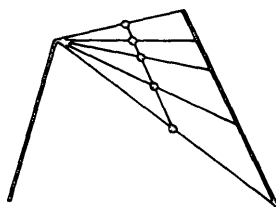
Po wykonaniu zapowiedzianych czynności dla dwu par punktów (rys. 1.c) uczeń wyraża niepewność: „Ja nie wiem, co mi tu wyjdzie - prosta czy krzywa. Trzeba byłoby mieć bardzo dużo czasu i posłużyć się linijką, żeby to w miarę dokładnie stwierdzić ... Analitycznie raczej nie ... No można by analitycznie”.

Powraca do rysunku 1.a. Mówi: „Umieściłbym te odcinki w układzie współrzędnych (rysuje ten układ). Podzieliłbym je np. na 7 części (rys. 1.d). Współrzędne punktów podziału można łatwo znaleźć, a potem obliczyć współrzędne środków odpowiednich odcinków”.

Po chwili dodaje: „Zaraz - ale przecież, jakby były inaczej położone, to mogłoby wyjść coś innego. Tego wszystkiego byłoby bardzo dużo. Nieskończenie wiele punktów i nieskończenie wiele położen odcinków”.



Rys. 1.d

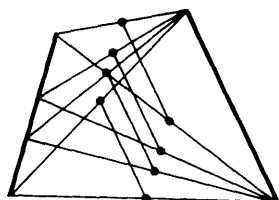


Rys. 1.e

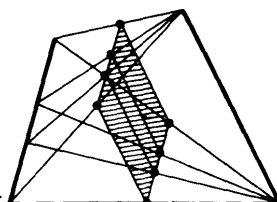
Faza 2. U_1 powraca do przypadku odcinków nierównoległych. Obserwuje jakiś czas rysunek, a następnie proponuje: „Mogę ustalić punkt na pierwszym odcinku, np. koniec, i połączyć go z punktami drugiego odcinka (rys. 1.e). Środki takich odcinków będą tworzyć chyba odcinek (rysuje go) ... No tak, ale przecież ja mam inne zadanie. Nie mam mieć ustalonego punktu na jednym odcinku”. Potem mówi: „Acha. Mogę wybrać inny punkt na tym pierwszym odcinku. Połączę go z punktami drugiego odcinka. Też powstanie nam odcinek”.

Wykonuje nowy rysunek, ilustrując to, co zapowiedział (rys. 1.f). Kontynuuje: teraz będziemy wybierać inne punkty na pierwszym odcinku. Zrobimy to, co poprzednio. Za każdym razem będziemy dostawać odcinek (rys. 1.f). Tych odcinków będzie tyle, ile punktów na odcinku AB. Ale jaką figurę utworzą te odcinki?

Po chwili namysłu stwierdza: „Powstające odcinki są wszystkie równoległe do drugiego z danych odcinków, a więc są także równoległe do siebie. Wszystkie



Rys. 1.f



Rys. 1.g

mają tę samą długość równą połowie długości drugiego z danych odcinków. Ale co z końcami tych odcinków?" Przygląda się ostatnio wykonanemu rysunkowi i w pewnym momencie z wyraźnym zadowoleniem komunikuje: „Przecież te końce odcinków, które otrzymaliśmy (wskazuje na górne końce), to środki odcinków, które łączą koniec drugiego odcinka danego z punktami pierwszego danego odcinka. Tak samo będzie z dolnymi końcami otrzymanych odcinków. Szukana figura to równoległobok” (zarysowuje go - rys. 1.g). Następnie uczeń rozpatruje jeszcze przypadek odcinków równoległych, podając poprawną odpowiedź.

Komentarz

1. Zwróćmy uwagę na interesującą postawę ucznia w pierwszym etapie. U_1 zaczyna pracę nad zadaniem od dyskusji środków, które mógłby zastosować w badaniu danej sytuacji. Stawia sobie pytanie, jak zabrać się do tego zadania: stosować geometrię czy rachunek? Odpowiedzi szuka przez wskazywanie argumentów za i przeciw użyciu geometrii syntetycznej lub analitycznej. Opisuje zabiegi, które można by podjąć w celu rozwiązania zadania, ale, zanim zacznie je realizować, ocenia ich skuteczność. Odrzuca aparat geometrii analitycznej, ponieważ nie widzi możliwości objęcia za jego pomocą nieskończonej ilości przypadków. Wysiłek ucznia jest właśnie świadomie skierowany na opanowanie nieskończoności. Ostatecznie praca kończy się sukcesem: uczeń dostrzega możliwość zorganizowania badania za pomocą aparatu geometrii syntetycznej tak, by objąć wszystkie przypadki położenia punktów na danych odcinkach. W celu pełnego rozwiązania zadania, uczeń U_1 powinien przedstawić uzasadnienie twierdzenia I:

Zbiór środków odcinków, których jeden koniec należy do danego odcinka AB , a drugi jest ustalonym punktem P płaszczyzny, jest odcinkiem łączącym środki odcinków AP i BP .

Najprawdopodobniej uczeń nie uświadamia sobie powodu, dla którego to twierdzenie zachodzi; używa bowiem sformułowania: „to chyba będzie odcinek”.

2. Podobne postępowanie znajdujemy w pracach trzech studentów oraz matematyka. Ich rozumowanie różni się od rozumowania ucznia U_1 tym, że

(1) pomysł ustalenia punktu na jednym odcinku pojawia się u nich od razu,
 (2) matematyk i dwu studentów uzasadnia twierdzenie I, czwarta osoba zapowiada, że udowodniłaby je za pomocą geometrii analitycznej, ale ostatecznie tego nie realizuje.

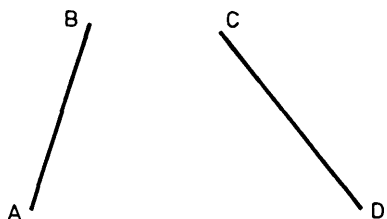
Tę samą ideę rozwiązania spotykamy również w pracach kilku matematyków. Nie zaliczamy ich jednak do omawianej teraz grupy, ponieważ ta idea pojawiła się u

nich albo dopiero w analizie rozwiązania ex post, albo w kontekście rozróżniania przypadków wzajemnego położenia danych odcinków.

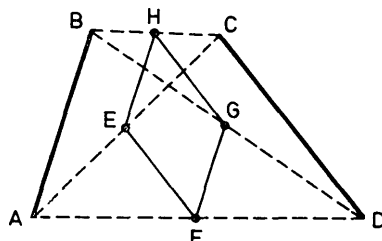
2.2.2. Przykład drugiego podejścia (Uczeń U_2 - IV klasa liceum ogólnokształcącego)

Opis postępowania ucznia U_2

Faza 1. U_2 rysuje odcinki AB i CD (rys. 2.a). Po chwili mówi: „Wezmę skrajne przypadki punktów, żeby się zorientować, czy to jest prosta, czy jakaś inna figura”. Łączy końce danych odcinków, oznaczając ich środki E, F, G, H. Rysując czworokąt EFGH (rys. 2.b) mówi: „Powstają odcinki”. Odnosnie

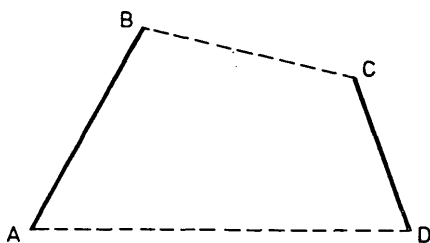


Rys. 2.a



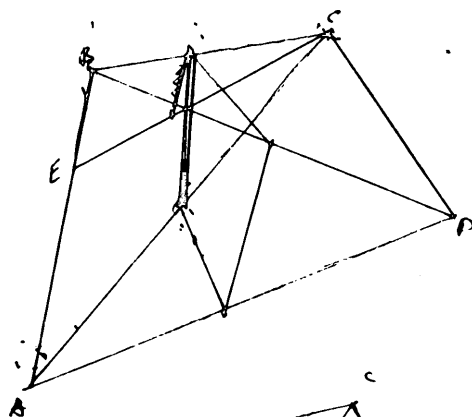
Rys. 2.b

do odcinka EH zauważa: „Wygląda na to, że ten odcinek jest obrazem odcinka AB w jakiejś jednokładności o środku D”. Natychmiast po tym stwierdzeniu, stawia sobie pytanie: „Czy to w ogóle jest trapez?” (wskazuje na czworokąt ABCD na rys. 2.b, który to czworokąt przypomina trapez). Odpowiada: „Nie, to nie jest trapez. Przecież jak wezmę inne odcinki wyjściowe, to otrzymam niekoniecznie trapez”. Wykonuje rysunek ilustrujący ostatnią wypowiedź (rys. 2.c).

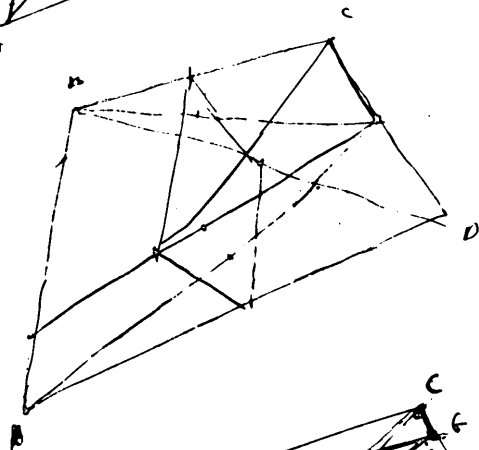


Rys. 2.c

6)

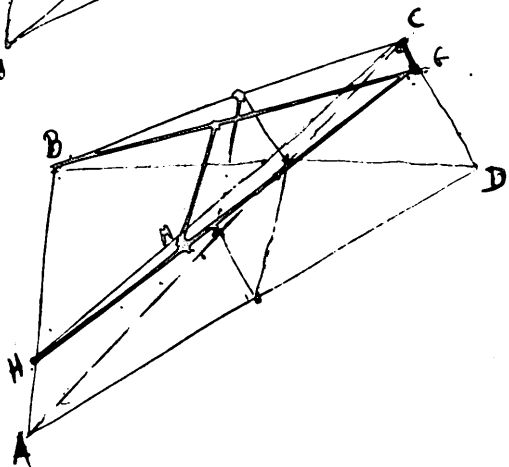


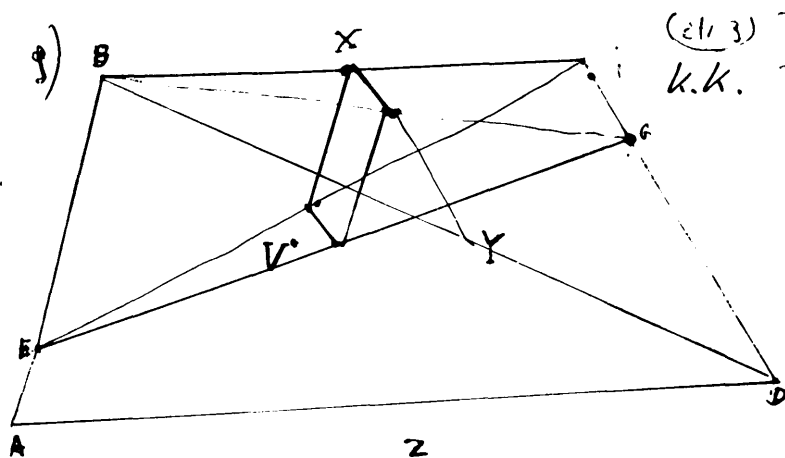
7)



8)

8)





$$VZ \parallel CD$$

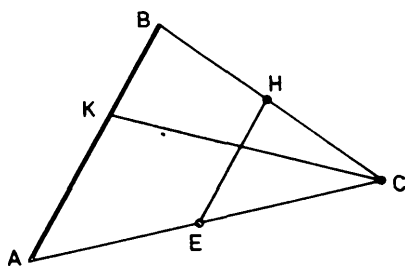
$$XY \parallel CD$$

$$VX \parallel BA$$

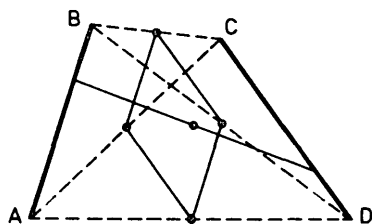
$$YZ \parallel BA$$

Faza 2. Następnie U_2 formułuje pytanie: „Czy jeśli ustalimy punkt C na odcinku CD, a drugi będzie się zmieniał na odcinku AB, to środki odcinków o takich końcach będą znajdować się na prostej, czy nie?” Rysuje fragment konfiguracji, wyodrębniony z rys. 2.b, nanosząc odcinek CK, gdzie K jest punktem leżącym między punktami A i B (rys. 2.d).

