

KAZIMIERA SKAŁUBA

Skawina

Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wzrznego

STOSOWANIE PRZEZ UCZNIÓW WZORU ALGEBRAICZNEGO

1. UWAGI WSTĘPNE

Wprowadzanie uczniów w posługiwanie się symboliką literową, w szczególności w język wyrażeń i wzorów algebraicznych, wiąże się z pewnymi trudnościami ujawniającymi się w licznych błędach popełnianych w różnych działach matematyki szkolnej, na każdym stopniu nauczania. W szczególności błędy te występują w przekształceniach wymagających stosowania tożsamości algebraicznych.

W szkole podstawowej te trudności wyraźnie uwidaczniają się w tożsamościowym przekształcaniu wielomianów, w trakcie realizacji haseł programu związanych ze wzorami „skręconego mnożenia”; w szkołach średnich także występują one często przy tej okazji. Świadczy to o trudnościach uczniów w korzystaniu z wzorów w ogóle. Objawia się to np. przy dowodzeniu twierdzeń metodą indukcji matematycznej, wyznaczaniu ilorazu różnicowego funkcji, w stosowaniu tożsamości trygonometrycznych, w obliczaniu wyróżnika przy rozwiązywaniu równań kwadratowych z parametrem, w rozwiązywaniu układów równań, w badaniu monotoniczności funkcji itp.

Na przykład uczeń, mając do udowodnienia tożsamość $T(n): 1+3+\dots+(2n-1) = n^2$, zapisuje $T(n+1)$ jako: $1+3+\dots+(2n+1-1)=n^2+1$ i uważa, że implikacja $T(n)=n^2 \rightarrow T(n+1)=n^2+1$ stanowi podstawę do uzasadnienia wzoru. Mając daną funkcję $f(x)=2x^2+3$, wyraża $f(x+h)$ np. jako $2x^2+h+3$ albo $2(x^2+h^2)+3$, albo też $2(x+h)^2+(3+h)^2$. Wiąże się to z niejasnym rozumieniem zmiennej i niezdawaniem sobie sprawy z formalnych i syntaktycznych reguł, których prawidłowe stosowanie decyduje o poprawności zapisów.

W niniejszym artykule przedstawiono fragment szerszych badań, w których analizowano trudności i błędy popełniane przez uczniów w stosowaniu tożsamości algebraicznych. W tym fragmencie ograniczono się do analizy pisemnych sprawdzianów dotyczących stosowania przez uczniów podanych im i nie znanych przez nich poprzednio wzorów. W tej sytuacji bowiem uczeń nie może korzystać z nabytych na-

wyków algorytmicznych, ćwiczonych na przykład przy opracowywaniu tzw. wzorów skróconego mnożenia, oraz praw działań, które może stosować automatycznie, nie myśląc o wzorze, z którego korzysta, i nie uświadamiając sobie podstawień za zmienne w tym wzorze. Oczywiście, takie zautomatyzowanie rachunku jest konieczne. Badanie, jak uczeń świadomie radzi sobie ze stosowaniem wzoru, wymaga jednak stworzenia takiej sytuacji wyłączającej automatyzm, w której uczeń musi wybrać wzór potrzebny do przekształcenia wyrażenia i świadomie go stosować. To właśnie było celem sprawdzianów, którym poddano wybrane grupy uczniów klas VIII szkół podstawowych oraz klas I i II szkół średnich.

2. USTALENIA TERMINOLOGICZNE

2.1. Wyrażenie, struktura wyrażenia, dziedzina

Ustalenia terminologiczne i definicje, które w dalszym ciągu formułuję, nie są przeznaczone do ich stosowania w tej samej formie w nauczaniu. Pewien stopień dokładności w określeniu niektórych terminów i zwrotów jest jednak konieczny dla uniknięcia nieporozumień w interpretacji analizy prac uczniów, która jest przedmiotem niniejszego artykułu.

W matematyce szkolnej używa się bardzo wielu różnych nazw i zwrotów, których się bliżej nie określa. Do takich nazw należą: wyrażenie, wzór, tożsamość, równość. Sens tych terminów wyjaśnia się na konkretnych przykładach lub w określeniach nie zawsze precyzyjnych. W szkole mówimy, że

$$2x + 1, \quad (x + 2)^2, \quad \frac{a^2 - 1}{a - 1}, \quad \sin 2\alpha, \quad \log x + \log y,$$

to wyrażenia zawierające odpowiednio zmienne x , a , α , x i y .

Oblicza się „wartości takich wyrażeń” dla „danych wartości zmiennych”, mówi się o zbiorze liczb, dla których dane wyrażenie ma wartość liczbową (dziedzinę). Terminu „wyrażenie” używa się w sensie planu operacji, przepisu wskazującego, jak należy obliczyć pewną liczbę, gdy dane są inne liczby (wartości zmiennych).

Dla ucznia więc wyrażenia: $(x+2)^2$ i $x^2 + 4x + 4$ są to różne plany działań, a więc różne wyrażenia.

W pierwszym przypadku do liczby przyjętej jako wartość x trzeba najpierw dodać liczbę 2, następnie podnieść do kwadratu otrzymaną sumę, w drugim do kwa-

dratu liczby przyjętej jako wartość x należy dodać jej czterokrotność i liczbę 4. Operatywne rozumienie słowa „wyrażenie” odróżnia znaczenie tego terminu od znaczenia terminu „funkcja”. Wymienione wyżej przykładowo wyrażenia to różne „przepisy” określające tę samą funkcję:

$$F : x \rightarrow (x+2)^2 \text{ w } R,$$

$$F : x \rightarrow (x^2+4x+4) \text{ w } R.$$

Wyrażenia $\sin 2\alpha$ i $2 \sin\alpha \cos\alpha$ to także różne przepisy (wyrażenia) określające tę samą funkcję

$$f : x \rightarrow \sin 2\alpha \text{ w } R,$$

$$f : x \rightarrow 2 \sin\alpha \cos\alpha \text{ w } R.$$

W szczególnym przypadku, gdy w wyrażeniu występują tylko znaki czterech działań arytmetycznych (w tym potęgi o wykładniku naturalnym), w szkole mówi się, że jest to wyrażenie algebraiczne, np. $2a + 3$, $x^2/(x^2+1)$, $(x+3)(y^2+7x+8)$, x^3-y^3 - to wyrażenia algebraiczne.

Zapis wyrażenia i jego odczytywanie podlega pewnym konwencjom odnoszącym się do kolejności, w jakiej mają być wykonywane operacje przewidziane w planie. Ważną rolę pełnią konwencje używania i odczytywania nawiasów.

Werbalną nazwę wyrażenia uczeń powinien kojarzyć z ostatnią operacją przewidzianą planem, np. $(x+y)^2$ to kwadrat sumy, ale x^2+y^2 to suma kwadratów.

Podstawiając w miejsce zmiennej w danym wyrażeniu pewne wyrażenia, otrzymujemy nowe wyrażenie, w którym wystąpić mogą inne zmienne. Na przykład, podstawiając w wyrażeniu: „ $a^2 + b^2$ ” w miejsce „ a ” wyrażenie „ $a + 1$ ”, w miejsce „ b ” wyrażenie „ $2b + 3$ ”, otrzymamy wyrażenie: „ $(a+1)^2 + (2b+3)^2$ ”, podstawiając natomiast w miejsce „ a ” wyrażenie „ $x + \frac{1}{2}$ ”, w miejsce „ b ” wyrażenie „ $y - 1$ ” otrzymujemy wyrażenie „ $(x + \frac{1}{2})^2 + (y-1)^2$ ”.

Od tego wyrażenia możemy przejść z powrotem do wyrażenia „ $a^2 + b^2$ ” przez zastąpienie w zapisie „ $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2$ ” wyrażenia „ $x + \frac{1}{2}$ ” literą „ a ”, wyrażenia „ $y - 1$ ” literą „ b ”. W tym sensie mówimy, że wyrażenia „ $a^2 + b^2$ ” oraz „ $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2$ ” są wyrażeniami mającymi pewną wspólną strukturę (suma dwóch kwadratów).

2.2. Tożsamość

W publikacjach przeznaczonych dla szkoły podaje się mniej lub więcej ścisłe definicje tożsamości. Straszewicz ([16], str. 119) określa dla celów szkolnych tożsamość algebraiczną jako „... równanie, które jest spełnione dla dowolnych wartości zmiennych. O wyrażeniach znajdujących się po obu jego stronach mówimy, że są równe tożsamościowo...” Tożsamością w znaczeniu szerszym nazywa się równość prawdziwą dla wszystkich wartości zmiennych, dla których obie jej strony mają sens liczbowy, tj. przedstawiają określone liczby.

Tożsamość jest więc w sensie szerszym funkcją zdaniową postaci $W_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = W_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, przechodzącą w zdanie prawdziwe dla wszystkich układów wartości zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$ należących do wspólnej części $D_{1,2}$ dziedzin D_1 i D_2 wyrażeń W_1 i W_2 . Jeżeli W_1 i W_2 są wyrażeniami algebraicznymi, to $W_1 = W_2$ jest tożsamością algebraiczną.

Tak więc na przykład:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{w } R^2,$$

$$\frac{x^2-4}{x-2} = x + 2 \quad \text{w } R - \{2\},$$

to tożsamości algebraiczne.

2.3. Przekształcenie tożsamościowe

Straszewicz ([16], str. 119) definiuje przekształcenie tożsamościowe wyrażenia algebraicznego jako „zbudowanie wyrażenia równego mu tożsamościowo”. Odbyna się to na podstawie praw działań i wzorów, które są tożsamościami algebraicznymi.

Będziemy używać, zgodnie z tym szkolnym ujęciem, zwrotu „przekształcić tożsamościowo wyrażenie $W(y_1, y_2, \dots, y_m)$ według wzoru (tożsamości)

$$W_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = W_2(x_1, x_2, \dots, x_n)''$$

w następującym znaczeniu:

(1) dobrać takie podstawienia $f_i(y_1, y_2, \dots, y_m)$ za x_i dla $i=1, 2, \dots, n$, że

$$(a) \quad W(y_1, y_2, \dots, y_m) = W_1 [f_1(y_1, y_2, \dots, y_m), \dots, f_n(y_1, y_2, \dots, y_m)]$$

lub

$$(b) \quad W(y_1, y_2, \dots, y_m) = W_2 [f_1(y_1, y_2, \dots, y_m), \dots, f_n(y_1, y_2, \dots, y_m)] \text{ jest tożsamością;}$$

(2) wysnuć stąd wniosek, że

$$(a) \quad W(y_1, y_2, \dots, y_m) = W_2 [f_1(y_1, y_2, \dots, y_m), \dots, f_n(y_1, y_2, \dots, y_m)]$$

lub

$$(b) \quad W(y_1, y_2, \dots, y_m) = W_1 [f_1(y_1, y_2, \dots, y_m), \dots, f_n(y_1, y_2, \dots, y_m)] \text{ jest tożsamością.}$$

W przypadku (a) mówimy, że przekształciliśmy $W(y_1, y_2, \dots, y_m)$ na $W_2 [f_1(y_1, y_2, \dots, y_m), \dots, f_n(y_1, y_2, \dots, y_m)]$ tożsamościowo, stosując dany wzór od strony lewej ku prawej, w przypadku (b), że przekształciliśmy $W(y_1, y_2, \dots, y_m)$ na $W_1 [f_1(y_1, y_2, \dots, y_m), \dots, f_n(y_1, y_2, \dots, y_m)]$ tożsamościowo, stosując dany wzór od strony prawej ku lewej.