Konstatuje, że odcinek EH łączy środki dwu boków trójkąta ABC. Mówi: „Kojarzy mi się to z jakimś twierdzeniem o odcinku środkowym w trójkącie. Wydaje mi się, ale nie jestem pewny, że odcinek EH jest równoległy do odcinka AB”. Eksperymentator potwierdza to przypuszcze-

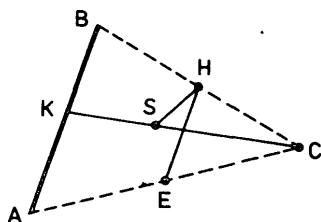


Rys. 2.d



Rys. 2.e

nie. Dalej U_2 mówi: „Przeczuwam, że to będzie figura o tym brzegu. Powodem jest chyba to, że rozpatrzyłem przypadki skrajnego położenia punktów na danych odcinkach. Jeśli weźmiemy sobie inne punkty (wybiera punkt leżący między punktami A i B oraz punkt leżący między punktami C i D: rys. 2.e) i znajdziemy środek odcinka o takich końcach (wskazuje go na rysunku), to otrzymamy punkt z wyznaczonej już figury. Wydaje mi się, że w każdej innej sytuacji tak będzie”. Po chwili U_2 kontynuuje: „Ale ciągle jeszcze nie wiem czy przy ustalonym punkcie C i zmieniającym się punkcie odcinka AB środki odcinków będą należeć do prostej”.



Rys. 2.f

Powraca teraz do rys. 2.d. Wskazuje środek S odcinka KC jako punkt poza odcinkiem EH, łączy ten punkt z punktem H (rys. 2.f). Prowadzi następujące rozumowanie: „Odcinek EH jest równoległy do odcinka AB. Podobnie odcinek HS - jako odcinek łączący środki boków trójkąta KBC - jest równoległy do boku KB, czyli również do AB. Odcinki EH oraz HS są równoległe do tego samego odcinka AB.

sunku mówi: „Teraz mogę odcinki KB i CL potraktować jako dane. Trzeba połączyć skrajne punkty. Środek odcinka BC już mamy”. Następnie U_2 prowadzi odcinki KC i BL (rys. 2.h). Zauważa, że środek odcinka KC jest punktem wspólnym tego odcinka z odcinkiem EH. Podobnie - środek odcinka BL należy do odcinka HG. „Tworzymy teraz nowy równoległobok - mówi U_2 . Ze środka odcinka KC poprowadzimy odcinek równoległy do odcinka CL, a ze środka odcinka BL - odcinek równoległy do KB. Te dwa odcinki przetną się. Ten punkt przecięcia będzie na pewno środkiem odcinka KL. Boki „małego” równoległoboku są zawarte w bokach większego, więc i czwarty wierzchołek równoległoboku małego musi należeć do wnętrza równoległoboku większego... W ten sposób pokazaliśmy, że środek wyznaczonego na początku odcinka KL należy do równoległoboku”.

Po przeprowadzeniu powyższego rozumowania U_2 formułuje odpowiedź: Szukaną figurą jest równoległobok, którego wierzchołkami są środki odcinków łączących końce dwóch danych odcinków.

Komentarz

1. Można powiedzieć, że pierwsza czynność, jaką wykonał U_2 , zdecydowała o sukcesie w rozwiązaniu zadania. Nie wiemy tylko, czy pomysł rozwiązania „skrajnych” punktów był przypadkowym czy też świadomie stosowanym zabiegiem. W pierwszej fazie pracy nad zadaniem uczeń U_2 odkrył poszukiwany zbiór. To, co działo się w następnych dwu fazach, było poszukiwaniem formalnego uzasadnienia tego, o czym U_2 był intuicyjnie przekonany. Pierwszą fazę można nazwać analizą globalną sytuacji. W następnych dwu fazach mamy do czynienia z lokalną analizą rozważanej sytuacji, polegającą na obserwacji poszczególnych elementów konfiguracji rysunkowej i próbach opisanie związków między tymi elementami.

Protokół obserwacji wyraźnie wskazuje na to, że rozumowanie ucznia nie jest ciągiem logicznych inferencji, a jest raczej ciągiem pytań, hipotez i różnych prób ich weryfikacji. Zauważmy, ile razy uczeń używa zwrotów: „chyba”, „przeczuwam”, „wygląda na to, że” itp. Wydaje się, że różne elementy rysunku geometrycznego zwracają uwagę ucznia niemal jednocześnie - stąd pewne myśli ledwie wyrażone są zarzucane, bo już inny element rysunku atakuje wzrok, a następnie związaną z nim myśl.

Mimo tych trudności, praca ucznia U_2 nie jest chaotyczna. Jest zorganizowana i kierowana przez dwa poniższe pytania, które zostały wyraźnie postawione i na które odpowiedź stanowi istotę rozwiązania zadania:

(a) czy brzeg wyznaczonego czworokąta zawiera się w poszukiwanej figurze? (faza 2).

(b) czy wewnątrz tego czworokąta zawiera się w poszukiwanej figurze (faza 3).

Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że w zasadzie U_2 nie odpowiedział bezpośrednio na pytanie (b). Wykazał inkluzję odwrotną, tzn. to, że poszukiwany zbiór punktów zawiera się w wyznaczonym równoległoboku. Do pełnego rozwiązania zadania powinien jeszcze wykazać, że dla dowolnego punktu X skonstruowanego równoległoboku istnieje odcinek rozważanego typu, którego X jest środkiem.

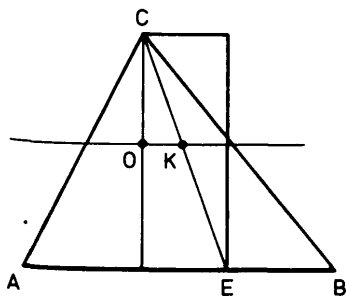
Cztery inne osoby - matematyk, studentka, uczennica II klasy liceum i uczeń ósmej klasy szkoły podstawowej - zaczęły rozwiązywać zadanie tak samo jak uczeń U_2 . Różnice związane są z uzasadnieniem, że skonstruowany czworokąt jest poszukiwaną figurą. I tak:

Matematyk - ujął od razu rzecz globalnie. Znajdując środki E i F odcinków AC i BC (AB , CD - odcinki dane) natychmiast zauważył, że odcinek EF jest obrazem odcinka AB w jednokładności o środku C i skali $\frac{1}{2}$. To już znaczy dla niego, że dowolny punkt X odcinka EF jest środkiem pewnego odcinka z rozpatrywanego zbioru odcinków;

studentka - wierzy, że ten fakt zachodzi, nie zadając sobie pytania, z jakiego powodu;

uczennica - uzasadniła ten fakt, powołując się na twierdzenie Talesa;

uczeń - przedstawił uzasadnienie, które ilustruje rys. 2.i. Prosta KO - oś symetrii uzupełnionego prostokąta. Prosta KO przecina przekątną CE prostokąta w jej środku.



Rys. 2.i

W tej grupie wszyscy badani zaczynają rozwiązanie zadania od tzw. ogólnego przypadku. Co to znaczy, że jest to przypadek ogólny? Opiera się to na negacji: odcinki nie są prostopadłe, nie są równoległe, nie mają punktów wspólnych, nie mają tej samej długości itp. Oczywiście tak zwany przypadek ogólny jest przypadkiem szczególnym; tym niemniej pozwala na uwolnienie się od pewnych szczególnych własności rozważanej sytuacji i szybkie sformułowanie hipotezy.

Zwróćmy uwagę, że w omówionych rozwiązaniach (podejście drugie) brak jest rozważenia szczególnych przypadków położenia odcinków danych, np. odcinków równoległych.

2.2.3. Przykład trzeciego podejścia

(Uczeń U_3 - IV klasa liceum ogólnokształcącego)Opis postępowania ucznia U_3

Na arkuszu pracy ucznia U_3 uderza duża liczba rysunków. Składają się na to dwie przyczyny. Po pierwsze - osoba U_3 rozważa wiele przypadków wzajemnego położenia danych w zadaniu odcinków. Po drugie - do tego samego przypadku powraca uczeń w różnych fazach rozwiązywania zadania. Na ogół każdemu takiemu powrotowi towarzyszy wykonanie nowego rysunku rozpatrywanej już sytuacji, motywowane przez ucznia przejrzystością samego rysunku. Uczeń U_3 rozpatruje osiem przypadków wzajemnego położenia danych odcinków:

- (1) odcinki pokrywające się,
- (2) odcinki równoległe mające jeden punkt wspólny,
- (3) odcinki prostopadłe o wspólnym końcu,
- (4) odcinki prostopadłe mające wspólny punkt, który jest środkiem pierwszego odcinka i jednocześnie końcem drugiego,
- (5) odcinki przecinające się, nieprostopadłe,
- (6) odcinki równoległe nie zawierające się w tej samej prostej,
- (7) odcinki prostopadłe nie mające punktów wspólnych,
- (8) odcinki w tzw. przypadku ogólnym.

Dla przypadków odcinków równoległych uczeń podał następujące odpowiedzi, których już nie zmieniał (AB, CD - odcinki dane);

- (1) - odcinek AB bez końców,
- (2) - odcinek AD bez końców,
- (6) - odcinek łączący środki odcinków BC i AD.

W pozostałych przypadkach było inaczej: uzyskawszy jakąś odpowiedź, uczeń U_3 zajmował się następnym przypadkiem, by znów powrócić do poprzednio rozpatrywanego i zmienić podaną uprzednio odpowiedź. Odpowiedzi w przypadkach (4), (5) były zależne bezpośrednio od odpowiedzi formułowanych dla przypadku odcinków prostopadłych o wspólnym końcu; nie będziemy ich więc omawiać. Przedstawimy natomiast dokładniej sposób, w jaki uczeń U_3 badał przypadki (3), (7) oraz (8).