Oczywiście w toku tych operacji uwzględniamy dziedziny występujących w nich wyrażań.

Na przykład: przekształcenie tożsamościowe wyrażenia $(x + \frac{1}{y} + z^2)^2$ według wzoru $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ odbywa się w 3 etapach:

1° Zauważamy, że dokonując podstawień: $a/x + \frac{1}{y}$, b/z^2 w lewej stronie wzoru otrzymujemy wyrażenie $[(x + \frac{1}{y}) + z^2]^2$ tożsamościowo równe danemu nam do przekształcenia wyrażeniu, zatem $(x + \frac{1}{y} + z^2)^2 = [(x + \frac{1}{y}) + z^2]^2$ jest tożsamością.

2° To samo podstawienie do danego wzoru prowadzi do tożsamości

$$[(x + \frac{1}{y}) + z^2]^2 = (x + \frac{1}{y})^2 + 2(x + \frac{1}{y})z^2 + (z^2)^2.$$

3° Z 1° i 2° otrzymujemy tożsamość:

$$(x + \frac{1}{y} + z^2)^2 = (x + \frac{1}{y})^2 + 2(x + \frac{1}{y})z^2 + (z^2)^2.$$

Przekształcono w ten sposób tożsamościowo wyrażenie $(x + \frac{1}{y} + z^2)^2$ na wyrażenie $(x + \frac{1}{y})^2 + 2(x + \frac{1}{y})z^2 + (z^2)^2$, stosując dany wzór od strony lewej do prawej.

Aby przekształcić tożsamościowo wyrażenie $x^6 + 4x^5 + 4x^4$ według tego samego wzoru, musimy go zastosować od strony prawej do lewej:

1° Zauważamy, że dokonując podstawień: a/x^3 , $b/2x^2$, w prawej stronie wzoru otrzymamy wyrażenie tożsamościowo równe danemu nam do przekształcenia wyrażeniu, a zatem: $x^6 + 4x^5 + 4x^4 = (x^3)^2 + 2x^3 \cdot 2x^2 + (2x^2)^2$ jest tożsamością.

2° To samo podstawienie do danego wzoru daje tożsamość:

$$(x^3)^2 + 2x^3 \cdot 2x^2 + (2x^2)^2 = (x^3 + 2x^2)^2.$$

3° Z 1° i 2° otrzymujemy tożsamość: $x^6 + 4x^5 + 4x^4 = (x^3 + 2x^2)^2$. Przekształcono w ten sposób wyrażenie $x^6 + 4x^5 + 4x^4$ tożsamościowo na wyrażenie $(x^3 + 2x^2)^2$, stosując dany wzór od strony prawej ku lewej.

Polecenie przekształcenia tożsamościowego danego wyrażenia według danego wzoru wypowiada się w szkole rozmaicie. W szczególności często stosuje się polecenie: „wykonaj działanie” np. $(2x + 3)^2$, $(4x - 1)(4x + 1)$. Zgodnie z milczącą konwencją, w szczególności, gdy zadanie następuje po wyprowadzeniu wzoru, znaczy to „przekształć tożsamościowo wyrażenie $(2x + 3)^2$ według znanego ci wzoru $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ”, „przekształć tożsamościowo $(4x+1)(4x-1)$ według wzoru $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ”.

Zamiast terminu „tożsamość” używa się w szkole terminów „równość”, „równość dwóch wyrażeń”.

We wzorze zapisanym symbolicznie zmienną przedstawia litera lub inny znak graficzny, np. tak zwane okienko „ $\square$ ” lub „ $\bigcirc$ ”;

$$(\square + \bigcirc)^2 = \square^2 + 2 \cdot \square \cdot \bigcirc + \bigcirc^2.$$

Tożsamość może być sformułowaniu również werbalnie. Zmienna jest wtedy wyrażona zwykle jednym słowem lub zespołem słów. Na przykład, w napisanej symbolicznie tożsamości: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ zmienne oznaczają litery x , y . Ten sam wzór może być wypowiedziany w postaci: „kwadrat sumy dwóch wyrażeń jest równy sumie kwadratów tych wyrażeń i podwojonego ich iloczynu”.

W tym sformułowaniu zmienną oznacza termin „wyrażenie”; występują tu dwie zmienne: „jedno wyrażenie”, „drugie wyrażenie”. W innym twierdzeniu podanym słownie, rolę zmiennej pełnić mogą słowa: „składnik sumy”, „czynnik iloczynu”, „podstawa potęgi” itp.

W każdej poznawanej przez ucznia tożsamości zmienne powinny być wyraźnie wyróżnione.

W dalszym ciągu koncentrujemy naszą uwagę przede wszystkim na tożsamościach algebraicznych.

2.4. Rozumienie struktury wyrażenia, wspólnej struktury dwóch wyrażeń, stosowanie tożsamości

Wyjaśnić trzeba, jaki sens nadajemy zwrotom: „rozumienie struktury wyrażenia algebraicznego”, „rozumienie wspólnej struktury dwóch wyrażeń”, „umiejętność stosowania tożsamości”, przy czym to wyjaśnienie powinno mieć charakter operatywny dla obserwatora zachowań uczniów i analizy ich prac pisemnych.

Przyjmuję, że uczeń rozumie (rozpoznaje) strukturę wyrażenia algebraicznego, jeżeli zdaje sobie sprawę z wymienionych w nim zmiennych, stałych i działań oraz – co bardzo istotne – jest w pełni świadomy kolejności działań przewidzianych planem w zapisie wyrażenia.

Przyjmuję, że uczeń rozpoznaje pewną wspólną strukturę w dwóch wyrażeniach, jeżeli dostrzega możliwość przejścia od jednego z nich do drugiego przez odpowiednie podstawienia za zmienne. Rozpoznawanie wspólnej struktury wyrażeń zawężam tą umową w prowadzonych badaniach tylko do tego znaczenia „rozpoznawania struktury”.

Przyjmuję, że uczeń umie poprawnie zastosować tożsamość algebraiczną, jeżeli:

(a) W przypadku, gdy wzory, którymi rozporządza, są zapisane symbolicznie:

- uświadamia sobie strukturę wyrażenia algebraicznego, które ma przekształcić i umie rozpoznać pewną wspólną strukturę w dwóch takich wyrażeniach, co się przejawia w wyborze wzoru, którego zastosowanie prowadzi do bezpośredniego wykonania przekształcenia tożsamościowego danego wyrażenia;

- umie ten wzór wykorzystać zarówno z lewej strony ku prawej, jak i na odwrót, co się przejawia w poprawnym doborze podstawień za zmienne występujące we wzorze i dokonaniu poprawnego podstawienia do samego wzoru.

(b) W przypadku, gdy tożsamość jest podana uczniowi w postaci słownej, umie on dokonać analizy tekstu werbalnego, dostrzec, że wyrażenie zapisane symbolicznie, dane mu do przekształcenia, ma strukturę opisaną w tym tekście oraz wykorzystać tę tożsamość do poprawnego przekształcenia tego wyrażenia, podobnie jak opisano wyżej.

3. METODA PRACY

W ramach omawianego w niniejszym artykule fragmentu badań stosowano analizę prac uczniów poddanych specjalnym pisemnym sprawdzianom. W trakcie pisania sprawdzianów, które przeprowadzano osobiście, w obecności nauczyciela uczącego ma-

tematyki w danej klasie, obserwowano uczniów, notowano ich pytania, pytano o uzasadnienie wyboru twierdzenia albo podstawienia. Wykorzystano te uwagi w analizie rozwiązań zadań.

Badania właściwe poprzedzono próbą zastosowaną do 28 uczniów klasy I liceum na początku roku szkolnego oraz 89 uczniów klas III. W badaniach właściwych, mając do wyboru szkoły jednego rejonu, w obrębie którego mogłam wykonywać badania oraz chcąc wziąć pod uwagę różnicowanie szkół ze względu na ich stopień organizacyjny, a także w przypadku szkół średnich - ze względu na profil kształcenia, jak również brać pod uwagę różnicowanie ze względu na staż pracy nauczycieli prowadzących zajęcia dydaktyczne z matematyki w badanych klasach, wybierano szkoły celowo, nie losowo.

Do przeprowadzenia sprawdzianów w klasach ósmych wybrano 12 szkół:

(a) w Krakowie: dwie duże szkoły w centrum miasta, dwie małe na krańcach miasta, jedną szkołę ćwiczeń, jedną dużą szkołę na nowym osiedlu;

(b) poza Krakowem: dwie Zbiorcze Szkoły Gminne w miastach, trzy Zbiorcze Szkoły Gminne na wsiach, jedną małą szkołę podstawową na wsi.

Łącznie w tych szkołach badano uczniów 14 klas, w sześciu z nich uczyli nauczyciele z wyższym wykształceniem matematycznym.

Do przeprowadzenia sprawdzianu w klasach II i III szkół średnich wybrano 14 szkół:

(a) w Krakowie: trzy licea ogólnokształcące i dwa technika o trzech różnych kierunkach kształcenia, jedno liceum zawodowe (dwie klasy);

(b) poza Krakowem: trzy licea ogólnokształcące w miastach, trzy technika, jedno liceum zawodowe (dwie klasy).

Łącznie pisało sprawdzian 305 uczniów klas VIII i 600 uczniów szkół średnich.

Dokonano przeglądu wszystkich prac w celu zorientowania się, jakie typy błędów występują w korzystaniu z tożsamości i jakie ujawniły się trudności na poszczególnych etapach ich stosowania. Wyrażały się one w liczbach zadań, które nie były rozwiązywane, lub częściowo albo błędnie rozwiązane.

Do szczegółowej analizy jakościowej i ilościowej wybrano część prac, a mianowicie w klasach VIII prace uczniów szkół krakowskich i trzech szkół gminnych (2 w miastach i 1 na wsi), ponieważ, jak wynikało z pierwszego przeglądu prac, w ogólności biorąc, uczniowie szkół gminnych popełniali stosunkowo więcej błędów i mieli większe trudności niż uczniowie szkół krakowskich. Przy wyborze szkół chodziło o to, by otrzymany obraz wyników nie był przejawiony ujemnie. Łącznie analizowano dokładnie sprawdziany 200 uczniów klas VIII. W sprawdzianach z pozostałych szkół powtarzały się te same błędy i występowały częściej niż w szkołach uwzględnionych w analizie.

Analizę prac uczniów szkół średnich ograniczono do prac z sześciu klas II i trzech klas III z 9 szkół: dwóch liceów i jednego technikum w Krakowie, trzech liceów, liceum zawodowego i dwóch techników w innych miastach. Łącznie analizowano prace 150 uczniów klas II i 50 uczniów klas III. Uczniów każdej z badanych klas podzielono na dwie grupy: I i II. Zaliczono ich do poszczególnych grup zgodnie z tym, jak na danej lekcji siedzieli przy stolikach. Uczniowie siedzący obok siebie mieli różne tematy sprawdzianów.

W klasach VIII średnia arytmetyczna ocen uczniów z matematyki za I semestr w grupie I wynosiła 3,66, w grupie II - 3,58, w szkołach średnich łącznie biorąc klasy II i III w grupie I odpowiednio 3,39, w grupie II - 3,37 (średnia arytmetyczna ocen w grupie uczniów klas II wynosiła 3,37, w grupie uczniów klas III - 3,4). Odchylenia standardowe od średniej ocen semestralnych w klasach V/VIII w grupach I i II różnią się o 0,0691, zaś w szkołach średnich o 0,0122. Grupy I i II uznano więc za dość bliskie ze względu na oceny semestralne.

Po dokonaniu dokładnej analizy sprawdzianów w wybranych klasach powrócono wyrywkowo do pominiętego w analizie materiału, aby sprawdzić, czy nie wystąpiły inne błędy i nie pojawiły się inne trudności uczniów, których w analizie nie uwzględniono. Nie napotkano nowych ich rodzajów. Pewne uwagi uczniów w pominiętych pracach, dotyczące stosowania wzorów, wykorzystano częściowo w analizie jakościowej.

4. TEMATYKA, KONSTRUKCJA I CELE SPRAWDZIANU

W przeprowadzonych sprawdzianach pisemnych postawiono uczniów w nietypowej dla nich sytuacji. Otrzymali listę nie znanych im wcześniej tożsamości, podanych symbolicznie, oraz 4 wyrażenia w klasach VIII i 3 w szkołach średnich do przekształcenia w oparciu o te tożsamości.

Wiadomo, że uczniowie popełniają liczne błędy w przekształceniach algebraicznych. Wiadomo także, że jedną z przyczyn tego stanu rzeczy jest często nieuwaga lub nawet pisanie byle czego, bez stosowania żadnych poznanych reguł. Nie można jednak pominąć innych źródeł takich błędów. Niejednokrotnie ich przyczyną nie jest nieuwaga, ale wyraźna nieumiejętność stosowania wzorów. W praktyce uczniowie, wykonując nawet poprawne przekształcenia algebraiczne, nie myślą często o wzorach. Automatycznie wykonują - jak już podkreślałam - przekształcenia według pewnych nawyków algorytmicznych (często błędnych). Oczywiście - uczeń nie zawsze musi myśleć o twierdzeniu, które stosuje w toku rachunku, jego czynności nie tylko mogą być, lecz nawet w dużej mierze powinny

być w tym zakresie zautomatyzowane. Jednak w praktyce uczniowie nie opanowują poprawnie i trwale algorytmów, popełniają więc błędy, które bardzo trudno jest wyeliminować, gdy nie rozumieją oni, nie znają lub nie umieją stosować twierdzeń, na których te algorytmy się opierają. Aby móc głębiej wniknąć w przyczynę błędu, trzeba to, co już zostało zmechanizowane, niejako „odautomatyzować”, a więc skłonić ucznia do refleksji nad tym co robi, przez odpowiednie sformułowanie zadania. W tym celu w prowadzonych badaniach żądało się od ucznia - między innymi - aby wyraźnie wskazał, który wzór w rachunku stosuje i jakich podstawień dokonuje za zmienne we wzorze.

W omawianym tu sprawdzianie chodziło o zbadanie umiejętności korzystania z nowych wzorów w sytuacji, gdy uczniowie mieli do wykonania kolejno:

- (1) wybór odpowiedniego wzoru spośród podanych w danej liście, który można wykorzystać w danym zadaniu;
- (2) dobór postanowień za zmienne występujące we wzorach;
- (3) dokonanie podstawień i ewentualne przekształcenie otrzymanych wyrażeń.

Chodziło o zbadanie trudności uczniów na poszczególnych etapach stosowania tożsamości. Podano uczniom przykład stosowania wzoru, z zapisem doboru podstawień i samego podstawiania.

Tematy zadań tak dobierano, by ucznia postawić w różnych sytuacjach, uwzględniając:

- stosowanie wzorów w dwóch kierunkach;
- różne układy znaków współczynników cyfrowych występujących w zadaniach jednomianów, aby zbadać rozumienie pojęcia sumy algebraicznej;
- różne wykładniki potęg;
- nawiasy;
- kolejność składników wielomianu różną od tradycyjnie zapisywanej.

Uczniowie otrzymali listę tożsamości i polecenie przekształcenia danych w sprawdzianie wyrażeń z zastosowaniem wybranego przez nich samych z tej listy wzoru. Podano im następujący schemat zapisywania podstawień:

$$\text{wzór: } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$\text{podstawienie: } a/2x, \quad b/y,$$

$$\text{zastosowanie: } (2x+y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot y + y^2 = 4x^2 + 4xy + y^2.$$

Oto zadania dla uczniów klas VIII:

Lista tożsamości:

Dla każdych liczb a, b, c, d zachodzą równości:

$$(1) \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(1) \quad (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac),$$

$$(2) \quad (a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(a+c),$$

$$(3) \quad (a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2+(ad+bc)^2,$$

$$(4) \quad (a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2,$$

$$(5) \quad a^4-b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3),$$

$$(6) \quad a^4-b^4 = (a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3),$$

$$(7) \quad (a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a),$$

$$(8) \quad (a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+bc+ad+bd+cd).$$

$$(9) \quad \text{Jeżeli } a \cdot b \geq 0 \text{ to } (a+b+\sqrt{2ab})(a+b-\sqrt{2ab}) = a^2+b^2.$$

Wyrażenia do przekształcenia:

G r u p a I

$$(I) \quad x^2+9y^2+16+6xy-24y-8x =$$

$$(II) \quad 16a^4-b^8 =$$

$$(III) \quad (9z^2+w^2)(v^2+4u^2) =$$

G r u p a II

$$(I) \quad x^3-27y^3+64+3(x-3y)(4-3y)(x+4) =$$

$$(II) \quad (3u-2w+5z-v^2)^2 =$$

$$(III) \quad (2k-1)(8k^3+4k^2l+2kl^2+l^3) =$$

nr wzoru	podstawienia	
	a	
	b	

5. ANALIZA WYNIKÓW SPRAWDZIANU

5.1. Rozpoznawanie struktury wyrażeń algebraicznych

5.1.1. Uwagi wstępne. Rozpoznawanie struktury wyrażenia algebraicznego i dostrzeżenie wspólnej struktury dwóch wyrażeń przed zastosowaniem tożsamości w ostatecznym rachunku wyraża się:

- w doborze odpowiedniej tożsamości do zastosowania w zadaniu;
- w doborze odpowiednich podstawień za zmienne występujące w wybranej tożsamości.

Te wybory mogą być zmieniane w toku próby podstawiania za zmienne. Zauważono, że uczeń czasem dopiero wtedy orientuje się, że wybrał wzór lub podstawienia błędnie i do tych czynności na nowo powraca. Wybierając z listy tożsamości wzór, według którego ma być przekształcone dane wyrażenie, najczęściej w początkowym etapie uczeń zadowala się powierzchownym porównaniem tego wyrażenia i jednej ze stron tożsamości. Dostrzega w wyrażeniu i w tożsamości te same potęgi, podobny układ nawiasów, tę samą ilość składników w wielomianie itp.

Było to widoczne podczas obserwacji uczniów w trakcie przeprowadzania sprawdzianów i rozmów z niektórymi z nich oraz w toku obserwowanych lekcji.

Na ogół w sprawdzianach zastosowanych w badaniach wzory i wyrażenia do przekształcenia były tak dobrane, by te pierwsze spostrzeżenia sugerowały uczniowi właściwy wybór. Powierzchnowe porównanie wyrażeń może jednak sugerować zarówno dobry, jak i błędny wybór, albo też stwierdzenia, że odpowiedniego wzoru nie ma, co może spowodować rezygnację z dalszego rozwiązywania zadania. Uczeń także czasem poprawnie wybiera wzór, ale nie umie z niego skorzystać, bo nie umie dobrać odpowiednich podstawień za zmienne.

5.1.2. Wybór tożsamości do zastosowania w zadaniu. W analizie doboru wzoru rozróżniono następujące sytuacje:

- poprawny albo błędny wybór wzoru,
- brak wyboru z danej listy, w tym stwierdzenia, że nie ma odpowiedniego wzoru.

W przypadku braku wyboru z danej listy, niektórzy uczniowie korzystali z innego wzoru albo szukali innej drogi, bez odwoływania się do wzoru, albo nie rozwiązywali zadania w ogóle.

Tabele T_1 i T_2 przedstawiają wybór wzoru.

T a b e l a T₁

Wybór wzoru w szkołach podstawowych

Grupa	I						II					
Zadanie	I _→	II _←	III _→	IV _←	Razem zadań	Stosunek do liczby wszystkich zadań	I _←	II _→	III _←	IV _→	Razem zadań	Stosunek do liczby wszystkich zadań
Wybór poprawny	57	57	61	42	217	54,3%	48	82	70	55	255	63,7%
Wybór błędny	17	2	0	1	20	5%	5	2	2	5	14	3,5%
Brak wyboru (*)	26 (15)	41 (7)	39 (8)	57 (6)	163 (36)	40,7% (9%)	47 (8)	16 (2)	28 (13)	40 (4)	131 (27)	32,8% (6,8%)
Razem	100	100	100	100	400	100%	100	100	100	100	400	100%

(*) - w tym stwierdzenia, że nie ma odpowiedniego wzoru (ilość w nawiasie);

→ - symbol zadania, w którym należało stosować tożsamość podaną na liście od strony lewej do prawej;

← - symbol zadania, w którym należało stosować podaną tożsamość od strony prawej do lewej.

T a b e l a T₂

Wybór wzoru w klasach II i III szkół średnich

Grupa	klasa	zadanie	wybór poprawny	wybór błędny	brak wyboru z danej listy(*)	Razem
I	II	I _←	49	2	24 (-)	75
		II _→	49	2	24 (1)	75
		III _→	60	1	14 (-)	75
		Razem	158	5	62 (1)	225
		% zadań w stos. do 225	70,2%	2,2%	27,6% (0,4%)	100%
I	III	I _←	22	-	3 (1)	25
		II _→	13	2	10 (2)	25
		III _←	23	-	2 (-)	25
		Razem	58	2	15 (3)	75
		% zadań w stosunku do 75	77,3%	2,7%	20% (4%)	100%
	Razem klasy II i III		216	7	77 (4)	300
	łączny % zadań w stosunku do 300		72%	2,3%	25,7% (1,3%)	100%
II	II	I _←	54	1	20 (-)	75
		II _→	59	-	16 (-)	75
		III _←	62	-	13 (2)	75
		Razem	175	1	49 (2)	225
		% zadań w stosunku do 225	77,8%	0,4%	21,8% (0,9%)	100%

T a b e l a T_2 cd.

Grupa	klasa	zadanie	wybór poprawny	wybór błędny	brak wyboru z danej listy (*)	Razem
II	III	I $\leftarrow$	24	-	1 (1)	25
		II $\rightarrow$	24	-	1 (-)	25
		III $\leftarrow$	23	-	2 (1)	25
		Razem	71	-	4 (2)	75
		% zadań w stosunku do 75	94,7%	-	5,3% (2,7%)	100%
	Razem klasy II i III		246	1	53 (4)	300
	łączny % zadań w stosunku do 300		82%	0,3%	17,7% (1,3%)	100%

(*) - w tym także: 1. korzystanie z innego wzoru,
2. stwierdzenia, że nie ma odpowiedniego wzoru (w nawiasie).