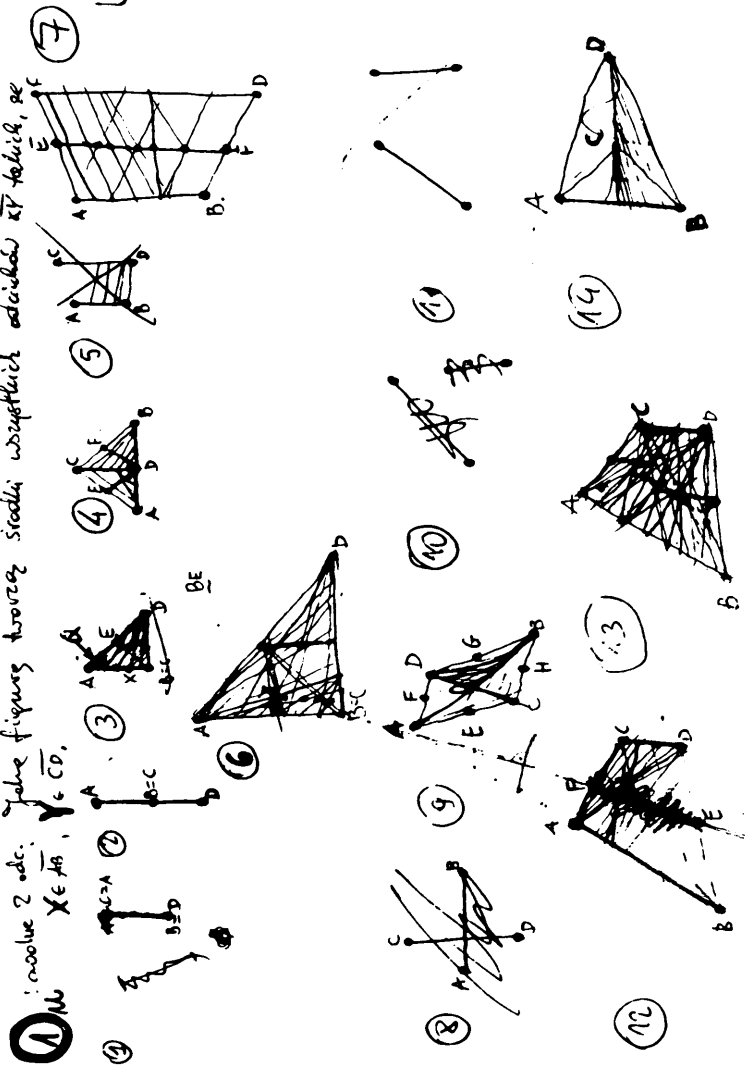
Odcinki prostopadłe o wspólnym końcu

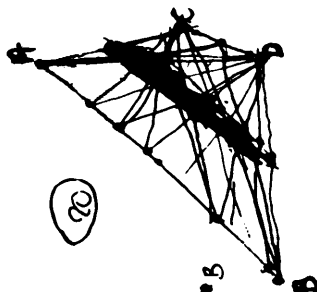
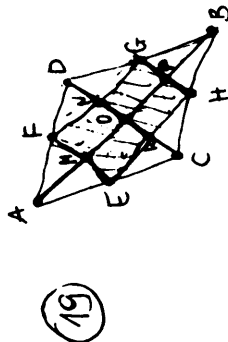
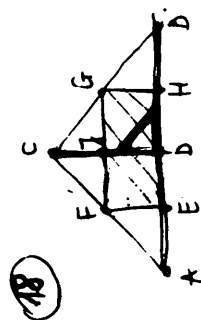
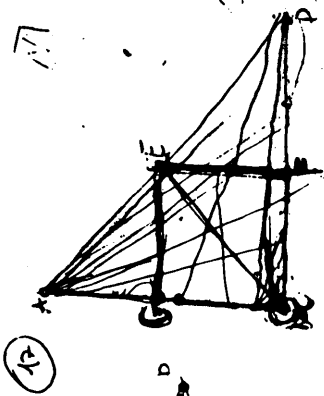
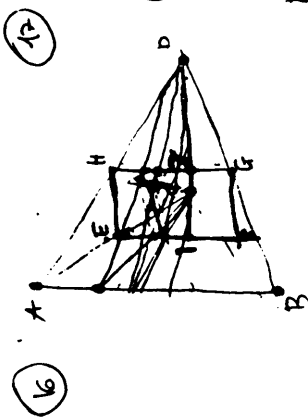
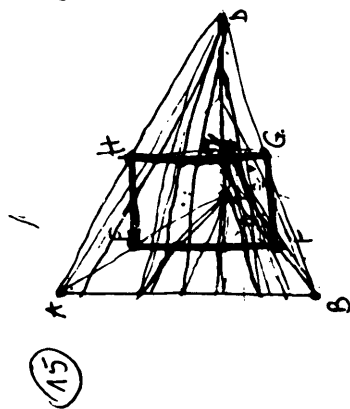
Faza 1. U_3 zaczyna badanie tego przypadku od połączenia punktów A, D i zaznaczenia środka E tego odcinka. Następnie rysuje kilka odcinków równoległych do odcinka AD. Twierdzi, że środki tych odcinków tworzą odcinek BE, który jest szukanim zbiorem punktów (rys. 3.a).

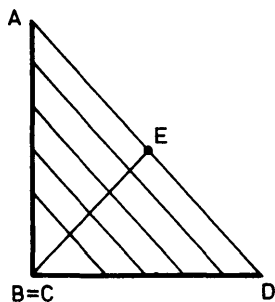
1. noeue 2 odc.
 $X \in \overline{AB}$, $Y \in \overline{CD}$.

Yahve figurę tworzą siedmiu wierzchołków i 17 krawędzi, po

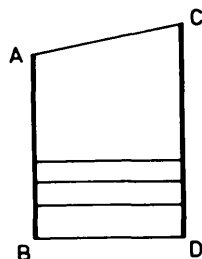
85-04-17







Rys. 3.a

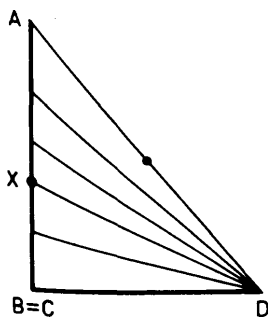


Rys. 3.b

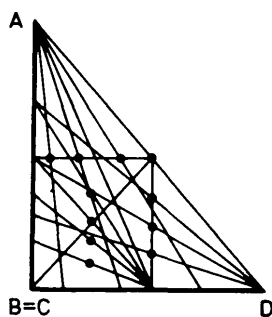
Następnie przechodzi do przypadku (4), formułując odpowiedź, która jest konsekwencją odpowiedzi uzyskanej w przypadku (3). Następnie U_3 rysuje odcinki równoległe. Po naniesieniu elementów widocznych na rys. 3.b stwierdza nagle: „Ale to jeszcze nie wszystko”.

Faza 2. U_3 powraca do odcinków prostopadłych o wspólnym końcu. Nanosi na poprzedni rysunek (rys. 3.a) nowy element; odcinek XD (rys. 3.c) i inne odcinki tego typu. Dla przejrzystości wykonuje nowy rysunek rozpatrywanej sytuacji (rys. 3.c). Nanosi odcinek łączący punkt B ze środkiem odcinka AD. Potem rysuje kolejno trzy pęki⁽¹⁾ odcinków o wierzchołkach: D, A, W (W - leży między punktami C, D), zaznaczając środki tych odcinków.

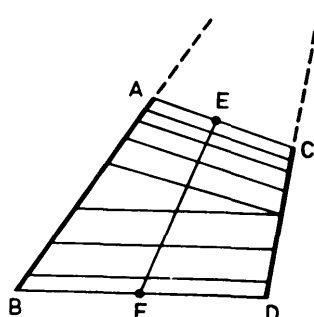
Po narysowaniu środków odcinków o końcu A (na rysunku ucznia nie „ułożyły” się one współliniowo), U_3 mówi: „Jakoś krzywo - wynika to z niedokładności



Rys. 3.c



Rys. 3.d



Rys. 3.e

(1) Przez pęk odcinków o wierzchołku W będziemy rozumieć zbiór odcinków, których jednym wierzchołkiem jest W, a drugim dowolny punkt jednego z danych w zadaniu dwóch odcinków.

rysunku", po czym rysuje „gruby” odcinek łączący te punkty. Obserwuje chwilę wykonany rysunek (rys. 3.d) i stwierdza: „To będzie fragment płaszczyzny, bo tych odcinków będzie nieskończenie wiele ... To będzie trójkąt ABD, ale bez boku AB i CD, no i bez boku AD, z wyjątkiem jego środka”.

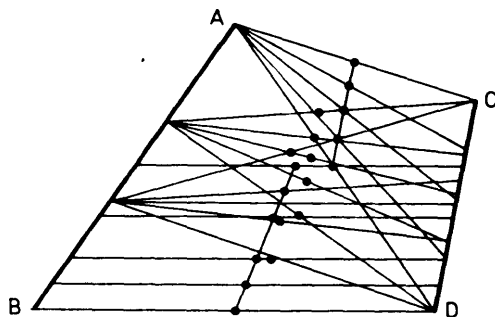
U_3 komunikuje dalej, że stosownie do odpowiedzi, którą podał dla odcinków prostopadłych, zmieni się odpowiedź w przypadku (4) oraz (5). Formułuje te odpowiedzi. Potem wraca do przypadku (6) (odcinki równoległe), gdzie podaje poprawną odpowiedź.

Następnie uczeń U_3 rysuje odcinki nie mające wspólnych punktów (nierównoległe, nieprostopadłe - rys. 3.e).

Odcinki nierównoległe, nieprostopadłe, bez punktów wspólnych

Po zaznaczeniu środka E odcinka BD rysuje kilka odcinków równoległych do BD. „To będzie jakiś fragment prostej - mówi. Znajduje środek F odcinka AC i nanosi kilka odcinków równoległych do AC. Wypowiada myśl: „Przyszła mi na myśl dwusieczna kąta”. Znajduje punkt wspólny prostej AB i prostej DC; szkicuje dwusieczną kąta między tymi prostymi (na rysunku przechodzi ona przez punkty F, E). Mówi: „To jest ten fragment dwusiecznej. To będzie część rozwiązania. Zastanawiam się, czy to będzie wszystko ... Nie, to jest źle z tą dwusieczną - te odcinki⁽²⁾ musiałyby być równej długości, żeby to była dwusieczna”.

... Po chwili komunikuje, że zrobi nowy rysunek. Na nowym rysunku (rys. 3.f) zaczyna od znalezienia środków kilku odcinków równoległych do BD i połączenia ich odcinkiem.



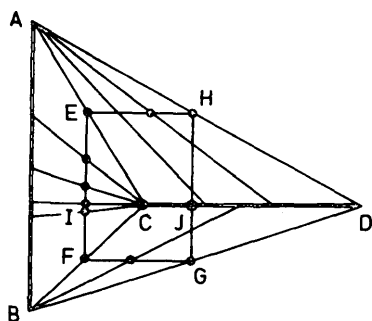
Rys. 3.f

(2) Chodzi o odcinki OA i OC, gdzie O jest punktem przecięcia prostych AB i CD (rys. 3.e).

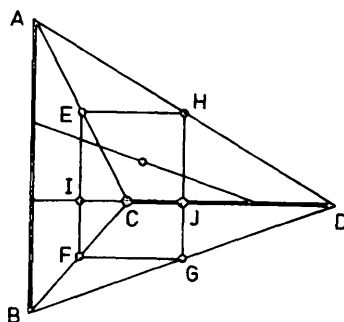
Potem rysuje kilka pęków odcinków o wierzchołkach należących do odcinka AB. Dla pęku odcinków o wierzchołku A - rysuje odcinek łączący środki tych odcinków, w pozostałych przypadkach - zaznacza tylko środki odcinków. Nanosi także kilka odcinków nie należących do wymienionych pęków. Podaje odpowiedź: „To będzie chyba czworokąt ABCD, bez boków, ale ze środkami boków AC i BD”.