$\rightarrow$, $\leftarrow$ - symbole o znaczeniu takim, jak w tabeli T_1 .

Szkoły podstawowe

Prawie połowa uczniów (42-57) w 5 zadaniach (różnie w różnych zadaniach, łącznie biorąc grupa I i II) nie dobrała poprawnie wzoru, a więc rozpoznawanie i porównywanie struktury wyrażeń algebraicznych nie jest łatwe, gdy uczeń spotyka się z nie znanymi mu wcześniej wzorami. Wskazanie wzoru okazało się trafne w 59% zadań (800 zadań łącznie danych do rozwiązania przez obie grupy).

W poszczególnych zadaniach, zależnie od stopnia ich trudności i tego, w którą stronę należało stosować wzór, procent uczniów, którzy poprawnie wzór wybrali wahał się od 42 do 82.

Te dane mogłyby świadczyć o tym, że mimo pewnych trudności prawie połowa uczniów dobrze rozpoznaje „wspólną strukturę” dwóch wyrażeń algebraicznych. Jak wykaże dalsza analiza, jest to jednak oparte tylko na powierzchownej interpretacji wzoru, która zawodzi, gdy trzeba tę interpretację ukonkretnić przez odpowiedni dobór podstawień. W dalszym ciągu symbole $\rightarrow$, $\leftarrow$, zapisywane przy numerze zadania, mają to samo znaczenie jak w tabeli T_1 i T_2 .

W grupie I wystarczyło tylko porównać pierwsze wyrażenie dane do przekształcenia z pierwszym wzorem listy, mimo to tylko 57% uczniów wybrało wzór poprawnie. Kłopot sprawił znak „minus” wewnątrz nawiasu, prawie połowa badanych nie uświadomiła sobie, że wyrażenie $a-b$ można traktować jako sumę $a + (-b)$. W zadaniu II_← trudność stanowiła potrzeba stosowania wzoru od strony prawej ku lewej, ale mimo tej trudności więcej niż połowa uczniów wskazała właściwy wzór, odczytując go w tym kierunku. Stosunkowo najlepiej dobierano wzór w zadaniu III_→ ($81 - y^4 = \dots$), gdzie uczeń widział wyraźnie różnicę i czwartą potęgę w drugim składniku. Najtrudniejszy okazał się wybór w zadaniu IV_← [$4x^2 + y^2 + 9 + 2(2xy - 3y - 6x) = \dots$], gdzie kumulowały się dwie trudności: stosowanie wzoru od prawej strony do lewej oraz znaki „-” wewnątrz nawiasu.

W grupie II w zadaniu I_← ($8 + 12k + 6k^2 + k^3 = \dots$) wybór okazał się najtrudniejszy, chociaż znowu wystarczyło porównać dane do przekształcenia wyrażenie tylko z pierwszym wzorem na liście. Wystąpiło tu jednak stosowanie wzoru od strony prawej ku lewej, a ponadto nie od razu widać było podobieństwo struktury pierwszych trzech składników do ich odpowiedników po prawej stronie wzoru.

W zadaniu II_→ w tej grupie wybór był najłatwiejszy ($64y^3 - 27z^3 = \dots$), wyrażenie ma strukturę taką, jak lewa strona jednego ze wzorów, łatwo rozpoznać ze względu na ilość składników, znak i wykładniki potęg, chociaż i tak 16 uczniów nie rozpoznało wspólnej struktury obu rozważanych wyrażeń.

Zadanie III_← [$(4x+5y)^2 + (4y-5x)^2 = \dots$] również ma łatwą do powierzonego porównania z prawą stroną wzoru (7) postać (nawiasy, kwadraty, odpowiedniość znaków).

W zadaniu IV_← wybór okazał się dość trudny, wyrażenie ma strukturę prawej strony ostatniego wzoru [$(3+y)(27-9y+3y^2-y^3) = \dots$].

Błędny wybór twierdzeń wystąpił w 4,3% łącznej liczby 800 zadań, danych do rozwiązania, ale w 36,7% zadań wcale nie dobrano wzoru, a więc w 41% zadań uczniowie nie umieli dobrać wzoru. Najwyraźniej wystąpił błędny wybór w zadaniu I_→ w grupie I [$(3x - \frac{1}{4}y)^3 = \dots$], gdzie 17 uczniów wybierało wzór na różnicę sześcianów dwóch wyrażeń, uzasadniając wybór (w rozmowie lub zapisując go w kilku przypadkach na arkuszu), że w temacie występuje znak „-” i potęgę trzecią. Widoczny jest tu brak powiązania struktury wyrażenia z kolejnością działań zaznaczoną w zapisie nawiasem.

W zadaniu III_→ w grupie I ($81-y^4 = \dots$) nie było błędnego wyboru z podanej listy wzorów, ale trzech uczniów dopisało sobie wzór:

$$(a-b)^4 = a^4 - 2ab + b^4.$$

Jeden z nich z tego wzoru skorzystał, utożsamiając wyrażenie $81 - y^4$ z $(81-y)^4$. W tym przypadku stwierdzamy znowu niewłaściwe odczytanie kolejności działań. Część uczniów nie dostrzegła potęgi czwartej w pierwszym składniku.

W zadaniach, w których należało stosować tożsamość od strony lewej do prawej, wybór okazał się łatwiejszy. Wiąże się to częściowo z nawykiem jednokierunkowego odczytywania wzoru tylko od lewej strony do prawej.

W 7,9% wszystkich 800 zadań uczniowie stwierdzili, że nie ma odpowiedniego wzoru. Uwidoczniło się to najwyraźniej w zadaniu I_→ w grupie I $[(3x - \frac{1}{4}y)^3 = \dots]$ oraz w zadaniu III_← w grupie II $[(4x + 5y)^2 + (4y - 5x)^2 = \dots]$. W zadaniu III_← część uczniów nie widziała w jednomianach: $4x$, $5y$, $4y$, $5x$ iloczynów, lecz pojedyncze składniki a, b, c, d i szukała wzoru: $(a+b)^2 + (a-b)^2 = \dots$ a takiego nie było. W zadaniu I_→ część uczniów zmieniła temat, aby go „dopasować” do wzoru. Zastępowano więc dane wyrażenie $(3x - \frac{1}{4}y)^3$ wyrażeniem $(3x + \frac{1}{4}y)^3$, bo wzór $(a+b)^3 = \dots$ „nie nadawał się” do zastosowania w przekształceniu wyrażenia $(3x - \frac{1}{4}y)^3$. Obserwujemy tu znowu brak rozumienia sumy algebraicznej.

Część uczniów stwierdziła, że „we wzorach jest pełno błędów”, gdy dostrzegła, że struktura wyrażenia danego do przekształcenia nie była wiernym odbiciem struktury wyrażenia z lewej lub prawej strony wzoru, głównie z powodu niezachowania tego samego układu znaków. (Warto zauważyć, że również kilku nauczycieli w tych przypadkach pytało czy nie brakuje tu odpowiednich wzorów.)

W zadaniu IV_← w grupie I $[4x^2 + y^2 + 9 + 2(2xy - 3y - 6x) = \dots]$ uczeń stwierdził: „... druga połowa zadania się nie zgadza” i nie rozwiązał zadania, bo nie mógł dostrzec „tego samego” w wyrażeniach $ab + bc + ac$ i $2xy - 3y - 6x$, wobec różnicy w znakach. Inny uczeń, który nie rozwiązał tego zadania, stwierdził: „Byłby drugi wzór, gdyby nie minusy na końcu”. Obie te wypowiedzi świadczą o nierozumieniu sumy algebraicznej. Niektórzy uczniowie szukali innego wyjścia, „tworzyli” nowe, błędne wzory, przez analogię do innych, znanych. W zadaniu I_→ w grupie I np. zapisano wzór: $(a-b)^3 = a^3 - 2ab + b^3$.

Szkoły średnie

Procent uczniów, którzy wybrali wzór poprawnie, wahał się w poszczególnych zadaniach od 65,3 do 82,7 w klasach II oraz od 52 do 96 w klasach III. Ogółem w klasach II wybrano poprawnie wzory w 74% zadań, w klasach III w 86%. Uczniowie klas III lepiej radzili sobie z wyborem, z wyjątkiem zadania II_→ w grupie I ($16a^4 - b^8 = \dots$). I tu jednak, jak się okazało przy analizie

podstawień, te wszystkie wyniki nie świadczą jeszcze o właściwym rozumieniu struktury wyrażenia algebraicznego.

W grupie I w zadaniach I i II wybór okazał się trudniejszy niż w zadaniu III. W zadaniu I₊ ($x^2+9y^2+16+16xy-24y-8x = \dots$) należało stosować tożsamość (1) w odwrotną w stosunku do zapisu stronę, a ponadto w zapisie tożsamości liczba 2 była wyłączona poza nawias z trzech ostatnich składników. W tym zadaniu 27% uczniów nie wybrało wzoru wcale, 2% wybrało błędnie. W zadaniu II₊ ($16a^4-b^8$) wybór wzoru musiał poprzedzić dostrzeżenie w postaci wyrażenia różnicy czwartych potęg, a to okazało się trudne dla dużej części uczniów; tylko 62% uczniów wybrało wzór poprawnie.

W grupie II w klasach II zadanie III₊ okazało się najłatwiejsze w wyborze wzoru, uczniowie klas III nie mieli większych trudności w żadnym z zadań. W zadaniach I₊ i II₊ ujemne współczynniki jednomianów mogły utrudniać wybór uczniom młodszym.

Łącznie biorąc, nie dobrano w ogóle wzorów do 24,7% zadań rozwiązywanych przez uczniów klas II oraz do 12,7% zadań w klasach III, w tym w kilku przypadkach stwierdzono, że nie ma odpowiedniego wzoru. W siedmiu zadaniach w I grupie i jednym w II grupie wybrano wzór błędnie. W zadaniu II₊ w grupie II $[(3u-2w+5z-v^2)^2 = \dots]$ uczeń stwierdził: „... gdyby wszystkie znaki były dodatnie i nie było v^2 ale v , można byłoby zastosować wzór $[(a+b+c+d)^2 = \dots]$. Tę samą uwagę co do znaków odniósł do zadania I. Świadczy to znowu o niezrozumieniu sumy algebraicznej, a ponadto, w przypadku uwagi o v^2 , błędnym rozumieniu znaczenia symbolu we wzorze i możliwych za niego podstawień.

W 8 przypadkach na 600 zadań (a więc w 1,33% zadań) stwierdzono, że nie ma odpowiedniego wzoru. Ogólnie biorąc, trudności w wyborze wzoru w szkołach średnich były mniejsze niż w szkołach podstawowych.

5.1.3. Błędy popełniane w rozpoznawaniu struktury wyrażeń algebraicznych na etapie wyboru wzoru. W przeprowadzonych sprawdzianach uczniowie w większości albo wybrali wzór poprawnie, albo go w ogóle nie wybrali, więc błędów w wyborze wzoru nie było wiele. Można je zgrupować w trzy główne rodzaje:

- (a) utożsamianie n -tej potęgi sumy z sumą n -tych potęg jej składników;
- (b) utożsamianie struktury dwóch wyrażeń na podstawie częściowej tylko ich zgodności w zapisie symbolicznym;
- (c) inne, rzadko występujące.