Faza 3. U_3 przechodzi teraz do badania przypadku:

Odcinki prostopadłe, nieprzecinające się (rys. 3.g)



Rys. 3.g

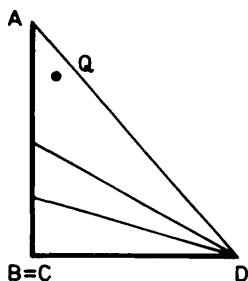


Rys. 3.h

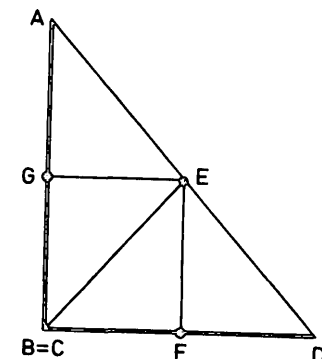
U_3 rysuje pęk odcinków o wierzchołku C, zaznaczając ich środki i łącząc je odcinkiem. Stwierdza: „Na pewno będzie to odcinek EF”. Na tej samej zasadzie, jak odcinek EF, otrzymuje odcinki FG i EH. Komentuje: „Śmieszne rzeczy wychodzą ... chyba będzie też odcinek HG bez punktu J”. Nanosi jeszcze odcinek łączący dwa punkty, z których żaden nie jest końcem wyjściowych odcinków AB i CD, zaznacza jego środek. Mówi: „Chyba jeszcze punkty wewnątrz tego czworokąta. Ale czy wszystkie? Nie wiem, muszę zobaczyć. Narysuję na nowo”.

Na nowym rysunku (rys. 3.h) U_3 wykonuje czynności analogiczne do wykonywanych na poprzednim rysunku. Ponadto wybiera punkt wewnątrz czworokąta EFGH, po czym rysuje odcinek, którego ten punkt jest środkiem. Ten zabieg wykonuje dla jeszcze jednego punktu. Formułuje odpowiedź w następującej postaci: „Wydaje mi się, że to będzie czworokąt EFGH bez odcinka IJ”. Potem powraca do przypadku odcinków prostopadłych o wspólnym końcu. U_3 przygląda się rysunkowi (rys. 3.i). Mówi: „Chyba tam za dużo wzięłem”. Wskazuje punkt Q (rys. 3.i), zadając sobie pytanie: „Jakiego odcinka on jest środkiem?”. Wykonuje nowy ry-

sunek (rys. 3.j). Rysuje odcinek BE (E - środek odcinka AD), twierdząc, że „... to już na pewno jest w szukanej figurze”. Nanosi pęk odcinków o wierzchołku D i łączy ich środki odcinkiem EF (rys. 3.j). Na tej samej



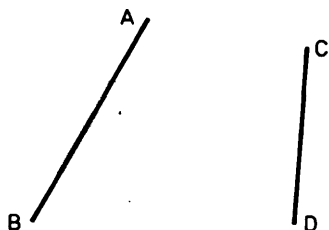
Rys. 3.i



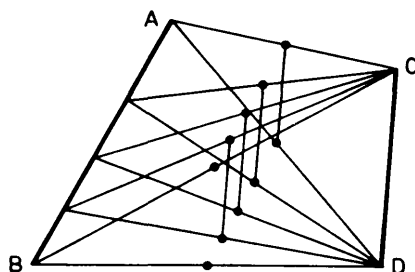
Rys. 3.j

drodze otrzymuje odcinek GE. Po chwili obserwacji rysunku wyraża zdziwienie: „Dlaczego powiedziałem tam bez boków? Przecież to nieprawda, bo odcinki AB i CD też będą dobre”. Kontynuuje: „Poza tym ... rozwiązaniem - tak! będzie czworokąt GBEF bez punktu B” (rys. 3.j).

Następnie zapowiada powrót do przypadków (4), (5) i zmienia podane tam uprzednio odpowiedzi. U₃ po raz drugi zajmuje się przypadkiem z rys. 3.k.



Rys. 3.k



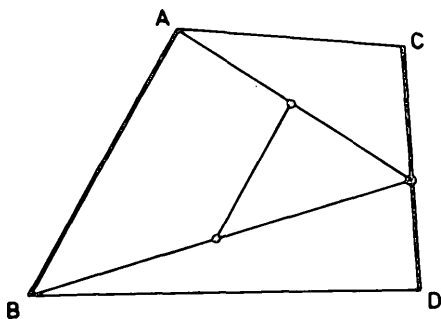
Rys. 3.l

łączy punkt A z punktami C i D. Znajduje środki tych dwu odcinków. łączy te punkty odcinkiem. Analogiczne czynności wykonuje dla kilku innych punktów leżących między punktami A i B. Dla punktu B - znajduje środki odcinków BC i BD, ale nie rysuje odcinka, który te środki łączy (rys. 3.l).

Mówi: „Nie mogę się połąpać ... Wychodzi tu dużo takich odcinków (wskazuje na odcinek łączący środki odcinków AC i AD) ... Ale co to za figura? ... „Trójkąt czy co? (delikatnie obrysowuje kształt tego trójkąta). Nie za bardzo wiem, co to będzie.

Na pewno odcinek łączący środki odcinków AC i BD (rysuje ten odcinek) i jeszcze sporo takich odcinków (wskazuje odcinek łączący środki odcinków AB i AD) ... Będzie ich nieskończenie wiele ... Tyle, ile punktów na odcinku AB". Po tym modyfikuje odpowiedzi dla przypadków (4), (5).

Znów powraca do dowolnego położenia odcinków. Przyglądając się przez chwilę rysunkowi (rys. 3.f), mówi: „To mnie niepokoi. Jakby było nieskończone. Co by to było?" ... Jaką ja tu dałem odpowiedź?" - pyta eksperymentatora. Zapytany przypomina: będzie tyle takich odcinków (wskazuje na odcinek łączący środki odcinków AC i AD), ile punktów na odcinku AB. U_3 nanosi ostatni już element na rysunek rozważanej sytuacji: łączy punkty A i B z wybranym punktem odcinka CD, wskazuje ich środki i łączy je odcinkiem (rys. 3.m). Potem wskazuje ostatnio otrzymany odcinek i mówi - w uzupełnieniu przypominanej przez eksperymentatora odpowiedzi „... I tyle, ile punktów na odcinku CD". Nieco speszony kończy pracę nad zadaniem słowami: „To chyba będzie wszystko. Nic więcej nie widzę".



Rys. 3.m

Komentarz

1. Uczeń U_3 zakończył pracę nad zadaniem ze świadomością, że podał odpowiedzi w każdym z rozpatrywanych przez siebie przypadków, z wyjątkiem „dowolnego” położenia odcinków. Pracę nad badaniem tego ostatniego przypadku zakończył z wyraźnym odczuciem, że uzyskana odpowiedź nie jest pełna, bo nie podaje nazwy poszukiwanej figury.

Oczywiście nie wszystkie odpowiedzi podane przez ucznia jako ostatnie są poprawne. I tak:

- w przypadku (2) - odpowiedź jest błędna,
- w przypadkach (1), (3), (4), (5) - odpowiedzi w zasadzie można uznać za poprawne (nie został uwzględniony środek odcinka „zerowego”),
- w przypadku (6) - odpowiedź jest poprawna,
- w przypadku (7) - odpowiedź błędna (niepotrzebnie wyłączono odcinek IJ - por. odpowiedź na str.149),
- w przypadku (8) - brak ostatecznej odpowiedzi, choć uczeń jest jej bliższy.

Podkreśliśmy, że końcowe wyniki w każdym z trzech opisywanych dokładnie przypadków kształtowały się poprzez kilkakrotną zmianę poglądu ucznia na to, jaką figurę stanowi poszukiwany zbiór punktów. I choć ostatecznie uczeń nie podał pełnego poprawnego rozwiązania, to znacznie się do niego przybliżył.

Spróbujmy odpowiedzieć na pytanie, co spowodowało, że uczeń ostatecznie rozwiązania nie osiągnął?

Po pierwsze - musimy stwierdzić, że uczeń U_3 , poprzez swoją decyzję: „rozpatrzę różne położenia odcinków”, od razu znalazł się w o wiele trudniejszej sytuacji niż uczeń U_2 (przykład podejścia drugiego). Ten ostatni skupił się tylko na jednym - „ogólnym” - przypadku położenia odcinków danych, a po drugie - na początku zwrócił uwagę tylko na „skrajne” punkty, i już w zasadzie miał gotowy kształt poszukiwanej figury. Uczeń U_3 przeciwnie - nie dość, że musiał objąć dużą liczbę przypadków, to jeszcze w obrębie każdego z nich rozważyć nieskończenie wiele par punktów. I właśnie z objęciem tej nieskończoności miał pewne trudności. Na początku - dla odcinków prostopadłych o wspólnym końcu - uczeń uwzględnił tylko pewien nieskończony, ale jednak właściwy podzbiór zbioru rozpatrywanych odcinków, po czym szybko przeszedł do następnego przypadku. Dopiero położenie odcinków równoległych rozłącznych zmusiło go niejako do rozpatrzenia dwu różnych kierunków odcinków. To z kolei doprowadziło go do refleksji, że w poprzednim przypadku nie uwzględnił wszystkich punktów na obu danych odcinkach. Wrócił więc do tego przypadku i rozpatrzył rodzinę odcinków o ustalonym końcu. Ten moment przyniósł istotny zwrot w rozumowaniu ucznia. I w zasadzie wydawałoby się, że w tym momencie problem nieskończoności jest już przez ucznia U_3 opanowany, ponieważ ma on „w ręku” metodę badania. Tak się jednak nie stało. Przypomnijmy - druga hipoteza, którą uczeń wysunął jako odpowiedź dla odcinków prostopadłych o wspólnym końcu, brzmi: „trójkąt ABD (str.147, rys. 3.d), a nie tak, jak powinno być: „prostokąt GBEF” (str.150, rys. 3.j). Ta błędna odpowiedź, jak również inne

w następnych przypadkach, a w szczególności niemożność dokładnego opisanie poszukiwanej figury dla przypadku (8), sugerują drugą (obok trudności w opanowaniu nieskończoności) przyczynę błędzenia U_3 . Jest nią mianowicie to, że uczeń nie dokonuje lokalnej analizy poszczególnych sytuacji, w odróżnieniu np. od postępowania U_2 . Można to wyjaśnić w następujący sposób. Uczeń wie, że jako zbiory środków rodzin odcinków o ustalonym końcu dostaje się odcinki, ale nie zadaje sobie pytań, dlaczego w ogóle dostajemy odcinki, w jakim związku pozostają te odcinki z danymi odcinkami, w jakim - między sobą. Znamienne jest, że ani razu uczeń U_3 nie użył terminu „równoległobok”, opisując poszukiwany zbiór punktów. W ogóle w rozumowaniu ucznia mało jest wyraźnych pytań: dlaczego?, na które odpowiada się w sposób formalny, natomiast dużo jest empirii. Na przykład to, że wewnątrz wskazanego czworokąta zawiera się w poszukiwanym zbiorze punktów, uczeń uzasadnia tak: dla danego punktu z wnętrza wybiera, a nie konstruuje środkami matematycznymi, odcinek rozważanego typu, dla którego ten dany punkt jest środkiem.

Mimo różnych trudności, uczeń U_3 znacznie przybliżył się do rozwiązania zadania. Zwróćmy uwagę na dwa ważne elementy, które wpłynęły na postęp w rozwiązywaniu zadania. Pierwszy z nich ma charakter psychologiczny. Uczeń był wyraźnie zainteresowany rozwiązaniem zadania i dlatego błędzenie nie zniechęciło go do wcześniejszego przerwania pracy - kontynuował ją, a kolejne jej etapy przyniosły właśnie postęp. Drugi element ma charakter strategiczny. Doświadczenie, jakie uczeń zdobył w trakcie badania danego przypadku (chodzi o metodę badania), wykorzystywał dwukierunkowo: raz w celu weryfikacji odpowiedzi w przypadku już wcześniej rozpatrywanym, drugi - w badaniu przypadków jeszcze raz rozpatrywanych.