Przykłady błędów typu (a) w szkołach podstawowych podano przy omawianiu błędnego wyboru wzoru. Oto przykłady błędów rodzaju (b):

- W zadaniu II₊ w grupie I $[(k+2l)(k^2-2kl+4l^2) = \dots]$ wybierano wzór

$a^4 - b^4 = (a+b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$, poprzestając na dostrzeżeniu iloczynu dwóch wyrażeń w nawiasach i stwierdzeniu podobieństwa pierwszego czynnika.

- W grupie II w zadaniu I $\leftarrow$ $(8+12k+6k^2+k^3 = \dots)$ wybierano wzór na kwadrat trójkątnu albo sześciąt trójkątnu, nie zwracając uwagi na dalszą część prawej strony wzoru, gdzie występują nawiasy i dostrzegając jedynie kwadraty albo sześciąty.

- W zadaniu IV $\leftarrow$ $[(3+y)(27-9y+3y^2-y^3) = \dots]$ wybierano wzór: $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$.

W szkołach średnich popełniano błędy typu (b) i (c).

Oto przykłady błędów typu (b):

- W zadaniu I $\leftarrow$ w grupie I $(x^2+9y^2+16+16xy-24y-8x = \dots)$ wybór wzoru: $(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+bc+ad+bd+cd)$.

- W zadaniu I $\leftarrow$ w grupie II $[x^3-27y^3+64+3(x-3y)(4-3y)(x+4) = \dots]$ wybór wzoru: $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a)$.

Do głównych przyczyn błędnego wyboru wzoru można zaliczyć:

- zbyt powierzchowne porównywanie struktury wyrażeń algebraicznych występujących w zadaniu i we wzorach do wyboru;
- niewłaściwe sugerowanie się znakami współczynników cyfrowych i wykładnikami potęg;
- nierozumienie lub nieświadomość sobie kolejności działań.

Gdy uczniowie klas VIII nie umieli wybrać wzoru, szukali niekiedy innych „dróg rozwiązania”, mianowicie dokonywali zapisu bez korzystania z jakiegokolwiek wzoru, wykonując np. mnożenie wielomianów, jeżeli takie występowało w temacie zadania, albo „tworzyli” nowe, błędne wzory, przez analogię do znanych. Do takich utworzonych przez fałszywe analogie należały:

$$(a-b)^3 = a^3 - 2ab + b^3, \quad \text{albo} \quad (a-b)^3 = a^3 - 3ab + b^3, \quad a^3 - b^3 = (a^2 - b^2)(a+b)$$

W szkołach średnich błędy tego typu wystąpiły tylko w zadaniu II w grupie I, gdzie zapisano w kilku przypadkach wzór: $(a-b)^4 = a^4 - 2ab + b^4$.

5.1.4. Dobór podstawień za zmienne występujące we wzorze. Przypomnijmy przyjęte określenie rozumienia wspólnej struktury dwóch wyrażeń: „Uczeń rozpoznaje pewną wspólną strukturę dwóch wyrażeń, jeżeli dostrzega możliwość przejścia od jednego z nich do drugiego przez odpowiednie podstawienia za zmienne”. Musi więc umieć dobrać wzór oraz odpowiednie podstawienia za zmienne. Ilościowe ujęcie doboru podstawień (wraz z danymi dotyczącymi operacji podstawiania, która będzie analizowana później), przedstawiają tabele: T_3, T_4, T_5 .

T a b e l a T₃

Podstawianie do wzoru w klasach VIII przy poprawnym wyborze wzoru

Zada- nie	Poprawnie dobiera podstawienia										Błędnie dobiera podstawienia								Nie dobiera podstawień, nie podstawia		Razem	
	podstawia				nie pod- stawia		razem		razem	podstawia		nie pod- stawia		razem		razem						
	poprawnie		błędnie																			
	Odp.	I	II	I	II	I	II	I		II	I	II	I	II	I		II	I	II	I	II	
I		21	42	7	-	-	-	28 _→	42 _←	70	24 (*) (16)	1 (1)	4	4	28	5	33	1	1	57 _→	48 _←	
II		36	17	2	9	2	2	40 _←	28 _→	68	10 (7)	49 (37)	2	4	12	53	65	5	1	57 _←	82 _→	
III		34	25	4	5	-	-	38 _→	30 _←	68	14 (10)	29 (19)	6	11	20	40	60	3	-	61 _→	70 _←	
IV	4	38	6	1	1	2	11 _←	41 _←	52	26 (19)	8 (5)	3	4	29	12	41	2	2	42 _←	55 _←		
razem	95	122	19	15	3	4	117	141	258	74 (52)	87 (62)	15	23	89	110	199	11	4	217	255		
	217		34		7		258			161		38		199			15		472			

(*) - liczby w nawiasach oznaczają ilość uczniów podstawiających „stosownie do wzoru”,

→, ← - kierunek stosowania wzoru.

T a b e l a T₄

Podstawianie do wzorów w szkołach średnich przy poprawnym wyborze wzoru (grupa I)

zadanie	Poprawnie dobiera podstawienia									Błędnie dobiera podstawienia									Nie dobiera podstawień		razem kl.II	razem kl.III
	podstawia poprawnie			nie podstawia błędnie		razem kl.II	razem kl.III	razem	podstawia poprawnie			nie podstawia błędnie		razem kl.II	razem kl.III	razem						
	kl.	II	III	II	III				II	III	II	III	II				III	II	III			
I	13	13	-	-	1	-	14	13	27	13	5	8	2	9	-	30	7	37	5	2	49	22
II	9	7	4	-	2	-	15	7	22	7	2	7	1	9	2	23	5	28	11	1	49	13
III	23	12	1	-	5	2	29	14	43	6	1	14	3	7	0	27	4	31	4	5	60	23
razem	45	32	5	-	8	2	58	34	92	26	8	29	6	25	2	80	16	96	20	8	158	58
	77		5		10		92			34		35		27		96			28		216	

T a b e l a T₅

Podstawianie do wzorów w szkołach średnich przy poprawnym wyborze wzoru (grupa II)

Zadanie	Poprawnie dobiera podstawienia									Błędnie dobiera podstawienia									Nie dobiera podsta- wień		razem kl.II	razem kl.III	
	podstawia popraw- nie			nie pod- stawia			razem kl.II	razem kl.III	razem	podstawia				razem	nie pod- stawia	razem kl.II	razem kl.III						
	popraw- nie		błęd- nie		razem					nie pod- stawia													
	II	III	II	III	II	III				II	III	II	III		II	III		II	III				
I _↑	20	19	1	-	1	-	22	19	41	14	2	5	-	21	13	2	32	4	36	-	1	54	24
II ₋	25	18	6	-	1	-	32	18	50	6	1	11	-	18	5	4	22	5	27	5	1	59	24
III _↑	31	5	3	2	3	2	37	9	46	1	2	9	5	17	7	4	17	11	28	8	3	62	23
ra- zem	76	42	10	2	5	2	91	46	137	21	5	25	5	56	25	10	71	20	91	13	5	175	71
	118		12		7		137			26		30			35		91			18		246	

Oto wyniki globalne doboru podstawień:

Procent zadań, w których poprawnie dobrano podstawienia w stosunku do:					
ilości zadań, w których dobrze wybrano wzór			ilości wszystkich zadań do rozwiązania		
Kl. VIII	kl. II	kl. III	kl. VIII	kl. II	kl. III
54,7	44,7	62	32,3	33,1	53,1

W sensie przyjętego kryterium rozumienia wspólnej struktury wyrażeń tylko w około 1/3 zadań uczniowie klas VIII i II oraz w ponad połowie uczniowie klas III dostrzegli wspólną strukturę wyrażeń występujących w sprawdzianie. Odniesienie ilości zadań, w których poprawnie dobrano podstawienia do ilości zadań, w których wzór dobrze wybrano, wskazuje najwyraźniej na trudności w samym doborze podstawień.

Szkoły podstawowe

Procent uczniów, którzy poprawnie dokonali doboru podstawień, w odniesieniu do ilości uczniów, którzy poprawnie wybrali wzór, wahał się w grupie I od 26,2% w zadaniu IV₊ do 70,1% w zadaniu II₊, w grupie II od 34,1% w zadaniu II₋ do 87,5% w zadaniu I₊.

W grupie I w zadaniu IV₊ $[4x^2 + y^2 + 9 + 2(2xy - 3y - 6x) = \dots]$ wyjątkową trudność sprawiły znaki „-”, 27% uczniów dobierających podstawienia nie uwzględniło tego znaku. W zadaniu I₊ $[(3x - \frac{1}{4}y)^3 = \dots]$ do najczęstszych błędów należało podstawienie $\frac{1}{4}y$ zamiast $(-\frac{1}{4}y)$. W zadaniu III₋ $(81 - y^4 = \dots)$ błędnie przedstawiano liczbę 81 w postaci czwartej potęgi.

W grupie II w zadaniu II₋ $(64y^3 - 27z^3 = \dots)$ wybór wzoru był najłatwiejszy ze względu na widoczną różnicę i wykładniki potęg, a dobór podstawień okazał się najtrudniejszy.

W zadaniu III₊ $[(4x + 5y)^2 + (4y - 5x)^2 = \dots]$ główną trudność sprawiły współczynniki cyfrowe, część uczniów nie umiała dostrzegać w nich jednego z czynników iloczynu, np.: $4x = 4 \cdot x$. Dobierano podstawienia: $a/4x$, $b/5y$, $c/4y$, $d/5x$.

Szkoły średnie

Procent uczniów, którzy poprawnie dobrali podstawienia w stosunku do liczby tych uczniów, którzy dobrze wybrali wzór, wahał się w grupie I od 35,5%

w zadaniu II_→ do 51,8% w zadaniu III_→, zaś w grupie II od 52,6% w zadaniu I_← do 60,2% w zadaniu II_→.

W grupie I w zadaniu II_→ ($16a^4 - b^8 = \dots$) trudność sprawiało przedstawienie jednomianów w postaci potęg, w zadaniu I_← ($x^2 + 9y^2 + 16 + 6xy - 24y - 8x = \dots$) oraz w grupie II w zadaniu I_← [$x^3 - 27y^3 + 64 + 3(x-3y)(4-3y)(x+4) = \dots$] trudność sprawiały znaki „-”. W doborze podstawień traktowano te wyrażenia, jakby występowały w nich tylko znaki „+”.

Porównując wyniki wyboru wzorów i doboru podstawień można stwierdzić, że na ogół łatwiej było uczniom poprawnie dobrać wzór niż tym samym uczniom dobierać podstawienia za zmienne. Ten etap był najtrudniejszy, co jest widoczne także w tym, że rzadko zdarzało się, by uczniowie poprzestawali na poprawnym doborze podstawień, nie rozwiązując zadania dalej. Ilość takich zadań wynosiła 2,7% w klasach VIII oraz 7,4% w szkołach średnich.

5.1.5. Uwagi końcowe o błędach w doborze podstawień za zmienne. Ilość błędów w doborze podstawień była wyraźnie większa od ilości błędów w doborze wzoru. Uczniowie, którzy dobrze wybrali wzór, dokonali tego wyboru czasami powierzchownie, bez głębszej analizy wyrażenia, i stąd mieli później trudności w doborze podstawień. Były też inne przyczyny, które znalazły odbicie w rodzajach wyszczególnionych błędów. W szkołach średnich uczniowie klas II popełniali stosunkowo więcej błędów niż uczniowie klas III. Dokonano podziału błędów w doborze podstawień na następujące rodzaje:

(1) Błędy polegające na niewłaściwym przedstawianiu jednomianów w postaci potęg, np.: w szkołach średnich w grupie I w zadaniu II_→ ($16a^4 - b^8 = \dots$) uczeń wybiera wzór $a^4 - b^4 = \dots$ i podstawia: $a/8a^2$, b/b^6 .

(2) Błędy polegające na podwójnym traktowaniu znaku „minus” w wyrażeniu typu $(a-b)$ - jako znaku współczynnika cyfrowego jednomianu i jednocześnie znaku odejmowania, np. w klasach VIII w grupie I w zadaniu III_→ ($81 - y^4 = \dots$) uczeń dobiera podstawienia: $a/3$, $b/4$ i podstawia do wzoru $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$ w sposób następujący:

$$81 - y^4 = [3 - (-y)] [3^3 + 9(-y) + 3(-y)^2 + (-y)^3].$$

(3) Traktowanie sumy algebraicznej zawierającej znaki „plus” oraz „minus” tak, jakby występowały w niej jedynie wszystkie znaki „plus” (przykłady podawano wcześniej) albo pomijanie „niewygodnego” znaku „-”.

(4) Podstawianie (w klasie VIII) wartości liczbowych do wzoru zamiast odpowiednich wyrażeń literowych, spowodowane niezrozumieniem sensu korzystania

ze wzoru w przekształcaniu wyrażenia, np. uczeń wybrał w zadaniu wzór: $(a+b)^3 = \dots$, zapisał $a=2$, $b=3$ i nie podstawiał.

(5) Podstawianie za zmienne występujące we wzorze wyrażen, które są składnikami lub czynnikami danego wyrażenia, lub samych tych wyrażen, bez ich przekształcenia, w wyniku czego otrzymuje się wyrażenie wyraźnie różne od danego, którego częścią składową jest wyrażenie dane do przekształcenia, np. w klasie VIII w grupie II w zadaniu II:

$$64y^3 - 27z^3 = (64y^3 - 27z^3) [(64y^3)^2 + 64y^3 \cdot 27z^3 + (27z^3)^2].$$

(6) Inne błędy.

Przyczyny tych błędów były już częściowo omawiane, powrócimy do nich w końcowej części artykułu.

5.2. Podstawianie za zmienne do wybranej tożsamości

5.2.1. Analiza wyników podstawiania. Podstawianie stanowi III etap stosowania tożsamości. Niektórzy uczniowie wśród tych, którzy poprawnie wybrali wzór i poprawnie dobrali podstawienia, napotkali trudności w samej operacji podstawiania. Na odwrót - byli tacy uczniowie, którzy dobrze wybrali wzory, ale źle dobrali podstawienia i mimo to poprawnie je wykorzystali w samym podstawianiu. Obie te sytuacje są uwzględnione w analizie dotyczącej błędów w samej operacji podstawiania.

Wyniki podstawiania ujęte są w tabelach T_3 , T_4 , T_5 . A oto globalne wyniki:

Procent zadań, w których poprawnie podstawiono w stosunku do:								
liczby zadań, w których dobrze dobrano podstawienia			liczby zadań, w których w ogóle dobrano podstawienia (poprawnie albo błędnie) i podstawiono			liczby wszystkich zadań do rozwiązania		
kl. VIII	II	III	kl. VIII	II	III	kl. VIII	II	III
84,1	81,2	92,5	72,4	56	75	27,1	26,9	49,3

Wydaje się, że przy poprawnym wyborze wzoru, po dokonaniu poprawnego albo błędnego doboru podstawień, a szczególnie poprawnego, które to etapy wymagają pewnego wysiłku intelektualnego, samo podstawianie do wzoru powinno być już tylko sprawą techniczną. Tak jednak nie jest, ponieważ część uczniów nie wykonała tego poprawnie.

Szkoły podstawowe

Zauważamy, że podstawianie do wzorów było łatwiejsze w sytuacji, gdy poprawnie dobrano podstawienia. Wynika to stąd, że uczniowie, którzy dobrze dobrali podstawienia, lepiej rozumieli strukturę wyrażenia algebraicznego, które przekształcali. Zestawiając globalne wyniki podstawiania z globalnymi wynikami doboru podstawień zauważamy dalej, że szczególnie trudny dla uczniów był dobór podstawień. Gdy uczeń przekroczył ten etap (poprawnie albo błędnie), na dalszym etapie już tylko mniej niż $1/3$ zadań zawierała błędy w samej operacji podstawiania.

Charakterystyczny jest fakt, że przy błędnym doborze podstawień w klasie VIII w 70,8% zadań, w których w tym przypadku podstawiano do wzoru, dokonano podstawień „zgodnie z wzorem”. To świadczy, że trudności w podstawianiu są mniejsze niż w doborze podstawień.

Wyraźnie trudniejsze w porównaniu z pozostałymi zadaniami było podstawianie w zadaniach $I_{\downarrow}$ i $IV_{\downarrow}$ w grupie I oraz $II_{\downarrow}$ i $III_{\downarrow}$ w grupie II, chociaż wybór twierdzeń w zadaniach II i III był najłatwiejszy. W zadaniu $I_{\downarrow}$ w grupie I $[(3x - \frac{1}{4}y)^3 = \dots]$ w samym podstawianiu uczniowie nie zawsze stosowali się do wybranego przez nich samego wzoru i dobranych podstawień za zmienne. (Zapisywali np. $(3x)^3 - (\frac{1}{4}y)^3$ przy wybranym wzorze na sześcian dwumianu albo podstawiali do niego $a/3x$, $b/\frac{1}{4}y$, choć dobrali $b/-\frac{1}{4}y$. W zadaniu $II_{\downarrow}$ w grupie II $(64y^3 - 27z^3 = \dots)$ występowały także zmiany w przyjętym poprawnie doborze podstawień, albo zapisywano podwojony iloczyn obu jednomianów wewnątrz drugiego nawiasu (wynik przyzwyczajenia uczniów przy obliczaniu kwadratu dwumianu).

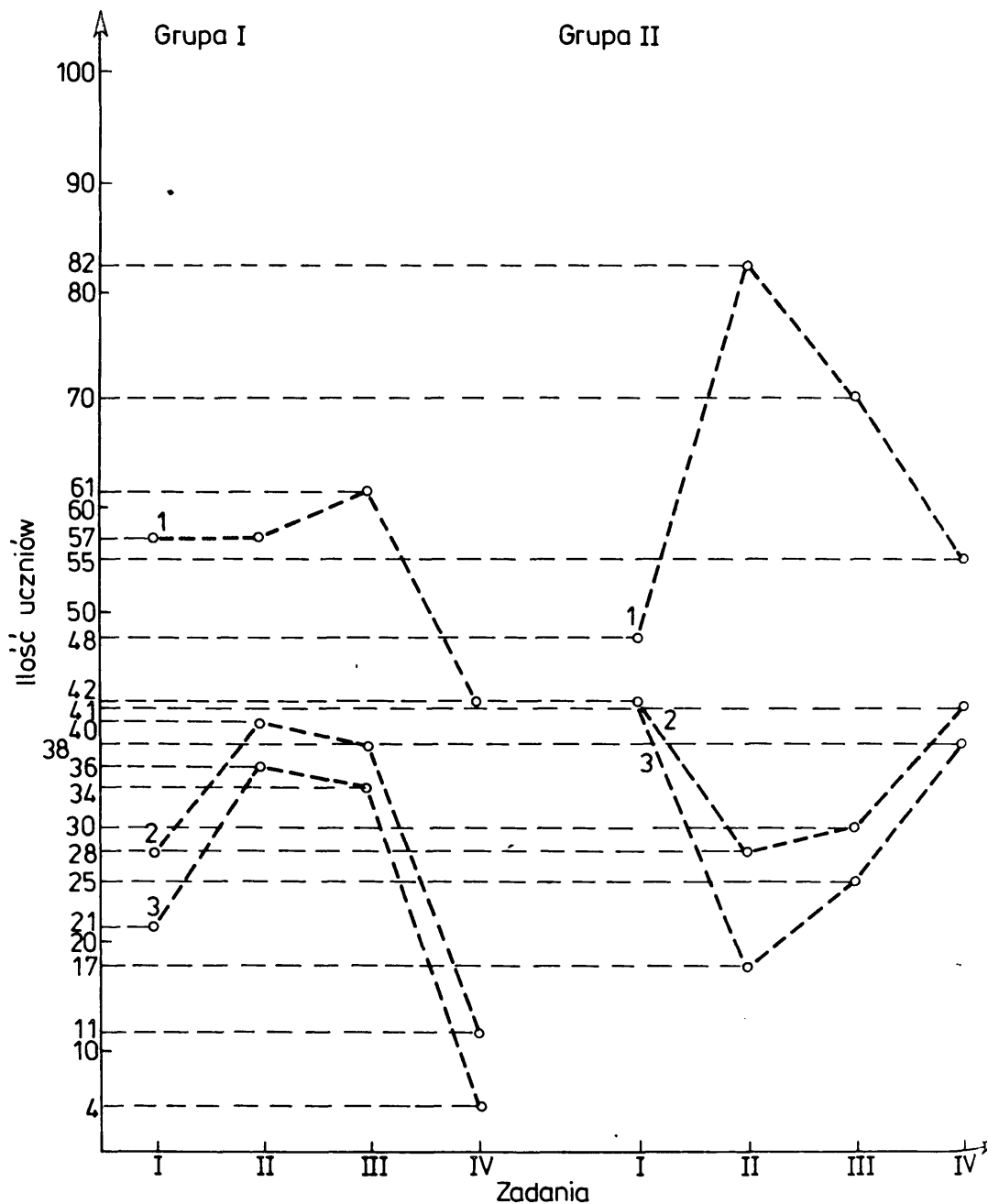
Załączone wykresy przedstawiają tę sytuację w odniesieniu do wzoru, doboru podstawień i podstawiania w poszczególnych zadaniach.

Jak stwierdziliśmy poprzednio, wybór wzoru, gdy trzeba go odczytać od strony prawej ku lewej, był dla uczniów trudniejszy niż wybór w odwrotnej sytuacji. Podstawienie w sytuacji pierwszej było jednak na ogół łatwiejsze. Np. jeżeli do przekształcenia wyrażenia $64y^3 - 27z^3$ uczeń wybrał wzór: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ i podstawienia: $a/4y$, $b/3z$, to dokonując tych podstawień po prawej stronie wzoru miał więcej okazji do popełniania błędów, niż gdyby w podobnym zadaniu stosował ten wzór w odwrotną stronę.