2. Na rozważanie przypadków, z cechami podejścia ucznia U_3 , zdecydowało się jeszcze 17 innych osób:

- 5 uczniów szkoły podstawowej,
- 6 uczniów szkoły średniej,
- 11 studentów,
- 5 matematyków.

Wiele z tych osób napotykało, choćby tylko na pewnym etapie pracy, podobne jak U_3 trudności. Oczywiście, w ich rozumowaniu wystąpiły także różnice. Dotyczą one między innymi:

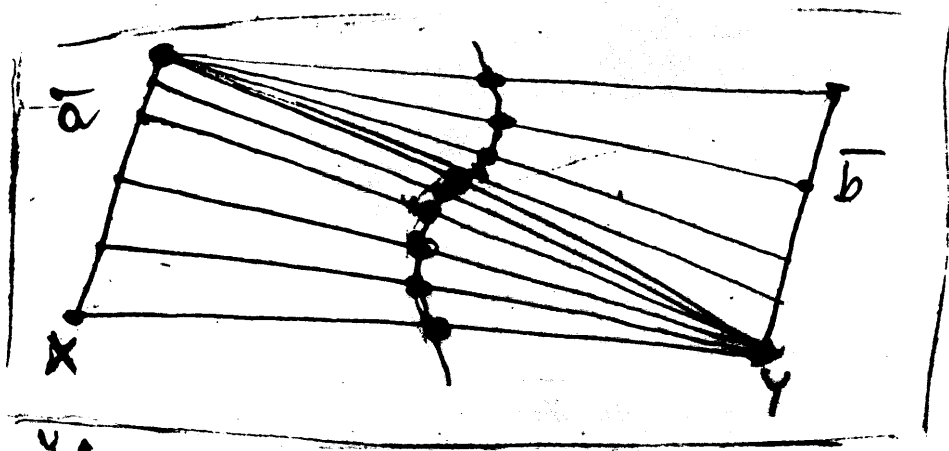
- (1) liczby i różnorodności rozpatrywanych przypadków,
- (2) metody badania tych przypadków,
- (3) hipotez odnośnie poszukiwanej figury,
- (4) sposobu wykorzystania szczególnego przypadku.

Nie będziemy tu analizować szczegółowo wszystkich różnic. Zilustrujemy przykładami (3) i (4).

Oto przykłady stawianych hipotez (kopie autentycznych rysunków):

Odcinki równoległe

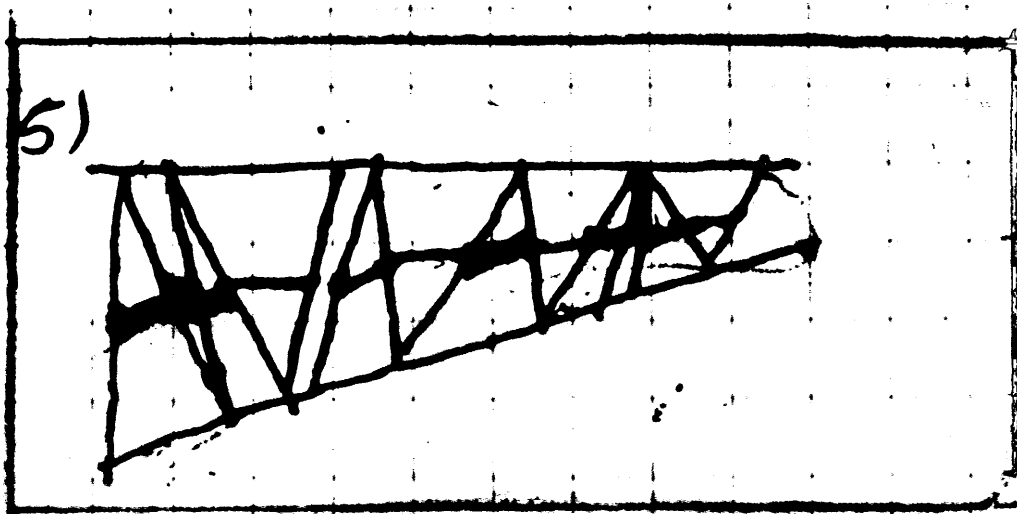
Student:



Suma dwóch fragmentów elipsy

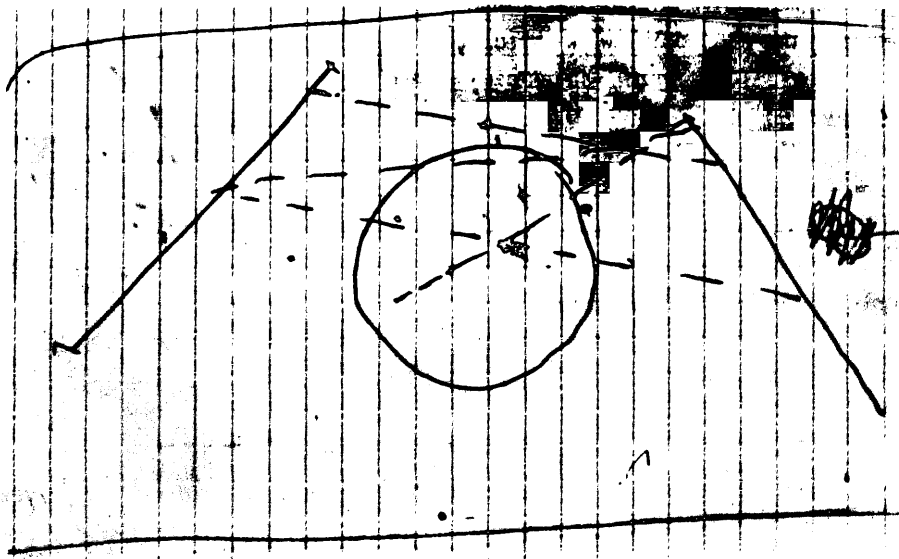
Odcinki „dowolne”

Uczeń kl. VIII:



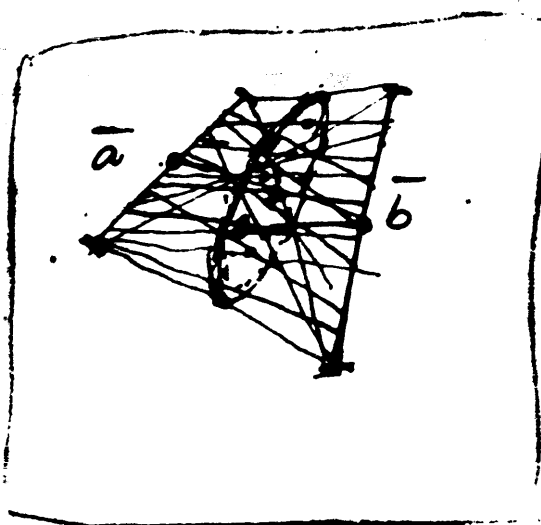
Łamana, której odcinki są równoległe raz do jednego odcinka danego,
raz - do drugiego

Uczeń kl. III liceum



Koło

Studentka:



Obszar ograniczony elipsą

Przykład wykorzystania szczególnego przypadku

Dwu z matematyków omawianej teraz grupy wykorzystało szczególny przypadek położenia danych odcinków w bardzo interesujący sposób. Oto ten sposób:

(a) rozpatrują przypadek odcinków prostopadłych rozłącznych, uzyskując w wyniku bardzo prostego rachunku analitycznego odpowiedź: „prostokąt”,

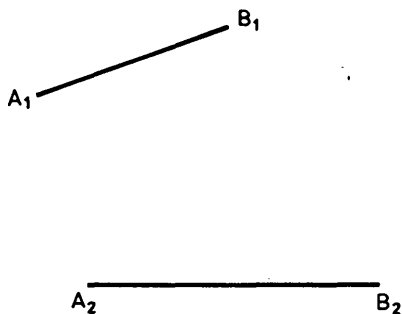
(b) widzą, że przypadek „dowolnego” położenia można uzyskać z przypadku szczególnego przez pewne przekształcenie;

(c) twierdzą, że poszukiwana figura w przypadku ogólnym jest obrazem rezultatu otrzymanego w przypadku szczególnym w tym przekształceniu: jest to równoległobok jako obraz prostokąta w takim przekształceniu.

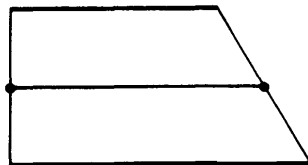
2.2.4. Przykład czwartego podejścia (Matematyk M)

Opis postępowania osoby M

Faza 1. Osoba M rysuje odcinki A_1B_1 oraz A_2B_2 jako dane w przypadku ogólnym (rys. 4.a). Na początku stwierdza: „Chcę to zobaczyć w jakimś przypadku dość ogólnym, bo w szczególnym położeniu, np. odcinki równoległe, to wydaje mi się, że wiem. To po prostu wiem z doświadczenia”. Po tych słowach wykonuje rysunek odcinków równoległych i wskazuje poszukiwaną figurę (rys. 4.b), stwierdzając, że taka odpowiedź wynika z własności rzutu równoległego.



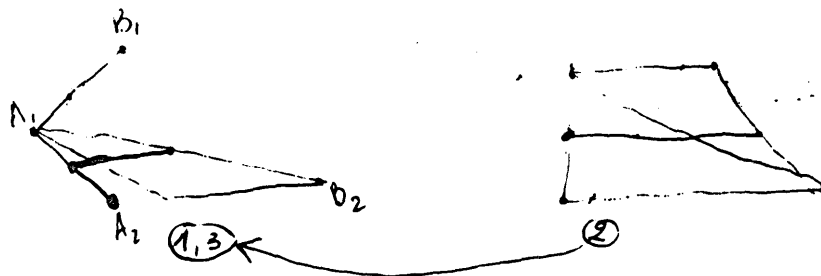
Rys. 4.a



Rys. 4.b

M powraca teraz do wyjściowego rysunku. „Ustale sobie A_1 ” – mówi, rysując pęk odcinków o wierzchołku A_1 . „Zbiorem środków takich odcinków będzie odcinek (rys. 4.c). Wydaje mi się, że to będzie odcinek, niezależnie od położenia danych odcinków”. Wykonuje nowy rysunek (rys. 4.d). Zaznacza na nim środek 0

85-07-30



$$\vec{OX} = \vec{A_1A} + \vec{A_2B}$$

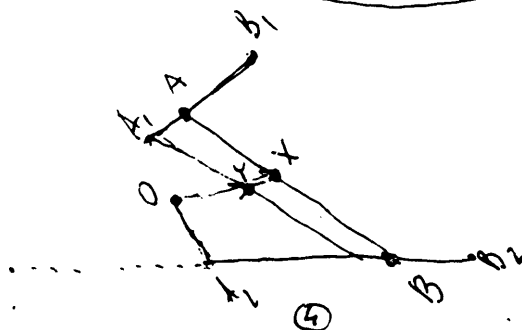
$$\{x: \vec{OX} = \vec{A_1A} + \vec{A_2B}\} \quad A \in \vec{A_1B_1}, B \in \vec{A_2B_2}$$

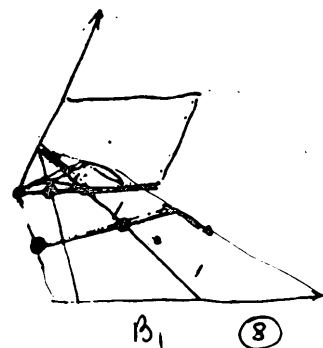
$$\vec{A_1A} = \alpha \vec{A_1B_1} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$\vec{A_2B} = \beta \vec{A_2B_2} \quad 0 \leq \beta \leq 1$$

$$\vec{OX} = \alpha \vec{A_1B_1} + \beta \vec{A_2B_2}$$

$$\alpha = 0, \alpha = 1$$



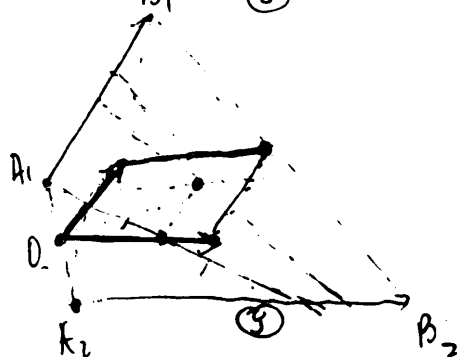


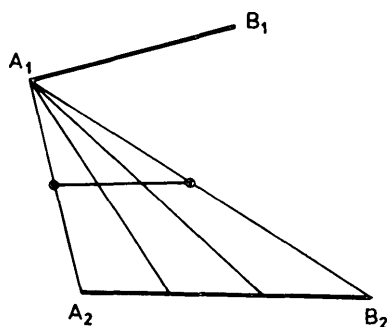
$$\vec{OX} = \alpha \vec{A_1B_1} + \beta \vec{A_2B_2}$$

$$\alpha: \frac{1}{2} \vec{A_2B_2} \quad \frac{1}{2} \vec{A_1B_1}$$

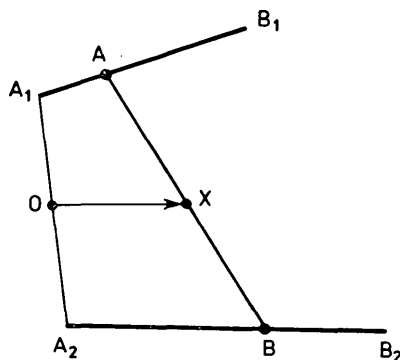
$$\vec{OX} = \frac{\alpha}{2} \vec{A_2B_2} + \frac{\beta}{2} \vec{A_1B_1}$$

$$\alpha, \beta \in [0, 1]$$





Rys. 4.c



Rys. 4.d

odcinka A_1A_2 . Wybiera punkty A i B odpowiednio należące do odcinków A_1B_1 i A_2B_2 . Zaznacza środek X odcinka AB . Mówi: „Przypomina mi się takie zadanie o wektorach”, po czym zapisuje równość:

$$(1) \quad \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{A_2B}, \quad (3)$$

a następnie przedstawia wektor $\overrightarrow{OX}$ jako kombinację liniową wektorów $\overrightarrow{A_1B_1}$ oraz $\overrightarrow{A_2B_2}$:

$$(2) \quad \overrightarrow{OX} = \alpha \cdot \overrightarrow{A_1B_1} + \beta \cdot \overrightarrow{A_2B_2}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

Po chwili M zadaje sobie pytanie: „Co z tej kombinacji liniowej wyciągnąć o punkcie X ?” I zaraz proponuje: „Może zaczepić wektory w punkcie przecięcia prostych A_1B_1 oraz A_2B_2 ?”.

Próbuje zrobić to, co zapowiedział, ale zaraz przerywa, stwierdzając: „Coś tu nie gra, bo przecież każdy punkt na płaszczyźnie jest kombinacją liniową wektorów niezależnych. Jestem przekonany, że będzie to odcinek, ale nie umiem tego uzasadnić”. Obserwując zapis (2), M mówi: „Przyjrzyjmy się szczególnym wartościom α i β , np. $\alpha = 0$, $\alpha = 1$. Dla $\alpha = 0$ mamy szukany punkt tu (rysuje odcinek o jednym końcu w punkcie A_1 , a drugim – na odcinku A_2B_2 ; oznacza środek tego odcinka przez Y – rys. 4.e). Dla $\alpha = 1$ koniec rozpatrywanego odcinka będzie punktem B_1 . Co będzie dla wartości poś-

(3) Równość (1) zawiera błąd. Powinno być:

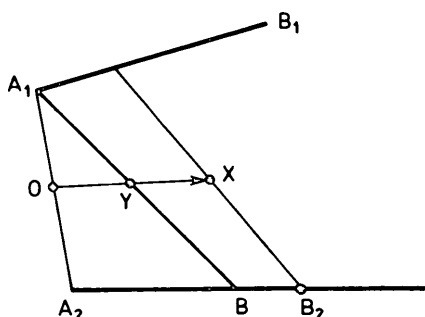
$$\overrightarrow{OX} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{A_2B}).$$

rednich? Dla punktu X (rys. 4.e) mamy, powiedzmy, tak: $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{2}{3}$,
czyli

$$(3) \quad \vec{OX} = \frac{1}{3} \vec{A_1B_1} + \frac{2}{3} \vec{A_2B_2}.$$

Dla punktu Y (rys. 4.e) jest:

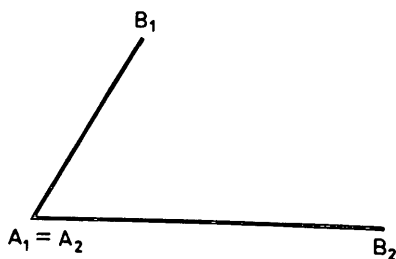
$$(4) \quad \vec{OY} = \beta \cdot \vec{A_2B_2}.$$



Rys. 4.e

M przygląda się wykonanym zapisom, zestawia równości (4) oraz (2) i stwierdza: „Niestety! Wektory $\vec{OX}$ i $\vec{OY}$ nie są równoległe. To zmienia postać rzeczy, i to dość radykalnie. Wygląda na to, że będą różne sytuacje w różnych położeniach odcinków. W sytuacji odcinków równoległych - wiem, w ogólniejszej - nie wiem”.

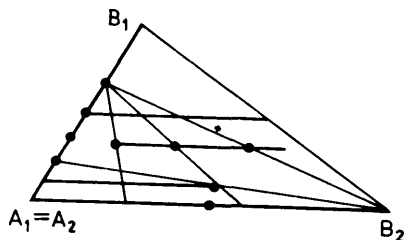
Faza 2. Po chwili M mówi: „Weźmy taką sytuację: odcinki mające wspólny koniec, nierównoległe (rys. 4.f). Jeśli ustalimy koniec odcinka w punkcie A_1 , a drugi będzie się zmieniał na odcinku A_2B_2 , to środki dadzą odcinek. Jego końcami są punkty: A_1 oraz środek odcinka A_2B_2 . Tak będzie z innymi punktami odcinka A_1B_1 - tzn. wybieramy punkt na odcinku A_1B_1 i łączymy go z dowolnym punktem drugiego odcinka; otrzymujemy odcinek. Jeśli B_1 będzie ustalony, też dostajemy odcinek równo-



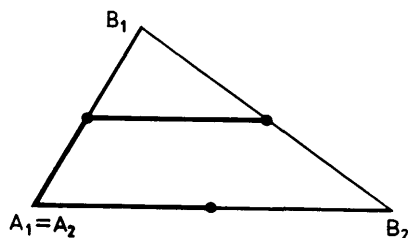
Rys. 4.f

legły do odcinka A_2B_2 , a jego długość jest połową długości A_2B_2 ."

M ilustruje na rysunku to, co opisał (rys. 4.g), po czym stwierdza: „To będą odcinki ... Ale wygląda na to, że zmienia się to w sposób ciągły, czyli - nie odcinki ... Jak to będzie ograniczone?“. W odpowiedzi na to pytanie M „pogrubia” na rysunku (rys. 4.h) trzy odcinki. Za-



Rys. 4.g

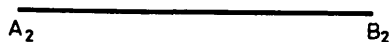
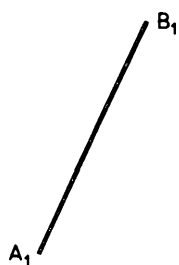


Rys. 4.h

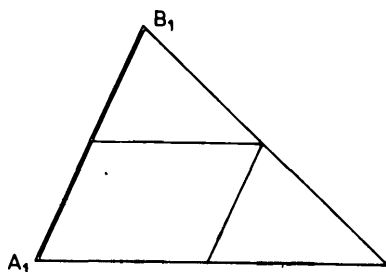
daje sobie pytanie: „Jak wygląda ten czwarty brzeg?” i szybko odpowiada: „Aha. To będzie równoległe do jednego z otrzymanych boków. Ten odcinek powstanie, jeśli ustalimy punkt B_2 ” (dorysowuje czwarty bok czworokąta). Formułuje odpowiedź: „Ta figura będzie zawarta w równoległoboku”.

Następnie M odpowiada poprawnie na pytanie: Czy każdy punkt równoległoboku jest środkiem jakiegoś z rozważanych odcinków? Potem M podaje odpowiedź: „W przypadku odcinków nierównoległych o wspólnym końcu szukaną figurą jest równoległobok.

Faza 3. M przechodzi teraz do badania ogólnego przypadku położenia odcinków (rys. 4.i). „W takiej sytuacji - mówi - przesuniemy odcinek A_2B_2 o wektor A_2A_1 (wykonuje to). Wtedy mamy już sytuację taką, jak poprzednio. Trzeba będzie otrzymane środki przesunąć o wektor $\frac{1}{2} \overrightarrow{A_1A_2}$ (rys. 4.j). Obserwuje chwilę rysunek, próbując znaleźć obrazy kilku punktów równoległoboku we wskazanej translacji. Mówi: „Mam kłopoty z ustaleniem brzegu tego nowego równoległoboku. Powrócę do rachunku wektorowego. Zajmę się konsekwentnie badaniem wektorów. Jeśli w warunku (2) przyjmę $\alpha = 0$, to $A = A_1$ i wtedy otrzymam odcinek równoległy do odcinka A_2B_2 . Zaraz - dla $\alpha = 0$ wektor $\overrightarrow{OX}$ mógłby być równy wektorowi $\overrightarrow{A_2B_2}$... Chyba ten rachunek wektorowy trzeba byłoby odrzucić”. Po chwili M stwierdza: „Ale widzę to już i bez rachunku wektorowego”, po czym rozpatruje „skrajne” punkty i rozwiązuje zadanie do końca poprawnie.



Rys. 4.i



Rys. 4.j

Komentarz

1. Osoba M zaczyna swoją pracę nad zadaniem od podjęcia decyzji o rozważeniu przypadku ogólnego położenia odcinków. Dość szybko formułuje hipotezę: niezależnie od położenia danych odcinków poszukiwaną figurą będzie odcinek. I choć to dzieje się bezpośrednio po uświadomieniu sobie przez M odpowiedzi dla przypadku odcinków równoległych, to oczywiście nie jest to przeniesienie rezultatu z przypadku szczególnego. Słowa, które sformułowanie tej hipotezy poprzedzają: „przekonany jestem, że”, wypowiedziane w tym kontekście przez matematyka sugerują, iż źródłem tego przekonania nie jest jedynie rezultat otrzymany w szczególnym przypadku. Istotnie – w drugim etapie obserwacji (już po rozwiązaniu zadania) M poinformował eksperymentatora, że niemal od momentu zapoznania się z treścią zadania towarzyszyło mu silne odczucie, że poszukiwana figura powinna mieć „liniowy” charakter. Wyjaśnił to w następujący sposób:

(1) z doświadczenia wiadomo, że w podobnych do rozważanego zadaniach otrzymuje się krzywe,

(2) dane „twory” (odcinki) są liniowe – w tym sensie, że są podzbiorami prostych, i to ograniczonymi; operacja poszukiwania środków odcinków powinna prowadzić także do „tworu” liniowego,

(3) zestawienie: „krzywa” oraz „ograniczony podzbiór prostej” sugeruje „odcinek” jako odpowiedź do zadania,

(4) przypadek odcinków równoległych potwierdza taką hipotezę.