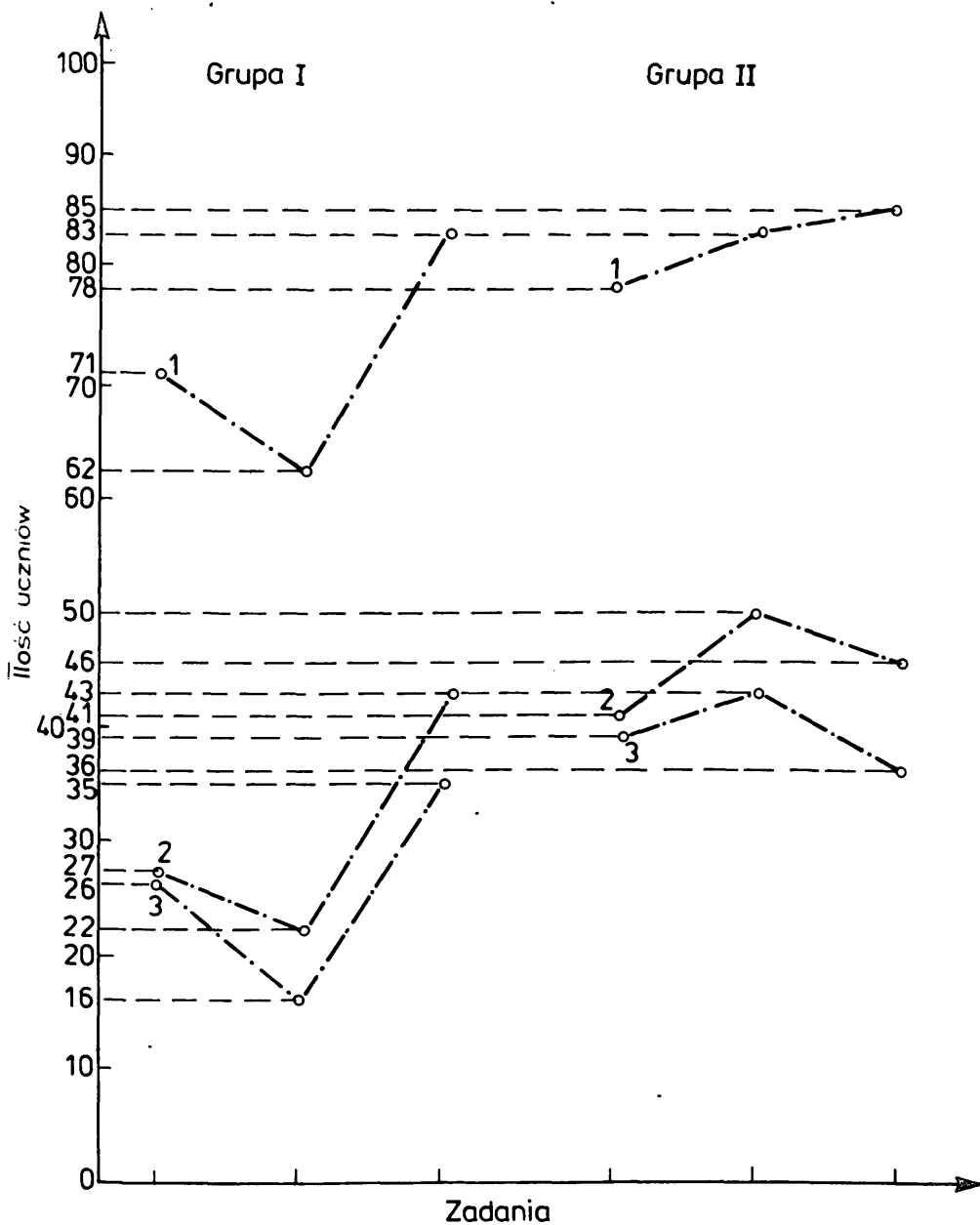
Szkoły średnie

Wyniki podstawiania do wzoru w szkołach średnich pokazują, że podstawianie jest etapem łatwiejszym od doboru podstawień. Zespół uczniów klas III

Porównanie ilości uczniów, którzy poprawnie wybierali wzór (1),
poprawnie dobrali podstawienia (2), poprawnie podstawiali,
wśród tych, którzy dobrze dobrali podstawienia (3) - w klasach VIII



Porównanie ilości uczniów, którzy poprawnie wybierali wzór (1),
poprawnie dobierali podstawienia (2), poprawnie podstawiali,
wśród tych, którzy poprawnie dobrali podstawienia (3) -
- w szkołach średnich



wyróżniał się wśród innych w umiejętności podstawiania; uczniowie ci mniej popełniali błędów niż uczniowie klas II (z wyjątkiem zadania III w grupie II). Biorąc pod uwagę wszystkie zadania łącznie, w których dobrano podstawienia (poprawnie albo błędnie), w 61,3% tych zadań (łącznie biorąc klasy II i III) poprawnie dokonywano podstawień.

Porównując procent zadań poprawnie rozwiązanych w odniesieniu do liczby zadań, do których poprawnie wybrano wzór, stwierdzamy, że wynosi on w klasach VIII 45,9%, w szkołach średnich 42,2%. Są to liczby zbliżone do siebie.

W analizie błędów popełnianych na III etapie stosowania tożsamości ograniczano się do błędów popełnianych istotnie w samym podstawianiu do wzorów. To, co następuje dalej, a więc poprawne albo błędne wykonywanie zapisanych działań, w zasadzie pomijano. Pomijano więc błędy w potęgowaniu jednomianu, w działaniach na potęgach i na liczbach rzeczywistych, błędy rachunkowe i inne. Uwzględniając wszystkie etapy stosowania tożsamości można dokonać zestawienia:

Etapy stosowania tożsamości		poprawny wybór wzoru	poprawny dobór podstawień w stosunku do ilości tych zadań, w których dobrze wybrano wzór	poprawne podstawianie w stosunku do ilości tych zadań, w których dobrze dobrano podstawienia	poprawne rozwiązanie do końca w stosunku do ilości wszystkich zadań danych do rozwiązania
kl. VIII	% zadań	59	54,7	84,1	27,1
szkoły średnie	% zadań	77	49,6	85,1	32,5

Procent zadań rozwiązanych poprawnie do końca jest stosunkowo mały.

5.2.2. Rodzaje błędów w podstawianiu i ich przyczyny. W samym podstawianiu do tożsamości uczniowie popełniali następujące błędy:

1. Niestosowanie się ściśle do wzoru, np. w szkole średniej w grupie I w zadaniu III₂ uczeń wybiera poprawnie wzór: $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$ do przekształcenia wyrażenia: $(9z^2+w^2)(v^2+4u^2)$ i zapisuje prawą stronę równości: $(3z-2u)^2 + (v+w)^2$.

2. Niepełne dokonywanie podstawień do dobrze wybranej tożsamości, np. w szkołach średnich w grupie II w zadaniu II₂ pominięcie części podwojonych iloczynów jednomianów sumy czterech składników.

3. Brak nawiasów prowadzący do dalszych błędów, albo błędne ich użycie, np. $(3x - \frac{1}{4}y)^3 = 3x^3 - 3 \cdot 3x^2 \cdot \frac{1}{4}y + 3 \cdot 3x \cdot \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}y^3 = 3x^3 - \frac{9}{4}x^2y + \frac{9}{4}xy^2 - \frac{1}{4}y^3$.

4. Nieprzestrzeganie przyjętego poprawnie doboru podstawień za zmienne, np. zmiana znaku współczynnika cyfrowego jednomianu w podstawieniu.

5. Inne.

Ilość błędów popełnianych w podstawianiu przy poprawnym wyborze wzoru i samych podstawień była mniejsza od ilości błędów w zadaniach, gdzie błędnie dobrano podstawienia. Większa jest przy tym ilość tych zadań, w których podstawiano „stosownie” do wzoru niż tych, w których podstawiano błędnie, przy błędnie dobranych podstawieniach.

Najogólniej ujmując przyczyny błędów w stosowaniu tożsamości na etapie podstawiania, można je scharakteryzować następująco:

- nieuważne (ponowne po wyborze wzoru) czytanie tożsamości, prowadzące do pominięcia niektórych elementów wyrażenia występującego we wzorze albo zmiany ich struktury;

- nieumiejętność budowy wyrażenia o podanej strukturze, szczególnie gdy części składowe tego wyrażenia nie są pojedynczymi literami, a występują w postaci bardziej złożonych wyrażeń algebraicznych;

- niedbałość w zapisie nawiasów, niewyczuwanie ich potrzeby;

- nieznanomość konwencji dotyczących kolejności działań lub nieuwzględnianie ich, nawet w przypadku gdy uczeń je zna.

5.3. Stosowanie tożsamości przez uczniów z ocenami dobrymi i bardzo dobrymi z matematyki

W analizie sprawdzianów wyróżniono wyniki uzyskane przez uczniów z ocenami dobrymi i bardzo dobrymi z matematyki za I semestr roku, w którym prowadzono badania. Wiadomo było z góry, że uczniowie ci uzyskują lepsze wyniki niż pozostali. Chodziło jednak o zbadanie, czy w rozwiązywaniu zadań, będących środkiem badania, napotykali oni te same, czy inne trudności, które ujawniły się w badaniach całych grup. W stosunku zatem do tego problemu wyniki osiągnięte przez uczniów z ocenami dobrymi i bardzo dobrymi stanowią jakby układ odniesienia do badań w całości.

S z k o ł y p o d s t a w o w e

Uczniowie z ocenami dobrymi i bardzo dobrymi za I semestr stanowili 48,5% wszystkich badanych (grupa I - 52%, grupa II - 45%). Wybór tożsamości i ich stosowanie w tej grupie uczniów przedstawia tabela T₆.

W I wierszu podano procent, jaki stanowi liczba uczniów z ocenami dobrymi i bardzo dobrymi, którzy poprawnie wzór wybrali, w stosunku do liczby wszystkich uczniów, którzy w danym zadaniu wybrali wzór poprawnie.

W II wierszu podano procent, jaki stanowi liczba uczniów z ocenami dobrymi i bardzo dobrymi, którzy poprawnie wybrali wzór, w stosunku do całej 100-osobowej grupy.

W III wierszu podano procent, jaki stanowi liczba uczniów z ocenami dobrymi i bardzo dobrymi poprawnie korzystających ze wzoru, w stosunku do liczby wszystkich uczniów, którzy poprawnie wybrali wzór i poprawnie z niego korzystali.

Tabela 1₆

zadanie	grupa I				grupa II			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV
wiersz								
I	61,4	57,9	67,2	73,8	58,3	48,8	57,1	61,8
II	35	33	41	31	28	40	40	34
III	80,9	77,7	85,3	100	57,1	58,8	56	63,2

Procent liczby uczniów, którzy poprawnie korzystali z tożsamości ujęty w wierszu III, znacznie przekracza 52% w grupie I i 45% w grupie II. Łącznie w grupie I wśród 217 zadań, w których wzór wybrano poprawnie (na 400 zadań) - 64,5% to zadania rozwiązywane przez uczniów z ocenami dobrymi i bardzo dobrymi, w grupie II na 255 takich zadań - 55,7% tej ilości. Rozpoznawanie i porównywanie struktury wyrażeń algebraicznych stanowi więc trudność nie tylko dla uczniów z ocenami dostatecznymi i słabszych.

Odpowiednio na 95 zadań w grupie I i 122 zadania w grupie II, w których poprawnie zastosowano wzory - 82,1% zadań w grupie I i 59% zadań w grupie II rozwiązywali ci uczniowie. Są to w obu przypadkach procenty wyższe niż 52% w grupie I i 45% w grupie II, co świadczy o tym, że uczniowie z ocenami dobrymi i bardzo dobrymi mieli ze stosowaniem wzorów mniejsze trudności niż pozostali uczniowie. Wyraźniej zaznacza się to w samym korzystaniu z wzorów niż w ich wyborze, choć widoczne jest w obu sytuacjach w każdym zadaniu.