Tak więc na pojawienie się hipotezy złożyło się tu kilka elementów jednocześnie: wcześniejsze doświadczenie, wynik uzyskany w szczególnym przypadku

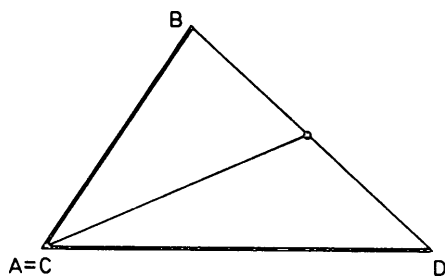
oraz pewien rodzaj analogii (w tym przypadku - fałszywej). Zwróćmy jeszcze uwagę, że na przykład uczeń U_3 (trzecie podejście) tworzył hipotezy na innej drodze niż powyżej opisana. Tam przypuszczenia były formułowane w dużym stopniu w wyniku manipulacji empirycznych. Zauważmy też, w jaki sposób doszło do odrzucenia hipotezy przez osobę M. Tylko ona jedna z grupy wszystkich badanych wykorzystywała rachunek wektorowy do weryfikacji hipotezy. Zabiegiem, który doprowadził do odrzucenia fałszywej hipotezy, było rozważenie szczególnych wartości zmiennych występujących w wektorowym opisie poszukiwanej figury. Odnotujmy to jako zabieg heurystyczny pozytywny do rozwiązywania zadania (oczywiście, niekoniecznie związany z rachunkiem wektorowym).

W drugiej i trzeciej fazie podejście osoby M do zadania jest podobne do opisanego w przykładzie 2 („skrajne” punkty). Podkreślmy też, że w rozumowaniu M dostrzegamy, chociaż ostatecznie nie zrealizowane, ideę występującą w podejściu pierwszym oraz ideę wykorzystania transformacji geometrycznej przy przejściu od rezultatu w przypadku szczególnym do rezultatu ogólnego.

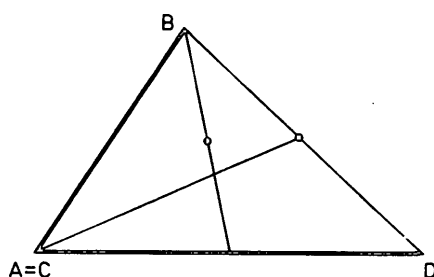
2. Do omawianej teraz grupy zaliczyć można rozumowanie trzech innych osób: ucznia III klasy liceum oraz dwóch matematyków. Każda z tych osób stawia hipotezę: poszukiwana figura jest odcinkiem. Różnice w ich postępowaniu dotyczą między innymi sposobu obalenia fałszywej hipotezy oraz wykorzystania szczególnego przypadku.

I tak na przykład:

Matematyk M_1 rozważa przypadek odcinków nierównoległych i nieprostopadłych o wspólnym końcu. „Jeśli poszukiwaną figurą jest odcinek, o czym jestem przekonany, twierdzi M_1 , to w tym przypadku jest nim środkowa trójkąta ABD wychodząca z punktu A (rys. 4.k). Jest to zbiór środków odcinków rozważanego typu równoległych do odcinka BD. Po chwili M_1 odkrywa: „Nie - nie będzie to odcinek, bo jeśli weźmiemy drugą środkową jako odcinek rozważanego typu, to jego środek nie będzie leżał na poprzedniej środkowej; środkowe trójkąta przecinają się przecież w stosunku 1:2 (rys. 4.1).

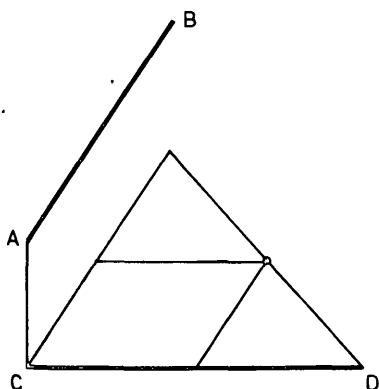


Rys. 4.k

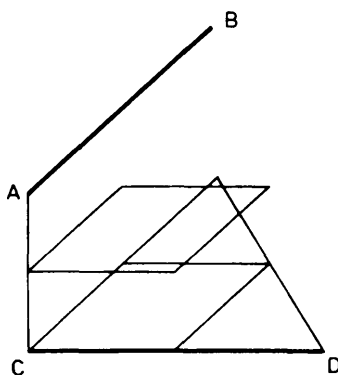


Rys. 4.1

W następnej fazie M_1 zajmuje się systematycznym badaniem przypadku, który rozważał, weryfikując postawioną na początku hipotezę. Odkrywa rozwiązanie, a następnie przypadek ogólny sprowadza do już zbadanego w następujący sposób: odcinek AB przesuwają równolegle tak, by koniec A znalazł się w punkcie C (rys. 4.m), uzyskuje w tej sytuacji równoległobok i przesuwają go równolegle tak, by wierzchołek C znalazł się w środku odcinka AC (rys. 4.n).



Rys. 4.m



Rys. 4.n

W postępowaniu matematyka M_1 występują dwa pozytywne zabiegi heurystyczne. Jeden z nich to zwrócenie uwagi na jakiś szczególny, charakterystyczny element rozpatrywanego zbioru (środkowa trójkąta) i wykorzystanie znanej własności tego elementu. Dzięki temu właśnie została odrzucona fałszywa hipoteza. Drugi zabieg - to sprowadzenie sytuacji do już rozpatrywanej przez zastosowanie transformacji geometrycznej.

2.2.5. Pięć osób: matematyk i czterech studentów, których postępowanie zaliczamy do podejścia piątego, rozważają szczególne przypadki, ale stosują tę samą metodę badania, mianowicie metodę charakteryzującą podejście pierwsze. Nie będziemy więc przedstawiać przykładu podejścia piątego, ponieważ zostało ono już opisane pośrednio.

2.3. Opis wyróżnionych podejść do zadania zakończymy zestawieniem wskazującym liczbę osób wybierających poszczególne podejścia, z uwzględnieniem poziomów doświadczenia matematycznego (Tabela 1).

Tabela 1

Podejścia do zadania	Uczniowie szkoły podstawowej	Uczniowie szkoły średniej	Studenci	Matematycy
pierwsze	-	1	3	1
drugie	1	2	1	1
trzecie	5	7	11	5
czwarte	-	1	-	3
piąte	-	-	4	1

2.4. Różne sposoby wykorzystania szczególnego przypadku

Opisanych powyżej podejść nie należy rozumieć jako logicznego podziału sposobów rozwiązywania zadania. Wyróżniając te podejścia chcieliśmy zwrócić uwagę na charakterystyczne różnice związane z podjęciem - w początkowym etapie pracy - decyzji: starać się przewidzieć co może być poszukiwaną figurą, rozpatrywać szczególny przypadek, czy też zająć się badaniem ogólnego przypadku.

Na postępowanie badanych osób możemy popatrzeć jeszcze z innego punktu widzenia. Różne osoby, czasem niezależnie od wybranego podejścia do zadania, rozpatrują szczególny przypadek (podejście trzecie, czwarte, piąte). Można postawić pytanie: W jaki sposób te szczególne przypadki są wykorzystywane?

Analiza wyłoniła cztery takie sposoby.

1. Matematyk M_1 na przykład wykorzystał szczególny przypadek do weryfikacji postawionej na początku ogólnej hipotezy (opis na str. 164); spowodowało to odrzucenie hipotezy.

2. Kilka innych osób wykorzystało szczególny przypadek do samego sformułowania hipotezy, a więc uogólnienia rezultatu otrzymanego w przypadku szczególnym (w przypadku odcinków równoległych - „odcinek”, w położeniu dowolnym - „odcinek”).

3. Kilka osób wykorzystało metodę badania odkrytą w przypadku szczególnym do badania innych przypadków. Charakterystyczne jest dla tego zadania, że wiele badanych osób odkryło metodę badania (ustalenie punktu na jednym odcinku) rozważając odcinki prostopadłe.

4. Ostatni z wyłoniionych sposobów polegał na przejściu od rezultatu w szczególnym przypadku do rezultatu ogólnego przez zastosowanie transformacji geometrycznej.

Wystąpiło to u matematyka M_1 i dwu innych osób, których postępowanie opisano na str. 158.

Sposoby 1, 2 i 3 stosowano na różnych poziomach doświadczenia matematycznego, natomiast sposób 4 wykorzystywali tylko matematycy.

2.5. Uwagi końcowe

W przedstawionej analizie nie daliśmy odpowiedzi na wiele pytań wymienionych w Części 1. Zagadnienia sformułowane w tych pytaniach będą dyskutowane w kontekście postaw wobec wielu innych zadań, w następnych etapach badania.

W tym artykule - w oparciu o przykład jednego zadania - podjęliśmy próbę odpowiedzi na pytanie: Co pozwalało na osiągnięcie postępu w pracy nad zadaniem, a co ten postęp utrudniało? Ograniczoność analizowanego materiału nie pozwala jeszcze na sformułowanie ogólnych wniosków odnośnie do procesu rozwiązywania problemów, ani ich odniesień dydaktycznych. Skłania jednak do kilku uwag.

1. Analiza ujawniła różnorodność postaw i zachowań wobec problemu matematycznego. To bogactwo sposobów postępowania - w odniesieniu do analizowanego zadania - przejawia się między innymi:

- (a) w różnych podejściach do zadania, opisanych w punkcie 2.2,
- (b) w wykorzystaniu do rozwiązania zadania różnych środków matematycznych: aparatu geometrii syntetycznej, rachunku analitycznego, rachunku wektorowego; sam aparat geometrii syntetycznej był jeszcze różnie wykorzystany - w różny sposób uzasadniano pomocnicze twierdzenie I (str. 135),
- (c) w różnych sposobach wykorzystania szczególnego przypadku (str. 156),
- (d) w stawianiu różnych hipotez odnośnie do poszukiwanej figury (str. 154-155).

Na tę różnorodność postaw wpłynęły dwa ważne czynniki. Jednym z nich, na co już wcześniej zwróciliśmy uwagę, było zainteresowanie badanych osób samym zadaniem. Wyrażało się ono wolą jego rozwiązania - mimo różnych trudności napotykanych na obranej drodze, badani, w przeważającej większości, nie rezygnowali szybko z prób rozwiązania zadania. Wiele z tych osób wyrażało nawet bezpośrednio opinię o problemie, przed którym ich postawiono, uznając go za ciekawy. Oto przykładowe wypowiedzi:

- „Dziwne zadanie. Na początku sprawa jest prosta i jasna. A potem się okazuje, że takie proste nie jest, ale jest ciekawe” (uczeń III klasy liceum; ocena z matematyki: dobry).

- „Długie to zadanie, ale chciałbym jeszcze trochę popracować” (uczeń I klasy liceum; ocena z matematyki: dostateczny).

- „Nie wiem jeszcze, jak wykazać, że ten czworokąt obejmuje wszystkie środki odcinków, ale teraz to już tego nie zostawię” (uczennica II klasy liceum; ocena z matematyki: dobry).