Wśród tych, którzy poprawnie wybierali i poprawnie stosowali twierdzenia, wyraźnie wyróżnia się grupa uczniów dobrych i bardzo dobrych w zadaniu IV w grupie I $[4x^2+y^2+9+2(2xy-3y-6x)]$.

Łączna ilość zadań rozwiązanych poprawnie przez uczniów z ocenami dobrymi i bardzo dobrymi w odniesieniu do ilości zadań, które ci uczniowie mieli rozwiązać, wynosi 38,4%. Uczniowie z ocenami dostatecznymi i niedostatecznymi rozwiązyli poprawnie 16,5% zadań przypadających im do rozwiązania, a więc ponad 2 razy mniej. Uczeń z oceną dobrą lub bardzo dobrą, jeżeli już wybrał wzór dobrze, częściej umiał go zastosować niż uczeń słabszy.

Szkoły średnie

Uczniowie z ocenami dobrymi i bardzo dobrymi za I semestr stanowili 36% grupy I i 33% grupy II.

Wybór tożsamości i ich stosowanie przez tych uczniów przedstawia tabela T₇.

W wierszu I, II, III występują procenty uczniów, analogicznie jak w klasach VIII, wyszczególnione przed tabelą T₆.

T a b e l a T₇

zadanie	Grupa I			Grupa II		
	I	II	III	I	II	III
wiersz I	45	41,9	38,5	35,9	34,9	34,1
II	32	26	32	28	29	29
III	61,5	81,2	57,1	38,5	41,9	41,7

Procent uczniów z ocenami dobrymi i bardzo dobrymi, którzy poprawnie korzystali z tożsamości, wyraźnie przekracza 36% w grupie I i 33% w grupie II. Świadczy to, że także w szkołach średnich ten zespół uczniów lepiej radził sobie ze stosowaniem tożsamości od pozostałych uczniów. Uczniowie z ocenami dobrymi i bardzo dobrymi rozwiązyli poprawnie 46,9% zadań, które ten zespół miał do rozwiązania, podczas gdy uczniowie z ocenami dostatecznymi i niedostatecznymi - tylko 24,9%.

Podobnie jak w klasach VIII, uczniowie z ocenami dobrymi i bardzo dobrymi rozwiązyli więc prawie 2 razy więcej zadań, niż uczniowie z ocenami dostatecznymi i niedostatecznymi. Uczniowie ci mieli jednak w obu typach szkół trudności w rozwiązywaniu tych zadań, w których i pozostali uczniowie mieli największe trudności.

Świadczy to, że trudności w stosowaniu wzorów mają charakter głębszy, są związane z treścią matematyczną stosowanych tożsamości i przekształcanych wyrażeń.

6. WNIOSKI

6.1. Ogólne uwagi dotyczące najważniejszych wyników badań (trudności i błędy)

1. W przeprowadzonych badaniach uczniowie mieli trudności na każdym z etapów korzystania z tożsamości algebraicznych, w różnym stopniu na różnych etapach (wybór wzoru, dobór podstawień, podstawianie). Niektórzy uczniowie w sytuacji, gdy nie potrafili dobrać odpowiedniego wzoru, szukali fałszywych analogii ze znanymi wzorami, „tworząc” nowe, fałszywe twierdzenia i korzystając z nich.

2. Trudności w stosowaniu twierdzeń były większe niż w ich wyborze. Najwięcej trudności sprawiał uczniom dobór podstawień.

3. Procent zadań rozwiązyanych poprawnie do końca jest niski.

4. Trudności w rozpoznawaniu i porównywaniu struktury wyrażeń algebraicznych pogłębiają się, gdy przekształcenie wyrażenia wymaga stosowania tożsamości „w odwrotną stronę” niż jest zapisana.

5. Część wybranych poprawnie albo błędnie wzorów w ogóle nie była wykorzystana. Spośród tych, którzy nie przekroczyli pierwszego etapu (poprawny wybór wzoru), większość w ogóle wzoru nie wybrała.

6. Uczniowie, którzy za I semestr roku, w którym prowadzono badania, uzyskali oceny dobre i bardzo dobre z matematyki, lepiej radzili sobie ze stosowaniem tożsamości na kolejnych etapach, ale zasadnicze trudności mieli w tych zadaniach, w których i pozostali uczniowie mieli duże trudności.

Przewaga w poprawności stosowania tożsamości przez uczniów z ocenami dobrymi i bardzo dobrymi nad pozostałymi uczniami zaznacza się wyraźniej w stosowaniu twierdzeń niż w samym wyborze.

6.2. Uwagi dotyczące przypuszczalnych przyczyn trudności i błędów

Błędy popełniane przez uczniów w sprawdzianach, obserwacje lekcji, rozmowy z nauczycielami i uczniami, wskazują na bardzo prawdopodobne przyczyny istotnych trudności, jakie napotykają uczniowie w korzystaniu z wzorów, i tym samym w rachunku algebraicznym. Przyczyny trudności i błędów można by podzielić na 2 grupy:

1. Przyczyny głębsze, które stanowią także przyczyny innych błędów, popełnianych nie tylko w stosowaniu tożsamości, związane z samą materią matematyczną i jej opanowaniem oraz rozumieniem przez ucznia. Świadczą one o brakach w wiadomościach takich jak:

- niezrozumienie symbolu literowego, sensu zmiennej, związku umów dotyczących kolejności działań i użycia nawiasów ze strukturą wyrażenia algebraicznego;

- niepełne i nieoperatywne rozumienie tożsamości i znaku równości;
- schematyzm i dążność do sprowadzenia danej sytuacji do znanego stereotypu.

2. Przyczyny związane z postawą ucznia wobec zadania matematycznego. Należą do nich:

- brak uwagi, dyscypliny myślenia;
- powierzchowne uświadamianie sobie treści zadania i sformułowanego w nim polecenia;
- powierzchowne porównywanie struktury wyrażenia i jednej ze stron wzoru;
- wnioskowanie z porównania początkowych lub końcowych członów wyrażenia, nawiasów, ich ilości i potęg;
- brak nawyku do weryfikacji uzyskanego wyniku;
- lekkomyślność, pisanie „byle jak”.

Uzyskane wyniki mogą być podstawą do badań indywidualnych, w których można byłoby szukać bardziej wnikliwych odpowiedzi na pytanie, jakie trudności napotykają uczniowie na poszczególnych etapach stosowania tożsamości i jakie są ich przyczyny. Źródła trudności uczniów tkwią częściowo w wadach procesu dydaktycznego. Stwierdzono to w toku hospitacji lekcji, ale dokładne sprawozdanie z nich nie jest już objęte ramami tego artykułu.

W procesie dydaktycznym nie uwzględnia się dostatecznie wnikliwie możliwych trudności i błędów uczniów związanych z rozumieniem zmiennej, operacji podstawiania, uświadamianiem sobie struktury wyrażenia algebraicznego itp., co uwidoczniło się w rozwiązywaniu sprawdzianów.

Oczywiście - istnieją jeszcze inne powody trudności uczniów, niezależne od procesu dydaktycznego, np. związane z językiem symbolicznym matematyki.

Trudności te chyba można i trzeba cierpliwie i konsekwentnie od samego początku nauczania matematyki badać i pokonywać. Bardzo istotna jest przede wszystkim świadomość tych trudności, umiejętność zauważania ich przez nauczyciela i dobór odpowiednich środków metodycznych dla ich pokonywania.

Tymi problemami zajmuję się także w pracy doktorskiej, której fragment przedstawiony został w tym artykule.

LITERATURA

- [1] L. Bandura, Zagadnienie błędów uczniowskich, PZWS, Warszawa 1963.
- [2] A. Białas, Matematyka kl. VIII, WSiP, Warszawa 1976.
- [3] J. Dormolen, Didaktik der Mathematik, Vieweg, Braunschweig 1978.
- [4] S. Garczyński, Błąd, Źródła, Unikanie. Nasza Księgarnia, Warszawa 1973.
- [5] T. Kotarbiński, Sprawność i błąd, PZWS, Warszawa 1960.
- [6] Z. Krygowska, O niebezpieczeństwach formalizmu w nauczaniu algebry w szkole, Matematyka 4(42) (1956).
- [7] -, O poprawne rozumienie przez uczniów symbolu literowego w nauce algebry, ibidem, 4(37) (1955).
- [8] -, Przyczyny trudności i niepowodzeń uczniów w matematyce, ibidem 4(139) (1975).
- [9] -, Zmienne i warunki zdaniowe w matematycznym rozumowaniu dzieci, Oświata i Wychowanie nr 16, Wersja CiD (1975).
- [10] -, Zarys dydaktyki matematyki, Cz. I, WSiP, Warszawa 1979.
- [11] W. Mnich, O błędach w rozumowaniu uczniów, Matematyka 3(155) (1978).
- [12] W. Nowak, Wybrane zagadnienia metodologii badań dydaktyki matematyki, w: Dydaktyka matematyki, tom I, Podstawowe zagadnienia dydaktyki matematyki, PWN, Warszawa 1982.
- [13] G. Pippig, Psychologische Überlegungen zur Überwindung von Denkfehlern, Mathematik in der Schule 1(1977).
- [14] K. Skałuba, Charakterystyka błędów popełnianych przez uczniów w stosowaniu tożsamości algebraicznych na przykładzie wzorów skróconego mnożenia (praca doktorska), WSP, Kraków 1986.
- [15] A.A. Stolar, Pedagogika matematyki, Wyższej szkoły, Mińsk 1969.
- [16] S. Straszewicz, Arytmetyka i algebra w klasach V-VIII szkoły podstawowej, PZWS, Warszawa 1972.
- [17] E. Strzelecki, O niektórych typowych błędach w przekształceniach tożsamościowych i o sposobach ich zwalczania, Matematyka 1(80) (1964).
- [18] H.J. Vollrath, Didaktik der Algebra, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1974.

APPLICATION OF AN ALGEBRAIC FORMULA BY PUPILS

Summary

The article presents an analysis of written tests concerning the ability to apply by pupils of some algebraic identities, previously unknown to them. Three stages of this procedure were identified: choice of an identity, selection of substitutions for variables, and carrying out the substitutions.

The choice of an identity appeared generally easier when the identity was to be used to transform an expression from the left-hand to the right-hand side. On the contrary, in this case substituting to the identity was more difficult.

The choice of a substitution appeared to be the most difficult stage: some pupils were able to carry out correctly incorrectly chosen substitutions. The percentage of correctly solved questions was low.

The sources of pupils' difficulties and errors could be divided into two groups:

1. Deeper sources, which are causes of other errors, like:

- misunderstanding of the symbolic meaning of letters, the notion of a variable, and the relation of priority between the arithmetic operation and bracketing rules to the global structure of the arithmetic expression,
- incomplete and inoperative understanding of identity and the equality sign,
- schematicism and tendency to forcibly bring about a given situation to a familiar stereotype one.

2. Sources connected with the pupil's attitude to a mathematical problem.

These are:

- the lack of attention and discipline in thinking,
- superficial realization of the problem's content and the task to be done,
- superficial linking of the given expression to one side of the chosen identity,
- the lack of a habit to verify the results,
- recklessness, careless and sloppy writing.

Pupils' errors in algebra are partly generated by faults in the didactic process, and they are partly intrinsic to the symbolic language of mathematics. They should be patiently and continuously prevented and eliminated from the very beginning of teaching of mathematics.