- „Zadanie mnie trochę zdezorientowało. Jest takie nietypowe. Zawsze się czegoś dowodziło, a tu nie wiem, jak poprowadzić rozumowanie ... Pasjonujące! - jak ta figura wygląda?” (uczeń III klasy liceum; ocena z matematyki: dostateczny).

- „Piękne zadanie - ciekawe i nie wymaga wiadomości z matematyki, poza twierdzeniem Talesa” (matematyk; zainteresowanie naukowe: równania różniczkowe).

Nietypowość zadania, na którą zwrócił uwagę w swojej wypowiedzi jeden z uczniów, wpływa na atrakcyjność zadania, jest czynnikiem motywującym jego rozwiązywanie. Zainteresowanie zadaniem jest ważnym czynnikiem powodzenia jednostki w pracy nad jego rozwiązaniem. Jednocześnie taki dobór zadania, by badana osoba była nim zainteresowana, uznajemy za istotny czynnik powodzenia w dziedzinie badań nad procesem rozwiązywania problemów matematycznych.

Drugą przyczynę różnorodności dróg poszukiwania rozwiązania analizowanego zadania upatrujemy w tym, że jest to zadanie geometryczne.

„Geometria jest nadzwyczajnym mikroświatem, w którym uczeń może zostać włączony w tworzenie rzetelnej, prawdziwej matematyki. Jest miejscem badania i odkrycia, uogólnienia, dla rozumowania zarówno indukcyjnego, jak i dedukcyjnego typu. Ogólnie - geometria wspiera rodzaj procesów rozumowania typowych dla matematycznego myślenia w jego najlepszym sensie: użycie matematycznej argumentacji dla sprawdzenia przypuszczenia, udoskonalenia go i w końcu wykazania, że jest ono poprawne” (Schoenfeld, 1982a, str. 168).

Jakkolwiek stwierdzenia zawarte w cytowanej wypowiedzi dotyczą geometrii w sensie globalnym, to można je odnieść także do pojedynczego zadania z tej dziedziny. W poszukiwaniu rozwiązania omawianego zadania było miejsce właśnie na rozumowanie intuicyjne, odkrycie (poszukiwany zbiór punktów), stawianie hipotez, analizowanie przykładów dla odrzucenia bądź dla potwierdzenia hipotezy i wreszcie - na rozumowanie formalne.

2. Analiza postaw badanych osób ukazuje pewien element wspólny, występujący na różnych poziomach doświadczenia matematycznego. Jest nim błędzenie na drodze poszukiwania rozwiązania zadania otwartego. To błędzenie może być chwilowe, krótsze lub dłuższe, ale występuje na różnych poziomach; na wyższych poziomach - także, choć błądzi się tu w innych rejestrach.

Czytelnikowi mogłoby się wydawać, że szczegółowe opisy pracy nad zadaniem, podane w punkcie 2.2, są zbędne. Przedstawiliśmy je celowo, by zwrócić uwagę na ogromną ilość zwrotów: „wydaje mi się”, „przeczuwam”, „nie jestem pewien”, „chyba”, „nie – tak nie będzie” itp. Częste wypowiedzianie tych zwrotów, tak przez ucznia, jak i matematyka, oraz charakter towarzyszących im czynności wskazują na to, że rozumowanie w czasie poszukiwania rozwiązania zadania problemowego nie jest ciągiem logicznych inferencji. Jest raczej ciągiem hipotez, pytań i odpowiedzi, które uzyskuje się na różnych drogach – empirycznej, intuicyjnej i przez rozumowanie formalne. Na taki charakter procesu rozwiązywania problemu, choć w sposób pośredni, zwraca uwagę I. Lakatos (1976), w swojej interesującej książce „Proof and refutations”. Prezentuje tam matematykę w ogóle jako proces dialektyczny, którego etapy wyznaczają: sformułowanie wstępnego przypuszczenia, znalezienie dowodu, znalezienie kontrprzykładu, rewizja dowodu i sformułowanie nowego twierdzenia (etapy według Wolfsona, 1981).

3. Analiza wyłoniła pewne zabiegi pozytywne, a także negatywne dla rozwiązania omawianego zadania, które można uznać jako zabiegi heurystyczne. Do pozytywnych zabiegów heurystycznych można zaliczyć trzy poniższe sposoby opanowania nieskończoności.

(1) Pierwszy z nich – opisany w przykładzie pierwszego podejścia, to jakby złagodzenie nieskończoności. Polega ono na stosowaniu zasady: jeśli zadanie wymaga rozważenia dwóch zmiennych, to najpierw rozwiązuje się zadanie przez ustalenie jednej ze zmiennych, a otrzymany wynik zmienia się uzmienniając tę stałą.

(2) Drugi sposób, zastosowany przez ucznia U_2 (przykład drugiego podejścia) jest oparty na następującym rozumowaniu: jeśli w rozważanym zbiorze par punktów weźmie się pary skrajnych punktów (w tym przypadku pary utworzone z końców odcinków danych) i dla nich znajdzie się środki, to te środki powinny być skrajnymi punktami konturu poszukiwanej figury.

(3) Trzeci sposób opanowania nieskończoności polega na tym, że

(a) rozwiązuje się zadanie w przypadku szczególnym, w którym znana jest metoda badania, znajdując poszukiwaną figurę F ,

(b) wskazuje się transformację geometryczną, dzięki której otrzymuje się ogólny przypadek ze szczególnego,

(c) jako rozwiązanie w przypadku ogólnym wskazuje się figurę, która jest obrazem F w wymienionej transformacji.

Dwie różne realizacje tego trzeciego sposobu zobaczyliśmy u matematyków.

Innym zabiegiem pozytywnym jest badanie empiryczne prowadzone w zorganizowany sposób – w omawianej sytuacji: ustalenie punktu na jednym odcinku. U wielu osób to badanie było prowadzone jednak chaotycznie, przez wybieranie jakichkol-

wiek punktów na danych odcinkach; utrudniało to, bądź wręcz uniemożliwiało odkrycie poszukiwanej figury. Właśnie niezorganizowaną empirię zaliczyć można do błędów heurystycznych.

4. Z dydaktycznego punktu widzenia musimy zwrócić uwagę na to, że błędzenia jako integralnej części pracy nad zadaniem nie powinno się oceniać negatywnie. Nasuwa się pytanie czy postępujemy słusznie, jeśli do tego błędzenia przy rozwiązywaniu zadania nie dopuszczamy, dając uczniowi od razu wskazówki, podsuwając strategie. Czy przypadkiem to chwilowe ułatwienie nie jest w swoich skutkach utrudnieniem, w tym sensie, że może nie doprowadzić do wypracowania przez ucznia własnych, ogólniejszych zasad heurystycznych?

Powinniśmy uczniowi pozwolić przeżyć rozwiązanie zadania, dopuszczając do indywidualnej pracy, do błędzenia. Następnie w dyskusji z całą klasą analizować próby rozwiązania, zastanawiać się, co pomogło, a co przeszkadzało w pracy nad zadaniem, by ostatecznie sformułować razem z uczniami pewne zasady heurystyczne. Gdyby na przykład - po indywidualnych próbach rozwiązania zadania - uczeń U_3 zapoznał się z rozwiązaniem zadania odkrytym przez jego kolegę, ucznia U_2 (uczniowie U_2 i U_3 byli rzeczywiście uczniami tej samej klasy jednego z krakowskich liceów), i na odwrót, to doświadczenie zdobyte przez tych uczniów byłoby o wiele głębsze niż wtedy, gdyby nauczyciel dał a priori wskazówkę: rozważ skrajne punkty. Błędzenie i poszukiwanie trzeba przeżyć, by mniej i racjonalnie błędzić.

Tezy heurystyczne a posteriori, oparte na rzeczywistym doświadczeniu ucznia, powinny stanowić istotny element doświadczenia matematycznego.

Literatura związana z problemami heurystyki jest już dzisiaj ogromna. W spisie literatury wymieniamy te pozycje, które wydają się ściśle związane z przedstawioną problematyką.

Literatura

- Audibert, G. (1984), *Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane*, Publication de l'A.P.M.E.P., N° 56, Vaudrey - Lyon.
- Balk, G.D. (1971), *Application of heuristic methods to the study of mathematics at school*, Educational Studies in Mathematics, Vol. 3, N° 2, Dordrecht - Holland.
- Brink, J. (1981), *Mutual observation, For the learning of mathematics*, Vol. 2, number 2, FLM Publishing Association, Montreal, Canada.

- Brown, I.S. (1985), Problem-solving and teacher education; the humanism twist models and muddles, Studies in mathematics education, Vol. 4, Unesco.
- Ciosek, M. (1978), Dydaktyczne problemy związane ze strategiami stosowanymi w rozwiązywaniu zadań matematycznych, Rocznik Naukowo-Dydaktyczny, zeszyt 67, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.
- , (1986), Elements of mathematical reasoning: first stage of a research, Proceedings of the 37th CIEAEM Meeting, State University of Utrecht.
- Góralski, A. (1977-1984), Zadanie, metoda, rozwiązanie. Techniki twórczego myślenia, WNT, Warszawa.
- IREM de Strasbourg (1973), Le Livre du problème, fascicule 2, Cedic, Lyon-Paris.
- Kantowski, M.G. (1977), Processes involved in mathematical problem solving, Journal for Research in Mathematics Education, USA.
- Kilpatrick, J. (1982), What is a problem?, Problem Solving.
- Kozielecki, J. (1966), Zagadnienia psychologii myślenia, PWN, Warszawa.
- Krygowska, Z., Ciosek, M. (1973), Quelques remarques sur le comportement des élèves concernant les problèmes mathématiques, Educational Studies in Mathematics, Vol. 3, N° 2, Dordrecht-Holland.
- Krygowska, Z. (1977), Zarys dydaktyki matematyki, część 1, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.
- , (1977), Zarys dydaktyki matematyki, część 3, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.
- Lakatos, I. (1976), Proofs and Refutations, Cambridge University Press.
- Lester, F.K. (1982), Methodological Considerations in research on mathematical problem - solving instruction, Research in Mathematics Education, USA.
- Polya, G. (1964), Jak to rozwiązać? PWN, Warszawa.
- , (1975), Odkrycia matematyczne, WNT, Warszawa.
- Puszkini, B. (1970), Heurystyka, Książka i Wiedza, Warszawa.
- Schoenfeld, A.H. (1979), Explicit heuristic training as a variable in Problem - solving performance, Journal for Research in Mathematics Education, vol. 10, Nr 3.
- , (1982a), Measures of problem - solving performance and of problem - solving instruction, ibidem, vol. 13, Nr 1.
- , (1982b), Psychological factors affecting students' performance on geometry problems, Proceedings of the Fourth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Athens, Georgia.

- Wolfson, P. (1981), Philosophy enters the mathematics classroom, For the Learning of Mathematics, vol. 2, Nr 1, FLM Publishing Association, Montreal, Canada.
- Woodworth, R.S., Schlosberg, H.* (1963), Psychologia eksperymentalna, tom II, PWN, Warszawa.

COMPARISON OF SEARCH METHODS FOR A SOLUTION OF A CERTAIN PROBLEM,
AT DIFFERENT LEVELS OF MATHEMATICAL EXPERIENCE

Summary

The paper presents research results on the solving process of a mathematical problem. Using the mutual observation method, 47 subjects at different levels of mathematical experience were examined while solving the following problem: For any complanar line segments a and b find the set of centres of the line segments XY such that X and Y belong to a and b , respectively.